FATTORIZZAZIONI

FATTORIZZAZIONI

DIVISIONE TRA POLINOMI

Indicheremo con $M(x), L(x), R(x), Q(x)$ dei polinomi nell'indeterminata x.
Enunciamo il seguente il seguente TEOREMA FONDAMENTALE:

⇒ Siano $L(x)$ e $M(x)$ due polinomi nell'indeterminata x, con $M(x) \neq 0$. Allora esistono UNIVOCAMENTE DETERMINATI due polinomi $Q(x)$ (quoziente) e $R(x)$ (resto) tali che

1) $L(x) = M(x)Q(x) + R(x)$;

2) $R(x) = 0$ oppure $R(x)$ ha grado STRETTAMENTE MINORE di $M(x)$.

⇒ La DIVISIONE del polinomio $L(x)$ per il polinomio $M(x)$ restituisce un quoziente $Q(x)$ ed un resto $R(x)$ che o è 0 o altrimenti ha grado strettamente minore di quello del divisore $M(x)$. Inoltre quoziente e resto sono univocamente determinati

<u>ESEMPIO</u>: Si verifica facilmente che

$$x^4 - x + 2 = (x^2-3)(x^2+3) + (11 - x)$$

ovvero la divisione di $L(x) = x^4 - x + 2$ per $M(x) = x^2 - 3$ ha come quoziente $Q(x) = x^2 + 3$ e resto $R(x) = 11 - x$ (notiamo che il resto $R(x)$ ha grado 1, strettamente minore del grado del divisore $M(x)$ che è 2)

- <u>SCHEMA RISOLUTIVO PER LA DIVISIONE DEL POLINOMIO $L(x)$ PER IL POLINOMIO $M(x)$ IN UN'INDETERMINATA</u>

Assumiamo che il grado di $L(x)$ sia maggiore o uguale al grado di $M(x)$, altrimenti banalmente abbiamo $Q(x) = 0$, $R(x) = L(x)$, ovvero $L(x) = 0 \cdot M(x) + L(x)$ ed il grado di $L(x)$ (che è il resto) è strettamente minore di quello di $M(x)$

PASSO 1: Ordiniamo a sinistra di una riga verticale il dividendo $L(x)$ con le potenze dell'indeterminata ordinate in modo decrescente, e a destra della riga il divisore $M(x)$, sempre con le potenze ordinate in modo decrescente. Se alcune delle potenze dell'indeterminata sono mancanti, possiamo aggiungerle, moltiplicate per $\underline{0}$. Prendiamo ad esempio

$$L(x) = x^4 - x + 2 \quad ; \quad M(x) = x^2 - 3$$

$$x^4 + \underline{0 \cdot x^3} + \underline{0 \cdot x^2} - x + 2 \quad \Big\| \quad x^2 + \underline{0 \cdot x} - 3$$

PASSO 2: Dividiamo il termine del dividendo di grado massimo col termine di grado massimo del divisore, ed il termine ottenuto sarà il PRIMO TERMINE del quoziente, che riporteremo al di sotto del divisore nella nostra tabella

$$\begin{array}{l||l} x^4 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 - x + 2 & x^2 + 0 \cdot x - 3 \\ \hline & x^2 \end{array}$$

PASSO 3: Moltiplichiamo ciascun termine del divisore per il quoziente appena ottenuto, e riportiamo il risultato al di sotto del dividendo, incolonnando opportunamente le potenze dell'indeterminata

$$\begin{array}{l||l} x^4 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 - x + 2 & x^2 + 0 \cdot x - 3 \\ \cline{2-2} x^4 + 0 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 & x^2 \end{array}$$

PASSO 4: Sottraiamo dalla prima riga a sinistra (il dividendo) la seconda riga (Passo 3) ottenendo una quantità che sarà il primo RESTO PARZIALE

$$\begin{array}{r||l} x^4 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 - x + 2 & x^2 + 0 \cdot x - 3 \\ \cline{2-2} x^4 + 0 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 & x^2 \\ \cline{1-1} 3x^2 - x + 2 & \end{array}$$

PASSO 5: Si controlla se il resto parziale ottenuto ha grado strettamente minore del divisore o meno. Se il resto parziale ha grado maggiore o uguale di quello del divisore, allora si procede nella divisione finché non si otterrà un resto parziale di grado strettamente minore: ricominciamo il processo dividendo il termine di grado massimo del resto parziale per il termine di grado massimo del divisore, e riportiamo il risultato accanto al primo termine nella riga al di sotto del divisore (nel nostro esempio $3x^2 \div x^2 = 3$)

$$
\begin{array}{r||l}
x^4 + 0\cdot x^3 + 0\cdot x^2 - x + 2 & x^2 + 0\cdot x - 3 \\ \cline{2-2}
x^4 + 0\cdot x^3 - 3x^2 + 0x + 0 & x^2 + 3 \\ \cline{1-1}
3x^2 - x + 2 &
\end{array}
$$

PASSO 6: Moltiplichiamo il risultato della divisione appena effettuata per il divisore, e riportiamo il risultato al di sotto del primo resto parziale

$$
\begin{array}{r||l}
x^4 + 0\cdot x^3 + 0\cdot x^2 - x + 2 & x^2 + 0\cdot x - 3 \\ \cline{2-2}
x^4 + 0\cdot x^3 - 3x^2 + 0x + 0 & x^2 + 3 \\ \cline{1-1}
3x^2 - x + 2 & \\
3x^2 + 0\cdot x - 9 &
\end{array}
$$

PASSO 7: Effettuiamo la sottrazione tra le ultime due righe della colonna di sinistra, ottenendo il SECONDO RESTO PARZIALE

$$
\begin{array}{r||l}
x^4 + 0\cdot x^3 + 0\cdot x^2 - x + 2 & x^2 + 0\cdot x - 3 \\ \cline{2-2}
x^4 + 0\cdot x^3 - 3x^2 + 0x + 0 & x^2 + 3 \\ \cline{1-1}
3x^2 - x + 2 & \\
3x^2 + 0\cdot x - 9 & \\ \cline{1-1}
-x + 11 &
\end{array}
$$

PASSO 8: Il processo si itera finché, come nel caso dell'esempio, l'ultimo resto parziale ottenuto ha grado strettamente minore di quello del divisore. Allora l'ultimo resto parziale sarà il resto della divisione, mentre il quoziente sarà il risultato che abbiamo riportato nella riga al di sotto del divisore. In particolare nel nostro caso il resto è $-x+11$ ed il quoziente x^2+3, per cui

$$x^4-x+2=(x^2-3)(x^2+3)+(11-x)$$

Diremo che un polinomio $L(x)$ è DIVISIBILE per un polinomio $M(x)$ quando $R(x)=0$, ovvero quando l'algoritmo della divisione produce un resto nullo

$\Rightarrow$ In altre parole, $L(x)$ è divisibile per $M(x)$ quando esiste un polinomio $Q(x)$ tale che $L(x)=M(x)\,Q(x)$

RADICI DI UN POLINOMIO E DIVISIBILITÀ

TEOREMA DI RUFFINI

Un tipo particolare di divisione tra polinomi è quella tra un polinomio in una indeterminata $P(x)$ (di grado maggiore o uguale a 1) per un polinomio di grado 1 del tipo $(x-a)$, dove $a\in\mathbb{R}$

TEO: Sia $P(x)$ un polinomio nell'indeterminata x (di grado maggiore o uguale a 1) e sia $a\in\mathbb{R}$ un numero reale. Allora $P(x)$ è divisibile per $x-a$ SE E SOLO SE $P(a)=0$

$\Rightarrow$ Infatti, supponiamo che $P(x)$ sia divisibile per $(x-a)$: allora esiste $Q(x)$ tale che $P(x)=Q(x)\,(x-a)$. Ma allora $P(a)=Q(a)\,(a-a)=0$. Viceversa, supponiamo che $P(a)=0$. Esistono $r\in\mathbb{R}$, $r\neq 0$ ed un polinomio $Q(x)$ tale che $P(x)=(x-a)\,Q(x)+r$ (ricordiamo che il resto è 0 o è un polinomio di grado inferiore a quello del divisore, in questo caso quindi di grado 0, ovvero un numero). Ma allora $0=P(a)=Q(a)\,(a-a)+r=r \Rightarrow P(x)=(x-a)\,Q(x)$ è divisibile per $x-a$

⇒ Questo teorema è uno strumento essenziale per riconoscere se un polinomio è divisibile per un polinomio del tipo $x-a$

FATTORIZZAZIONE DI POLINOMI

È di fondamentale importanza in molti contesti (per risolvere equazioni e disequazioni) riuscire a FATTORIZZARE un polinomio, ovvero a scriverlo come PRODOTTO di fattori di grado più piccolo. Ad esempio, il polinomio

$$x^6 - x^5 - 2x^4 - 7x^3 - 11x^2 - 10x - 6$$

può essere riscritto come

$$(x^2+x+1)(x-3)(x+1)(x^2+2)$$

GENERALITÀ SULLA FATTORIZZAZIONE DI POLINOMI

Non è sempre semplice o immediato riconoscere i termini di una fattorizzazione

ESEMPIO: Non è possibile fattorizzare il polinomio $P(x)=x^2+1$ come prodotto di polinomi di ordine inferiore

→ Se ciò fosse possibile, allora x^2+1 si potrebbe esprimere come prodotto di due polinomi di grado 1, ovvero $P(x)=(x-a)(x-b)$ dove $a,b\in\mathbb{R}$. Ma allora, per quanto visto, $P(a)=0$ e $P(b)=0$, ma ciò non è possibile in quanto $P(x)=x^2+1\geq 1$ per qualsiasi valore di x

$\Downarrow$

Infatti x^2 è un numero sempre MAGGIORE O UGUALE a 0, e quindi x^2+1 sarà sempre MAGGIORE O UGUALE ad 1, in particolare non sarà MAI NULLO

⇒ Vi sono varie tecniche utili nella fattorizzazione di un polinomio (non esiste un metodo generale)

NUMERO DI RADICI

Dato un polinomio $P(x)$ di grado $n \geq 1$, una delle prime operazioni che bisogna cercare di svolgere è vedere se esso AMMETTE RADICI (o ZERI), ovvero se esistono dei reali $a \in \mathbb{R}$ tali che $P(a) = 0$. Se questo è il caso, allora $P(x)$ è divisibile per $(x-a)$, ovvero esiste un polinomio $Q(x)$ di grado $n-1$ tale che $P(x) = Q(x)(x-a)$

- Se un polinomio $P(x)$ è divisibile per $(x-a)^m$, allora diciamo che a è una radice di MOLTEPLICITÀ m

- Un polinomio $P(x)$ di grado n ammette AL PIÙ n radici (dove se una radice ha molteplicità m viene contata m volte). Infatti supponiamo che $P(x)$ ammetta $m > n$ radici $a_1, \dots, a_m$. Allora esiste un polinomio $Q(x)$ tale che

$$P(x) = Q(x)(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_m)$$

ma ciò non è possibile in quanto il grado di $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_m)$ è $m>n$ e quindi a maggior ragione il grado di $P(x) = Q(x)(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_m)$ è maggiore di n, cosa non possibile, poiché $P(x)$ ha grado n

RADICI RAZIONALI DI UN POLINOMIO A COEFFICIENTI INTERI

Un criterio per cercare le radici di un polinomio A COEFFICIENTI INTERI è il seguente: sia

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

un polinomio a coefficienti INTERI. Allora tutti gli zeri RAZIONALI di $P(x)$ vanno cercati tra le frazioni (ridotte ai minimi termini) $\frac{b}{c}$, dove b è un DIVISORE DI a_0, e c è un DIVISORE DI a_n

ESEMPIO: Fattorizziamo

$$P(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 - 4x - 6$$

Cerchiamo eventuali zeri di $P(x)$. Essi vanno cercati tra tutte le frazioni ridotte $\frac{b}{c}$ con b divisore di 6 e c divisore di 1 (quindi $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$). Sostituendo i possibili valori (8 in tutto) nell'espressione di $P(x)$ si può osservare che 3 e -1 la rendono nulla $(P(-1) = P(3) = 0)$

→ Questo implica che $P(x)$ è divisibile per $x-3$ e $x-(-1) = x+1$

→ A riprova di ciò, dividendo $P(x)$ per $x+1$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -2x^3 & -x^2 & -4x & -6 & x+1 \\ \cline{6-6}
x^4 & +x^3 & +0\cdot x^2 & +0\cdot x & +0 & x^3 - 3x^2 + 2x - 6 \\ \cline{1-5}
 & -3x^3 & -x^2 & -4x & -6 & \\
 & -3x^3 & -3x^2 & +0\cdot x & +0 & \\ \cline{1-5}
 & & 2x^2 & -4x & -6 & \\
 & & 2x^2 & +2x & +0 & \\ \cline{1-5}
 & & & -6x & -6 & \\
 & & & -6x & -6 & \\ \cline{1-5}
 & & & & 0 &
\end{array}$$

Abbiamo trovato quindi che

$$P(x) = (x^3 - 3x^2 + 2x - 6)(x+1)$$

→ Siccome $P(x)$ è divisibile per $(x-3)$, questo implica che $x^3 - 3x^2 + 2x - 6$ è divisibile per $x-3$. Si ripete l'operazione di divisione, trovando

$$x^3 - 3x^2 + 2x - 6 = (x^2+2)(x-3)$$

Dunque

$$P(x) = (x^2+2)(x-3)(x+1)$$

→ Il polinomio non può più essere ulteriormente scomposto in fattori, infatti x^2+2 NON AMMETTE RADICI essendo maggiore o uguale a 2 per ogni $x \in \mathbb{R}$

ALTRI METODI PER LA FATTORIZZAZIONE DI POLINOMI

⇒ Tra gli altri metodi per la fattorizzazione di un polinomio vi è, ad esempio, il RACCOGLIMENTO A FATTORE COMUNE

• Dato un polinomio $P(x)$ si determina il monomio FATTORE COMUNE a tutti i monomi che lo compongono. Allora $P(x)$ è dato dal prodotto del monomio fattore comune per il polinomio costituito dai monomi di $P(x)$ divisi ognuno per il monomio fattore comune

ESEMPIO: Sia $P(x) = \underbrace{12x^3 + 5xy}_{x \text{ FATTORE COMUNE}} + \underbrace{12x^2y + 5y^2}_{y \text{ FATTORE COMUNE}}$

→ Avremmo potuto agire diversamente

Qui abbiamo solo riscritto il polinomio cambiando l'ordine

$$P(x) = \underline{12x^3 + 12x^2y} + \underline{5xy + 5y^2}$$

$$\stackrel{!}{=} 12x^2(x+y) + 5y(x+y)$$

$$\stackrel{!}{=} (12x^2+5y)(x+y)$$

↳ Invece di raccogliere x e y, abbiamo raccolto $12x^2$ e $5y$

$$\to P(x) = x(12x^2+5y) + y(12x^2+5y)$$

Ora, i due termini che compongono $P(x)$ ammettono il fattore comune $12x^2+5y$ che possiamo raccogliere, ottenendo

$$P(x) = (12x^2+5y)(x+y)$$

⇒ Particolarmente utile nella fattorizzazione di un polinomio è riconoscere un PRODOTTO NOTEVOLE. In questo caso, il processo di fattorizzazione è l'INVERSO dello sviluppo di un prodotto notevole. Ad esempio

$$x^2-4 = x^2-2^2 = (x-2)(x+2)$$

In generale ogni volta che ci troviamo di fronte ad una DIFFERENZA DI QUADRATI di monomi, essa può essere riscritta come prodotto di due fattori: la somma per la differenza dei monomi

ESEMPIO: Determiniamo gli zeri razionali del polinomio $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 18x - 27$ e fattorizziamolo.

Come visto in precedenza, gli zeri razionali vanno cercati nell'insieme

$$\left\{ \pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm 27, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{9}{2}, \pm \frac{27}{2} \right\}$$

Sostituendoli al posto di x, si vede che $P(3) = P(-3) = P(-\frac{3}{2}) = 0$, mentre, per i restanti valori $P(x) \neq 0$. Per cui $P(x)$ è divisibile per $(x-3)$, $(x+3)$, $(x+\frac{3}{2})$.

Notiamo anche che

$$(x-3)(x+3)\left(x+\frac{3}{2}\right) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 9x - \frac{27}{2} = \frac{1}{2}P(x)$$

Dunque $P(x) = 2(x-3)(x+3)\left(x+\frac{3}{2}\right) = (x-3)(x+3)(2x+3)$

ESEMPIO: Sia $a \in \mathbb{R}$. Fattorizziamo $\underbrace{x^4 - a^4}_{①} \underbrace{+ 2ax^3 - 2a^3x}_{②}$. Notiamo che

$$①: \quad x^4 - a^4 = (x^2 - a^2)(x^2 + a^2)$$

$$②: \quad 2ax^3 - 2a^3x = 2ax(x^2 - a^2)$$

FATTORE COMUNE

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

Dunque

$$\begin{aligned} x^4 - a^4 + 2ax^3 - 2a^3x &= (x^2-a^2)(x^2+a^2) + 2ax(x^2-a^2) \\ &= (x^2-a^2)(x^2+a^2+2ax) \\ &= (x-a)\underbrace{(x+a)(x+a)^2}_{=(x+a)^3} \\ &= (x-a)(x+a)^3 \end{aligned}$$

QUADRATO DI BINOMIO

$= A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$

SOMME, PRODOTTI E FRAZIONI DI POLINOMI

Una frazione algebrica è un'espressione del tipo

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

Dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi nell'indeterminata x

SOMMA DI FRAZIONI

Siano $P_1(x), P_2(x), Q_1(x), Q_2(x)$ polinomi. Allora

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{P_1(x)Q_2(x) + P_2(x)Q_1(x)}{Q_1(x)\,Q_2(x)}$$

ESEMPIO: Calcoliamo $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-1} - \dfrac{x^2+1}{x-1}$

$$\frac{x^2+x+1}{x^2-1} - \frac{x^2+1}{x-1} = \frac{(x^2+x+1)(x-1) - (x^2+1)(x^2-1)}{(x^2-1)(x-1)} =$$

BASTA ESPLICITARE I CONTI

$$= \frac{x^3-x^4}{(x-1)(x^2-1)} = \frac{-x^3(x-1)}{(x^2-1)(x-1)} = -\frac{x^3}{x^2-1}$$

PRODOTTO DI FRAZIONI

Diamo anche una formula per il PRODOTTO di frazioni algebriche

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \cdot \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{P_1(x)\cdot P_2(x)}{Q_1(x)\cdot Q_2(x)}$$

Mentre il QUOZIENTE tra frazioni algebriche non è che la moltiplicazione per il RECIPROCO

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \div \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{P_1(x)\cdot Q_2(x)}{Q_1(x)\cdot P_2(x)}$$

⚠ Le regole appena viste valgono in generale per polinomi in un numero qualsiasi di indeterminate

SEMPLIFICAZIONE DI FRAZIONI

Data una frazione algebrica $\frac{P(x)}{Q(x)}$

essa può essere semplificata eliminando dal numeratore e dal denominatore i fattori comuni a $P(x)$ e $Q(x)$

- Siano $P(x)$ e $Q(x)$ polinomi, assumiamo che
$$P(x) = A(x)\cdot B(x)$$
$$Q(x) = A(x)\cdot C(x)$$

Con $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ polinomi. Allora

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A(x)\,B(x)}{A(x)\,C(x)} = \frac{B(x)}{C(x)} \quad \text{per tutti i valori di } x \text{ per cui } A(x)\neq 0$$

→ In pratica, una volta scomposti in fattori irriducibili (ovvero non più fattorizzabili) il numeratore e il denominatore, possiamo SEMPLIFICARE i fattori comuni ottenendo espressioni equivalenti per tutti i valori di x per cui i fattori semplificati NON SONO UGUALI A ZERO

ESEMPIO: Calcoliamo

$$\frac{x^2-4x+4}{x+3}\cdot\frac{x^2-9}{x-2} = \frac{((x^2-4x+4))\cdot(x^2-9)}{(x+3)(x-2)} = (x-2)^2\,(x-3)(x+3)$$

Se $x\neq 2$ allora

$$\frac{x^2-4x+4}{x+3}\cdot\frac{x^2-9}{x-2} = \frac{(x-2)(x-3)(x+3)}{x+3}$$

Se $x\neq -3$ allora

$$\frac{x^2-4x+4}{x+3}\cdot\frac{x^2-9}{x-2} = \frac{(x-2)^2(x-3)}{x-2}$$

E se $x\neq 2, -3$

$$\frac{x^2-4x+4}{x+3}\cdot\frac{x^2-9}{x-2} = (x-2)(x-3) = x^2-5x+6$$