NUMERI REALI E POTENZE

NUMERI REALI E POTENZE

- **NUMERI NATURALI**

Insieme costituito dai numeri interi ≥ 0, definito con $\mathbb{N}$ e rappresentato seguentemente:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$$

In questo insieme sono definite le seguenti operazioni:

1) SOMMA $(+)$

2) MOLTIPLICAZIONE $(\cdot)$

3) SOTTRAZIONE $(-)$

4) DIVISIONE o RAPPORTO $(\div)$

Non sempre il risultato di queste due operazioni è un numero naturale. Quindi bisogna introdurre altri due insiemi di numeri

NUM. INTERI

NUM. RAZIONALI

- **NUMERI INTERI**

Definito come $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, \underbrace{-2}_{\text{OPPOSTO di } 2}, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

→ Qui la sottrazione è un'operazione ben definita, i cui risultati sono sempre numeri interi

→ L'unica operazione che non è sempre possibile effettuare rimane la divisione

↳ Non sempre restituisce un numero intero

• NUMERI RAZIONALI

Insieme costituito da tutti i possibili rapporti tra numeri interi m, n con $n \neq 0$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{4}{2} = 2 \\ -\frac{6}{3} = -2 \end{array}\right\} \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$$

Gli elementi di questo insieme sono legati al concetto di PARTE FRAZIONARIA DI UN INTERO

$$\hookrightarrow \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \ldots$$

→ Per ricordare alcune regole di calcolo fondamentali:

1) PRODOTTO

NUMERATORE

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ac}{bd}$$

$\neq 0$

DENOMINATORE

2) SOMMA (→ SOTTRAZIONE È PRATICAMENTE ANALOGA)

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{\boxed{bd}}$$

→ MINIMO COMUNE MULTIPLO FRA b, d

3) DIVISIONE

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

→ Gli elementi di questo insieme è possibile rappresentarli in forma di NUMERO DECIMALE

$$\frac{10}{3} = 10 \div 3 = \underset{(A)}{3,\overline{333}\ldots}, \quad \frac{17}{2} = 17 \div 2 = \underset{(B)}{8,5}$$

Abbiamo due eventualità: (A) Numero decimale con un NUMERO INFINITO di cifre dopo la virgola (ma periodico)

(B) Numero decimale con numero FINITO di cifre dopo la virgola

→ Esistono ancora delle operazioni elementari e naturali che non è sempre possibile rappresentare in $\mathbb{Q}$ (per es. la radice quadrata)

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Ma analogamente possiamo considerare π, e

Tutti numeri con rappresentazione decimale ILLIMITATA e NON PERIODICA

↳ Si introduce quindi l'insieme dei numeri IRRAZIONALI $\mathbb{I}$

⇒ Quindi definiamo l'insieme dei numeri reali

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} \qquad \mathbb{Q} \supset \mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$$

• Questi numeri reali spesso li approssimiamo con precisione arbitraria tramite NUMERI RAZIONALI (per convenienza)

→ Per fare ciò tronchiamo il numero alla n-esima CIFRA DECIMALE (dopo la virgola)

↳ In questo caso lo scarto tra il numero reale e l'approssimazione sarà al massimo $10^{-n} = \frac{1}{10^n}$

$$3.13 \leq \pi \leq 3.15$$

$$\pi_{appr.} - 0.01 \leq \pi \leq \pi_{appr} + 0.01$$

2° cifra dec.

$$\pi = 3,1415\ldots \qquad \pi_{approx.} = 3,14 \Rightarrow \pi - \pi_{approx.} \sim \frac{1}{10^2} = 0.01$$

- L'insieme dei numeri reali dispone di tutte le operazioni definite prima, per queste valgono alcune proprietà:

→ PROPRIETÀ COMMUTATIVA: $\underbrace{a+b=b+a}_{\text{SOMMA}}$, $\underbrace{ab=ba}_{\text{MOLTIPL.}}$

→ P. ASSOCIATIVA: $(a+b)+c=a+(b+c)$, $(ab)c=a(bc)$

→ P. DISTRIBUTIVA DEL PRODOTTO RISPETTO ALLA SOMMA

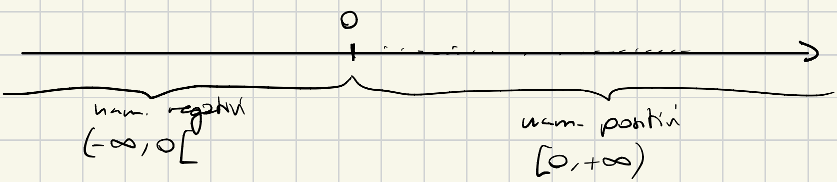
$$a\cdot(b+c)=ab+ac$$

→ ELEMENTO NEUTRO: "0": $a+0=a$ (→ RISPETTO ALLA SOMMA)

: "1": $a\cdot 1=a$ (→ RISPETTO AL PRODOTTO)

- MODULI E ORDINAMENTO

L'insieme dei numeri reali può essere rappresentato tramite una retta



→ Possiamo definire una relazione d'ordine, ovvero dati due numeri $x, y \in \mathbb{R}$, diremo $x \leq y \iff y-x$ è POSITIVO

→ È possibile definire un particolare tipo di sottoinsieme: gli INTERVALLI

* Dati due numeri reali a, b con $a<b$, definiamo l'intervallo APERTO di estremi a e b come

$$]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \rightarrow \text{estremi ESCLUSI}$$

$$\begin{array}{c}]a,b[\\ ||| \\ (a,b) \end{array}$$

* Dati due numeri reali a, b con $a<b$, definiamo l'intervallo CHIUSO di estremi a e b come

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \rightarrow \text{estremi INCLUSI}$$

* Similmente per i SEMIAPERTI (SEMICHIUSI) (con solo uno dei due estremi inclusi)

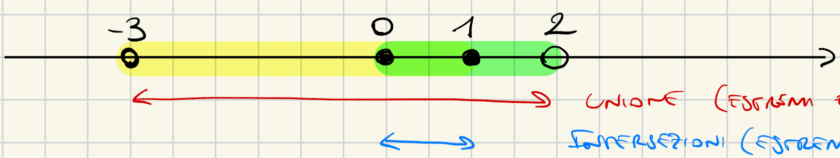
* È possibile anche definire degli intervalli ILLIMITATI, in cui il primo estremo va a $-\infty$ e/o il secondo a $+\infty$

→ Tra gli intervalli possiamo definire le operazioni di UNIONE (1) e INTERSEZIONE (2)

(1): Punti che appartengono o ad uno o all'altro intervallo

(2): Punti che appartengono CONTEMPORANEAMENTE ad entrambi gli intervalli

$]-3,1]$, $[0,2[$



UNIONE (ESTREMI ESCLUSI)

INTERSEZIONI (ESTREMI INCLUSI)

→ Andando ad osservare il comportamento di SOMMA e PRODOTTO rispetto all'ordinamento abbiamo che, se $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$ allora

$$a+c \leq b+c \qquad \forall c \in \mathbb{R}$$

$$ac \leq bc \qquad \text{se } c>0$$

$$ac \geq bc \qquad \text{se } c<0$$

- <u>MODULO</u>

Rappresentato da $|x|$, il MODULO (o VALORE ASSOLUTO) di un numero reale x è definito come

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x<0 \end{cases}$$

Tra le proprietà fondamentali abbiamo che

1) $|x| \geq 0$

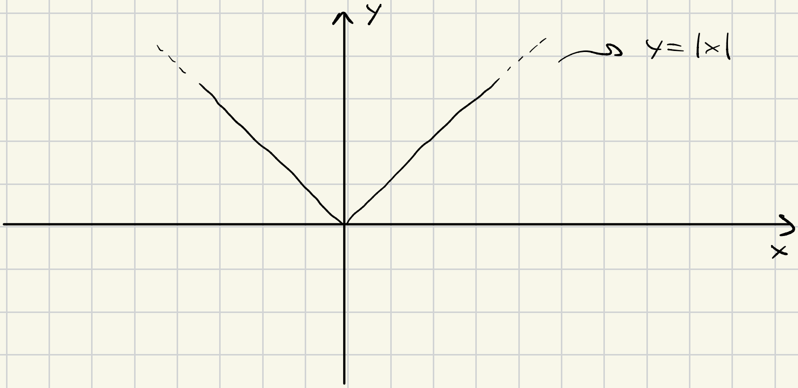
2) $|x| = |-x|$

3) $|xy| = |x||y|$

4) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0)$

→ Sfruttando l'identificazione di $\mathbb{R}$ con i punti della retta reale, possiamo vedere il modulo come la DISTANZA di x dall'origine

→ La rappresentazione grafica è la seguente:



→ Quando abbiamo espressioni contenenti moduli, il modo migliore per affrontarli è UTILIZZARE LA DEFINIZIONE

$$|3x-2| = \begin{cases} 3x-2 & \text{se } 3x-2 \geq 0 \\ -(3x-2) & \text{se } 3x-2 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x-2 & \text{se } x \geq 2/3 \\ 2-3x & \text{se } x < 2/3 \end{cases}$$

→ Proviamo ad analizzare, a titolo d'esempio, l'espressione $|x| \geq a$ (le altre $|x| > a$, $|x| \leq a$, $|x| < a$ si trattano in maniera simile)

Bisogna distinguere: 1) $a \geq 0$ allora

$$\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq a\} =]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$$

2) $a < 0$

$$\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq a\} = \mathbb{R}$$

⚠ Se $x \leq y$, allora <u>NON</u> é vero che $|x| \leq |y|$

$$-3 \leq 2$$

$-3 \quad 0 \quad 2$

$$|-3| = 3 \qquad \Rightarrow \cancel{|-3| \leq |2|}$$
$$|2| = 2$$

FALSO

Il modulo soddisfa invece la DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

Da cui si ricava anche la sua forma invertita

$$|x-y| \geq \big||x|-|y|\big|$$