XI Incontro Tutorato A.M. 1

$\boxed{\text{ES. 1}}$

Per trovare lo sviluppo sfruttiamo la sostituzione $t = x + x^2$ (dove, se $x \to 0$ anche $t \to 0$)

$$\Rightarrow \quad f(t) = \frac{1}{1-t}$$

Per questa funzione è possibile utilizzare lo sviluppo di Taylor visto a lezione

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + o(t^2)$$

Con le opportune sostituzioni otteniamo

$$f(x) = \frac{1}{1-(x+x^2)} = 1 + (x+x^2) + (x+x^2)^2 + o((x+x^2)^2)$$

$(x+x^2)^2 = x^2 + o(x^2)$

$$= 1 + x + x^2 + x^2 + o(x^2) + o(x^2) = 1 + x + 2x^2 + o(x^2)$$

$\boxed{\text{ES. 2}}$

Scomponiamo numeratore e denominatore, risolvendoli separatamente:

<u>NUMERATORE</u>: $e^{-x} + \log\left(\frac{1+x}{e}\right) = e^{-x} + \log(1+x) - \log(e) = e^{-x} + \log(1+x) - 1$

Sapendo che: • Considerando $y_0 = 0 \Rightarrow e^{y} = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + o(y^3)$

$$\Rightarrow e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\Rightarrow \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Otteniamo quindi che:

$$e^{-x} + \log(1+x) - 1 = \cancel{1} - \cancel{x} + \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) + \cancel{x} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \cancel{1}$$

$$= +\frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

DENOMINATORE: $\circ\ \cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \Rightarrow \cosh x - 1 = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$\circ\ \sinh x = x + o(x)$

$$\Rightarrow 3(\cosh x - 1)\sinh x = 3\left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(x + o(x)\right) = \frac{3}{2}x^3 + o(x^3)$$

Quindi, in definitiva:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} + \log\left(\frac{1+x}{e}\right)}{3(\cosh x - 1)\sinh x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\frac{3x^3}{2} + o(x^3)} = \frac{1}{\cancel{6}_{3}} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} = \frac{1}{9}$$

$\boxed{\text{ES. 3}}$

Consideriamo lo sviluppo in serie di Taylor di $f(x)$ $(x_0 = 0)$

$\circ\ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

$$\Rightarrow 2e^x = 2 + 2x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$\circ\ \sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} + o(t^3)$

$$\Rightarrow \sqrt{1+4x} = 1 + 2x - \frac{16x^2}{8} + \frac{64}{16}x^3 + o(x^3) = 1 + 2x - 2x^2 + 4x^3 + o(x^3)$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+6x^2} = 1 + 3x^2 + o(x^3)$$

La nostra funzione sarà quindi:

$$f(x) = \cancel{2} + \cancel{2x} + \cancel{x^2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \cancel{1} - \cancel{2x} + \cancel{2x^2} - 4x^3 + o(x^3) - \cancel{1} - \cancel{3x^2} + o(x^3)$$

$= \frac{1-12}{3}x^3 + o(x^3) = -\frac{11}{3}x^3 + o(x^3) \Rightarrow$ la prima derivata non nulla di $f(x)$ in x_0 è la derivata terza $\Rightarrow x_0$ né max né min

Prima di passare all' es. 4, vediamo alcuni teoremi

<u>TEO</u> (FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE)

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua e definiamo

$$F:[a,b]\to\mathbb{R}, \quad F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

Allora F é derivabile in $]a,b[$ e $F'(x)=f(x)$

<u>COROLLARIO</u>: Per ogni $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivabile e tale che $G'(x)=f(x)$ allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b)-G(a)$$

Vediamo alcuni esempi per fissare il concetto

<u>ESEMPI</u>:
- $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c \qquad (\alpha\neq-1)$
- $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x|+c$
- $\int e^x dx = e^x+c$
- $\int \sin(x)\,dx = -\cos(x)+c$
- $\int \cos(x)\,dx = \sin(x)+c$

$\boxed{\text{ES. 4}}$

$$x^2 - \overset{4^2}{16} = (x^2-4)(x^2+4)$$

$$\int \frac{x^2-8}{x^4-16}\,dx = \int \frac{x^2-8}{(x^2-4)(x^2+4)}\,dx = \int \frac{\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^2 - 6 - 2}{(x^2-4)(x^2+4)}\,dx = \int \frac{\frac{3}{2}(x^2-4) - \frac{1}{2}(x^2+4)}{(x^2-4)(x^2+4)}$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{\cancel{x^2-4}}{\cancel{(x^2-4)}(x^2+4)}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{\cancel{x^2+4}}{(x^2-4)\cancel{(x^2+4)}}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2+4} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-4}$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{dx}{4\left[1+\left(\frac{x}{2}\right)^2\right]} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+2)(x-2)} = \frac{3}{2}\int \frac{1/2}{2\left[1+\left(\frac{x}{2}\right)^2\right]}\,dx - \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)\int\left[\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right]}\,dx$$

$$\frac{1}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right)$$

$$= \frac{3}{4}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{8}\left(\log|x-2| - \log|x+2|\right) + c \qquad (c \in \mathbb{R})$$