RETTE E CONICHE

RETTE E CONICHE

EQUAZIONE ESPLICITA DI UNA RETTA

Quando $b \neq 0$, possiamo esplicitare la variabile y rispetto alla variabile x, ed una retta di equazione $ax+by+c=0$ può essere riscritta come

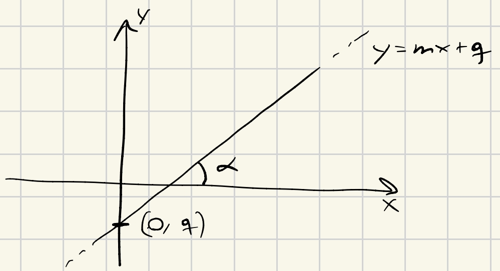
$$y = mx + q$$

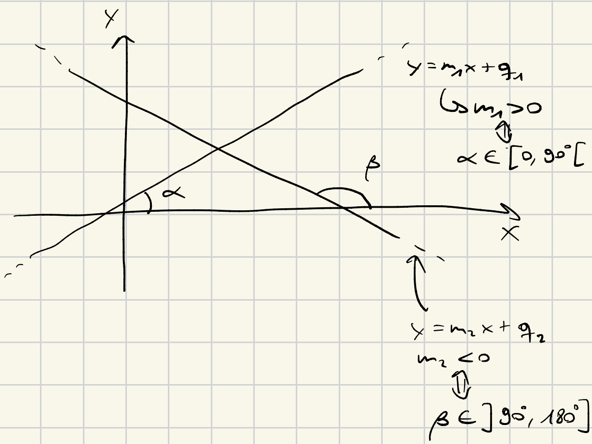
con $m = -\frac{a}{b}$, $q = -\frac{c}{b}$

- Il coefficiente m è il cosiddetto COEFFICIENTE ANGOLARE e rappresenta la PENDENZA della retta

- Il coefficiente q è la cosiddetta QUOTA. Rappresenta l'altezza alla quale la retta interseca l'asse delle ordinate

→ Si ha che $m = \tan(\alpha)$, dove $\alpha \in]-90°, 90°[$ è l'angolo formato dalla retta con l'asse delle ascisse





Dall'analisi del coefficiente angolare di due rette inoltre si può dedurre qual è la loro posizione reciproca. Infatti se $r_1: y = m_1x + q_1$ ed $r_2: y = m_2x + q_2$ allora

$\Rightarrow$ Se $m_1 = m_2$ le due rette sono parallele (e se $q_1 = q_2$ sono COINCIDENTI)

$\Rightarrow$ Se $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ le due rette sono perpendicolari

$\Rightarrow$ Se $m_1 \neq m_2$ le due rette sono incidenti

- Infine, dato un punto $P = (x_1, x_2)$, l'equazione

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

rappresenta il fascio di rette passanti per P, ad esclusione della retta // all'asse delle ordinate $x = x_0$. Una retta del fascio viene fissata una volta scelto il coefficiente angolare m, ovvero una volta fissata la sua pendenza

ASSE DI UN SEGMENTO: è la retta perpendicolare al segmento passante per il suo punto medio

DISTANZE TRA PUNTI E RETTE NEL PIANO

- DISTANZA RETTA-RETTA

Date due rette PARALLELE r_1, r_2, la DISTANZA tra r_1 e r_2 è la lunghezza di qualsiasi segmento che interseca PERPENDICOLARMENTE le due rette.

Siano $r_1: ax + by + c = 0$, $r_2: ax + by + c_2 = 0$, le equazioni delle due rette parallele.

$$d(r_1, r_2) = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

- DISTANZA PUNTO-RETTA

È la lunghezza del segmento $\perp$ alla retta che congiunge il punto alla retta stessa; se il punto appartiene alla retta tale lunghezza è 0.

$\rightarrow$ Se il punto non appartiene alla retta, considerando $r: ax + by + c = 0$, $P = (x_1, y_1)$

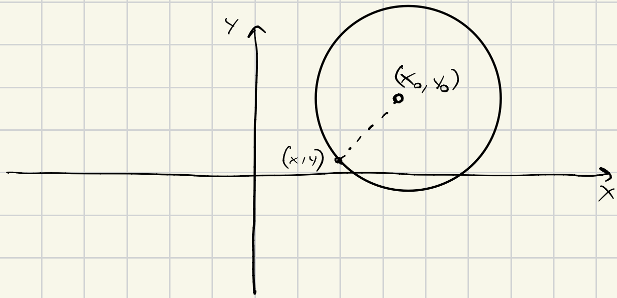
$$d(P, r) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

CONICHE

EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA

Sia $C = (x_0, y_0)$ un punto nel piano cartesiano e sia $r > 0$ un reale positivo. La CIRCONFERENZA di CENTRO C e raggio r è il luogo dei punti (x,y) che hanno distanza pari ad r da C. Un punto di coordinate (x,y) ha distanza r dal punto C se e solo se

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = r \qquad (*)$$



RICONOSCERE L'EQUAZIONE DI UNA CIRCONFERENZA

Spesso l'equazione di una circonferenza non viene fornita direttamente come (*), quindi non è immediato riconoscere quali siano il centro ed il raggio. Infatti spesso ci ritroviamo equazioni di 2° grado nelle variabili x, y, del tipo

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + ax + by + c = 0$$

- Bisogna che α e β devono coincidere (si considera $\alpha = \beta = 1$)
- Bisogna che il termine xy abbia coefficiente uguale a 0

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

Per poter concludere se l'equazione a cui ci siamo ricondotti rappresenta o meno una circonferenza, COMPLETIAMO DUE QUADRATI aggiungendo e sottraendo ad ambo i membri dell'equazione i termini $\frac{a^2}{4}$ e $\frac{b^2}{4}$

$$x^2+y^2+ax+by+c+\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}$$

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c$$

Se non è valida (<0), allora l'equazione **non** descrive una circonferenza

→ Se l'ultima equazione ha $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c\geq 0$, allora rappresenta una CIRCONFERENZA

↳ $C=\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$ e raggio $r=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}$

LA CIRCONFERENZA PER TRE PUNTI NON ALLINEATI

→ Tre punti non allineati A, B, C ci permettono di determinare univocamente la circonferenza alla quale appartengono

→ Il centro è l'intersezione degli assi dei segmenti AB e BC, ovvero delle rette passanti per i punti medi di tali segmenti ed a loro ortogonali

↳ $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

CENTRO (x_0, y_0)

QUADRATO DELLA DISTANZA TRA CENTRO E (A, B OPPURE C)

POSIZIONE RECIPROCA DI RETTA E CIRCONFERENZA

Data una retta $r: ax+by+c=0$ ed una circonferenza $\mathscr{C}: x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$, esse possono trovarsi in 3 possibili posizioni reciproche:

- la retta r è SECANTE a $\mathscr{C}$, ovvero interseca la circonferenza in 2 punti distinti
- la retta r è TANGENTE a $\mathscr{C}$, ovvero interseca la circonferenza in un unico punto
- la retta r è ESTERNA a $\mathscr{C}$, ovvero non interseca mai $\mathscr{C}$

Per capire la posizione reciproca bisogna cercare le soluzioni del sistema di 2° grado

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0 \end{cases}$$

CURVE RAPPRESENTATE DA EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

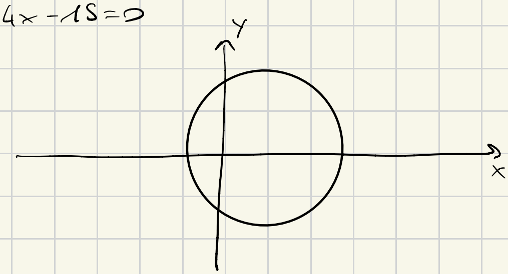
$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

A seconda del segno del DISCRIMINANTE $\Delta := b^2-4ac$ possiamo avere TRE TIPI DI CURVE:

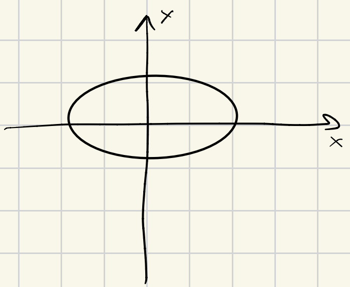
- Se $\Delta<0$ la curva è detta di tipo ELLITTICO
- Se $\Delta=0$ la curva è detta di tipo PARABOLICO
- Se $\Delta>0$ la curva è detta di tipo IPERBOLICO

GRAFICI DI CURVE DI TIPO ELLITTICO

→ $4x^2+4y^2-4x-15=0$

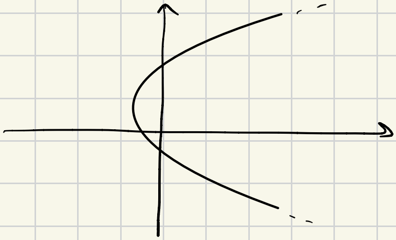


→ $15x^2+5y^2+15x-2y+25=0$

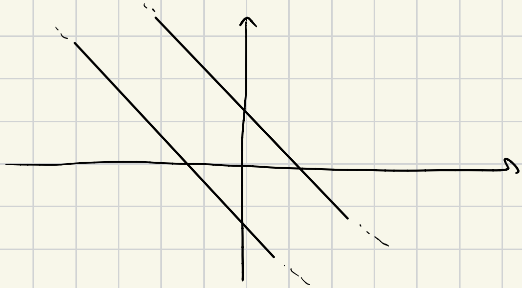


GRAFICI DI CURVE DI TIPO PARABOLICO

→ $y^2 - x - 1 = 0$

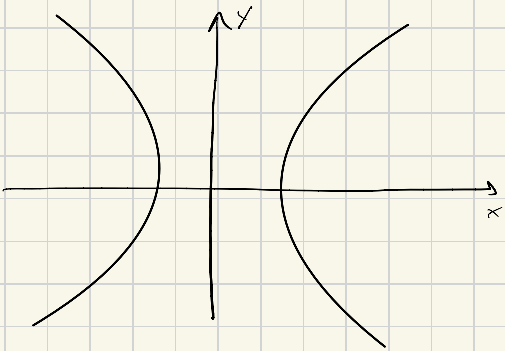


→ $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$

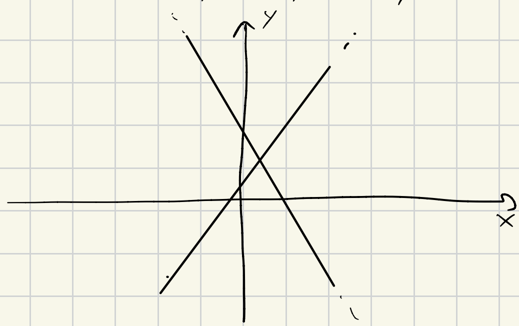


GRAFICI DI CURVE DI TIPO IPERBOLICO

→ $3x^2 - 5y^2 + 2x - 2y - 1 = 0$



→ $12x^2 - 2y^2 - 2xy - 2x + y = 0$



→ Ellissi, parabole e iperboli sono delle sezioni coniche. Tali curve sono infatti il luogo dei punti ottenibile intersecando la superficie di un cono CIRCOLARE con un PIANO

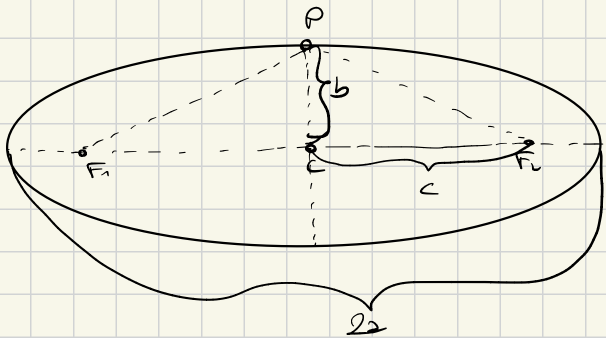
ELLISSE NEL PIANO CARTESIANO

→ È il luogo geometrico dei punti del piano per i quali la SOMMA DELLE DISTANZE da due punti fissi, detti FUOCHI, è costante.

$F_1 = (x_1, y_1)$ $\quad$ $F_2 = (x_2, y_2)$

→ Ellisse $a>0$

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}+\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}=2a$$



$$d(F_1,P)+d(P,F_2)=2a$$

→ Se la retta passante per F_1 e F_2 è // all'asse x e il centro $C = (x_0, y_0)$, allora l'equazione può essere scritta come

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1, \quad 0<b\leq a$$

$$\Rightarrow \quad c=\sqrt{a^2-b^2}$$

• Se i fuochi appartengono ad una retta // all'asse y, l'equazione diventa

$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1, \quad 0<b\leq a$$

EQUAZIONE DELLA PARABOLA

→ È il luogo dei punti del piano EQUIDISTANTI da un punto F detto FUOCO e da una retta d detta DIRETTRICE

$F=(x_1, y_1)$

$d: ax+by+c=0$

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

→ La retta ⊥ alla direttrice e passante per il fuoco incontra la parabola in un punto detto VERTICE

→ Se trasliamo e ruotiamo rigidamente la parabola in modo che la retta per il fuoco ed il vertice sia // all'asse y, allora la sua equazione può essere scritta come

$$y - y_0 = \pm \frac{1}{4p}(x-x_0)^2$$

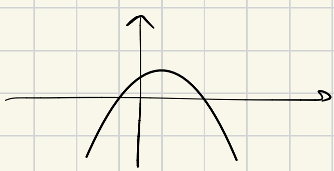
coord. del vertice e p rappresenta la distanza tra fuoco e il vertice

$$\Updownarrow$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

Se consideriamo il $\oplus$ (o analogamente $a>0$), allora la parabola ha concavità rivolta verso l'alto

Se consideriamo $\ominus$ (o ~ $a<0$), allora la parabola ha concavità verso il basso



→ Considerando $y = ax^2+bx+c \Rightarrow$ Vertice ha coordinate $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

→ Scambiando $x \Leftrightarrow y$ otteniamo parabole con concavità rivolta a dx o sx

EQUAZIONE DELL' IPERBOLE

→ Luogo dei punti del piano tali per cui la DIFFERENZA delle distanze da due punti fissi, detti FUOCHI, é costante in modulo

$F_1 = (x_1, y_1)$ $\quad$ $F_2 = (x_2, y_2)$

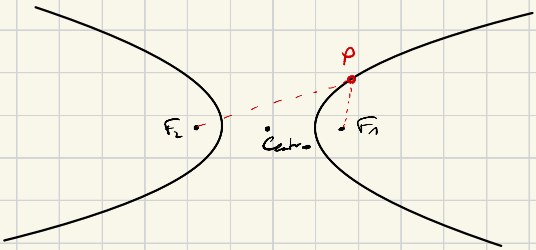
$$\left| \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} - \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2} \right| = 2a \quad (\text{dove } a>0)$$

→ differenza delle distanze dai fuochi

→ Come per l' ellisse, se supponiamo che la retta passante per i due fuochi sia parallela all' asse delle ascisse, l' equazione dell' iperbole può essere scritta nella forma

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Con $a, b > 0$, dove (x_0, y_0) sono le coordinate del suo centro, ovvero il PUNTO MEDIO TRA I DUE FUOCHI



→ La distanza c di ciascuno dei due fuochi dal centro é data da

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \underbrace{(= F_1C = F_2C)}_{\circledast}$$

→ Nel grafico appena riportato, i segmenti in ⊛ si trovano sulla retta $y = y_0$.
L' iperbole interseca la retta $y = y_0$ in due punti V_1, V_2, chiamati VERTICI

→ La distanza di ciascun vertice dal centro é pari ad a, quindi i segmenti V_1C e V_2C hanno lunghezza pari ad $a<c$

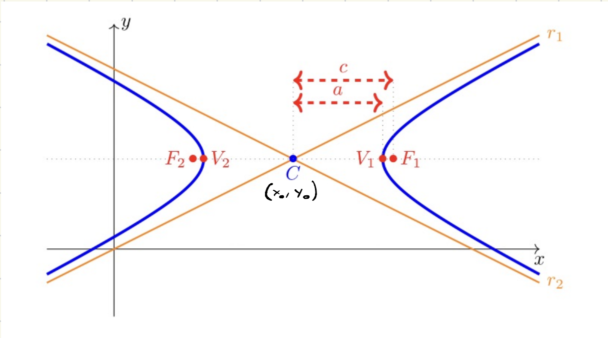
→ Di conseguenza deduciamo che un punto (x,y) dell'iperbole è tale che $|x-x_0| \geq a$. L'iperbole è quindi costituita da due componenti, a seconda che $x \geq x_0 + a$ o $x \leq x_0 - a$

↓ Dette RAMI, sono illimitate

→ Esistono due rette r_1, r_2 incidenti nel centro dell'iperbole, dette ASINTOTI, che dividono il piano in 4 settori e che INTERSECANO L'IPERBOLE ALL'INFINITO. I due rami dell'iperbole si trovano nei due settori opposti che NON CONTENGONO la retta $x = x_0$

⇒ Le equazioni dei due asintoti sono

$$r_{1,2} : y - y_0 = \pm \frac{b}{a}(x - x_0)$$

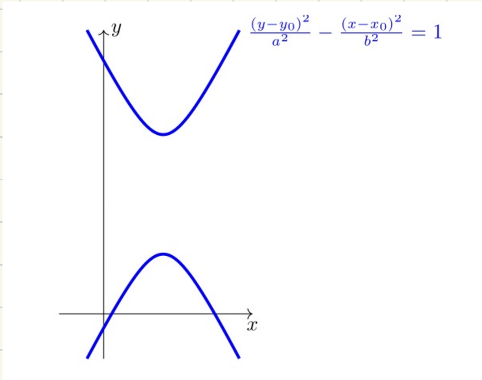


→ In questo caso in cui l'asse dell'iperbole, come detto, è parallelo all'asse delle ascisse, il coefficiente b determina (insieme ad a) la PENDENZA degli asintoti, ovvero l'ampiezza dei rami

∘ Se i fuochi si trovano su una retta parallela all'asse delle ordinate, l'equazione dell'iperbole diventa

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$$

Quindi si scambiano i ruoli di x ed y



SUPERFICI E VOLUMI

- SFERA: $S = 4\pi r^3$

  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

- PIRAMIDE RETTA: $S_L = \frac{\underbrace{P}_{\text{perimetro della base}} \cdot \sqrt{\underbrace{h^2}_{\text{altezza piramide}} + \underbrace{r^2}_{\text{raggio del cerchio inscritto alla base}}}}{2}$

  PERIMETRO DELLA BASE

  RAGGIO DEL CERCHIO INSCRITTO ALLA BASE

  ALTEZZA PIRAMIDE

  $\Downarrow$

  $a = \sqrt{h^2 + r^2}$

  È LA LUNGHEZZA DELL'APOTEMA, OVVERO IL SEGMENTO CHE CONGIUNGE IL VERTICE DELLA PIRAMIDE CON I PUNTI DI INTERSEZIONE TRA IL CERCHIO INSCRITTO E I LATI DELLA BASE

  $S = S_L + \underbrace{S_B}_{\text{area della base}}$

  AREA DELLA BASE

  → Una piramide retta con base POLIGONALE ad n lati viene chiamata PIRAMIDE n-AGONALE retta

- PIRAMIDE (GENERICA): $V = \frac{S_B \cdot h}{3}$

- CONO: → Si tratta di un caso particolare di piramide retta

$$S_B = \pi r^2, \quad S_L = \pi r\sqrt{h^2+r^2}, \quad V = \frac{1}{3}\pi r^3 h$$

- CILINDRO CIRCOLARE RETTO: $S_B = \pi r^2$, $S_L = 2\pi r h$, $V = \pi r^2 h$

- CILINDRO (GENERICO): → Porzione di spazio formata da tutti i segmenti che congiungono due copie di una stessa figura piana detta BASE, appartenenti a due piani paralleli

$$V = S_B h$$

→ Un cilindro con base POLIGONALE viene detto PRISMA (parallelepipedo se la base è un parallelogramma)

→ Se i segmenti che congiungono i vertici dei poligoni di base corrispondenti sono perpendicolari alle basi, il prisma si dice RETTO