III INCONTRO TUTORATO A.M. 1

ES. 1

ANZITUTTO PROVIAMO A MANIPOLARE L'ESPRESSIONE, PER VEDERE SE RIUSCIAMO A PORTARCI AD UNA FORMA A NOI PIÚ CONGENIALE

$$\frac{7-6x}{2x+1} = -\left(\frac{6x-7}{2x+1}\right)$$

$$= -3\left(\frac{2x-\frac{7}{3}}{2x+1}\right)$$

$$= -3\left(\frac{2x+1}{2x+1} + \frac{-1-\frac{7}{3}}{2x+1}\right)$$

$$= -3\left(1+\frac{-\frac{10}{3}}{2x+1}\right) = -3 + \frac{10}{2x+1}$$

VEDIAMO QUINDI CHE IL sup LO OTTENIAMO QUANDO $x=0$

$$\sup(A) = \frac{7-6\cdot 0}{2\cdot 0+1} = 7$$

UNA MANIERA ALTERNATIVA COMPRENDE L'UTILIZZO DELLE DERIVATE (PER CHI LE CONOSCE). INFATTI

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{7-6x}{2x+1}\right) = -\frac{20}{(2x+1)^2}$$ → É NEGATIVO $\forall x \in \mathbb{R}$, QUINDI $\frac{7-6x}{2x+1}$ É UNA FUNZ. DECRESCENTE

ES. 2

PONIAMO $z = \rho e^{i\theta}$ CON $\rho = |z| > 0$ e $\theta \in \mathbb{R}$

a) SI HA $|z| = \sqrt{2}$, QUINDI

$$1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\theta} = \sqrt{2}\,(\cos\theta + i \sin\theta)$$

$$\begin{cases} 1 = \sqrt{2}\cos\theta \\ 1 = \sqrt{2}\sin\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

QUINDI $z = 1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

b) $z = i(1+i) = -1 + i$

COME PRIMA $\rho = |z| = \sqrt{2}$

$\rightarrow -1 + i = \sqrt{2}\,(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$\begin{cases} -1 = \sqrt{2}\cos\theta \\ 1 = \sqrt{2}\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$$

QUINDI $z = -1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$\boxed{\text{ES. 3}}$

- PONIAMO $z = \rho e^{i\theta}$, E TENIAMO LO STESSO TIPO DI NOTAZIONE ANCHE PER IL SECONDO MEMBRO

$$\begin{cases} z^3 = \rho^3 e^{i3\theta} \\ -1000i = 1000\, e^{i\frac{3\pi}{2}} \end{cases}$$

$$\rightarrow \rho^3 e^{i3\theta} = 1000\, e^{i\frac{3}{2}\pi}$$

DA CIÓ SI DERIVA SUBITO CHE $\rho^3 = 1000 \rightarrow \rho = \sqrt[3]{1000} = 10$

CONCENTRANDOCI ORA AGLI ESPONENTI

$$3\theta = \frac{3}{2}\pi + k\cdot 2\pi \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}k\pi \rightarrow k = 0, 1, 2$$

QUESTI SONO I VALORI POSSIBILI DI k, OVVERO QUELLI CHE CI PERMETTONO DI OTTENERE SOLUZIONI DISTINTE FRA LORO

↓

A PARTIRE DA $k=3$ SI RIOTTENGONO LE STESSE

$$k=0 \rightarrow z = 10\, e^{i\frac{\pi}{2}} = 10i$$

$$k=1 \rightarrow z = 10\, e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\pi\right)} = 10\, e^{i\frac{7}{6}\pi}$$

$$= 10\left(\cos\left(\frac{7}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{6}\pi\right)\right) = \boxed{10\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\cdot\frac{1}{2}\right)}$$

→ QUESTA È LA SOL. CHE STAVAMO CERCANDO

$$k=2 \rightarrow z = 10\, e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4}{3}\pi\right)} = 10\, e^{i\left(\frac{11}{6}\pi\right)}$$

$$= 10\left(\cos\left(\frac{11}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{11}{6}\pi\right)\right) = 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\cdot\frac{1}{2}\right)$$

- PROVIAMO A INTRAPRENDERE UN' ALTRA VIA. SCRIVIAMO $z = x+iy$

$$\rightarrow (x+iy)^3 = -1000i$$

$$x^3 + 3x^2 iy + 3x i^2 y^2 + i^3 y^3 = -1000i$$

$$x^3 + i3x^2y - 3xy^2 - iy^3 = -1000i$$

$$x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3) = -1000i$$

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 0 \rightarrow x(x^2 - 3y^2) = 0 & (1) \\ 3x^2y - y^3 = -1000 \rightarrow y(3x^2 - y^2) = -1000 & (2) \end{cases}$$

$\nearrow x = 0$

$\searrow x^2 = 3y^2$

SE $x = 0 \rightarrow -y^3 = -1000 \rightarrow y = 10 \rightarrow z_1 = +10i$

SE $x^2 = 3y^2 \rightarrow y[3 \cdot (3y^2) - y^2] = -1000$

$$y(8y^2) = -1000$$

$$8y^3 = -1000$$

$$y^3 = -125$$

$$y = -5$$

DA CUI $x^2 = 3y^2 = 75 \rightarrow x = \pm\sqrt{75} = \pm 5\sqrt{3}$

QUINDI $z_2 = 5\sqrt{3} - 5i$

$\boxed{z_3 = -5\sqrt{3} - 5i} \rightarrow$ È LA NOSTRA SOLUZIONE CERCATA

$\boxed{\text{ES. 4}}$

a) POSTO $z = x + iy$, CON $x, y \in \mathbb{R}$, SI HA $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$
L'EQUAZIONE DIVENTA

$$x^2 + y^2 - x - iy + \frac{i}{4} = 0$$

$$x^2 + y^2 - x + i\left(\frac{1}{4} - y\right) = 0 \iff \begin{cases} x^2 + y^2 - x = 0 \\ \frac{1}{4} - y = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x^2 - x + \frac{1}{16} = 0 \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

RISOLVIAMO QUINDI: $16x^2 - 16x + 1 = 0 \rightarrow \frac{\Delta}{4} = 48 \rightarrow x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{48}}{16} = \frac{8 \pm 4\sqrt{3}}{16} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{4}$

QUINDI LE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE SONO:

$$z_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{1}{4} i \qquad z_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{1}{4} i$$

b) L'EQUAZIONE È EQUIVALENTE A:

$$z\left(z^4 + (1+i)\right) = 0 \iff z = 0 \ \vee \ \underbrace{z^4 = -1 - i}_{②}$$

② È EQUIVALENTE, POSTO $z = \rho e^{i\theta}$ E DATO CHE $-1 - i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{4}}$, A

$$\begin{cases} \rho^4 = \sqrt{2} \\ 4\theta = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[8]{2} \\ \theta = \frac{5}{16}\pi + k\frac{\pi}{2}, \ k = 0, 1, 2, 3 \end{cases}$$

LE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE SONO DUNQUE:

$$z=0, \quad z_0 = \sqrt[8]{2}\, e^{i\frac{5\pi}{16}}, \quad z_1 = \sqrt[8]{2}\, e^{i\frac{13\pi}{16}}, \quad z_2 = \sqrt[8]{2}\, e^{i\frac{21}{16}\pi}, \quad z_3 = \sqrt[8]{2}\, e^{i\frac{29}{16}\pi}$$

c) ABBIAMO CHE $(\sqrt{3}+i)^3 = 3\sqrt{3} - i + 9i - 3\sqrt{3} = +8i$

POSSIAMO PORRE QUINDI $z+i=w$ E L'EQUAZIONE DIVENTA

$$w^2 = 8i \longrightarrow w^2 = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$$

CONSIDERIAMO QUINDI $w = \rho e^{i\theta}$

$$\begin{cases} \rho^2 = 8 \\ 2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \rho = 2\sqrt{2} \\ \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k = 0,1 \end{cases}$$

QUINDI $w_0 = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2+2i$

$$w_1 = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{5}{4}\pi} = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2-2i$$

TORNANDO A $z = w - i$ ABBIAMO

$$z_1 = 2+i$$

$$z_2 = -2-3i$$