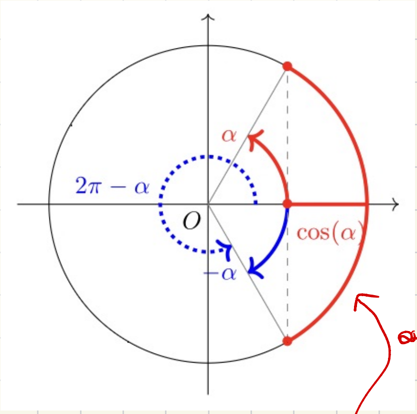
DISEQUAZIONI TRIGONOMETRICHE

DISEQUAZIONI ELEMENTARI CON IL COSENO

Sia $\alpha \in [0, \pi]$ e risolviamo la disequazione

$$\cos(x) \geq \cos(\alpha)$$

La soluzione è data da $x \in [-\alpha, \alpha] + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$



quelli in rosso

In questo caso abbiamo trovato una soluzione nell'intervallo di periodicità $[-\pi, \pi]$, ovvero $x \in [-\alpha, \alpha]$, dopodiché abbiamo esteso la soluzione per periodicità considerando tutti gli intervalli TRASLATI di 2π del tipo $[-\alpha, \alpha] + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

→ Esistono diversi modi per esprimere la soluzione

⇒ Ad esempio, trovando una soluzione nell'intervallo di periodicità $[0, 2\pi]$ ed estendendola per periodicità, potremmo scrivere equivalentemente

$$x \in [0, \alpha] \cup [2\pi - \alpha, 2\pi] + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

- Volendo risolvere invece $\cos(x) \leq \cos(\alpha)$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ ed estendere la soluzione per periodicità, otteniamo

$$x \in [-\pi, -\alpha] \cup [\alpha, \pi] + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

La soluzione può essere scritta in maniera più compatta se consideriamo la disequazione nell' intervallo $[0, 2\pi]$ ed estendiamo la soluzione per periodicità:

$$x \in [\alpha, 2\pi - \alpha] + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

→ Se al posto di $\geq$ o $\leq$ compaiono $>$ o $<$, vanno considerati gli stessi intervalli aperti

- Una disequazione elementare riconducibile a $\cos(x) \geq \cos(\alpha)$ è

$$\cos(x) \geq a$$

con $|a| \leq 1$, dove a è il valore del coseno di un certo ANGOLO NOTEVOLE $\alpha \in [0, \pi]$. Infatti, se nella disequazione $\cos(x) \geq a$ sappiamo riconoscere che $a = \cos(\alpha)$ per qualche angolo $\alpha \in [0, \pi]$, allora la soluzione è $x \in [-\alpha, \alpha] + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

ESEMPIO: Riconosciamo che l' equazione

$$\cos(x) \geq 1/2$$

è equivalente a $\cos(x) \geq \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Allora la soluzione è

$$x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right] + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- Se $a > 1$, la disequazione $\cos(x) \geq a$ non ha NESSUNA SOLUZIONE, infatti $\cos(x) \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Se $a < -1$, la disequazione $\cos(x) \geq a$ È VERIFICATA PER OGNI $x \in \mathbb{R}$, infatti $\cos(x) \geq -1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

- Se consideriamo invece $\cos(x) \leq a$ dove a è il valore del coseno di un certo ANGOLO NOTEVOLE $\alpha \in [0, \pi]$ allora la soluzione è $x \in [\alpha, 2\pi - \alpha] + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

ESEMPIO: La soluzione di $\cos(x) \leq 1/2$ è data da

$$x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi\right] + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- Se $a>1$, la disequazione $\cos(x) \le a$ É VERIFICATA PER OGNI $x\in\mathbb{R}$, mentre se $a<-1$, la disequazione $\cos(x)\le a$ NON É MAI VERIFICATA

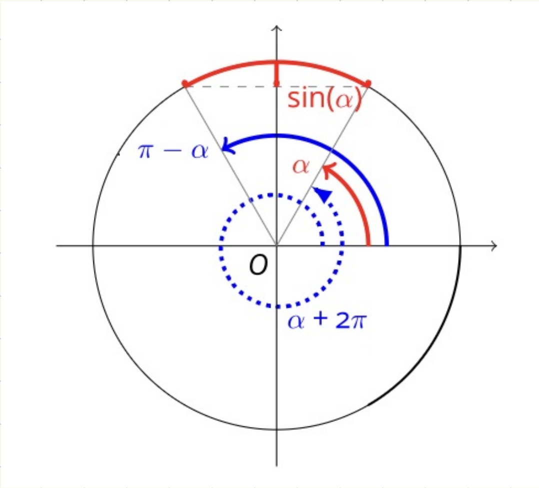
DISEQUAZIONI ELEMENTARI CON IL SENO

Sia $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ e risolviamo la disequazione

$$\sin(x) \ge \sin(\alpha)$$

La soluzione é data da

$$x\in[\alpha, \pi-\alpha]+2k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}$$



In questo caso abbiamo trovato una soluzione nell'INTERVALLO DI PERIODICITÁ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$, ovvero $x\in[\alpha,\pi-\alpha]$, dopodiché abbiamo esteso la soluzione per periodicitá considerando tutti gli intervalli TRASLATI di 2π del tipo $[\alpha, \pi-\alpha]+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

- Volendo risolvere invece $\sin(x)\le\sin(\alpha)$ nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right]$ ed estendendo la soluzione per periodicitá, otteniamo

$$x \in \left[\pi-\alpha, \frac{3}{2}\pi\right] \cup \left[-\frac{\pi}{2}, \alpha\right] + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

La soluzione può essere scritta in maniera più compatta se consideriamo la disequazione nell'intervallo $\left[\frac{\pi}{2}, 2\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ ed estendiamo la soluzione per periodicità:

$$x \in \left[\pi-\alpha, \alpha + 2\pi\right] + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

Come prima, le due scritture sono EQUIVALENTI.

→ In entrambi i casi, se invece di $\geq$ o $\leq$ avessimo avuto $>$ o $<$, avremmo dovuto considerare intervalli APERTI

- Una disequazione elementare riconducibile a $\sin(x) \geq \sin(\alpha)$ è

$$\sin(x) \geq a$$

con $|a| \leq 1$, dove a è il valore del seno di un certo ANGOLO NOTEVOLE $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Infatti, se nella disequazione $\sin(x) \geq a$ sappiamo riconoscere che $a = \sin(\alpha)$ per qualche angolo $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$, allora la soluzione è $x \in [\alpha, \pi - \alpha] + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

ESEMPIO: Riconosciamo che l'equazione

$$\sin(x) > \frac{1}{2}$$

è equivalente a $\sin(x) > \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Allora la soluzione è

$$x \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right[+ 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

- Se $a > 1$, la disequazione $\sin(x) \geq a$ non ha NESSUNA SOLUZIONE, infatti $\sin(x) \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Se $a < -1$, la disequazione $\sin(x) \geq a$ È VERIFICATA PER OGNI $x \in \mathbb{R}$, infatti $\sin(x) \geq -1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

- Se consideriamo invece $\sin(x) \leq a$ dove a è il valore del seno di un certo ANGOLO NOTEVOLE $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ allora la soluzione è $x \in [\pi-\alpha, \alpha+2\pi] + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

ESEMPIO: La soluzione di

$$\sin(x) \leq \frac{1}{2}$$

è data da $x \in \left[\frac{5}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi\right] + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

- Se $a > 1$, la disequazione $\sin(x) \leq a$ È VERIFICATA PER OGNI $x \in \mathbb{R}$, mentre se $a < -1$, la disequazione $\sin(x) \leq a$ NON È MAI VERIFICATA

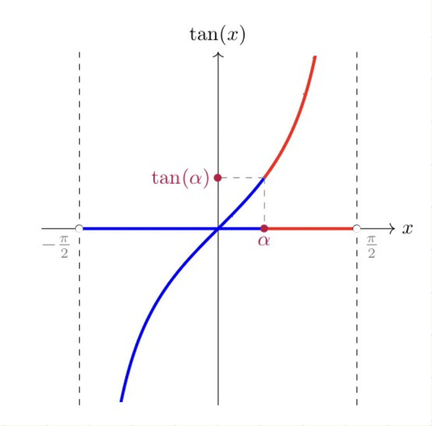
DISEQUAZIONI CON TANGENTE E COTANGENTE

Sia $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ e risolviamo la disequazione $\tan(x) \geq \tan(\alpha)$. La soluzione è data da

$$x \in \left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right[+ k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

La soluzione di $\tan(x) \leq \tan(\alpha)$ è data invece da

$$x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \alpha\right] + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$



Rappresentando il grafico della funzione tangente nell'intervallo di periodicità $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ si riconoscono immediatamente le soluzioni di $\tan(x) \geq \tan(\alpha)$ e $\tan(x) \leq \tan(\alpha)$

- Una volta trovata una soluzione nell'intervallo di periodicità $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ la si estende per periodicità, ricordando che che la funzione tangente é periodica di periodo π.

- Se invece di $\geq$ o $\leq$ avessimo le disuguaglianze strette $>$ o $<$, dovremmo considerare intervalli APERTI in corrispondenza di α

- Una disequazione elementare riconducibile a $\tan(x) \geq \tan(\alpha)$ é

$$\tan(x) \geq a$$

con $a \in \mathbb{R}$, dove a é il valore della tangente di un certo ANGOLO NOTEVOLE $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$: se nella disequazione $\tan(x) \geq a$ sappiamo riconoscere che $a = \tan(\alpha)$ per qualche angolo $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, allora la soluzione é $x \in [\alpha, \frac{\pi}{2}[+ k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

<u>ESEMPIO</u>: Riconosciamo che

$$\tan(x) \geq 1$$

é equivalente a $\tan(x) \geq \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Allora la soluzione é

$$x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[+ k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- Se consideriamo invece $\tan(x) \leq a$ dove a é il valore della tangente di un certo angolo notevole $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, allora la soluzione é $x \in]-\frac{\pi}{2}, \alpha] + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

<u>ESEMPIO</u>: La soluzione di $\tan(x) < 1$ é data da

$$x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right[+ k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

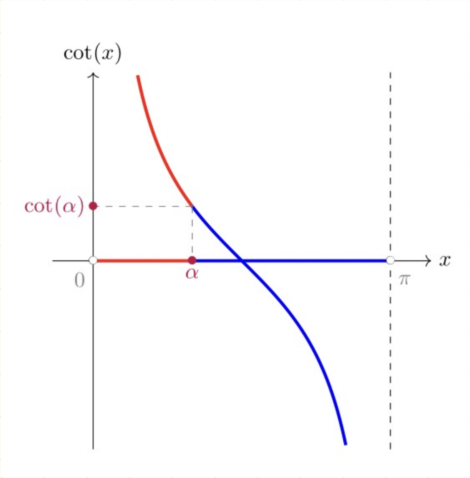
DISEQUAZIONI ELEMENTARI CON LA COTANGENTE

Sia $\alpha \in]0, \pi[$ e risolviamo la disequazione $\cot(x) \geq \cot(\alpha)$. La soluzione è data da

$$x \in]0, \alpha] + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

La soluzione di $\cot(x) \leq \cot(\alpha)$ è data invece da

$$x \in [\alpha, \pi[+ k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$



Rappresentando il grafico della funzione cotangente nell'intervallo di periodicità $]0, \pi[$ si riconoscono subito le soluzioni di $\cot(x) \geq \cot(\alpha)$ e $\cot(x) \leq \cot(\alpha)$

- Una volta trovata una soluzione nell'intervallo di periodicità $]0, \pi[$ la si estende per periodicità, ricordando che la funzione cotangente è periodica di periodo π.
- Se invece di $\geq$ o $\leq$ avessimo le disuguaglianze strette $>$ o $<$, dovremmo considerare intervalli APERTI in corrispondenza di α
- Una disequazione elementare riconducibile a $\cot(x) \geq \cot(\alpha)$ è

$$\cot(x) \geq a \quad (a \in \mathbb{R})$$

dove a è il valore della tangente di un certo ANGOLO NOTEVOLE $\alpha \in]0,\pi[$: se nella disequazione $\cot(x) \geq a$ sappiamo riconoscere che $a = \cot(\alpha)$ per qualche angolo $\alpha \in]0,\pi[$ allora la soluzione è $x \in]0,\alpha] + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

ESEMPIO: L'equazione

$$\cot(x) > 1/\sqrt{3}$$

è equivalente a $\cot(x) > \cot\left(\frac{\pi}{3}\right)$. La soluzione dunque è

$$x \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[+ k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

- Se consideriamo invece $\cot(x) \leq a$ dove a è il valore della cotangente di un certo ANGOLO NOTEVOLE $\alpha \in]0,\pi[$ allora la soluzione è $x \in [\alpha, \pi[+ k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

ESEMPIO: La soluzione di $\cot(x) < 1$ è data da

$$x \in \left]\frac{\pi}{4}, \pi\right[+ k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$