Disequazioni

$f(x) \geq g(x)$

$f(x) \leq g(x)$

Dobbiamo calcolare il dominio: $D(f) \cap D(g)$

Risolvere una disequazione significa trovare tutti i valori dell'incognita $x \in D(f) \cap D(g)$ che soddisfa la disuguaglianza

$f(x) > g(x)$

Dobbiamo cercare di trovare una forma del tipo

$h(x) > 0$

es. $\underbrace{x+3}_{f(x)} > \underbrace{x^2}_{g(x)}$

Portare tutto sulla sinistra

$x + 3 - x^2 > 0$

con le equazioni: $x = -3 \iff -x = 3$

$x^2 - x - 3 < 0$

NB quando cambiamo il segno degli elementi dobbiamo cambiare anche la direzione della disequazione

$x^2 - x - 3 = 0$

$\Delta = 1 + 4 \cdot 3 = 1 + 12 = 13 > 0$

$x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2} = \begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{13}}{2} \\ \dfrac{1-\sqrt{13}}{2} \end{cases}$

sol. interne $S: \dfrac{1-\sqrt{13}}{2} < x < \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$

Step

1. trovo il dominio
2. risolvo l'equazione corrispondente
3. se il segno è $>$ $\Rightarrow$ prendo le sol. esterne
4. se il segno è $<$ $\Rightarrow$ " " " interne

valgono tutte le regole viste x l'equazioni

tranne $-x < 0 \iff x > 0$

se $A(x) > 0$ $\quad f(x) > g(x) \iff A(x) \cdot f(x) > A(x) \cdot g(x)$

se $A(x) < 0$ $\quad f(x) > g(x) \iff A(x) \cdot f(x) < A(x) \cdot g(x)$

segno opposto

Disequazione di 1° grado

$ax + b \geq 0$

se $ax + b \geq 0$

$ax + b = 0 \qquad x = -\frac{b}{a} \qquad x \geq -\frac{b}{a}$

se $-ax + b \geq 0$

$ax - b \leq 0$

$x = \frac{b}{a} \qquad x \leq \frac{b}{a}$

Disequazioni di 2° grado

$ax^2 + bx + c \geq 0 \qquad a \neq 0$

Valgono le stesse regole delle equazioni

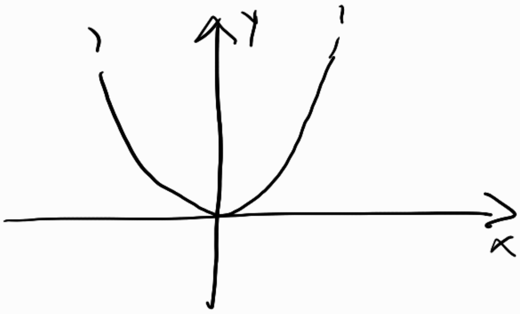
$ax^2+bx+c=0$ calcolo Δ e le sol. se esistono e sulla base del segno della disequazione trovo le soluzioni:

Parentesi grafica

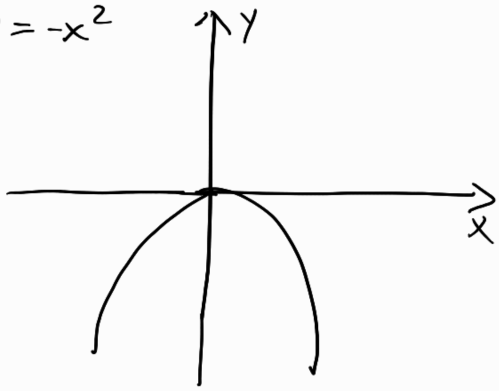
$ax^2+bx+c=0$ è una parabola

$bx+c=0$ è una retta

$y=x^2$



$y=-x^2$



$f(x)=ax^2+bx+c$

se $a>0$ $\Rightarrow$ concavità verso l'alto

se $a<0$ $\Rightarrow$ " " il basso

Prima di fare il disegno, bisogna calcolare il dominio e riportarlo sul grafico.

Esempi

- $\underbrace{(x-2)^2}_{\geq 0\ \forall x\in\mathbb{R}} < \underbrace{-3\underbrace{x^2}_{\geq 0\ \forall x}}_{\leq 0\ \forall x}$ $\qquad D: \mathbb{R}$

$\emptyset$ (la disequazione non ammette soluzioni)

$x^2-4x+4<-3x^2$

$x^2-4x+4+3x^2<0$

$4x^2-4x+4<0$

$\cancel{4}(x^2-x+1)<0$

$x^2-x+1=0 \qquad \Delta=1-4=-3<0$

$\emptyset$

- $3x^2 + x - 2 \geq 0$ $\qquad D: \mathbb{R}$

$3x^2 + x - 2 = 0$

$\Delta = 1 + 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1 + 24 = 25 > 0$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm 5}{6} = \begin{cases} \dfrac{-1-5}{6} = -\dfrac{6}{6} = -1 \\[2ex] \dfrac{-1+5}{6} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Sol. $x \leq -1 \;\vee\; x \geq \frac{2}{3}$

- $2 \cdot \dfrac{3x-2}{2} < (x^2 - 2) \cdot 2$

$3x - 2 < 2x^2 - 4$

$2x^2 - 3x - 4 + 2 > 0$

$2x^2 - 3x - 2 > 0$

$\Delta = 9 + 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9 + 16 = 25 > 0$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4} = \begin{cases} \dfrac{8}{4} = 2 \\[2ex] \dfrac{3-5}{4} = -\dfrac{2}{4} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

S: $x < -\frac{1}{2} \;\vee\; x > 2$

(quando si dice STRETTAMENTE POSITIVO $\Rightarrow > 0$
〃 NEGATIVO $\Rightarrow < 0$)

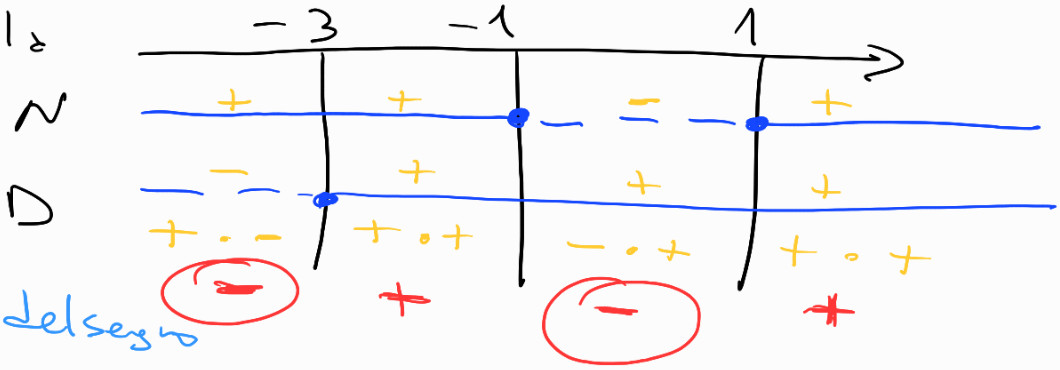
- $(x^2 - 1)(x + 3) \leq 0$

lavoro su $(x^2 - 1)(x + 3) \geq 0$

$(x^2 - 1) \geq 0 \qquad x^2 - 1 = 0 \qquad x = \pm 1 \qquad x \leq -1 \;\vee\; x \geq 1$

$x + 3 \geq 0 \qquad x \geq -3$

Tabella



regola del segno

$$S: \; x \leq -3 \;\vee\; -1 \leq x \leq 1$$

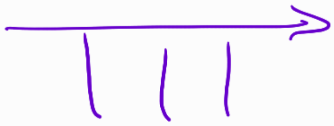
— o —

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$$

calcolo D

$N: \; f(x) \geq 0$

$D: \; g(x) > 0$



es.

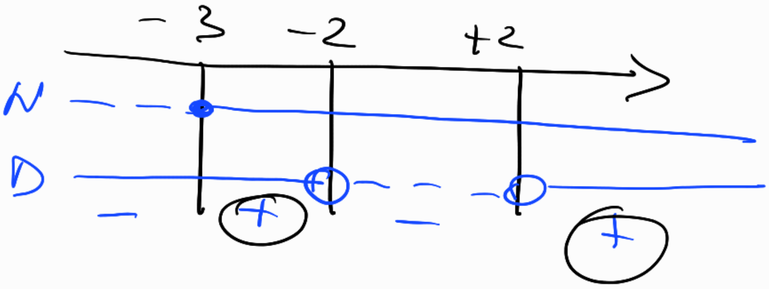
- $\dfrac{x+3}{x^2-4} \geq 0$

$D: \; x^2-4 \neq 0 \qquad x^2-4=0 \qquad x^2=4 \qquad x=\pm 2$

$D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm 2\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

$N: \; x+3 \geq 0 \qquad x \geq -3$

$D: \; x^2-4 > 0 \qquad x = \pm 2 \qquad x < -2 \vee x > 2$



$S: \; -3 \leq x < -2 \;\vee\; x > 2$

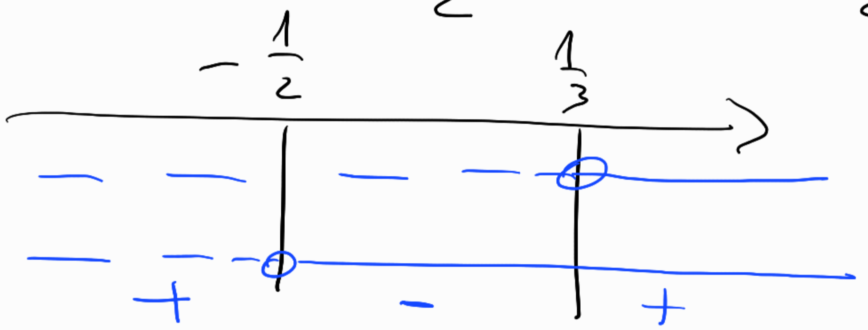
- $(27x^3-1)(8x^3+1) < 0$

$27x^3-1 > 0 \qquad 27x^3-1=0 \qquad x^3 = \frac{1}{27} = \frac{1}{3^3} \qquad x = \frac{1}{3}$

$x > \frac{1}{3}$

$8x^3+1>0$ $\quad 8x^3+1=0 \quad x^3=-\frac{1}{8}=-\frac{1}{2^3}$

$x=-\frac{1}{2} \qquad x>-\frac{1}{2}$



S: $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{3}$

- $$\frac{x^3-5x^2-x+5}{x^4-7x^2-18}\le 0$$

D: $x^4-7x^2-18\neq 0 \qquad x^2=y$

$y^2-7y-18\neq 0$

$\Delta=7^2+4\cdot 18=49+72=121>0$

$y_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{121}}{2}=\frac{7\pm 11}{2}=\begin{cases}\frac{18}{2}=9\\ -\frac{4}{2}=-2\end{cases}$

$y=9 \qquad\qquad y=-2$

$x^2=9 \quad x=\pm 3 \qquad x^2=-2 \quad \emptyset$

$D=\mathbb{R}\setminus\{\pm 3\}$ Dominio

N: $x^3-5x^2-x+5\geq 0$

$(x^2-1)(x-5)\geq 0$

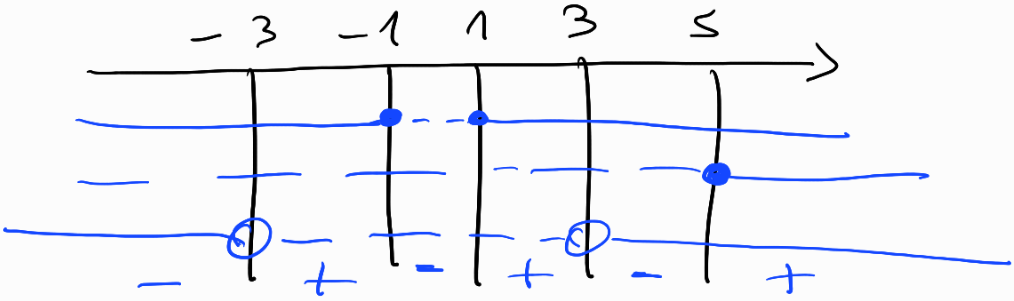
$x^2-1\geq 0 \qquad x^2=1 \qquad x=\pm 1$

$\boxed{x\leq -1 \lor x\geq 1}$

$x-5\geq 0 \qquad \boxed{x\geq 5}$

$D: x^4 - 7x^2 - 18 > 0$

$x = \pm 3$ $\qquad \boxed{x < -3 \quad \vee \; x > 3}$



$S: \quad x < -3 \quad \vee \quad -1 \leq x \leq 1 \quad \vee \quad 3 < x \leq 5$

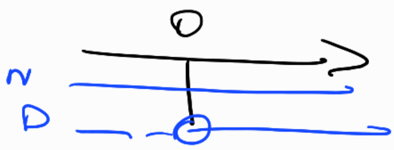
—o—

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+3}{x} > 0 \\ \\ 3x^2 - 8x < 0 \end{cases}$$

$1^a: \quad \dfrac{x^2+3}{x} > 0 \qquad D: x \neq 0 \qquad \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$N: \quad x^2 + 3 > 0 \qquad x^2 > -3 \qquad \mathbb{R}$

$D: \quad x > 0$

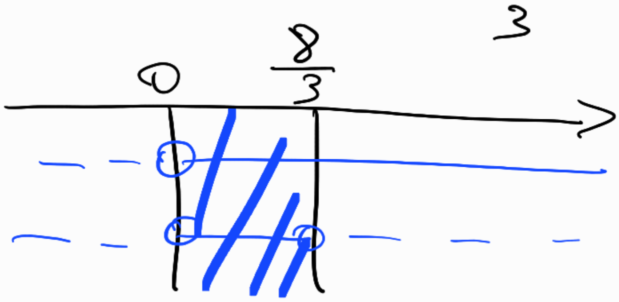


$x > 0$

$2^a: \quad 3x^2 - 8x < 0$

$x(3x - 8) < 0$

$x = 0 \qquad x = \dfrac{8}{3} \qquad 0 < x < \dfrac{8}{3}$



Sol: $0 < x < \dfrac{8}{3}$

$$\sqrt[n]{f(x)} \geq g(x)$$

$$D: \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0\} \cap D(f) \cap D(g)$$

se $g(x) < 0 \Rightarrow$ la disuguaglianza è V

se $g(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq (g(x))^n$

$$\sqrt[n]{f(x)} \leq g(x)$$

se $g(x) < 0 \Rightarrow$ la disuguaglianza è F

se $g(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \leq (g(x))^n$

es.

$$\sqrt{x} < \sqrt[4]{9-2x}$$

D: $x \geq 0$

$9 - 2x \geq 0 \Rightarrow 2x \leq 9 \quad x \leq \frac{9}{2}$

D: $x \in \left[0, \frac{9}{2}\right] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{9}{2}$

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^4 < \left((9-2x)^{\frac{1}{4}}\right)^4$$

$$x^2 < 9 - 2x$$

$$x^2 + 2x - 9 < 0$$

$$x^2 + 2x - 9 = 0$$

$$\Delta = 4 + 4 \cdot 9 = 4 + 36 = 40$$

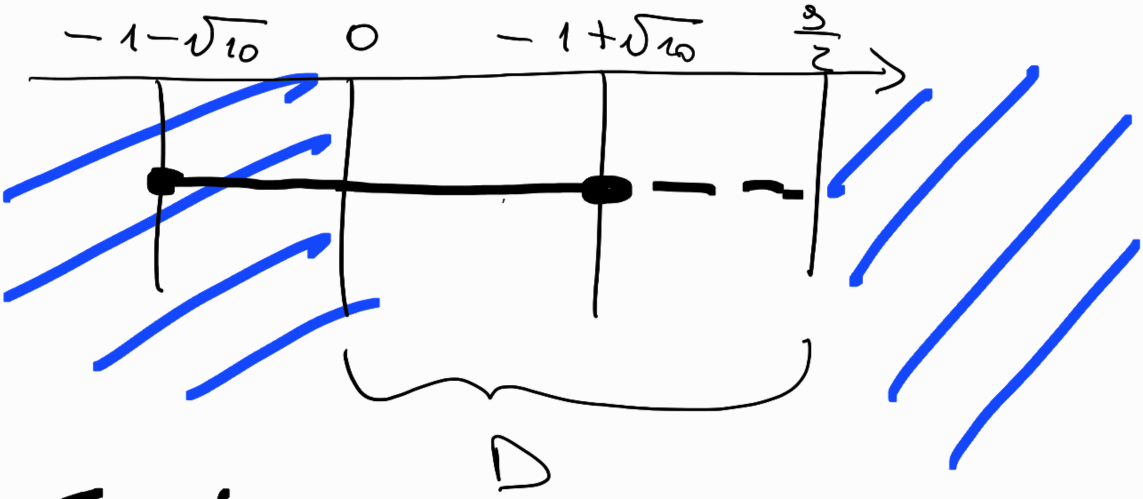
$$40 = 2^3 \cdot 5$$

$$\sqrt{2^3 \cdot 5} = 2\sqrt{2 \cdot 5}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{40}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{10}}{2} = -1 \pm \sqrt{10}$$

$$x_1 = -1 - \sqrt{10} \qquad x_2 = -1 + \sqrt{10}$$

$\underbrace{-1-\sqrt{10}}_{\simeq -4,16} \le x \le \underbrace{-1+\sqrt{10}}_{\simeq 2,16}$ $\sqrt{10} \simeq 3,16$



Sol.: $0 \le x \le -1+\sqrt{10}$

- $x-1 < \sqrt{3x^2-x-4}$

$D: \quad 3x^2-x-4 \ge 0$

$3x^2-x-4=0 \qquad \Delta = 1+4\cdot 3\cdot 4 = 1+48 = 49$

$$x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{49}}{6} = \frac{1\pm 7}{6} = \begin{cases} \frac{4}{3} \\ -1 \end{cases}$$

$D = \{x \in \mathbb{R} : x \le -1 \ \lor \ x \ge \frac{4}{3}\}$

$(x-1)^2 < 3x^2-x-4$

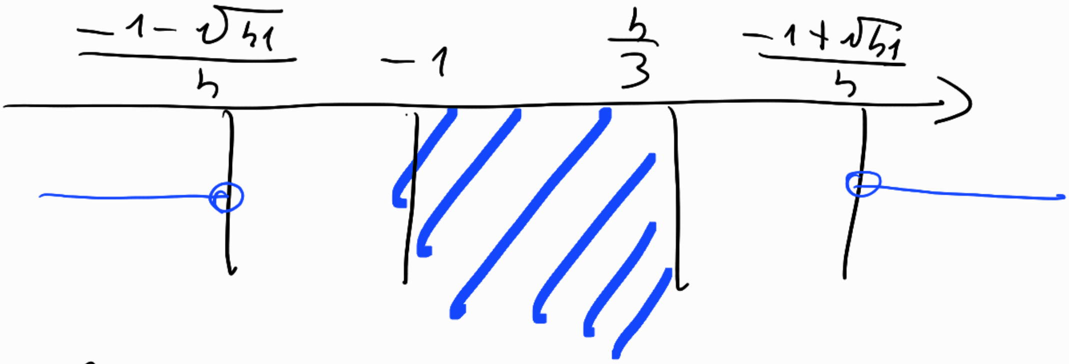
$x^2-2x+1 < 3x^2-x-4$

$2x^2+x-5>0$

$\Delta = 1+4\cdot 2\cdot 5 = 1+40 = 41$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{41}}{4} = \begin{cases} \dfrac{-1-\sqrt{41}}{4} \simeq -1,85 \\[2ex] \dfrac{-1+\sqrt{41}}{4} \simeq +1,3507 \end{cases}$$

$$x < \frac{-1-\sqrt{41}}{4} \quad \vee \quad x > \frac{-1+\sqrt{41}}{4}$$



$$S: \quad x < \frac{-1-\sqrt{41}}{4} \quad \vee \quad x > \frac{-1+\sqrt{41}}{4}$$