Equazioni

Sia $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ dove $A \subseteq \mathbb{R}$

Un'equazione è un'espressione del tipo

$$f(x) = 0$$

obiettivo: trovare tutti i possibili $a \in A$ t.c.
$f(a) = 0$

trovare gli zeri

Che cos'è A? A è il dominio

Le soluzioni trovate devono appartenere necessariamente al dominio.

soluzioni: $S = \{a \in A : f(a) = 0\}$

se $S = \emptyset$, allora l'equazione si dice impossibile (non ha soluzioni).

ad. es. $x^2 = -4$ $\quad \emptyset$

Il dominio dipende dalla forma di $f(x)$

- frazioni $\quad \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0 \qquad g(x) \neq 0$

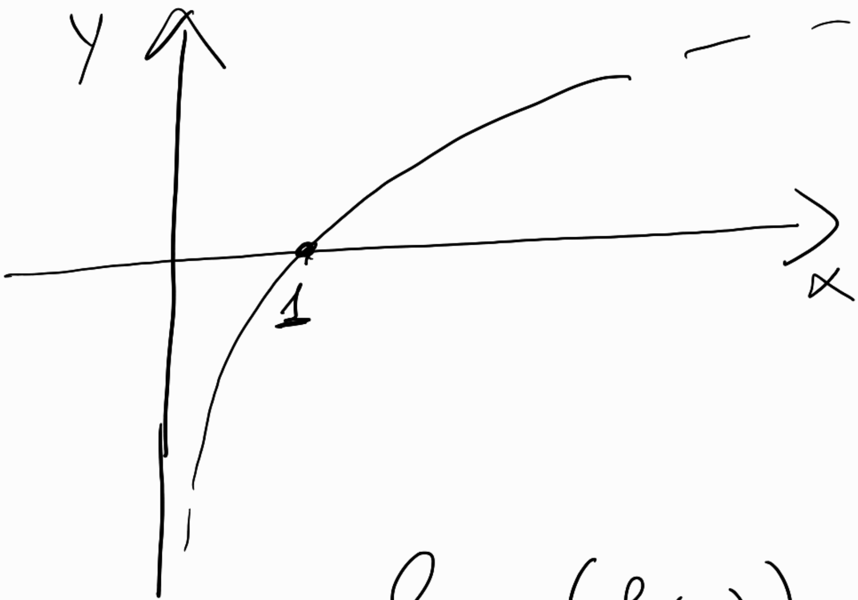
es. $\dfrac{x+2}{x-3} = 0 \qquad D: \mathbb{R} \setminus \{3\}$

equivalente
$x \neq 3$

$x - 3 = 0 \qquad x = 3$

$D: D(f) \cap D(g) \cap g(x) \neq 0$

• equazioni logaritmiche



$\log : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$

i valori che può assumere la y

$f : A \to B$

i valori che può assumere la x

$$\log(f(x)) = 0$$

$f(x) > 0$ risolviamo questa disequazione

$D : \{ x \in A : f(x) > 0 \} \cap D(f)$

es. $\log(x+1) = 0$

$x + 1 > 0 \iff x > -1 \qquad D : (-1, +\infty)$

es. $\dfrac{\log(x)}{x^2} = 0 \qquad \begin{cases} x^2 \neq 0 \iff x \neq 0 \\ x > 0 \end{cases}$

$D : x > 0$

• equazioni con le radici

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$$

$D : D(f) \cap D(g) \cap \{ x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0 \}$

$\sqrt{x - 4} = 0$

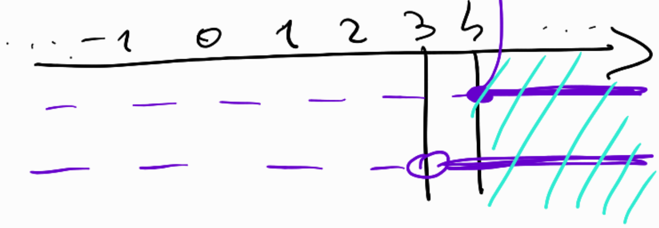
argomento

$x - 4 \geq 0 \qquad D : \{ x \in \mathbb{R} : x \geq 4 \}$

es. $\sqrt{x-4} = \log(x-3)$

vuol dire che comprende anche il 4

$$\begin{cases} x-4 \geq 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 4 \\ x > 3 \end{cases}$$



la sol. di un insieme è la soluzione comune

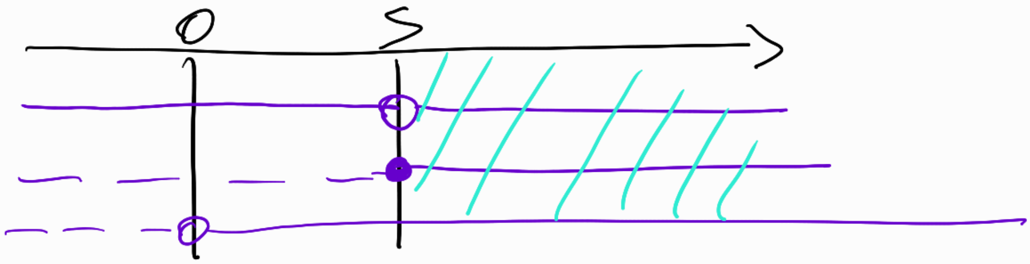
$x \geq 4 \qquad D: \{x \in \mathbb{R} : x \geq 4\}$

es. $\dfrac{\log(x)}{\sqrt{x-5}} \geq 0$

$a^2 = b$

$a = \pm\sqrt{b}$

$$\begin{cases} \sqrt{x-5} \neq 0 \\ x-5 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (\sqrt{x-5})^2 \neq 0^2 \Rightarrow x \neq 5 \\ x \geq 5 \\ x > 0 \end{cases}$$



$D: \{x \in \mathbb{R} : x > 5\} = (5, +\infty)$

— ~ —

Nell'equazioni possiamo fare delle semplificazioni per aiutarci.

$x + 2 \cancel{-3} = 5 \cancel{-3}$

$x + 2 = 5$

sono equivalenti

$$x+2=4$$
$$2(x+2)=2\cdot 4$$

sono equivalenti

EQUAZIONI LINEARI

$$ax+b=0 \qquad x\in\mathbb{R} \qquad a,b\in\mathbb{R}$$

costanti

EQUAZIONI DI 1^a GRADO

es. $3x+4=0$

sol. $ax=-b$

$$x=-\frac{b}{a} \quad \text{con } a\neq 0$$

se $a=b=0$ sol. $x=0$

se $a=0$ e $b\neq 0$ allora è ϕ

es. $5x-8-3x=-6+8$

$$\cancel{2}x=\cancel{2} \iff \boxed{x=1}$$

$\frac{2x}{2}=\frac{2}{2}$ sono equivalenti

EQUAZIONI DI 2^a GRADO

Dette equazioni quadratiche.

$$ax^2+bx+c=0 \qquad x\in\mathbb{R} \qquad a,b,c\in\mathbb{R}$$

$a\neq 0$

$$\Delta=b^2-4a\cdot c \quad \text{DISCRIMINANTE}$$

se $\Delta>0 \Rightarrow \exists$ 2 sol. reali e distinte x_1 e x_2

$$\boxed{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}}$$

se $\Delta=0 \Rightarrow$ 2 sol. reali e coincidenti

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$$

$\Delta < 0 \Rightarrow \nexists$ sol. reali

$\nexists$ = non esiste

CASI PARTICOLARI

se $c=0$ $\quad ax^2+bx=0 \Leftrightarrow x(ax+b)=0$

soluzioni $x=0 \quad ax+b=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$

se $b=0$ $\quad ax^2+c=0 \Leftrightarrow x^2=-\frac{c}{a}$

- se $c=0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0$
- se $c>0$, $a>0$ $\quad \frac{c}{a}>0 \quad -\frac{c}{a}<0 \quad \phi$
- se $c<0$ e $a<0$ $\quad$ es. $x^2=-\frac{-4}{-3}$ $\quad x^2=-\frac{4}{3} \quad \phi$
- se sono discordi $\quad x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{c}{a}}$

a e c hanno segno opposto

es. $x^2-4x+4=0 \quad a=1 \quad b=-4 \quad c=4$

$\Delta = b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 4=$

$=16-16=0$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=-\frac{b}{2\cdot 1}=+\frac{+4}{2}=2$$

altro modo $\quad x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0 \quad x=2$

es. $4x^2 - 4x - 3 = 0$

$a = 4 \qquad b = -4 \qquad c = -3$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3) =$$
$$= 16 + 48 = 64 \qquad \Delta > 0$$

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 4} =$$

$$= \frac{4 \pm 8}{8} = \begin{cases} \dfrac{4-8}{8} = \dfrac{-4}{8} = -\dfrac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{4+8}{8} = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$(x-3)(x-2) = 0$

$x - 3 = 0 \quad$ e $\quad x - 2 = 0$

$x = 3 \qquad x = 2$

$x^2 + 4x + 4 = 0 \iff (x+2)^2 = 0$

$(x+2)(x+2) = 0$

SISTEMI

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_m) = 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_m) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_m) = 0 \end{cases}$$

sol. è una m-tupla $(x_1, \dots, x_m)$ che soddisfa tutte le equazioni

Ci possono essere un numero finito di soluzioni, un numero infinito o nessuna soluzione.

es.
$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + y = -1 \end{cases} \qquad (x, y)$$

$$\begin{cases} x = 1 - 2y \\ 2(1-2y) + y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 - 2y \\ 2 - 4y + y = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 - 2y \\ 2 - 3y = -1 \end{cases}$$

$$-3y = -2 - 1$$

$$+3y = +3 \qquad y = 1$$

$$x = 1 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1$$

soluzione è $(-1, 1)$

es
$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ x^2 - 4y^2 + xy = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3y \\ (-3y)^2 - 4y^2 + (-3y)\cdot y = 2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$9y^2 - 4y^2 - 3y^2 = 2$$

$$2y^2 = 3 \qquad y^2 = \frac{3}{2} \qquad y = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

se $y = \sqrt{\frac{3}{2}}$ $\quad x = -3\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}$

se $y = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ $\quad x = -3\cdot\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = 3\sqrt{\frac{3}{2}}$

sol. sono $\left(-3\sqrt{\frac{3}{2}}, 3\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

e

$\left(3\sqrt{\frac{3}{2}}, -3\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

es. Per quali valori di α il sistema ha almeno una soluzione?

$$\begin{cases} (1-\alpha)x + y = 3 \\ \alpha x - y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 - (1-\alpha)x \\ y = \alpha x - 5 \end{cases}$$

$$3 - (1-\alpha)x = \alpha x - 5$$

$$3 - x + \cancel{\alpha x} = \cancel{\alpha x} - 5$$

$$x = -8$$

$$y = -8 \cdot \alpha - 5 \qquad \text{sol. } (-8, -8\alpha - 5)$$

$\forall \alpha$ c'è almeno una soluzione.

es. $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ -2x + 4y + 6 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3 + 2y \\ -2(3+2y) + 4y + 6 = 0 \end{cases}$

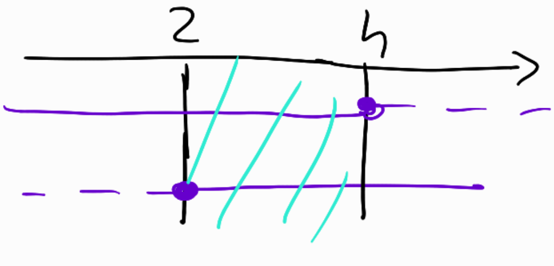
$$-6 - \cancel{4y} + \cancel{4y} + 6 = 0$$

ci sono infinite soluzioni.

es. $\sqrt{4-x} + \sqrt{x-2} = 2$

1ª calcolo il dominio

$\begin{cases} 4 - x \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -x \geq -4 \\ x \geq 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 4 \\ x \geq 2 \end{cases}$



$D: \{x \in \mathbb{R}: +2 \leq x \leq 4\}$

$$\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{x-2}\right)^2=(2)^2$$

$$\left(\cancel{\sqrt{\;}}4-x\right)^{\cancel{2}}+2\sqrt{4-x}\cdot\sqrt{x-2}+\left(\cancel{\sqrt{\;}}x-2\right)^{\cancel{2}}=4$$

$$\cancel{4}-\cancel{x}+2\sqrt{4-x}\cdot\sqrt{x-2}\cancel{+x}-2=\cancel{4}$$

$$\cancel{2}\sqrt{(4-x)\cdot(x-2)}=\cancel{2}^{1}$$

$$\sqrt{(4-x)(x-2)}^{\cancel{2}}=(1)^2$$

$$(4-x)(x-2)=1$$

$$4x-8-x^2+2x=1$$

$$x^2-6x+9=0$$

$$(x-3)^2=0$$

$$\boxed{x=3}$$

$$\Delta=(-6)^2-4\cdot1\cdot9=36-36=0$$

$$\Delta=0$$

$$x_{1,2}=-\frac{b}{2a}=-\frac{-6}{2\cdot1}=3$$