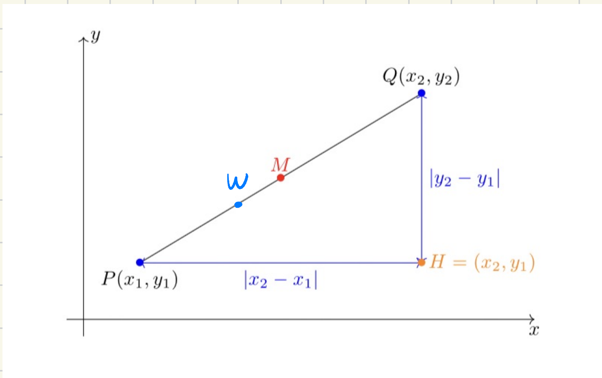
Geometria di Base e Rette

GEOMETRIA DI BASE

EQUAZIONE DEL SEGMENTO E PUNTO MEDIO

Sia dato un sistema di riferimento cartesiano e due punti $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$. Consideriamo il segmento PQ che congiunge P e Q.



Il segmento PQ può essere descritto mediante un'EQUAZIONE PARAMETRICA:

$$PQ = \{ (1-t)(x_1, y_1) + t(x_2, y_2) \; : \; t \in [0,1] \}$$

$$= \left\{ (1-t)\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-t)x_1 + t x_2 \\ (1-t) y_1 + t y_2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$W = \begin{pmatrix} x_W \\ y_W \end{pmatrix} \to t_W$$

Ad esempio, per $t=0$ otteniamo il punto P. Per $t=1$ otteniamo il punto Q. Per $0<t<1$ otteniamo un punto del segmento DISTINTO da P e Q.

Se scegliamo $t = 1/2$ otteniamo il PUNTO MEDIO M del segmento, che quindi ha coordinate

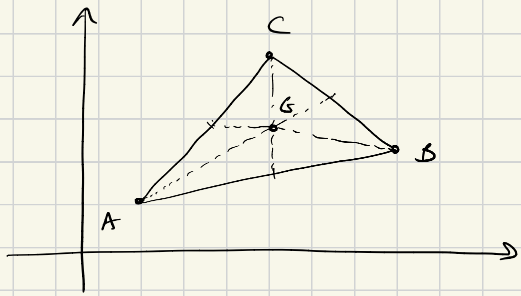
$$M = \frac{1}{2}(x_1, y_1) + \frac{1}{2}(x_2, y_2) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \; \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

• La MISURA del segmento AB, detta anche DISTANZA tra A e B o $d(A,B)$ è data da

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

BARICENTRO

Dati 3 punti $A=(x_1,y_1)$, $B=(x_2,y_2)$, $C=(x_3,y_3)$ del piano cartesiano, determiniamo le coordinate del loro BARICENTRO G. Il baricentro di 3 punti è anche il baricentro del triangolo che ha quei 3 punti come vertici, ovvero l'intersezione delle tre MEDIANE (segmenti che congiungono un vertice col punto medio del lato opposto)



Le coordinate $G = \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

ESEMPIO: Determiniamo il punto di ordinata 5 appartenente al segmento che congiunge i punti $\underbrace{(-3,3)}_{(x_1,y_1)}$ e $\underbrace{(3,6)}_{(x_2,y_2)}$

$$((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2)$$

Iniziamo determinare per quale valore di $t \in [0,1]$ l'ordinata del segmento è pari a 5

$$(1-t)y_1 + ty_2 = 5 \iff 3(1-t)+6t = 5 \iff t = 2/3 \to$$ A questo parametro corrisponde $x=1$

ESEMPIO: Siano dati i punti $P=(x_P, y_P)$ e $Q=(x_Q, y_Q)$. Determiniamo un punto $R=(x_R, y_R)$ sul segmento PQ tale che il rapporto tra la lunghezza di PR e quella di PQ sia uguale ad $r \in [0,1]$

$\Rightarrow$ Tutti i punti del segmento PQ sono della forma

$$\big(\underline{(1-t)x_P + t x_Q},\ \underline{(1-t)y_P + t y_Q}\big) \rightarrow \text{FORMA}$$

PURE R AVRÀ QUESTA

La lunghezza PQ sarà data

$$\sqrt{(x_Q-x_P)^2+(y_Q-y_P)^2}$$

La lunghezza di PR sarà

$$\sqrt{(x_R-x_P)^2+(y_R-y_P)^2} =$$

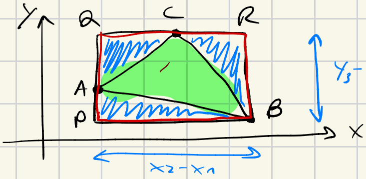
$$= \sqrt{\left((\cancel{1}-t)x_P + t x_Q - \cancel{x_P}\right)^2 + \left((\cancel{1}-t)y_P + t y_Q - \cancel{y_P}\right)^2}$$

$$= \sqrt{(-t x_P + t x_Q)^2 + (-t y_P + t y_Q)^2} = t\sqrt{(x_Q-x_P)^2+(y_Q-y_P)^2}$$

Il rapporto tra la lunghezza di PR e quella di PQ è esattamente t, per cui sarà sufficiente scegliere nell'equazione del segmento $t=r$ per ottenere il punto R desiderato

AREA DEL TRIANGOLO

Determiniamo l'area del triangolo di vertici $A=(x_1,y_1)$, $B=(x_2,y_2)$ e $C=(x_3,y_3)$ in funzione delle coordinate dei vertici. Per trovare una formula generale, disegniamo sul piano cartesiano il RETTANGOLO (con lati // agli assi x e y) tale che ogni vertice del triangolo appartenga ad almeno un lato del rettangolo



$P=(x_1, y_2)$

$Q=(x_1, y_3)$

$R=(x_2, y_3)$

$$\text{Area}(PQRB) = (x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = b \cdot h$$

$$\text{Area}(ACQ) = \frac{1}{2}|x_3 - x_1||y_3 - y_1| = \frac{1}{2}(x_3 - x_1)(y_3 - y_1)$$

$$\text{Area}(APB) = \frac{1}{2}|x_2 - x_1||y_2 - y_1| = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(y_1 - y_2)$$

$$\text{Area}(BRC) = \frac{1}{2}|x_3 - x_2||y_3 - y_2| = \frac{1}{2}(x_2 - x_3)(y_3 - y_2)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 < x_3 < x_3 \\ y_2 < y_1 < y_3 \end{array}}$$

$$\Rightarrow \text{Area}(ABC) = \text{Area}(PQRB) - \left(\text{Area}(ACQ) + \text{Area}(APB) + \text{Area}(BRC)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right)$$

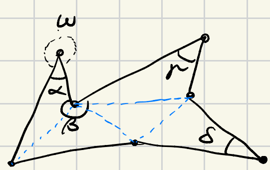
$$= \frac{1}{2}\left(x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - y_1 x_2 - y_2 x_3 - y_3 x_1\right)$$

FORMULA GENERALE: $\text{Area}(AB) = \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|$

$$= \frac{1}{2}\left|x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - y_1 x_2 - y_2 x_3 - y_3 x_1\right|$$

POLIGONI

Un POLIGONO è una FIGURA PIANA delimitata da una linea SEMPLICE SPEZZATA CHIUSA. I segmenti che compongono la linea spezzata sono detti LATI, i punti di intersezione di due segmenti consecutivi sono detti VERTICI.



Un poligono con n lati può essere DECOMPOSTO in n-2 TRIANGOLI

- la somma degli angoli interni di un poligono è uguale a $(n-2) \cdot 180°$

- La suddivisione in triangoli ci fornisce una formula dell'area del poligono dato le coordinate dei suoi vertici

LA RETTA

Una retta nel piano cartesiano è il luogo dei punti (x,y) che soddisfano un'equazione del tipo

$$ax+by+c=0 \qquad (\text{per certi } \underbrace{a,b}_{\neq 0},\, c \in \mathbb{R})$$

Per poter disegnare una retta, è sufficiente trovare due punti che vi appartengono: infatti dati due punti esiste un'unica retta che passa per essi.

$$x+2y-1=0 \Rightarrow \left(0, \tfrac{1}{2}\right), (1,0)$$

EQUAZIONE DELLA RETTA

Se consideriamo due punti $P=(x_1,y_1)$ e $Q=(x_2,y_2)$, l'equazione dell'UNICA retta passante per P e Q sarà data da

$$(y-y_1)(x_2-x_1) = (y_2-y_1)(x-x_1)$$

ESEMPIO: $P=\left(1, \frac{3}{4}\right)$, $Q=\left(0, \frac{1}{2}\right)$

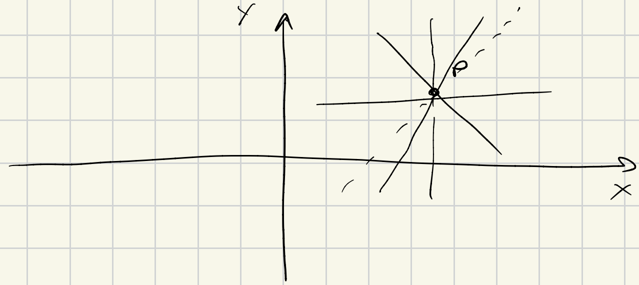
$$\Rightarrow \left(y-\tfrac{3}{4}\right)(0-1) = \left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{3}{4}\right)(x-1)$$

$$x-4y+2=0$$

FASCIO DI RETTE PER UN PUNTO

L'insieme di rette passanti per un determinato punto è detto FASCIO DI RETTE, ed il punto in comune è detto CENTRO del fascio. Dato $P=(x_1,y_1)$ l'equazione del fascio di rette passanti per P è

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$$



PARALLELISMO E PERPENDICOLARITÀ

- Due rette si dicono parallele (//) se non hanno punti in comune (parallele distinte) o se coincidono (parallele coincidenti)
  ⇒ Date due rette $a_1x+b_1y+c_1=0$ e $a_2x+b_2y+c_2=0$ esse sono // se e solo se $(a_1, b_1) = (ra_2, rb_2)$ per un opportuno numero reale r, oppure in maniera equivalente se

$$a_1b_2 = b_1a_2$$

- Due rette si dicono PERPENDICOLARI ($\perp$) quando sono incidenti e l'angolo da esse formato è retto ($90°$).

$$\iff a_1a_2 + b_1b_2 = 0$$

⇒ Date due rette parallele r_1, r_2, esse possono essere sempre espresse nella forma

$$r_1: \underline{a}x+\underline{b}y+c_1=0 \qquad r_2: \underline{a}x+\underline{b}y+c_2=0$$

$c_1=c_2$

$c_1 \neq c_2$

POSIZIONE RECIPROCA TRA RETTE

- // coincidenti, ovvero $r=s$
- // distinte, $r//s$, $r \neq s$
- incidenti, si incontrano in un solo punto
- perpendicolari

In generale, si considera il sistema di due equazioni (delle rette) nelle due incognite x, y

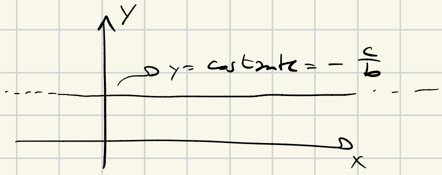
$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$$

Se:

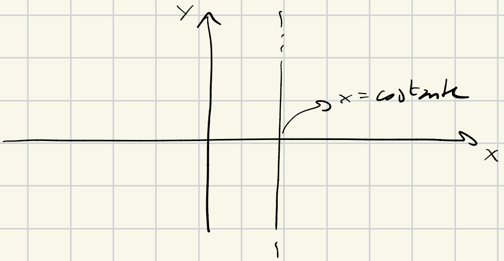
- NO soluzioni ⟹ le rette sono // e non coincidenti
- 1 soluzione ⟹ le rette sono incidenti (se $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0 \Rightarrow \perp$)
- ∞ soluzioni ⟹ le rette sono coincidenti

- Per certi valori di a, b, c la retta $ax+by+c=0$ verifica proprietà geometriche visualizzabili.

→ Se $a=0, b\neq 0$: l'equazione diventa $by+c=0 \rightarrow y = -\frac{c}{b}$
→ La retta è PARALLELA all'asse orizzontale



→ Se $b=0 \rightarrow ax+c=0 \rightarrow x = -\frac{c}{a} \rightarrow$ retta è // all'asse verticale



→ Se $c=0 \rightarrow ax+by=0 \rightarrow$ la retta PASSA PER L'ORIGINE