MONOMI E POLINOMI

POLINOMI

MONOMI

- Si definisce MONOMIO NELL'INDETERMINATA x un'espressione contenente lettere, numeri, e l'indeterminata x (che è sempre una "lettera", ma a cui riconosceremo una funzione particolare), in cui NON COMPAIONO addizioni o sottrazioni

$$\frac{2}{5}abx^2, \quad 3a^2b^2ct^2x, \quad \frac{5a^6bx^4}{ct^2} = \frac{5a^6b}{ct^2}x^4$$

- Possiamo avere monomi in più di una indeterminata

$$3xy^2, \quad \frac{2}{3}xyz, \quad \frac{3}{2}x^3z^2$$

Un monomio costituito da un solo fattore numerico e da potenze di parametri ed indeterminate con basi distinte si dice RIDOTTO (A FORMA NORMALE).

$$\underbrace{\overset{8}{\cancel{24}} \cdot \frac{\cancel{a^2b}}{\cancel{3a}} \cdot \frac{x^2\cancel{y^4}b^2}{y^{\cancel{8}}\cancel{ab}}}_{\text{NON RIDOTTO}}, \quad \underbrace{\boxed{8b^2\frac{x^2}{y}}}_{\text{RIDOTTO}}$$

$$8 \cdot \frac{x^2b^2}{y} = \boxed{8b^2\frac{x^2}{y}}$$

- Un monomio in cui le indeterminate NON COMPAIONO al denominatore si chiama MONOMIO INTERO

$$2a^2b^2xy^3, \quad \frac{2}{3a}bc^2xyz$$

Sono monomi interi nelle indeterminate x, y e z

• Il GRADO di un monomio INTERO RIDOTTO NON NULLO è la SOMMA degli esponenti di tutte le INDETERMINATE

ESEMPIO: Monomio nelle indeterminate (incognite) x, y

$$\frac{5}{4}\frac{ac^2}{b^3}xy^3$$

→ Il grado è 4 $(x \to 1;\ y \to 3 \Rightarrow 1+3=4)$

$$\frac{5}{4}\frac{ac^2}{b^3}\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x}}\cdot\frac{y^{\cancel{6}\,3}}{\cancel{y^3}}$$

→ Il grado NON è ~~2+1+6+3~~

→ Il grado è 4

$$\Downarrow$$

$$\frac{5}{4}\frac{ac^2}{b^3}x\cdot y^3$$

ESEMPIO: Il grado del monomio

$$3x^3y^2wz^4$$

Nelle indeterminate x, y, w, z → 10 $(3+2+1+4)$

SOMMA TRA MONOMI

• Diremo che due monomi sono SIMILI se presentano LE STESSE INDETERMINATE con gli STESSI ESPONENTI. Ad esempio i due monomi nelle INDETERMINATE x, y

$$\frac{3}{2}ab\,x^2y \quad , \quad 6a^2c\,x^2y$$

sono simili

• La SOMMA di due monomi simili è quel monomio simile ai due di partenza, in cui il coefficiente delle indeterminate è costituito dalla SOMMA dei coefficienti con cui le indeterminate compaiono nei monomi di partenza

$$\frac{3}{2}ab\,x^2y + 6a^2\,cx^2y = \underbrace{\left(\frac{3}{2}ab + 6a^2c\right)x^2y}$$

ESEMPIO: la somma dei monomi $6abx^2y$ e $2a^2b^2x^2y$ nelle indeterminate x ed y è

$$6abx^2y + 2a^2b^2x^2y = (6ab + 2a^2b^2)\,x^2y = 2ab(3+ab)\,x^2y$$

→ MONOMIO

x^2y^2

→ POLINOMIO

$$\underbrace{6abx^2y^2}_{\text{1 MONOMIO}} + \underbrace{2a^2b^2x^2y}_{\text{1 MONOMIO (DISTINTO)}}$$

$2\cdot 3$

$$6ab + 2a^2b^2 = 2(3ab + a^2b^2) =$$
$$= 2ab(3+ab)$$

- **PRODOTTO TRA MONOMI**

Il prodotto tra due o più monomi è quel monomio che ha per coefficiente numerico il prodotto dei coefficienti numerici di tutti i fattori, e per parte letterale il prodotto di tutte le parti letterali. Il prodotto delle parti letterali è dato dal prodotto di tutte le lettere che compaiono nei monomi, ciascuna con esponente dato dalla somma degli esponenti con cui compare in ogni monomio

ESEMPIO: $$(3ab^2cxy^3)\left(-\frac{2}{3}bc^2y\right) = \cancel{3}\cdot\left(-\frac{2}{\cancel{3}}\right)\cdot a\cdot b^2\cdot c\cdot x\cdot y^3\cdot b\cdot c^2\cdot y$$

b^3 c^3 y^4

$$= -2ab^3c^3xy^4$$

ESEMPIO: $$\left(\frac{ab^2x}{5c^5y^3}\right)\left(\frac{25c^2y}{7a^2b}\right) = \frac{\cancel{25}^{5}}{7\cdot\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{a}\cancel{b^2}\cancel{c^2}\cancel{y}}{a^{\cancel{2}}\cancel{b}c^{\cancel{5}\,3}y^{\cancel{3}\,2}} = \frac{5}{7}\cdot\frac{bx}{ac^3y^2}$$

- ELEVARE un monomio alla potenza n equivale ad elevare alla potenza n il coefficiente numerico ed ogni potenza letterale che compare nel monomio

ESEMPIO: $$(3ab^2cxy^3)^4 = 3^4\cdot a^4\cdot(b^2)^4\cdot c^4\cdot x^4\cdot(y^3)^4 = 81a^4b^8c^4x^4y^{12}$$

POLINOMI

Si definisce POLINOMIO la somma di due o più monomi. Un polinomio nell' indeterminata x è una somma di monomi nell' indeterminata x. Un polinomio in un certo numero di indeterminate è la somma di uno o più monomi nelle stesse indeterminate. Specificheremo sempre quali sono le indeterminate e quali le restanti espressioni letterali da considerare come parametri

L' espressione

$$\frac{2}{3b}ax^5 - \frac{4}{5}a^5b^2x^3 - 6\frac{a^3}{b}x^2 - 2$$

è un polinomio nell' indeterminata x

- Il GRADO di un polinomio (in una o più indeterminate) è il MASSIMO grado dei monomi (nelle stesse indeterminate) che lo compongono

ESEMPIO: $\frac{2}{3b}ax^5 - \frac{4}{5}a^5b^2x^3 - 6\frac{a^3}{b}x^2 - 2 \rightarrow$ Nell' indeterminata x : grado 5

• SOMMA TRA POLINOMI

La SOMMA tra due o più polinomi (in una o più indeterminate) è quel polinomio formato dalla somma di tutti i monomi che compaiono nei singoli addendi. Una volta effettuata la somma, se ci sono termini simili si semplificano

ESEMPIO: Somma tra $(3x + 2abx^2 + 1)$ e $(4x^4 + abx + x^2)$ nella variabile x

$$\Rightarrow (3x + 2abx^2 + 1) + (4x^4 + abx + x^2) = 4x^4 + (2ab+1)x^2 + (3+ab)x + 1$$

- PRODOTTO DI POLINOMI

Il prodotto tra due polinomi si ottiene MOLTIPLICANDO ciascun monomio che compone il primo polinomio per tutti i monomi che compongono il secondo

ESEMPIO: Prodotto tra (abx^2+c) e $(ax+b)$

$$\rightarrow (abx^2+c)(ax+b) = abx^2\cdot ax + abx^2\cdot b + c\cdot ax + c\cdot b$$

$$= a^2bx^3 + ab^2x^2 + acx + bc$$

ESEMPIO: Prodotto tra $(x-y)$ e (x^2+xy+y^2)

$$(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3+x^2y+xy^2-yx^2-xy^2-y^3 = x^3-y^3$$

$\rightarrow$ PRODOTTO NOTEVOLE (tra poco lo vedremo)

PRODOTTI NOTEVOLI

Spesso si incontrano prodotti tra polinomi il cui risultato è immediatamente riconoscibile a partire dalla forma stessa del prodotto (PRODOTTI NOTEVOLI)

Consideriamo A e B due monomi, allora

$$(A+B)(A-B) = A^2 + AB - AB - B^2 = A^2 - B^2$$

Questo è un caso particolare della seguente regola generale:

$$(A^n + \cancel{A^{n-1}B} + \dots + \cancel{A^2B^{n-2}} + \cancel{AB^{n-1}}) - (\cancel{BA^{n-1}} + \cancel{A^{n-2}B^2} + \cancel{\dots} + \cancel{AB^{n-1}} + B^n) = A^n - B^n$$

$$(A-B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \dots + AB^{n-2} + B^{n-1}) =$$

$$= (A-B)\sum_{k=0}^{n-1} A^{n-1-k}B^k = A^n - B^n$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

ESEMPIO: $(A-B)(A^4+A^3B+A^2B^2+AB^3+B^4) = (A-B)\sum_{k=0}^{4} A^{4-k}B^k = A^5-B^5$

ESEMPIO: $(A+B)(A^2-AB+B) = \dots = A^3+B^3$ → Caso particolare di prodotto notevole $(A-(-B))$

- In generale: siano A, B monomi. Se $n \in \mathbb{N}$ è dispari allora

$$(A+B)(A^{n-1}-A^{n-2}B+\dots-AB^{n-2}+B^{n-1}) = A^n+B^N$$

Se $n \in \mathbb{N}$ è PARI allora

$$(A+B)(A^{n-1}-A^{n-2}B+\dots+AB^{n-2}-B^{n-1}) = A^n-B^N$$

Queste due cose sono una diretta conseguenza del caso generale visto poco fa:

$$(*) \quad A-B\sum_{k=0}^{n-1} A^{n-1-k}B^k = A^n-B^n$$

⇒ Osserviamo che $(A+B)=(A-(-B))$

- Altri esempi di prodotti notevoli sono il QUADRATO DI UN BINOMIO. Siano A, B monomi. Allora

$$(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$$

→ Caso generale del QUADRATO DI UN POLINOMIO.
Dati $A_1, \dots A_n$ monomi, allora

$$(A_1+A_2+\dots+A_n)^2 = A_1^2+A_2^2+\dots+A_n^2+2A_1A_2+2A_1A_3+\dots+$$
$$2A_2A_3+2A_2A_4+\dots+2A_{n-1}A_n$$

↳ somma dei quadrati di tutti i monomi e da tutti i doppi prodotti di ciascun termine A_k

ESEMPIO: $(A+B+C)^2 = A^2+B^2+C^2+2AB+2AC+2BC$

- Siano A, B monomi. Allora il cubo di $A+B$ sarà

$$(A+B)^3 = A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$$

- In generale, la potenza n-esima di un binomio sarà definita nel seguente modo:

→ Siano A, B monomi, e sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Allora

$$(A+B)^n = A^n + nA^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{2}A^{n-2}B^2 + \dots + \frac{n(n-1)}{2}A^2B^{n-2} + nAB^{n-1} + B^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ → $m!$ indica, per ogni $m \in \mathbb{N}$ il fattoriale $m! = m(m-1)(m-2)\cdots 2\cdot 1$ (per convenzione $0! = 1! = 1$)

ESEMPIO: Calcoliamo

$$(A-B)^4 = (A+(-B))^4 = \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}A^{4-k}(-B)^k =$$

$$= A^4 - 4A^3B + 6A^2B^2 - 4AB^3 + B^4$$