

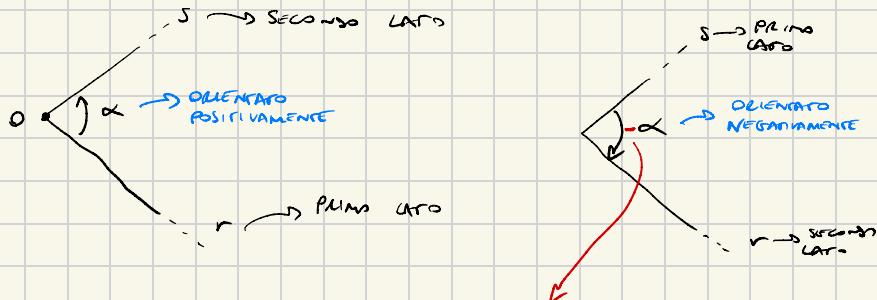
ANGOLI, CIRCONFERENZE,
TRIANGOLI E CORDE



ANGOLI, CIRCONFERENZE E TRIANGOLI

ANGOLI ORIENTATI

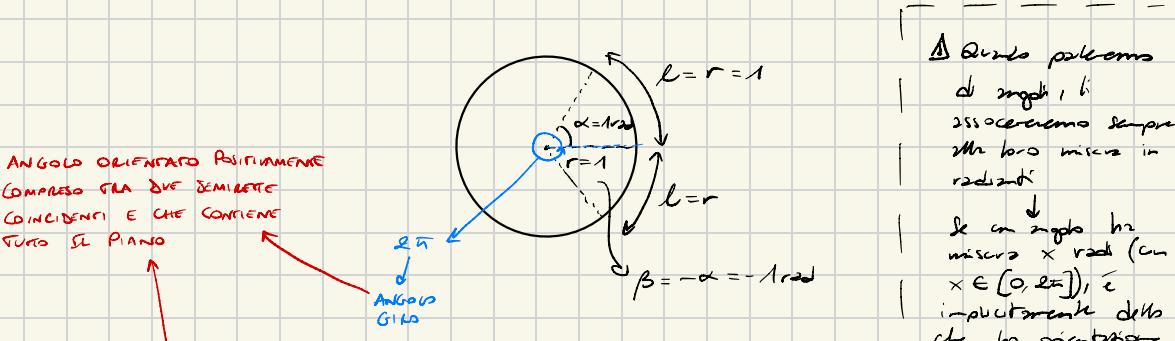
S' definisce ANGOLI quelli compresi tra due SEMICERCHI r ed s (delle LATI) uscenti dalla stessa ORIGINE O .



→ Per indicare si assume che il VERSO POSITIVO sia quello ANTOORARIO, e quello NEGATIVO sia quello ORARIO

MISURE EN RADIANI

• RADIANTE (rad): l'angolo da misura un RADIANO è quello orientato positivamente che interseca sulla circonferenza unitaria un arco di lunghezza 1, ovvero della stessa lunghezza del raggio



→ L'angolo giro, in gradi, assume il valore di 360°

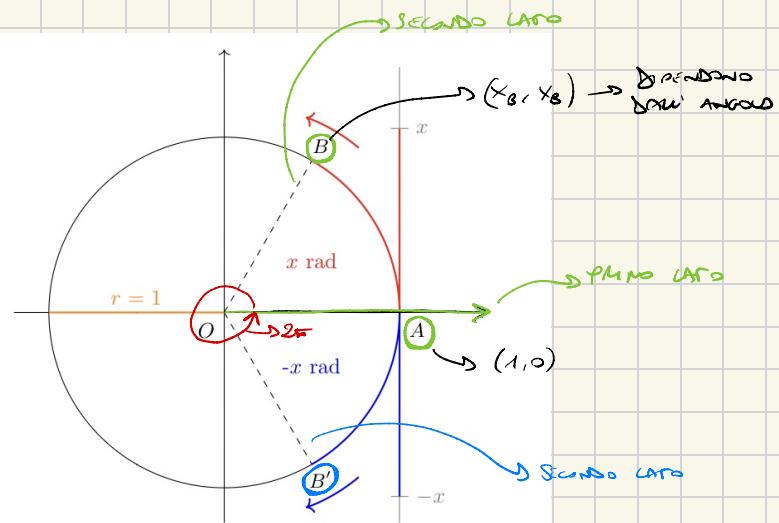
⇒ Quanto al suo rapporto per passare dalla misura in radanti di un angolo a quella in gradi (e viceversa)

$$\frac{360^\circ}{2\pi (\text{rad})} = \frac{\alpha^\circ}{\alpha (\text{rad})}$$

Δ Quando parliamo di angoli, li associamo sempre alla loro misura in radanti
↓ Se un angolo ha misura x rad ($x \in [0, 2\pi]$), è immediatamente detto che ha orientazione positiva

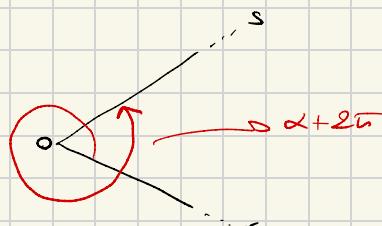
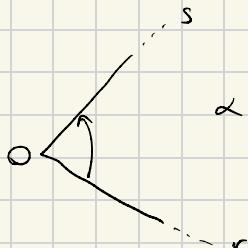
CIRCONFERENZA GONIOMETRICA

S fissi un sistema di coordinate cartesiane di origine O e si tracci la circonferenza di centro O e raggio UNIFORME ($r=1$)



→ fino ad ora abbiamo considerato angoli $\alpha \in [0, 2\pi]$

→ La corrispondenza fra angoli e punti della circonferenza NON È BIUNIVOCÀ:
se ogni angolo corrisponde uno ed un solo punto della circonferenza, ma se
ogni punto della circonferenza 2 cui corrisponde un angolo α , corrisponde
ogni angolo del tipo $\alpha + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$

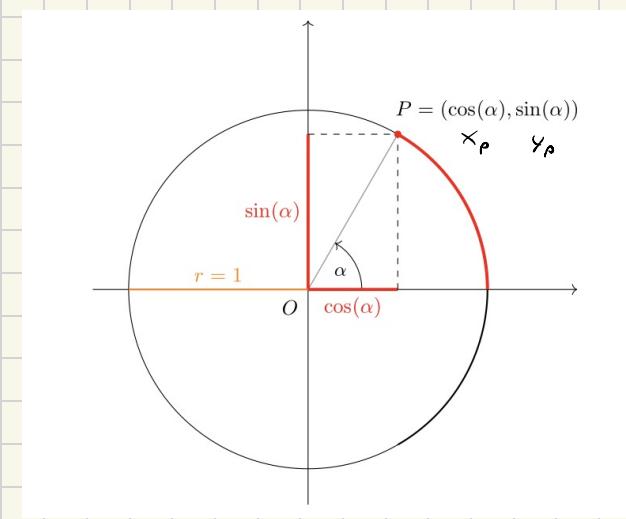


SENO E COSENZO

SIGNIFICA $r=1$

Se α è un angolo orientato e se $P = (x_p, y_p)$ il punto della circonferenza goniometrica associato a l'angolo α (ovvero l'intersezione tra il secondo lato dell'angolo e la circonferenza)

- Si chiameranno seno dell'angolo orientato α l'ordinata y_p del punto P e si scriverà $\sin(\alpha)$
- Si chiameranno coseno dell'angolo orientato α l'ascissa x_p del punto P e si scriverà $\cos(\alpha)$



PER UNA GENERICA CIRCONFERENZA AVREMO

$$\sin(\alpha) = \frac{y_p}{r}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{x_p}{r}$$

PROPRIETÀ

- Abbiamo visto che dato un angolo α , resti associato sulla circonferenza goniometrica un unico punto $P = (x_p, y_p) = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$. Tale punto P è associato ad ogni angolo del tipo $\alpha + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\left. \begin{array}{l} \cos(\alpha) = \cos(\alpha + 2k\pi) \\ \sin(\alpha) = \sin(\alpha + 2k\pi) \end{array} \right\} \text{Queste funzioni sono periodiche di periodo } 2\pi$$

- Essendo seno e coseno le coordinate di un punto sulla circonferenza unitaria, essi soddisfano la relazione

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 \leq \cos(\alpha) \leq 1 \\ -1 \leq \sin(\alpha) \leq 1 \end{cases}$$

- Le coordinate di due angoli si dicono complementari quando la somma coincide con l'angolo retto ($\frac{\pi}{2}$). Le funzioni seno e coseno di angoli complementari sono legate dalla seguente relazione

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$$

Sulla Periodicità di Seno e Coseno

→ Sono inoltre funzioni: $\cos(3x)$, $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right)$...

- Fissando $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, le funzioni $x \mapsto \cos(ax+b)$ e $x \mapsto \sin(ax+b)$ hanno periodo $\frac{2\pi}{|a|}$

In fatti:

$$\cos(ax+b) = \cos(a(x+\tau)+b) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



$$a(x+\tau)+b - (ax+b) = a\tau \quad \text{è un multiplo di } 2\pi$$



$$\tau = \frac{2\pi}{|a|}$$

TANGENTE E COTANGENTE

Se α è un angolo orientato e se $P = (x_\alpha, y_\alpha) = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ il punto sulla circonferenza goniometrica associato con α

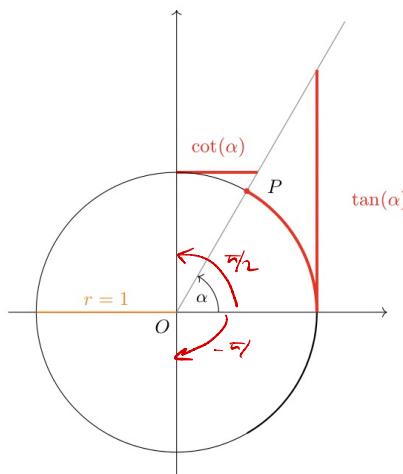
- Se $\cos(\alpha) \neq 0$, si chiama **TANGENTE** dell'angolo orientato α il rapporto $\frac{y_\alpha}{x_\alpha}$, ovvero $\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ \rightarrow si scrive $\tan(\alpha)$
- Se $\sin(\alpha) \neq 0$, si chiama **COTANGENTE** dell'angolo orientato α il rapporto $\frac{x_\alpha}{y_\alpha} = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \tan^{-1}(\alpha) \rightarrow$ si scrive $\cot(\alpha)$

Per angoli sulla circonferenza (goniometri) appartenenti al 2° e 3° quadrante, vale

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan(\alpha)$$

Periodicità \downarrow periodo π

Così pure $\cot(\alpha)$



\rightarrow dato angolo orientato
 $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, \leftarrow il
 punto $P = (x_\alpha, y_\alpha) = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$

\downarrow
 $\tan(\alpha)$ è l'ordinata del
 punto di intersezione tra
 la semiretta uscente da
 O e passante per P e
 la tangente alla circonferenza
 (goniometrica) nel punto $(1,0)$

\downarrow
 $\tan(\alpha)$ non è definita per
 $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

\rightarrow Ennesimo esempio, anche la
 cotangente, rappresentata
 dall'ordinata del punto di
 intersezione tra la semiretta
 uscente da O e passante per
 P e la tangente alla
 circonferenza goniometrica nel
 punto $(0,1)$, non è
 definita per $\alpha = k\pi$ e
 $\alpha = \pi + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

→ Analogamente a prima, fissati $a, b \in \mathbb{R}$, se $x \mapsto \tan(2x+b)$, allora per $2x+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ verrà la periodicità di periodo $\frac{\pi}{|2|} = \frac{\pi}{2}$ e insieme

$$x \neq \frac{\frac{\pi}{2} - 2b}{2} + k \frac{\pi}{|2|}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

→ Così come per $x \mapsto \cot(2x+b)$, con $2x+b \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ovvero

$$x \neq -\frac{b}{2} + k \frac{\pi}{|2|}$$

e periodicità $\frac{\pi}{|2|}$

VALORI NOTEVOLI

È utile conoscere e memorizzare i valori delle funzioni trigonometriche in corrispondenza dei cosiddetti ANGOLI NOTEVOLI. Nella seguente tabella sono riportati i valori di seno e coseno per gli angoli notevoli compresi tra 0 e $\frac{\pi}{2}$ radanti (1° quadrante)

Angolo (in rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

• I valori degli angoli notevoli compresi tra $\frac{\pi}{2}$ e π , possono essere ricavati mediante:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha), \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$$

• I valori degli angoli notevoli compresi tra π e $\frac{3\pi}{2}$ (3° quadrante) possono essere ricavati mediante le relazioni

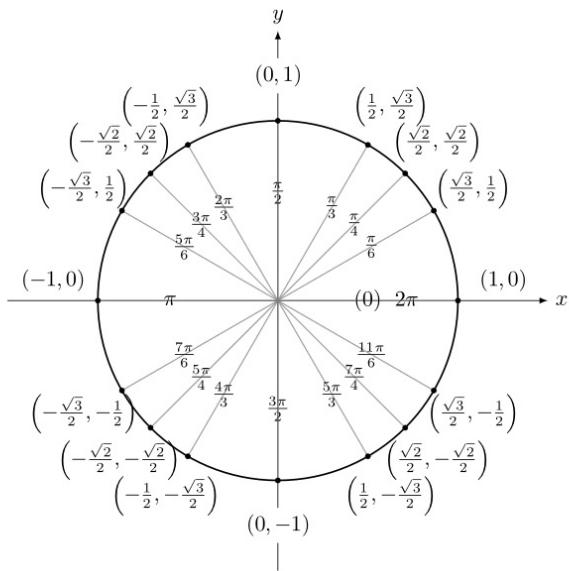
$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha), \quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$$

• I valori degli angoli notevoli compresi fra $\frac{3\pi}{2} < 2\pi$ (4° quadrante) possono essere ricavati mediante le relazioni:

$$\sin(2\pi - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

$$\cos(2\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

Nell'immagine seguenti riportiamo sulla circonferenza goniometrica i valori di seno e coseno degli angoli notevoli α come $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$



Per quanto riguarda tangente e cotangente, invece, di seguito ne sono riportati i valori per gli angoli notevoli compresi fra 0 e $\frac{\pi}{2}$ radanti (1° quadrante)

Angolo (in rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
\tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	non definita
\cot	non definita	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

→ (4° Quadrante)

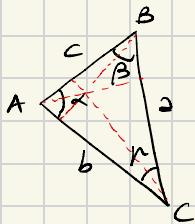
- I valori della tangente per angoli notevoli in $]-\frac{\pi}{2}, 0[$ possono essere ricavati mediante

$$\tan(\alpha) = -\tan(-\alpha)$$

- I valori della cotangente per angoli notevoli in $[\frac{\pi}{2}, \pi[$ (2° quadrante) possono essere ricavati mediante la relazione

$$\cot(\alpha) = -\cot(\pi - \alpha)$$

TEOREMI SU TRIANGOLI



RELAZIONE FONDAMENTALE

$$i) \alpha + \beta + \gamma = \pi$$

$$ii) a \leq b+c, b \leq a+c, c \leq a+b$$

- TEOREMA DEI PROIEZIONI: $a = b \cos(\gamma) + c \cdot \cos(\beta)$
 $b = a \cos(\gamma) + c \cdot \cos(\alpha)$
 $c = a \cos(\beta) + b \cdot \cos(\alpha)$

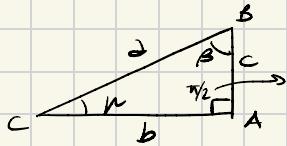
- TEOREMA DEL COSENO: $a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$
 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta)$
 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$

- FORMULA DELL'AREA: $\text{A}(ABC) = \frac{1}{2}ab \sin(\gamma) = \frac{1}{2}bc \sin(\alpha) = \frac{1}{2}ac \sin(\beta)$

- TEOREMA DEI SENI:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

TEOREMI SUI TRIANGOLI RETTANGOLI



$$\left. \begin{array}{l} \cos(\alpha) = 0 \\ \sin(\alpha) = 1 \end{array} \right\} \text{Le formule sono} \\ \text{enunciate in semplicità}$$

→ TEOREMA DELLE PROIEZIONI: Si ha $b = \cos(\alpha) \cdot a$, $c = \sin(\alpha) \cdot a$

$$\Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{b}{a} = \frac{\text{CATETO ADJACENTE}}{\text{IPOTENUSA}}$$

→ TEOREMA DEL COSINE

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (\text{TEOREMA DI PIRAGORAS})$$

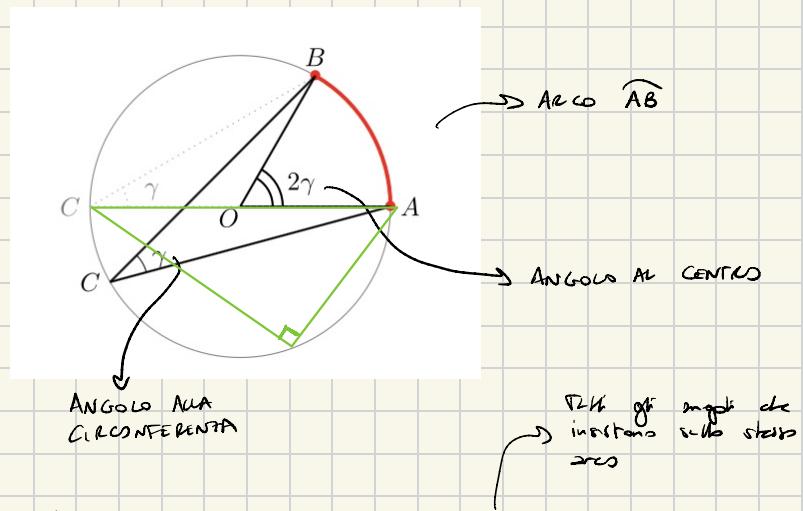
→ TEOREMA DEL' AREA

$$A(ABC) = \frac{1}{2} bc$$

→ TEOREMA DEI SENI

$$a = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\alpha)} \quad \Rightarrow \sin(\alpha) = \frac{c}{a} = \frac{\text{CATETO OPPONTO}}{\text{IPOTENUSA}}$$

ANGOLI AL CENTRO E AREA CIRCONFERENZA DI UN ARCO

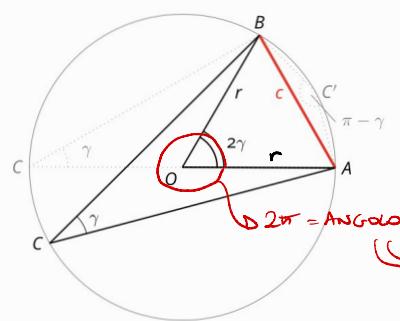


→ Gli angoli alla circonferenza hanno tutti lo stesso miserezza. L'angolo al centro ha miserezza doppia di quello alla circonferenza

→ Come conseguenza, se un triangolo inscritto in una circonferenza ha un lato coincidente ad un diametro, allora uno è RETTANGOLO, e l'angolo retto è quello opposto al di centro

TEOREMA DELLA CORDA

1) Le formule non dipendono dalla scelta dell'arco su cui inscrive l'angolo alla circonferenza



2) La lunghezza dell'arco \widehat{AB} è pari a $2\pi r$
 → La lunghezza dell'arco \widehat{BA} è uguale a $2(\pi - \gamma)r$
 ↳ L'angolo di \widehat{BA} sarà $2\pi - 2\gamma$

$$c = 2r \sin(\gamma)$$