
Lezione 8

① Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

- (a) $\frac{x^2-1}{x(x+2)}$;
- (b) $\sqrt{1+x^3}$;
- (c) $\sin(x^{2e-x})$;
- (d) $\log_x(2x)$

② Dimostrare che

$$D(a^x) = a^x \cdot \log(a)$$

③ Un punto materiale di massa m può muoversi sulla parabola di equazione $y = x^2$, ed è unito con una molla di costante k al punto P_0 di coordinate $(0,1)$. Trovare il punto in cui l'energia totale è minima (si ricordi che l'energia è data dalla somma dell'energia gravitazionale mgy e di quella elastica, che è uguale a k moltiplicato per il quadrato della distanza del punto da P_0).

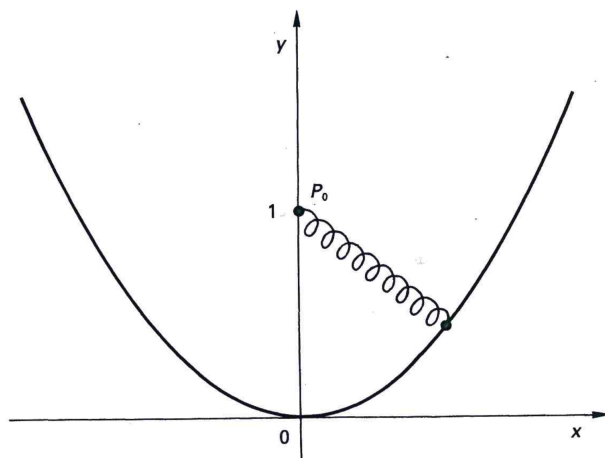


Figura 1: Rappresentazione della situazione descritta dal problema

④ (ES.2 APPELLO 15/09/2022) Si studi la funzione

$$f(x) = |x| \cdot \sqrt{1-x^3}$$

Discutere:

- (a) Dominio;
- (b) Asintoti;
- (c) Derivata.

⑤ Una figura è costituita da un rettangolo sormontato da un semicerchio. Se il perimetro P della figura è assegnato, trovare l'area massima.

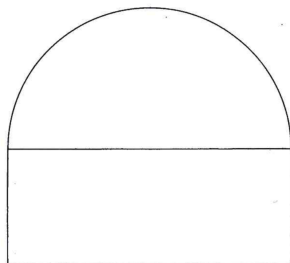


Figura 2: Rappresentazione della situazione descritta dal problema

⑥ Provare a rispondere alle seguenti domande di teoria, tratte da appelli passati:

- (a) Dare la definizione di $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile. Dimostrare che se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile, allora f è continua.
- (b) Enunciare il teorema di Weierstrass e illustrarlo su un esempio.
- (c) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile, dire se è vera o falsa l'implicazione seguente (con $L \in \mathbb{R}$) e giustificare.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$$

- (d) Enunciare e dimostrare il teorema di Lagrange.