II INCONTRO TUTORATO A.M. 1

ES. 1

A_1)
- SUPERIORMENTE ILLIMITATO
- INFERIORMENTE LIMITATO ($\inf A_1 = -\pi$)
- NON AMMETTE MINIMO

A_2)
- $\inf A_2 = \min A_2 = -9/2$
- $\sup A_2 = \max A_2 = -11/3$

A_3)
- COMPOSTO DAI NUMERI INTERI ≥ -2 CHE PERÓ SONO ANCHE $\geq \alpha$
- A PRESCINDERE DAL VALORE DI α, A_3 É SUPERIORMENTE ILLIMITATO
- SE $\alpha \leq -2$ SI HA $\min A_3 = \inf A_3 = -2$
- SE $\alpha > -2$, INVECE, $\min A_3 = \inf A_3 = [\alpha] + 1$ → EQUIVALE AD α SE $\alpha \in \mathbb{Z}$

QUESTO TERMINE INDICA LA <u>PARTE INTERA</u>, OVVERO UNA FUNZIONE CHE ASSOCIA AD OGNI NUMERO INTERO IL NUMERO STESSO E AD OGNI NUMERO DECIMALE L'INTERO PRECEDENTE. DI SEGUITO SI RIPORTA LA DEFINIZIONE RIGOROSA

$\Downarrow$

SIA x UN NUMERO REALE. LA PARTE INTERA DI x É DEFINITA COME IL PIÚ GRANDE NUMERO INTERO MINORE O AL PIÚ UGUALE AD x. TUTTO CIÓ, IN FORMULE, DIVENTA

$$[x] := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\} \quad \forall x \in (-\infty, +\infty)$$

A_4) PER QUANTO RIGUARDA LA PRIMA COMPONENTE, É NECESSARIO RISOLVERE LA DISEQUAZIONE CHE VI COMPARE. DUNQUE

$$4 - x - x^2 > 0 \rightarrow x^2 + x - 4 < 0 \rightarrow \Delta = 1 + 16 = 17 \rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

LA DISEQUAZIONE RISULTA VERIFICATA PER $\frac{-1-\sqrt{17}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$

PER QUANTO RIGUARDA IL SECONDO INSIEME, FACENDO CRESCERE n, SE $\alpha > 0$ ALLORA $n^\alpha \rightarrow +\infty$, ALTRIMENTI SE $\alpha < 0$ AVREMO $n^\alpha \rightarrow 0$.
QUINDI, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ABBIAMO $\inf A_4 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$ (CHE $\notin A_4$, DUNQUE NON ESISTE min).

SE $\alpha>0$ sup E max NON ESISTONO, MENTRE SE $\alpha\leq 0$ ALLORA SI HA

$$\sup A_4 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$$

$\boxed{\text{ES. 2}}$

OSSERVIAMO CHE

$$\inf A = \inf\{x\in\mathbb{R} : 2\leq x\leq 4\}\cdot\inf\{y\in\mathbb{R} : 3<y\leq 5\} = 2\cdot 3 = 6$$

6 <u>NON</u> È MINIMO POICHÉ NON APPARTIENE ALL'INSIEME A.

$$\sup A = \sup\{x\in\mathbb{R} : 2\leq x\leq 4\}\cdot\sup\{y\in\mathbb{R} : 3<y\leq 5\} = 4\cdot 5 = 20$$

20 È max POICHÉ APPARTIENE AD A

$\boxed{\text{ES. 3}}$

a) $\sup A = 1$, $\inf A = 0$
POICHÉ $0\in A$ AVREMO $0=\min A$, MENTRE $1\notin A$, DUNQUE $\nexists \max A$

b) A NON AMMETTE inf (DUNQUE NEMMENO min) POICHÉ NON È LIMITATO, MENTRE ABBIAMO $\sup A = -5$, MA SICCOME $5\notin A$ NON È max

c) LA CONDIZIONE $\sin(1/x)=0$ CON $x>0$ È EQUIVALENTE A $x=1/k\pi$ CON $k\in\mathbb{N}$. DUNQUE $\max A = \sup A = 1/\pi$.
PER DIMOSTRARE INVECE CHE $\inf A = 0$, UTILIZZIAMO LE PROPRIETÀ DELL' inf:

1) $0<1/k\pi \quad \forall k\in\mathbb{N}$

2) $\forall \varepsilon>0,\ \exists\ 1/k_0\pi : \dfrac{1}{k_0\pi} < 0+\varepsilon \rightarrow k_0 > \dfrac{1}{\varepsilon\pi}$

d) Calcolando i primi termini vediamo che l'insieme è composto da:

$$A = 0,\ \frac{1}{2},\ -\frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ -\frac{4}{5},\ \frac{5}{6},\ -\frac{6}{7},\ \dots$$

Considerando poi il valore assoluto:

$$\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1$$

Possiamo affermare che $A \subset]-1, 1[$

Per confermare che $\sup A = 1$ osserviamo che:

- $x \leq 1 \quad \forall x \in A$
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in A : 1 - \varepsilon < \frac{2k-1}{2k} = 1 - \frac{1}{2k}$

$$\rightarrow k > \frac{1}{2\varepsilon}$$

Al posto di n abbiamo scritto $2k$ (con $k \in \mathbb{N}$) perché stiamo considerando solo gli elementi positivi del nostro insieme, ovvero quelli tali per cui $(-1)^n = 1$ ovvero con n pari

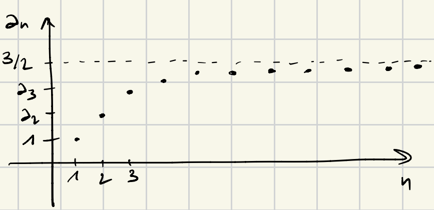
In maniera analoga è possibile verificare che $\inf A = -1$.
In questo caso non abbiamo né max né min

e) Vale esattamente come per il caso precedente, però ora abbiamo anche un max

ES. 4

Denotiamo: $a_n = \frac{3n^2 - 1}{2n^2} \rightarrow A = \{a_n,\ n \in \mathbb{N}\} \rightarrow$ insieme con numero infinito di elementi

$$a_n = \frac{3n^2 - 1}{2n^2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2} \rightarrow a_n \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$



DUNQUE 1 É UN MINORANTE $\rightarrow \exists \inf A$

$$n=1 : a_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 = \min A$$

OSSERVIAMO CHE: $\frac{3n^2-1}{2n^2} \leq \frac{3n^2}{2n^2} = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{3}{2}$ É UN MAGGIORANTE

VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE $\sup A = 3/2$

$$\rightarrow \forall \varepsilon > 0 , \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_{n_0} > \frac{3}{2} - \varepsilon$$

OVVERO DEVO DIMOSTRARE CHE LA DISEQUAZIONE $a_n > \frac{3}{2} - \varepsilon$ HA ALMENO UNA SOLUZIONE

$\rightarrow \frac{3n^2-1}{2n^2} > \frac{3}{2} - \varepsilon \rightarrow$ HA UNA SOLUZIONE IN $\mathbb{N}$?

$$\hookrightarrow \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2} > \frac{3}{2} - \varepsilon \rightarrow \varepsilon > \frac{1}{2n^2} \rightarrow 2n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \rightarrow n^2 > \frac{1}{2\varepsilon} \rightarrow n > \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}$$

QUINDI $\sup A = \frac{3}{2}$, ED INOLTRE $\nexists \max A$

$\boxed{\text{ES. 5}}$

PONIAMO $z = x+iy$, CON $x>0$ E $y>0$

AVREMO: $z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + i^2 y^2 + 2ixy = x^2 - y^2 + i(2xy)$

$$Re(z^2) = x^2 - y^2$$

ASSUMIAMO A REALE E POSITIVO

SOSTITUENDO NELL' EQUAZIONE:

$$x^2 - y^2 + x^2 - y^2 + i(2xy) = 2 + 2i\sqrt{A}$$

$$2x^2 - 2y^2 + i(2xy) = 2 + 2i\sqrt{A}$$

$$x^2 - y^2 + i(xy) = 1 + i\sqrt{A}$$

ARRIVATI A QUESTO PUNTO BISOGNA QUINDI RISOLVERE IL SEGUENTE SISTEMA

$$\begin{cases} ① \quad x^2 - y^2 = 1 \longrightarrow x = \pm\sqrt{y^2+1} \\ ② \quad xy = \sqrt{A} \end{cases}$$

(PRENDO SOLO LA SOLUZIONE CON IL + PERCHÉ SAPPIAMO CHE $x>0$)

SOSTITUENDO L'ESPRESSIONE PER x RICAVATA IN ① NELL'EQUAZIONE ②:

$$\left(\sqrt{y^2+1}\right) y = \sqrt{A}$$

ELEVO AL QUADRATO AMBO I MEMBRI

$$(y^2+1)\, y^2 = A \longrightarrow y^4 + y^2 - A = 0$$

$$\Delta = 1+4A \longrightarrow y^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4A}}{2} \longrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+4A}}{2}}$$

$y^2>0$

ANCHE QUI CONSIDERIAMO SOLO LA SOLUZIONE POSITIVA PERCHÉ SAPPIAMO CHE DEVE VALERE LA CONDIZIONE $y>0$

ANDANDO A SOSTITUIRE QUINDI L'ESPRESSIONE DI y NELLA ①

$$x = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+4A}}{2} + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\sqrt{1+4A}}$$

DUNQUE: $z = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1+\sqrt{1+4A}} + i\sqrt{-1+\sqrt{1+4A}}\right)$

$\boxed{\text{ES 6}}$

SAPENDO CHE $e^{i\pi/2} = i$, ANDIAMO A SOSTITUIRLO NELL'EQUAZIONE DI PARTENZA

$$7 + iz = z + 3i$$

$$z(1-i) = 7 - 3i$$

$$z=\frac{7-3i}{1-i}=\frac{7-3i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}=\frac{(7-3i)(1+i)}{(1)^2-(i)^2}$$

$$=\frac{7+7i-3i-3i^2}{2}=\frac{4i+10}{2}=5+2i$$

$\boxed{\text{ES. 7}}$

DEFINIAMO ANZITUTTO LE CONDIZIONI DI ESISTENZA: $z^3\neq-2$

MANEGGIANDO L'EQUAZIONE:

$$\cancel{z^3}=\cancel{z^3}+2-\frac{i}{\sqrt{3}}(z^3+2)\rightarrow 2=\frac{i}{\sqrt{3}}(z^3+2)$$

$$z^3+2=\frac{2\sqrt{3}}{i}\cdot\frac{i}{i}=-2\sqrt{3}\,i$$

$$z^3=-2-2\sqrt{3}\,i=4\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=4\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)=4e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

PONIAMO QUINDI $z=re^{i\theta}$

$$\rightarrow r^3e^{i3\theta}=4e^{i4\pi/3}$$

$$\rightarrow\begin{cases} r^3=4\rightarrow r=\sqrt[3]{4} \\ 3\theta=\frac{4\pi}{3}+2k\pi\rightarrow\theta=\frac{4\pi}{9}+\frac{2}{3}k\pi\end{cases}$$

ALL'INTERNO DI $[0,2\pi[$ HO TRE VALORI DI θ:

1) $k=0:\ \theta_0=\frac{4\pi}{9}$

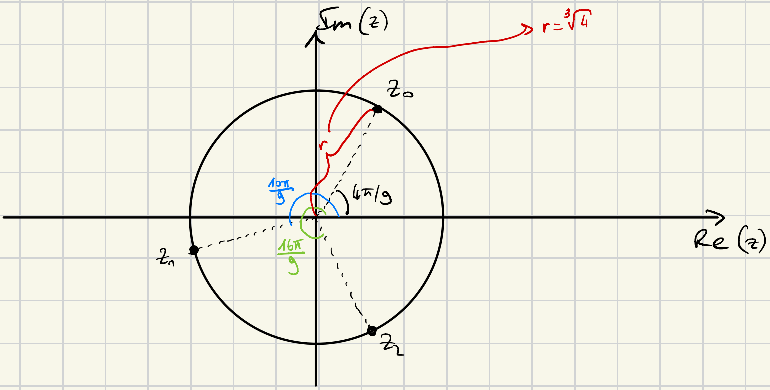
2) $k=1:\ \theta_1=\frac{4\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}=\frac{10}{9}\pi$

3) $k=2:\ \theta_2=\frac{4\pi}{9}+\frac{4\pi}{3}=\frac{16}{9}\pi$

LE SOLUZIONI SONO QUINDI:

$$\left.\begin{aligned} K=0 &\rightarrow z_0 = \sqrt[3]{4}\, e^{i4\pi/9} \\ K=1 &\rightarrow z_1 = \sqrt[3]{4}\, e^{i10\pi/9} \\ K=2 &\rightarrow z_2 = \sqrt[3]{4}\, e^{i16\pi/9} \end{aligned}\right\} z = \sqrt[3]{4}\, e^{i\left(\frac{4\pi}{9}+\frac{2}{3}k\pi\right)}, \quad K=0,1,2$$

GRAFICAMENTE:



$\boxed{\text{ES. 8}}$

A TALE SCOPO É MOLTO UTILE CONSIDERARE LA NOTAZIONE ESPONENZIALE

$$z = re^{i\theta} \rightarrow z^N = r^N e^{iN\theta}$$

$$1 = e^{i2\pi}$$

DA CUI OTTENIAMO CHE: • $r=1$

• $N\theta = 2\pi + 2k\pi \rightarrow \theta = \frac{2\pi}{N} + \frac{2\pi}{N}K = \frac{2\pi}{N}(1+K)$

PER $\theta \in]0, 2\pi]$ ABBIAMO QUINDI N SOLUZIONI, PER K CHE VA DA 0 A N-1.

PER K=N RIOTTENIAMO LA PRIMA SOLUZIONE OTTENUTA PER K=0.

LE SOLUZIONI SARANNO QUINDI:

$$1 \cdot e^{i\frac{2\pi}{N}},\ 1 \cdot e^{i\frac{2\pi}{N}\cdot 2},\ 1 \cdot e^{i\frac{2\pi}{N}\cdot 3},\ \dots\ 1 \cdot e^{i\frac{2\pi}{N}(N-1)},\ 1 \cdot e^{i\frac{2\pi}{\cancel{N}}\cdot \cancel{N}} = e^{i2\pi} = 1$$

LA LORO SOMMA RISULTERÀ QUINDI COME:

$$1 + e^{i\frac{2\pi}{N}} + \left(e^{i\frac{2\pi}{N}}\right)^2 + \left(e^{i\frac{2\pi}{N}}\right)^3 + \dots + \left(e^{i\frac{2\pi}{N}}\right)^{N-1} = \frac{\left(e^{i\frac{2\pi}{\cancel{N}}}\right)^{\cancel{N}} - 1}{e^{i\frac{2\pi}{N}} - 1} = 0$$

$\boxed{\text{ES. 9}}$

$$\left(\frac{z}{i}+1\right)^4 = 16 \longrightarrow \left(\frac{z}{i}+1\right)^2 = \pm 4$$

$$\left(\frac{z}{i}+1\right)^2 = +4 \quad (1)$$

$$\left(\frac{z}{i}+1\right)^2 = -4 \quad (2)$$

(1) $\left(\frac{z}{i}+1\right)^2 = 4 \longrightarrow \left(\frac{z+i}{i}\right)^2 = 4 \longrightarrow -(z+i)^2 = 4$

$\longrightarrow z^2 - 1 + 2iz = -4 \longrightarrow z^2 + 2iz + 3 = 0$

$\Delta = -4 - 12 = -16 = 16i^2 \longrightarrow z_{1,2} = \frac{-2i \pm 4i}{2}$ $\to -3i$, $\to i$

(2) $\left(\frac{z}{i}+1\right)^2 = -4 \longrightarrow \left(\frac{z+i}{i}\right)^2 = -4 \longrightarrow -(z+i)^2 = -4 \longrightarrow z^2 - 1 + 2iz = 4$

$\longrightarrow z^2 + 2iz - 5 = 0$

$\Delta = 4i^2 + 20 = 16 \longrightarrow z_{1,2} = \frac{-2i \pm 4}{2}$ $\to 2-i$, $\to -2-i$