I INCONTRO TUTORATO A.M. 1

TUTORATO ANALISI MATEMATICA 1 - LEZ. 1

ES. 1

DIMOSTRARE PER INDUZIONE LA SEGUENTE FORMULA:

$$1+5+9+13+\dots+(4n+1) = (2n+1)(n+1)$$

SOLUZIONE: • VERIFICHIAMO ANZITUTTO CHE L'ESPRESSIONE È VALIDA PER $n=0$

$$4\cdot 0+1 = (2\cdot 0+1)(0+1)$$
$$1 = 1\cdot 1 = 1 \quad \checkmark$$

• SUCCESSIVAMENTE, ASSUMIAMO L'ESPRESSIONE VERA PER UN CERTO n

$$1+5+9+13+\dots+(4n+1) = (2n+1)(n+1)$$

E DIMOSTRIAMO CHE VALE ANCHE PER $n+1$

$$1+5+9+13+\dots+[4(n+1)+1] = [2(n+1)+1][(n+1)+1]$$

$$\begin{aligned} 1+5+9+13+\dots+4n+5 &= (2n+1+2)(n+1+1) \\ &= (2n+1)(n+1+1)+2(n+2) \\ &= (2n+1)(n+1)+2(n+2)+1\cdot(2n+1) \\ &= (2n+1)(n+1)+2n+4+2n+1 \\ &= (2n+1)(n+1)+4n+5 \end{aligned}$$

ES. 2

DIMOSTRARE CHE ESISTE UN $n_0 \in \mathbb{N}$ TALE CHE

$$2^n \cdot n! \leq n^n \qquad \forall n \geq n_0$$

SOLUZIONE: PER QUANTO RIGUARDA L'ESISTENZA DI $n_0 \in \mathbb{N}$ È POSSIBILE PROCEDERE SIA PER SOSTITUZIONE (POCO ORTODOSSO, MA FATTIBILE VISTO CHE LA DISEQUAZIONE DIVENTA VALIDA A PARTIRE DA $n=6$), SIA CONSIDERANDO I DIVERSI ORDINI DI INFINITO DELLE FUNZIONI COINVOLTE (SI VEDRANNO PRESTO!)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n n!}{n^n} = 0$$

PER QUANTO RIGUARDA IL RESTO DELLA DIMOSTRAZIONE PER INDUZIONE, SI PROCEDE ASSUMENDO VERA $P(n)$

$$(1) \qquad 2^n \cdot n! \leq n^n$$

VISTA LA VALIDITÁ (ASSUNTA) DELLA DISEQUAZIONE (1), SE SOSTITUISCO $2^n \cdot n!$ CON n^n E DIMOSTRO CHE LA DISEQUAZIONE (2) RIMANE ANCORA VALIDA, SIAMO A POSTO

E DIMOSTRANDO CHE VALE PER $n+1$

$$\Rightarrow 2^{n+1} \cdot (n+1)! \leq (n+1)^{n+1}$$

$$(2) \qquad 2 \cdot 2^n \cdot (n+1) \cdot n! \leq (n+1)(n+1)^n$$

$$2 \cdot (n+1) \cdot n^n \leq (n+1)(n+1)^n$$

SFRUTTIAMO QUINDI L'OSSERVAZIONE FORNITA A LEZIONE, CHE CI FORNISCE

$$\Rightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq 2 \Rightarrow \frac{(n+1)^n}{n^n} \geq 2 \Rightarrow 2n^n \leq (n+1)^n$$

DA CUI LA VALIDITÁ DI (2)

$\boxed{\text{ES. 3}}$

DIMOSTRARE PER INDUZIONE LA SEGUENTE FORMULA:

$$3^n \geq n^2 + 1$$

SOLUZIONE:
- VEDIAMO ANZITUTTO CHE $P(1)$ É VERA

$$3 \geq 1+1 = 2 \quad \checkmark$$

- SUCCESSIVAMENTE, ASSUMENDO VERA $P(n)$, DIMOSTRIAMO LA VALIDITÀ DI $P(n+1)$

$$\underbrace{3^n \geq n^2+1} \quad \text{VERA}$$

$$\Rightarrow \quad 3^{n+1} \geq (n+1)^2 + 1$$

$$3 \cdot 3^n \geq n^2+1+2n+1$$

PROCEDIAMO IN MANIERA ANALOGA A QUANTO VISTO NELL' ESERCIZIO PRECEDENTE

$$3 \cdot (n^2+1) \geq n^2+1+2n+1$$

$$n^2+1+\underbrace{2n^2+2} \geq n^2+1+\underbrace{2n+1}$$

$$2n^2+2 > 2n+1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ES. 4

DIMOSTRARE CHE PER OGNI INTERO $n \geq 1$, $2^{2n}-1$ É DIVISIBILE PER 3

SOLUZIONE: • VERIFICO PER $n=1 \rightarrow 2^2-1=3$

• SUPPONIAMO CHE PER $n \geq 1$ LA QUANTITÁ $2^{2n}-1$ SIA DIVISIBILE PER 3

$$\Rightarrow 2^{2(n+1)}-1 = 2^{2n+2}-1 = 4 \cdot 2^{2n}-1 = 3 \cdot 2^{n} + (2^{2n}-1)$$

ENTRAMBI SONO DIVISIBILI PER 3

$$\Rightarrow 2^{2(n+1)}-1 \text{ É DIVISIBILE PER } 3$$

ES. 5

DIMOSTRA CHE IL NUMERO $4^{2n+1}+3^{n+2}$ É DIVISIBILE PER 13 PER OGNI $n \geq 0$

SOLUZIONE: VOGLIAMO MOSTRARE CHE $\frac{4^{2n+1}+3^{n+2}}{13} = k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq 0$

VEDIAMO ANZITUTTO SE $P(0)$ É SODDISFATTA

$$\frac{4+9}{13} = 1 \quad \checkmark$$

AL SOLITO, ASSUMENDO PER VERA $P(n)$ DIMOSTRIAMO LA VALIDITÁ DI $P(n+1)$

$$\frac{4^{2(n+1)+1}+3^{(n+1)+2}}{13} = \frac{4^{2n+1+2}+3^{n+2+1}}{13} =$$

$$= \frac{16 \cdot 4^{2n+1} + 3 \cdot 3^{n+2} + 13 \cdot 3^{n+2} - 13 \cdot 3^{n+2}}{13}$$

SOMMO E SOTTRAGGO LA STESSA QUANTITÁ

$$= \underbrace{16\left(\frac{4^{2n+1}+3^{n+2}}{13}\right)}_{P(n)} \underbrace{- \cancel{13} \cdot \frac{3^{n+2}}{\cancel{13}}}_{\text{SICURAMENTE UN INTERO}}$$

DI CONSEGUENZA ANCHE $P(n+1)$ RISULTA DIVISIBILE PER 13

ES. 6

DIMOSTRA CHE IL NUMERO 4^n+5 È MULTIPLO DI 3 PER OGNI $n \geq 0$

SOLUZIONE: SI VUOLE DIMOSTRARE CHE $\frac{4^n+5}{3} = k \in \mathbb{N}$

PER $n=0$ $(P(0))$ ABBIAMO CHE

$$\frac{4^0+5}{3} = \frac{6}{3} = 2 \quad \checkmark$$

ASSUMIAMO PER VERA $P(n)$ E DIMOSTRIAMO LA VALIDITÀ DI $P(n+1)$

$$\frac{4^{n+1}+5}{3} = k \Rightarrow \frac{4 \cdot 4^n + 5}{3} = \frac{4 \cdot 4^n + 5 + 3 \cdot 5 - 3 \cdot 5}{3} =$$

$$= \frac{4 \cdot 4^n + 4 \cdot 5 - 3 \cdot 5}{3} = 4 \cdot \underbrace{\left(\frac{4^n+5}{3}\right)}_{P(n)} - \cancel{3} \cdot \frac{5}{\cancel{3}}$$

ES. 7

DIMOSTRIAMO CHE LA SUCCESSIONE DEFINITA RICORSIVAMENTE DA:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 4 \end{cases}$$

É CONVERGENTE A 6.

SOLUZIONE: • CALCOLANDO I PRIMI TERMINI DELLA SUCCESSIONE SI TROVA CHE

$$a_2 = 5, \qquad a_3 = \frac{5}{3} + 4 = \frac{17}{3} = 5,66\ldots, \qquad a_4 = \frac{17}{9} + 4 = \frac{53}{9} = 5,88\ldots$$

$$a_5 = \frac{1}{3}\cdot\frac{53}{9} + 4 = \frac{161}{27} = 5,96\ldots, \qquad a_6 = \frac{1}{3}\cdot\frac{161}{27} + 4 = \frac{485}{81} = 5,98\ldots,$$

$$a_7 = \frac{1}{3}\cdot\frac{485}{81} + 4 = 5,99\ldots$$

VIENE SPONTANEO QUINDI AFFERMARE CHE a_n SIA STRETTAMENTE CRESCENTE, CON $a_n < 6$

• COME PRIMA COSA DIMOSTRIAMO CHE a_n É STRETTAMENTE CRESCENTE, CIOÉ CHE $a_n < a_{n+1}$ PER OGNI $n \geq 1$. PER FARLO PROCEDIAMO PER INDUZIONE.

LA TESI É VERA PER $n=1$, POICHÉ $a_1 = 3 < a_2 = 5$. SUPPONIAMO CHE SIA VERA PER $n=k$, CIOÉ CHE $a_k < a_{k+1}$. ALLORA:

$$a_k < a_{k+1} \Rightarrow \frac{1}{3}a_k < \frac{1}{3}a_{k+1} \Rightarrow \frac{1}{3}a_k + 4 < \frac{1}{3}a_{k+1} + 4 \Rightarrow a_{k+1} < a_{k+2}$$

QUINDI LA TESI É VERA ANCHE PER $n = k+1$. RESTA COSÍ DIMOSTRATO CHE LA SUCCESSIONE a_n É STRETTAMENTE CRESCENTE

• DIMOSTRIAMO ORA CHE $a_n < 6$ PER OGNI $n \geq 1$, PROCEDENDO ALLA STESSA MANIERA PER INDUZIONE. LA TESI É VERA PER $n=1$, ESSENDO $a_1 = 3 < 6$. SUPPONIAMO CHE SIA VERA PER $n=k$, CIOÉ CHE $a_k < 6$

AVREMO, ALLORA:

$$a_{k+1} = \frac{1}{3} a_k + 4 < \frac{1}{3} \cdot 6 + 4 \Rightarrow a_{k+1} < 6$$

DUNQUE LA TESI É VERA ANCHE PER $n=k+1$, DIMOSTRANDO COSÍ CHE $a_n < 6 \quad \forall n \geq 1$