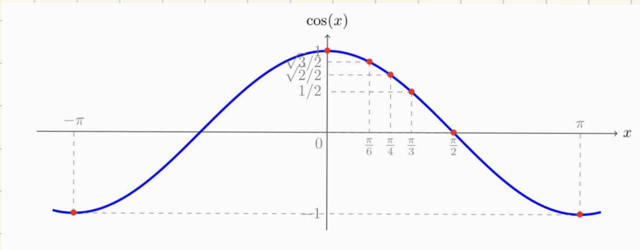
GRAFICI, FUNZIONI E FORMULE TRIGONOMETRICHE

Grafici di funzioni trigonometriche

Coseno

→ $\sin(x)$ e $\cos(x)$ sono definite $\forall x \in \mathbb{R}$



→ Si può osservare che la funzione è PARI $(\cos(x) = \cos(-x))$

→ Se restringiamo il grafico nell'intervallo $[0, \pi]$, esso è simmetrico rispetto al punto $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

↳ Riflette il fatto che $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ per $x \in [0, \pi]$

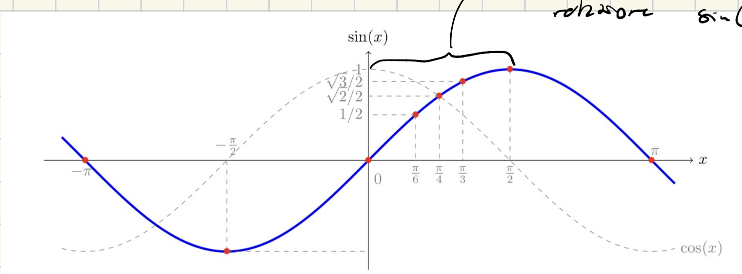
→ La funzione è STRETTAMENTE DECRESCENTE su $[0, \pi]$

⇒ La funzione è BIETTIVA da $[0, \pi]$ a $[-1, 1]$

Seno

→ TRASLAZIONE (si riflette nella relazione $\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$)

↳ $\forall x \in \mathbb{R}$

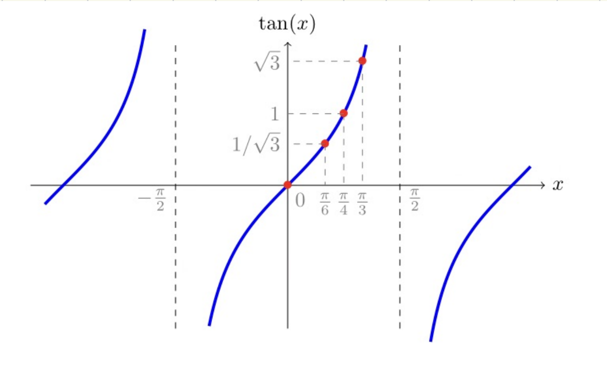


→ La funzione è DISPARI $(\sin(x) = -\sin(-x))$

riferisce alle x

→ La funzione è STRETTAMENTE CRESCENTE E BIETTIVA da $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ a $[-1, 1]$

TANGENTE

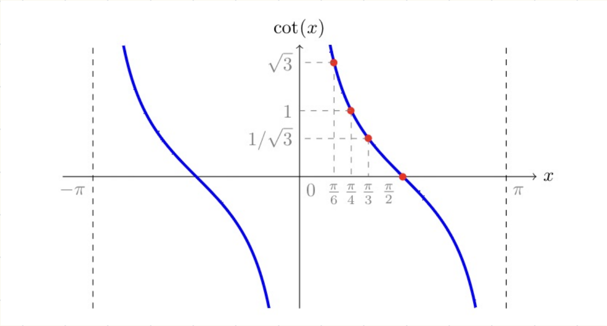


⚠ Funzione periodica di periodo π, ed è definita su $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$

→ la funzione è DISPARI $(\tan(x) = -\tan(-x))$

→ È STRETTAMENTE CRESCENTE e BIETTIVA da $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

COTANGENTE



⚠ Funzione periodica di periodo π, ed è definita su $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$

→ la funzione cotangente è DISPARI (ovvero $\cot(x) = -\cot(-x)$)

→ la funzione è STRETTAMENTE DECRESCENTE e BIETTIVA da $]0, \pi[$

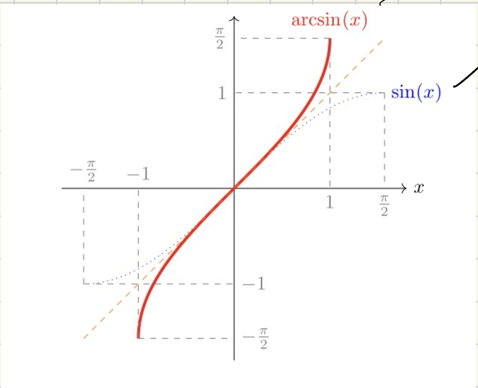
FUNZIONI TRIGONOMETRICHE INVERSE

ARCOSENO

→ In $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ esiste la funzione inversa (ARCOSENO) → $\arcsin(x)$

$$\forall x \in [-1,1], \quad y = \arcsin(x) \iff y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ e } x = \sin(y)$$

→ l'arcoseno di un numero reale x compreso tra -1 e 1 è il valore di quell'angolo compreso tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ che ha x come seno



SIMMETRIA RISPETTO ALLA BISETTRICE DEL 1° E 3° QUADR.

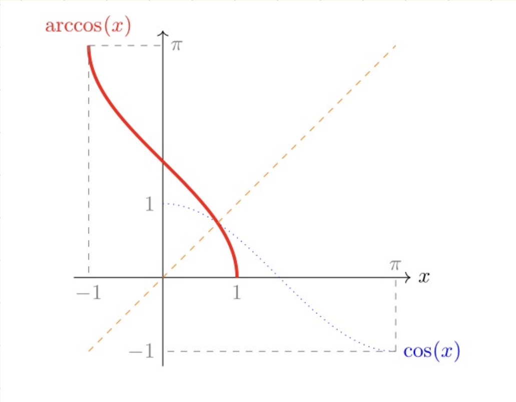
→ la funzione $\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ è STRETTAMENTE CRESCENTE

ARCOCOSENO

→ In $[0,\pi]$ la funzione inversa del coseno, ovvero l'ARCOCOSENO ($\arccos(x)$), è definita come:

$$\forall x \in [-1,1], \quad y = \arccos(x) \iff y \in [0,\pi] \text{ e } x = \cos(y)$$

→ l'arcocoseno di un numero reale x compreso tra -1 ed 1 è il valore di quell'angolo compreso tra 0 e π che ha x come coseno



→ $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ é STRETTAMENTE DECRESCENTE

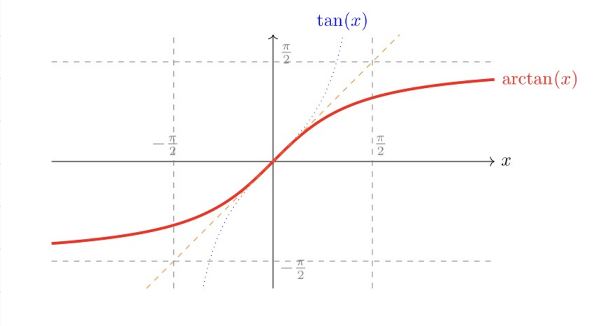
ARCOTANGENTE

→ Se ci restringiamo all' intervallo aperto $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, la funzione inversa della tangente, detta $\arctan(x)$, è definita come:

x é definita su $\mathbb{R}$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}}, \quad y = \arctan(x) \iff y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\text{ e } x = \tan(y)$$

→ L' arcotangente di un numero reale x é il valore di quell' angolo compreso tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ che ha x come tangente



→ la funzione $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ é STRETTAMENTE CRESCENTE

FORMULE TRIGONOMETRICHE IMMEDIATE

- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
- PARITÀ DEL COSENO: $\cos(x) = \cos(-x)$
- DISPARITÀ DEL SENO: $\sin(x) = -\sin(-x)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$, $\quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$;
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$, $\quad \sin(\pi + x) = -\sin(x)$
- PERIODICITÀ: $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$, $\quad \sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$

FORMULE DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

Per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\beta)\cos(\alpha)$$

Per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$, e $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha)\tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

FORMULE DI DUPLICAZIONE

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$:2$

Se $\alpha \in \mathbb{R}$ ed $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$$

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$$

$\Rightarrow$ FORMULE DI BISEZIONE

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$$

Notiamo che il segno di seno e coseno in questo caso non é univocamente determinato: bisognerà disporre di ulteriori informazioni sull'angolo α per poter decidere qual é il segno delle due funzioni trigonometriche (per esempio, conoscere il quadrante in cui si trova)

COMBINAZIONI DI SENI E COSENI

Spesso si incontrano espressioni contenenti COMBINAZIONI LINEARI di seni e coseni di uno stesso angolo, ovvero

$$a \cos(x) + b \cdot \sin(x)$$

→ Queste espressioni possono essere riscritte come un' UNICA FUNZIONE TRIGONOMETRICA i cui elementi (coefficienti ed argomento) dipendono da a, b, ed x.

Per ogni $a, b, x \in \mathbb{R}$ esistono $A \geq 0$ e $\phi \in \mathbb{R}$ tali che

$$a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x) = A \cos(x - \phi)$$

In particolare $A = \sqrt{a^2 + b^2}$

e $\phi \in [0, 2\pi]$ é l'unica soluzione di

$$\begin{cases} \cos(\phi) = \dfrac{a}{A} \\ \sin(\phi) = \dfrac{b}{A} \end{cases}$$