Università Degli Studi di Padova
Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"
Corsi di laurea in Fisica e Astronomia

Studente: Federico Simioni
Email: federico.simioni@studenti.unipd.it
Disciplina: Analisi Matematica 1

Lezione 2

(1) Dire (eventualmente al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$) se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono limitati, e calcolarne (ove possibile) sup/inf e max/min:

(a) $A_1 = ([-\pi, 0[\cup [-1, +\infty[) \cap \mathbb{Q}_{\geq -4}$;
(b) $A_2 = \{-4 + \frac{(-1)^n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$;
(c) $A_3 = \mathbb{Z}_{\geq -2} \cap [\alpha, +\infty[$;
(d) $A_4 = \{x \in \mathbb{R} : 4 - x - x^2 > 0\} \cup \{n^\alpha : n \in \mathbb{N}\}$;

(2) Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore del seguente insieme e, se esistono, il massimo e il minimo.

$$A = \{z \in \mathbb{R} : z = xy, \text{ con } 2 \leq x \leq 4 \wedge 3 < y \leq 5\}$$

(3) Dire se i seguenti sottoinsiemi $A \subset \mathbb{R}$ ammettono estremi superiore ed inferiore, massimo e minimo:

(a) $[0, 1[$;
(b) $]-\infty, -5[$;
(c) $\{x \in \mathbb{R} > 0 : \sin(\frac{1}{x}) = 0\}$;
(d) $\{n \in \mathbb{N} : (-1)^n \cdot \frac{n-1}{n}\}$;
(e) $\{n \in \mathbb{N} : (-1)^n \cdot \frac{n-1}{n}\} \cup \{1\}$;

(4) Trovare, se esistono, max(A), min(A), sup(A), inf(A) del seguente insieme:

$$A = \left\{\frac{3n^2 - 1}{2n^2}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

(5) Si calcoli la soluzione $z \in \mathbb{C}$ con parti reali e immaginarie positive dell'equazione:

$$\mathrm{Re}(z^2) + z^2 = 2 + 2i\sqrt{A}$$

Tale soluzione verifica: $|z|^2 = \sqrt{1 + 4A}$

(6) Calcolare la soluzione $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione:

$$7 + ze^{i\frac{\pi}{2}} = z + 3i$$

(7) Determinare tutte le soluzioni complesse dell'equazione seguente:

$$\frac{z^3}{z^3 + 2} = 1 - \frac{i}{\sqrt{3}}$$

E poi disegnarle nel piano complesso.

8 Dimostrare che la somma delle radici di $\mathrm{z}^{\mathrm{N}} = 1$ è nulla.
Suggerimento: Può essere utile considerare la seguente espressione (dimostrare per induzione la sua validità, e per quali $n \in \mathbb{N}$ risulta valida):

$$1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{\mathrm{n}-1} = \frac{\omega^{\mathrm{n}} - 1}{\omega - 1}$$

9 Determinare tutte le soluzioni complesse dell'equazione seguente:

$$\left(\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{i}} + 1\right)^4 = 16$$