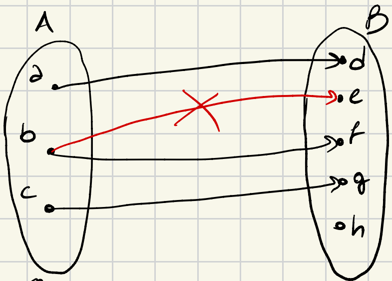
Le Funzioni

FUNZIONI

Relazione tra due sottoinsiemi, chiamati DOMINIO e CODOMINIO.

$\Rightarrow$ Ad ogni elemento del dominio é associato UNO ED UN SOLO elemento del codominio

$\Rightarrow$ In linguaggio matematico lo esprimeremo con $f : A \longrightarrow B$



- Non abbiamo buchi nel DOMINIO

- Non ci sono doppie frecce che partono da un elemento del DOMINIO

$\Updownarrow$

$A = \{a, b, c\}$, $B = \{d, e, f, g, h\}$

$f(a) = d$, $f(b) = f$, $f(c) = g$

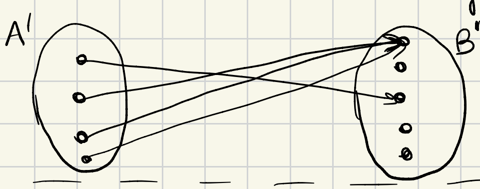
Vediamo in questo caso che

$$f(A) = \{d, f, g\} = \underbrace{\{ w \in B : w = f(z) \text{ per qualche } z \in A \}}_{\circledast} \subseteq B$$

$\circledast$ é detto IMMAGINE di A tramite la funzione f, ed é l'insieme di tutti gli elementi del codominio B che sono immagine di elementi del dominio A tramite f

---

⚠ Definiamo funzione anche una cosa del seguente tipo

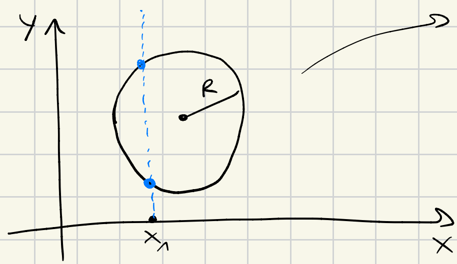


• Spesso una funzione è rappresentata da un'equazione che stabilisce una relazione tra un elemento del dominio (definito in questo caso variabile indipendente) e uno del codominio (def. in questo caso variabile dipendente)

ESEMPIO: $y = 2x+1$

→ In questi casi è possibile utilizzare metodi GRAFICI e ANALITICI per capire se si tratta di una funzione o meno, e, in caso, quali sono le proprietà

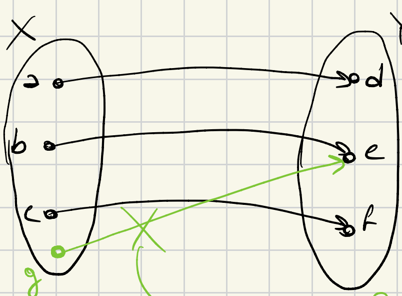
→ METODO GRAFICO



→ $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

FUNZIONE INIETTIVA

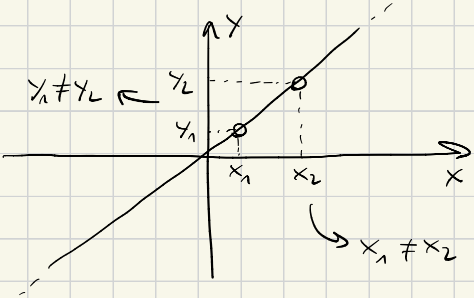
A elementi DISTINTI del DOMINIO corrispondono elementi DISTINTI del CODOMINIO

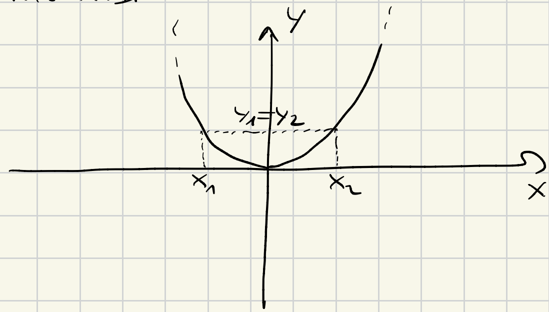


SE $f(a_1)=f(a_2) \Rightarrow a_1=a_2$

→ NON VA BENE PER QUELLA CHE È LA DEFINIZIONE DI INIETTIVITÀ

METODO GRAFICO per verificare INIETTIVITÀ





Rette sono INIETTIVE

Parabole NON sono iniettive

Sufficiente tracciare delle rette parallele all'asse x, e verificare se intersecano il grafico in più di un punto

• METODO ANALITICO per verificare INIETTIVITÀ

→ Assumendo $y_1 = y_2$ ALLORA $x_1 = x_2$

↳ $y_1 = f(x_1)$

$y_2 = f(x_2)$

ESEMPIO: $y = 2x + 5$, é iniettiva?

• Assumendo $y_1 = y_2$ verifichiamo

$$\Rightarrow 2x_1 + \cancel{5} = 2x_2 + \cancel{5}$$

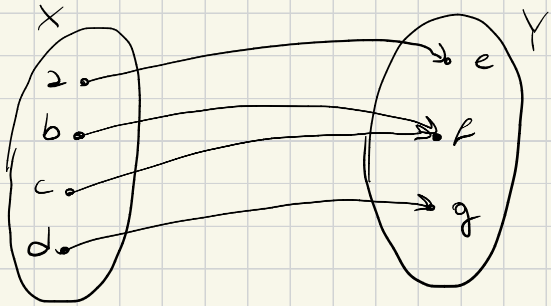
$$\frac{\cancel{2}x_1}{\cancel{2}} = \frac{\cancel{2}x_2}{\cancel{2}}$$

$x_1 = x_2$ ✓ É INIETTIVA

FUNZIONE SURIETTIVA

Ogni elemento del CODOMINIO é immagine di almeno un elemento del DOMINIO

In altre parole: $w \in B \Rightarrow \exists z \in A : f(z) = w$

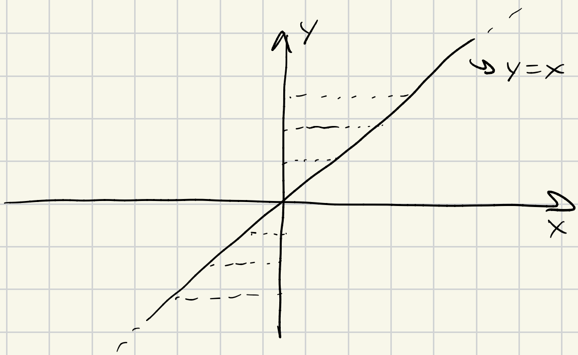


→ SI, É SURIETTIVA

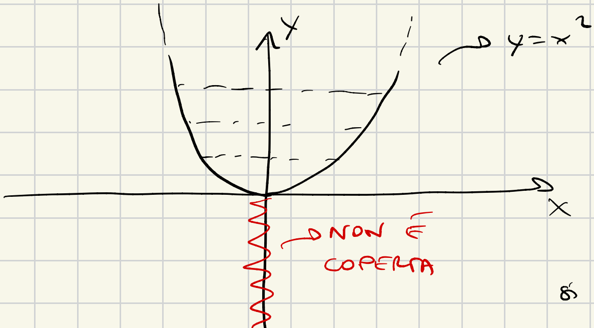
? É INIETTIVA ⇒ NO

METODO GRAFICO per verificare SURIETTIVITÁ

→ Si osserva se la proiezione dell' intero grafico copre interamente l' asse delle y



⇒ Retta é una funzione suriettiva, perché copre interamente l' asse delle y con la sua proiezione



⇒ Parabola non é suriettiva, non copre interamente l' asse delle y con la sua proiezione

⚠ ATTENZIONE: la suriettività si può costruire prendendo in considerazione un determinato (sotto)intervallo

METODO ANALITICO per verifica SURIETTIVITÀ

→ Dato $y \in \mathbb{R}$, dobbiamo vedere se esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = y$ (passare quindi da $y = f(x)$ a $x = f^{-1}(y)$ e verificare che l'espressione ha significato per ogni $y \in \mathbb{R}$)

→ Risolvere l'equazione in funzione di x (⚠ OCCHIO AL DOMINIO)

ESEMPIO: ① $y = x$

$x = y$ ✓ Verificata la suriettività

② $y = 2x - 6$

$2x = y + 6$

$x = \frac{y+6}{2}$ ✓ → Suriettiv. verificata

③ $y = 4x^2 + 6x + 15$

Fissiamo $y = 0$ e risolviamo per x

$0 = 4x^2 + 6x + 15 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 36 - 80 < 0$

$\downarrow$

$\Delta < 0$ → NON CI SONO SOLUZIONI

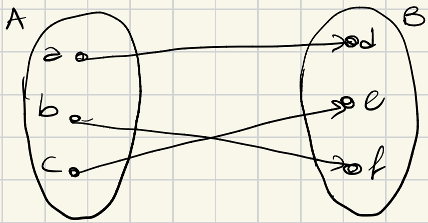
Per $y = 0$ non esiste alcun elemento del dominio "associato", quindi la funzione NON è suriettiva

FUNZIONE INVERTIBILE

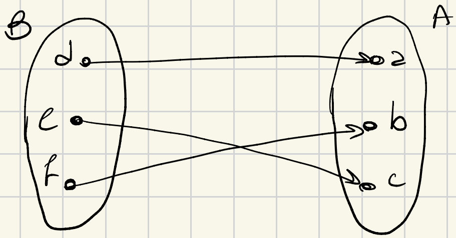
$\boxed{\text{FUNZIONE INVERTIBILE}} \iff \boxed{\text{FUNZIONE BIETTIVA}}$

(INIETTIVA + SURIETTIVA)

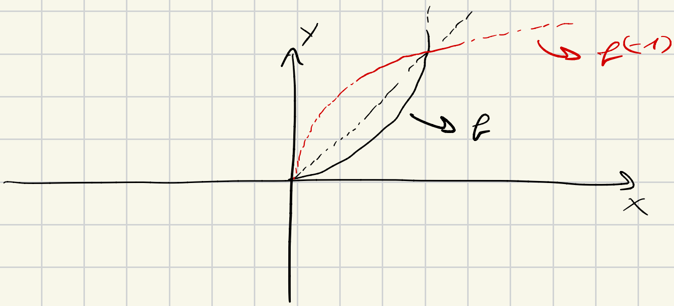
Aiutandoci con una visualizzazione più semplificata, una funzione è invertibile quando possiamo passare da questo



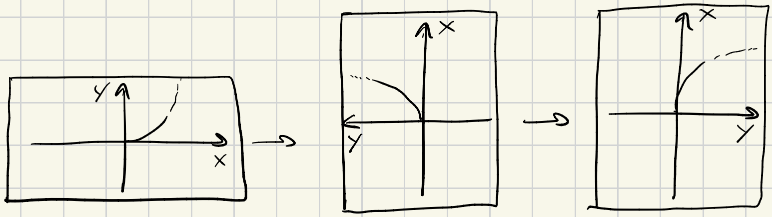
A questo



In termini grafici, il grafico di $f^{(-1)}$ si ottiene a partire dal grafico di f, riflettendolo rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante



In termini "operativi"



ESEMPIO: Invertiamo $y = 3x+5$

1) Scambiamo $y \Leftrightarrow x \Rightarrow x = 3y+5$

2) Esprimiamo la y in funzione di x

$$x = 3y+5$$

$$x-5 = 3y$$

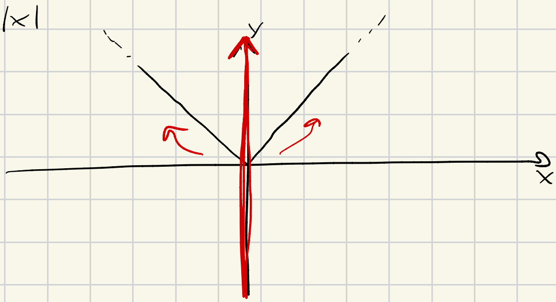
$$y = \frac{x-5}{3}$$ → Funzione inversa

Ma la funzione invertita è biettiva? Sì, perché posso ulteriormente invertirla per tornare alla funzione di partenza

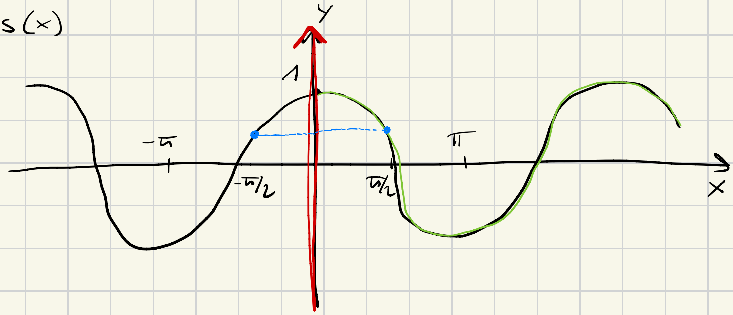
FUNZIONE PARI

$f(x) = f(-x) \Rightarrow$ SIMMETRIA RISPETTO ALL'ASSE DELLE Y

ESEMPIO: • $y = |x|$



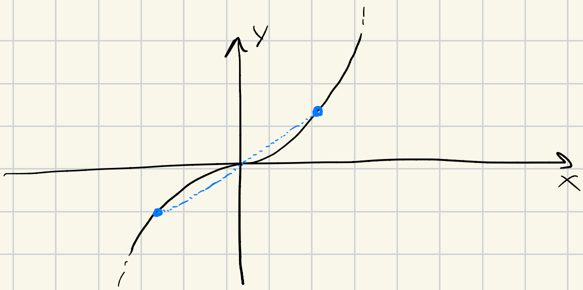
• $y = \cos(x)$



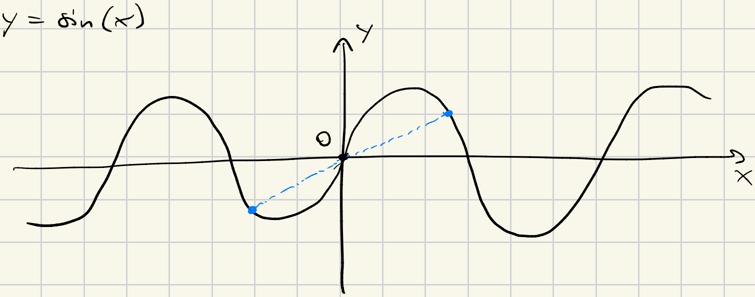
FUNZIONE DISPARI

$f(-x) = -f(x)$ → SIMMETRIA RISPETTO ALL' ORIGINE

ESEMPIO : • $y = x^3$



• $y = \sin(x)$

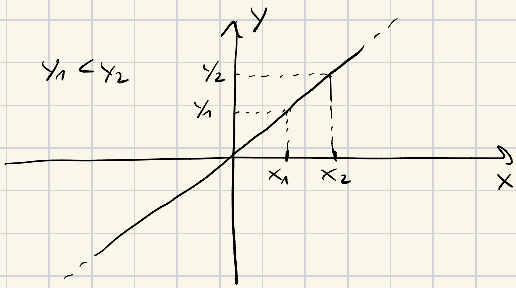


FUNZIONE CRESCENTE

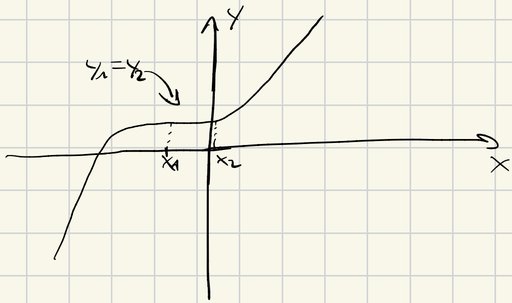
PER OGNI x_1, x_2, CON $x_1 < x_2$ SI HA CHE $y_1 \le y_2$

DOVE $y_1 = f(x_1)$ E $y_2 = f(x_2)$

* Se invece la funzione é STRETTAMENTE CRESCENTE, ALLORA $y_1 < y_2$ (STRETTAMENTE MINORE)



STRETT. CR. 1

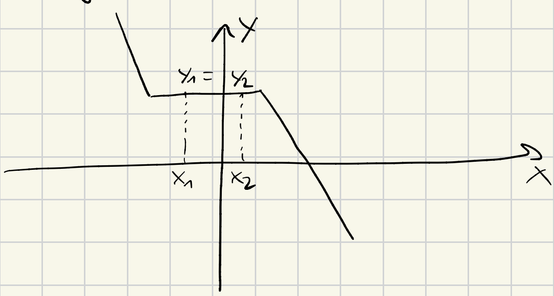


CRESC. 2

→ Differenza tra 1 e 2 sta nel fatto che se diciamo solo crescente, allora $f(x)$ può essere costante in certi intervalli

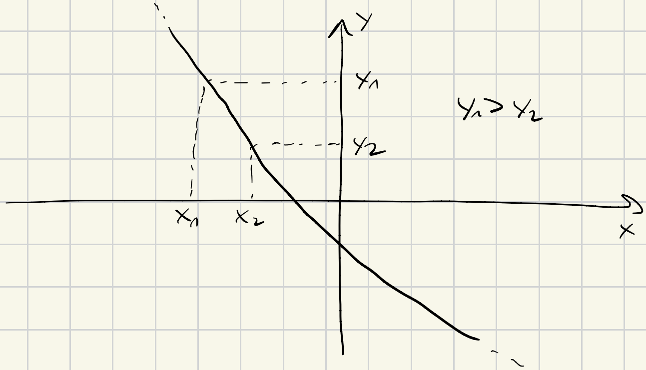
FUNZIONE DECRESCENTE

Per ogni x_1, x_2, con $x_1 < x_2$, si ha $y_1 \geq y_2$



→ DECRESC.

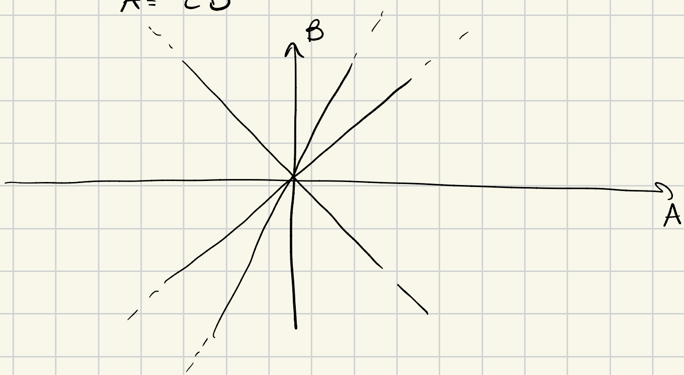
Funzione strettam. decresc.



$\boxed{\text{PROPORZIONI}}$

Supponiamo di studiare un fenomeno che coinvolge due grandezze A e B. Esse si dicono DIRETTAMENTE PROPORZIONALI se esiste un numero c (COSTANTE DI PROPORZIONALITÀ), tale che

$$A = cB$$



Si definiscono invece INVERSAMENTE PROP. se esiste un numero c, tale che

$$A \cdot B = c$$