EQUAZIONI TRIGONOMETRICHE

EQUAZIONI TRIGONOMETRICHE

EQUAZIONI CON SENO E COSENO

Si dicono EQUAZIONI TRIGONOMETRICHE quelle equazioni in cui l'INCOGNITA appare come argomento di una o più funzioni trigonometriche

ESEMPIO: • $\sin(x)=2$ (*)

• $5\cos^2(x)+3\cos(x)-2=0$

• $\cot(2x)=\cos(x)$

Iniziamo col risolvere equazioni trigonometriche ELEMENTARI, ovvero equazioni del tipo

$$\sin(x)=a,\quad \cos(x)=a,\quad \tan(x)=a \qquad (\underset{\substack{\downarrow\\ \text{parametro fissato}}}{a\in\mathbb{R}},\ \underset{\substack{\uparrow\\ \text{incognita}}}{x\in\mathbb{R}})$$

→ le funzioni $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$ sono funzioni PERIODICHE, quindi se $x_0\in\mathbb{R}$ è una soluzione di $\cos(x)=a$, allora anche $x=x_0+2k\pi$ sarà una soluzione della stessa equazione (per ogni $k\in\mathbb{Z}$)

→ Bisogna ricordare che $|\cos(x)|, |\sin(x)|\leq 1$, quindi equazioni elementari del tipo $\sin(x)=a$, $\cos(x)=a$ hanno soluzione solo se $|a|\leq 1$ (QUINDI (*) non ha sol.)

⇒ Un'equazione trigonometrica elementare ammette infinite soluzioni, oppure non ammette nessuna soluzione

→ Per risolvere equazioni trigonometriche elementari è necessario ricordare i valori di seno e coseno degli angoli standard

EQUAZIONI TRIGONOMETRICHE: SENO

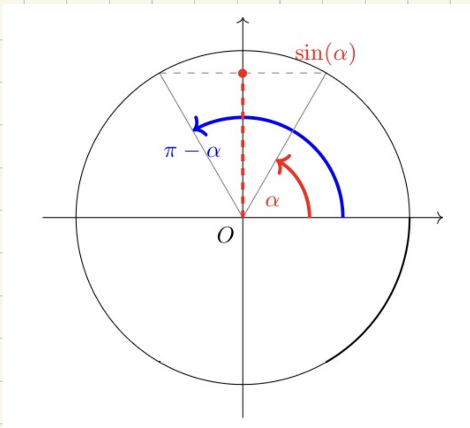
Sia $\alpha\in\mathbb{R}$ e risolviamo l'equazione $\sin(x)=\sin(\alpha)$

Le soluzioni sono date da

$$x = \begin{cases} \alpha + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ \pi - \alpha + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Infatti, $x = \alpha$ è chiaramente una soluzione, ma allora anche $\alpha + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ lo è, per la periodicità.

→ Siccome $\sin(x) = \sin(\alpha) = \sin(\pi - \alpha)$, anche $x = \pi - \alpha$ è una soluzione (e quindi, per la periodicità del seno, anche $\pi - \alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ lo è.



Un'equazione elementare riconducibile a $\sin(x) = \sin(\alpha)$ è

$$\sin(x) = a \qquad (|a| \leq 1)$$

$a = \sin(\alpha)$

dove a è il valore del seno di un certo ANGOLO NOTEVOLE α

ESEMPIO: $\sin(x) = \frac{1}{2}$

→ Riconosciamo che è equivalente a $\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Allora la soluzione è

$$x = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$|\sin(x)| \leq 1$
$\forall x \in \mathbb{R}$

Se $|a| > 1$, l'equazione $\sin(x) = a$ non ha NESSUNA SOLUZIONE

Se $a = \pm 1$. Infatti

$$\sin(x) = 1 \iff \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2k\pi & , k \in \mathbb{Z} \\ \pi - \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(x) = -1 \iff x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

EQUAZIONI TRIGONOMETRICHE ELEMENTARI: COSENO

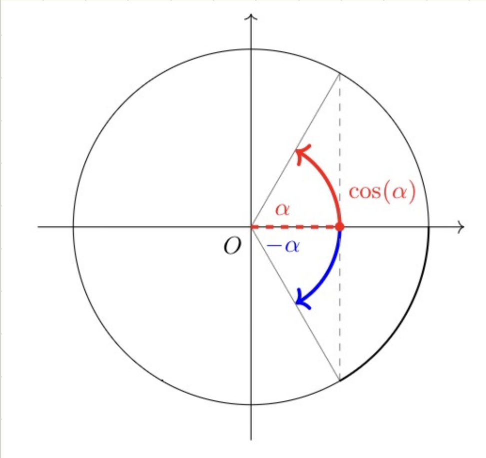
Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e risolviamo l'equazione $\cos(x) = \cos(\alpha)$

Le soluzioni sono date da

$$x = \begin{cases} \alpha + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ -\alpha + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Infatti, se $x = \alpha$ è una soluzione, allora anche $\alpha + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ lo è.

→ Dal momento che $\cos(x) = \cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$, anche $x = -\alpha$ è una soluzione (insieme a $-\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$)



$a = \cos(\alpha)$

Un'equazione elementare riconducibile a $\cos(x) = \cos(\alpha)$ è $\cos(x) = a$ $\quad (|a| \leq 1)$

→ Dove a è il valore del coseno di un certo ANGOLO NOTEVOLE α

<u>ESEMPIO</u>: Riconosciamo che l'equazione

$$\cos(x) = \frac{1}{2}$$

è equivalente a $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Allora la soluzione è

$$x = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Se $|a| > 1$, l'equazione $\cos(x) = a$ non ha NESSUNA SOLUZIONE. Se $a = 1$

$$\cos(x) = 1 \iff \cos(x) = \cos(0) \Rightarrow x = \begin{cases} 0 + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ -0 + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Analogamente, $\cos(x) = -1 \iff x = \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

EQUAZIONI CON SENI E COSENI

Equazioni trigonometriche contenenti seni e coseni possono essere spesso ricondotte ad equazioni elementari tramite opportune manipolazioni. Gli strumenti principali per riportare un'equazione trigonometrica ad una elementare sono:

- l'IDENTITÀ TRIGONOMETRICA FONDAMENTALE ($\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$) (1)
- le formule di ADDIZIONE e DUPLICAZIONE (2)
- l'espressione di combinazioni lineari di seni e coseni come un'unica funzione trigonometrica (3)

Il metodo generale per risolvere un'equazione trigonometrica che può contenere più funzioni trigonometriche consiste nell'esprimerla come un'equazione trigonometrica contenente UNA SOLA FUNZIONE TRIGONOMETRICA.

ESEMPIO: $\cos^2(x)+2\sin(x)-2=0$

Sfruttando (1)

$$1-\sin^2(x)+2\sin(x)-2=0 \iff \overbrace{\sin^2(x)-2\sin(x)+1=0}^{A^2-2AB+B^2=(A-B)^2} \iff (\sin(x)-1)^2=0$$

Ovvero un'espressione che contiene SOLO la funzione $\sin(x)$

Ora, l'equazione è immediatamente risolvibile, infatti

$$(\sin(x)-1)^2=0 \iff \sin(x)=1 \iff x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

EQUAZIONI CON TANGENTE E COTANGENTE

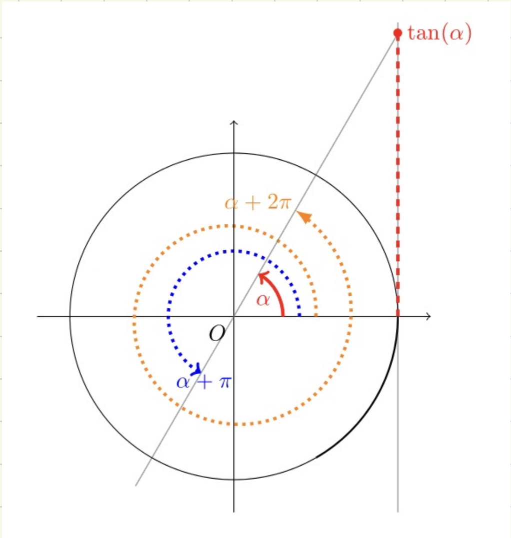
Sia $\alpha\in\mathbb{R}$ e le equazioni

$$\tan(x)=\tan(\alpha), \quad \cot(x)=\cot(\alpha)$$

Le soluzioni in entrambi i casi sono date da

$$x = \alpha + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Infatti, $x = \alpha$ è chiaramente una soluzione, così come $\alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (per la periodicità di tan e cot, pari a π)



⚠: le funzioni tangente e cotangente non sono definite per alcuni valori dell'argomento, quindi bisogna sempre specificare il DOMINIO nel quale si cercano le soluzioni

→ Ad esempio risolvere $\tan(x) = f(x)$ (f altra funzione trigonometrica) equivale a trovare tutti i valori $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ per cui l'equazione è verificata.

→ Se, una volta risolta l'equazione, tra le soluzioni ottenute ve ne sono alcune del tipo $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, queste vanno scartate

→ Per quanto riguarda la cotangente, risolvere $\cot(x) = f(x)$ equivale a trovare tutti i valori $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ per cui l'equazione è verificata

• Un'equazione elementare riconducibile a $\tan(x) = \tan(\alpha)$ è

$$\tan(x) = a \qquad a = \tan(\alpha) \qquad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

dove a è il valore della tangente di un certo ANGOLO NOTEVOLE α

→ le soluzioni sono $x = \alpha + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

ESEMPIO: Riconosciamo che l'equazione $\tan(x) = 1$

→ è equivalente a $\tan(x) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$

La soluzione è $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

• Analoghe considerazioni valgono anche per equazioni elementari del tipo $\cot(x) = a$ quando a si riconosce essere la cotangente di un angolo notevole $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

ESEMPIO: Risolviamo

$$\tan(x) + 2\cot(x) = 3$$

Il dominio dell'equazione è $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$

L'equazione di partenza per $x \in D$ è equivalente a

$$\tan(x) + 2\frac{1}{\tan(x)} = 3 \Leftrightarrow \tan^2(x) - 3\tan(x) + 2 = 0$$

Qui possiamo moltiplicare ambo i membri per $\tan(x)$ perché ci siamo ristretti nel dominio che ci assicura che $\tan(x) \neq 0$

Si può procedere per sostituzione

Risolvendo nell'incognita $\tan(x)$ (o sostituendo $t := \tan(x)$) otteniamo

$$\tan(x)=1, \qquad \tan(x)=2$$

La prima equazione ammette $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ come soluzione, mentre la seconda ha come soluzione

$x=\underbrace{\arctan(1)}_{=\frac{\pi}{4}}+k\pi$

$$x=\underbrace{\arctan(2)}_{\text{è un valore che non è multiplo o frazione di } \pi}+k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}$$

Tutte le soluzioni trovate appartengono a D, e perciò sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione di partenza

$$\begin{cases} x=\frac{\pi}{4}+k\pi, & k\in\mathbb{Z} \\ x=\arctan(2)+k\pi, & k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

EQUAZIONI OMOGENEE DI 2° GRADO IN SENO E COSENO

$$a\sin^2(x)+b\sin(x)\cos(x)+c\cos^2(x)=0 \qquad (a,b,c\in\mathbb{R})$$

(★)

(è equivalente ad $a\sin^2(x)+b\sin(x)\cos(x)+c\cdot\cos^2(x)=d$)

Perché se $1=\cos^2(x)+\sin^2(x)$

$$\Updownarrow$$

$$d=d(\cos^2(x)+\sin^2(x))$$

$$\Downarrow$$

$$a\sin^2(x)+b\sin(x)\cos(x)+c\cos^2(x)=d(\cos^2(x)+\sin^2(x))$$

$$\Downarrow$$

$$(a-d)\sin^2(x)+b\sin(x)\cos(x)+(c-d)\cos^2(x)=0$$

Per risolverle vogliamo ricondurre l'equazione (★) ad un'equazione contenente una sola funzione trigonometrica → dividendo ambo i membri per $\cos^2(x)$

Questo fornisce un'equazione equivalente solo se $\cos(x)$ non si annulla. Quindi bisogna distinguere 2 casi:

1) $\cos(x)=0$, è soluzione se e solo se $a=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

→ infatti se $\cos(x)=0$, allora $\sin^2(x)=1$ e l'equazione diventa $a=0$

2) Se $\cos(x)\neq 0$, dividendo ambo i membri dell'equazione ne otteniamo una equivalente a quella di partenza

$$a\sin^2(x)+b\sin(x)\cos(x)+c\cdot\cos^2(x)=0$$

$$a\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}+b\cdot\frac{\sin(x)\cancel{\cos(x)}}{\cos^{\cancel{2}}(x)}+c=0$$

$$\underline{a\tan^2(x)+b\cdot\tan(x)+c=0}$$

↳ sappiamo risolverla (per esempio con il metodo della sostituzione)

⇒ Le soluzioni dell'equazione ⊛ sono date dall'unione delle soluzioni trovate ai punti 1) e 2)

DISEQUAZIONI TRIGONOMETRICHE

È una disequazione contenente funzioni trigonometriche nel cui argomento compare l'incognita, ovvero un'espressione del tipo

$$f(\cos(x),\sin(x))\geq 0 \quad (>0,\ <0,\ \leq 0)$$

Come nel caso delle equazioni, per risolvere una disequazione trigonometrica è essenziale ricordare i valori di seno, coseno di angoli notevoli, la periodicità delle funzioni che compaiono, ed eventualmente il dominio della disequazione.

⚠ Occorre precisare che una disequazione trigonometrica va inizialmente risolta all'INTERNO di un INTERVALLO di LUNGHEZZA PARI AD UN PERIODO DELLA FUNZIONE

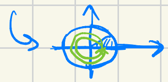
$$f(\cos(x), \sin(x))$$

In seguito la soluzione si estende PER PERIODICITÀ. Utilizzeremo la seguente notazione:

$$[a,b] + c := [a+c, \ b+c]$$

$$]a,b[+ c :=]a+c, \ b+c[$$

$$\left[0, \frac{\pi}{3}\right] + 2k\pi = \left[2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]$$



Ovvero, dato un intervallo I, indicheremo con $I+c$ l'intervallo traslato di c unità.