Potenze naturali e radici

POTENZE NATURALI E RADICI

- POTENZE NATURALI

Dato $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, la potenza n-esima di a é definita come

ESPONENTE

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-volte}}$$

BASE

Tra le proprietà fondamentali delle potenze naturali abbiamo che, per ogni $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $a, b \in \mathbb{R}$ si ha

a) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

b) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;

c) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$;

d) $(ab)^n = a^n b^n$;

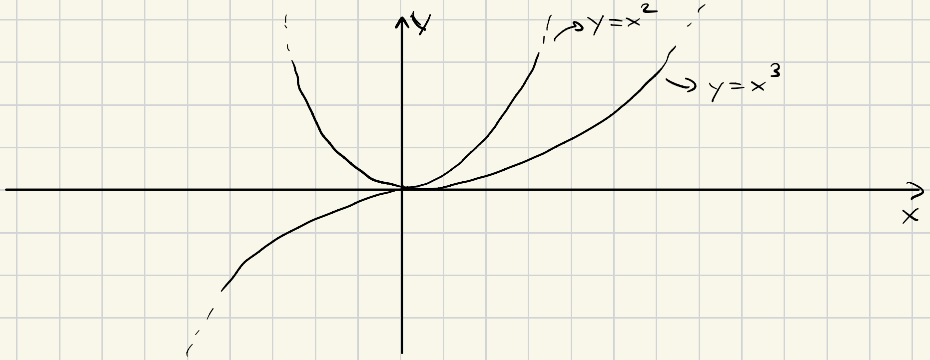
e) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ con $b \neq 0$.

- FUNZIONE POTENZA NATURALE n-esima

Ad $x \in \mathbb{R}$ associa $x^n \in \mathbb{R}$, vediamo alcune proprietà:

→ Se n é pari: $x^n \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (e la funzione $y = x^n$ é PARI)

→ Se n é dispari: $x^n \geq 0 \iff x \geq 0$ (e la funzione $y = x^n$ é DISPARI)



→ Sui reali positivi $(x \geq 0)$ la funzione potenza n-esima è STRETTAMENTE CRESCENTE: se $0 \leq x_1 < x_2$ allora $x_2^n > x_1^n$

→ Se $0 < m < n$ allora

$$\begin{cases} x^m < x^n & \text{se } x > 1 \\ x^m > x^n & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

- POTENZE CON ESPONENTE NATURALE

Se consideriamo a^n con $n = 0$, nel caso in cui $a \neq 0$ abbiamo che

$$a^0 = 1$$

→ Elenchiamo alcune espressioni con potenze naturali utili da ricordare

a) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

b) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

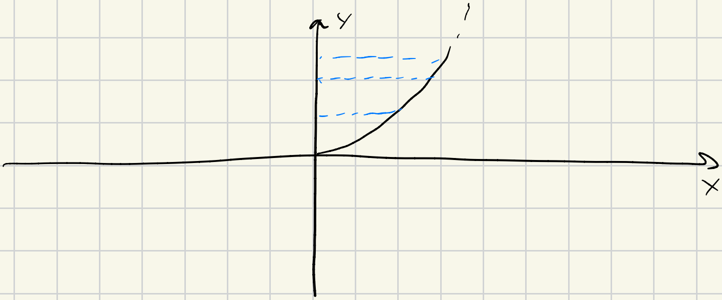
c) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

d) $a^3 \underset{+}{-} b^3 = (a \underset{+}{-} b)(a^2 \underset{-}{+} ab + b^2)$

- RADICI DI REALI POSITIVI

Se consideriamo l'operazione di estrazione di radice n-esima sui reali positivi, stiamo considerando l'operazione inversa dell'elevamento a potenza

In particolare, partiamo dal presupposto che la potenza n-esima assume sui positivi tutti i valori reali positivi



→ Dato un qualsiasi $y \geq 0$, esiste sempre un $x \geq 0$ tale che $x^n = y$. Possiamo allora introdurre la definizione di radice n-esima di un reale positivo

$\Downarrow$

Dato $y \geq 0$ esiste un unico $x \geq 0$ t.c. $y = x^n$. Chiameremo tale x la <u>RADICE</u> di y

$$x = \sqrt[n]{y}$$

→ Quindi, dati $x, y \geq 0$, avremo che $x = \sqrt[n]{y} \iff x^n = y$

→ Vediamo alcune PROPRIETÀ di queste radici sui reali positivi. Per ogni $a, b \geq 0$ ed $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ avremo

a) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$;

b) $\sqrt[m \cdot n]{a^m} = \sqrt[n]{a}$;

c) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ se $b \neq 0$;

d) $\sqrt[n]{a^n} = a$;

e) $(\sqrt[n]{a})^n = a$;

Valide considerando l'argomento $\underline{\underline{a \geq 0}}$

$\Downarrow$

Infatti, se consideriamo $\sqrt{x^2}$, vediamo con un esempio che

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 \neq -3$$

$\Downarrow$

Perché vale che $\sqrt{x^2} = |x| \; \forall x \in \mathbb{R}$

• POTENZE DISPARI DI NUMERI NEGATIVI

Nel caso di n dispari, dato $y \leq 0$ esiste un'unica $x \leq 0$ t.c. $y = x^n$

⚠ Le radici associate a funzioni potenza con n dispari, saranno ben definite anche per $x < 0$

⚠ Le regole delle radici elencate prima non sono più valide per argomenti negativi

◦ RAZIONALIZZAZIONE

Esistono diversi modi per razionalizzare delle espressioni, ovvero ELIMINARE le (eventuali) radici dai denominatori

a) Per casi come $\frac{a}{\sqrt[n]{b}}$, con $b>0$, possiamo moltiplicare e dividere per $\sqrt[n]{b^{n-1}}$

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a}{\sqrt[n]{b}} \cdot 1 = \frac{a}{\sqrt[n]{b}} \cdot \frac{\sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{b^{n-1}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{\underbrace{b \cdot b^{n-1}}_{b^{1+n-1} = b^n}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-1}}}{b}$$

b) Per espressioni del tipo $\dfrac{c}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$

Si può moltiplicare e dividere per $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$ (ricordando che $(x-y)(x+y) = x^2 - b^2$)

$$\frac{c}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{c}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}} = \frac{c(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})} = \frac{c(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{a-b}$$

- <u>ANALISI DI ESPRESSIONI CONTENENTI RADICI</u>

Consideriamo

$$\sqrt[12]{(x+3)^3}$$

Vogliamo determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ questa espressione HA SIGNIFICATO e, se possibile, SEMPLIFICARLA.

Perché sia ben definita, bisogna che

$\equiv$ Insieme di definizione

$$(x+3)^3 \geq 0 \iff x+3 \geq 0 \iff x \geq -3 \rightarrow$$ Dominio della nostra funzione

Notiamo quindi che

$$\sqrt[12]{(x+3)^3} = \sqrt[4 \cdot 3]{(x+3)^3} = \sqrt[4]{x+3}$$ $\rightarrow$ Semplificazioni valide essendo $x+3$ positivo nel dominio a cui ci siamo ristretti

→ Abbiamo visto che se $a \geq 0$, con $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ allora

$$\sqrt[m \cdot n]{a^m} = \sqrt[n]{a}$$

Ma che succede, in generale, se non conosciamo il segno di a, quando m è PARI?

In generale vale il seguente

$$\sqrt[n \cdot m]{a^m} = \sqrt[n]{|a|} \qquad \forall a \in \mathbb{R},\ m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

↳ Infatti, con m pari allora $a^m = |a|^m \ \forall a \in \mathbb{R}$

Per vedere un'applicazione di tutto ciò, consideriamo

$$\sqrt[4]{(a+b)^2} \quad \text{con} \quad a,b \in \mathbb{R}$$

L'espressione ha significato per ogni scelta di a,b poiché $(a+b)^2 \geq 0$, quindi

$$\sqrt[4]{(a+b)^2} = \sqrt[2\cdot 2]{(a+b)^2} = \sqrt[2]{|a+b|}$$

POTENZE INTERE E RAZIONALI

- POTENZE A ESPONENTE INTERO

Definiamo ora le potenze ad esponente intero, ossia a^n con $n \in \mathbb{Z}$. Sia $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, e sia $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$. Definiamo

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}} \qquad \left(b^{-m} = \frac{1}{b^m} \right)$$

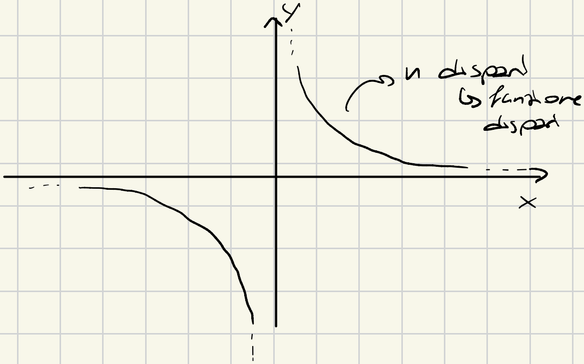
Valida e motivata dal fatto che se le regole delle potenze valgono anche per esponenti negativi, allora

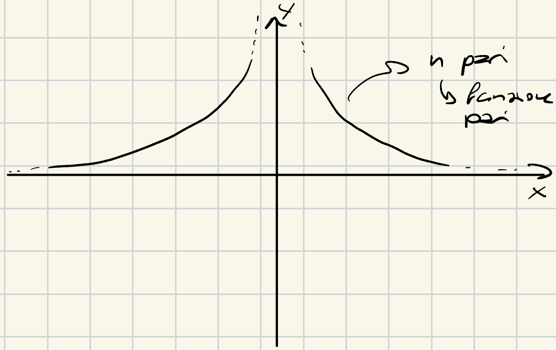
$$\underline{1} = a^0 = a^{n-n} = \underline{a^n \cdot a^{-n}} \Rightarrow a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$

⚠ Non hanno significato espressioni del tipo 0^n, con $n < 0$

→ Le potenze ad esponente intero soddisfano alle medesime regole di quelle ad esponente naturale

→ Esaminando i grafici della funzione potenza n-esima quando $n < 0$ $(y = x^n)$





• <u>POTENZE A ESPONENTE RAZIONALE</u> → $a^{\frac{m}{n}}$

Definite quando la base a è POSITIVA (o STRETT. POSITIVA)
Siano $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Per $a>0$ abbiamo

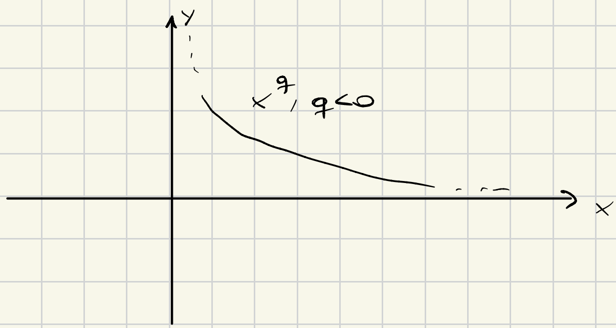
$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

→ Se le regole delle potenze valgono anche con esponenti razionali, deve essere

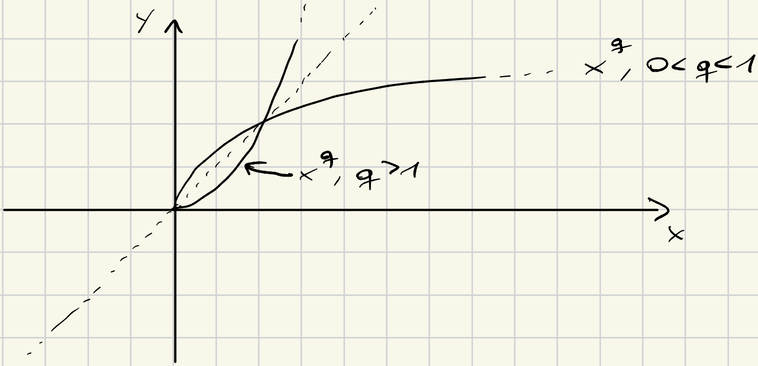
$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n}} = a^m$$

⚠ Espressioni con base 0 ed esponente NEGATIVO, così come espressioni con esponente frazionario e base negativa, non hanno senso

→ Funzioni di questo tipo associano x^q a x. Se $q<0$ non è intero, il dominio della funzione $x \mapsto x^q$ è $]0, +\infty[$



→ Se $q>0$, il dominio diventa $[0, +\infty[$



→ Anche le potenze ad esponente razionale soddisfano le MEDESIME REGOLE di quelle ad esponente naturale