IV Incontro Tutorato A.M. 1

$\boxed{\text{Es. 1}}$

a) $\mathbb{R} - \{2\}$

b) $\{x \geq -1\}$

c)

		0		$3/2$	
x	$-$		$+$		$+$
$2x-3$	$-$		$-$		$+$
	$+$		$-$		$+$

$\Rightarrow \{x \leq 0 \vee x > 3/2\}$

d) $\begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \{-1 \leq x \leq 2\}$

e) $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi]$

f) $x^2 + 2x + 1 > 0 \rightarrow \Delta = 4 - 4 = 0 \rightarrow x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm 0}{2} = -1$

$(x+1)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \rightarrow \mathbb{R} - \{-1\}$

g) $\dfrac{1-3x}{7x+2} > 0 \rightarrow$

		$-2/7$		$1/3$	
$1-3x$	$+$		$+$		$-$
$7x+2$	$-$		$+$		$+$
	$-$		$+$		$-$

$\rightarrow \{-2/7 < x < 1/3\}$

$\boxed{\text{ES. 2}}$

a) $-1 \leq \sqrt{x^2-2x} \leq 1 \rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-2x} \leq 1 & (1) \\ x^2-2x \geq 0 \rightarrow x(x-2) \geq 0 & (2) \end{cases}$

		0		2	
x	$-$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$+$
	$+$		$-$		$+$

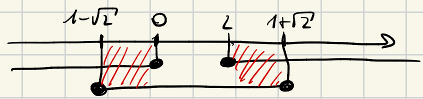
$\rightarrow (2) \equiv x \leq 0 \vee x \geq 2$

$(1) \rightarrow x^2-2x \leq 1 \rightarrow x^2-2x-1 \leq 0 \rightarrow \Delta = 4+4 = 8$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

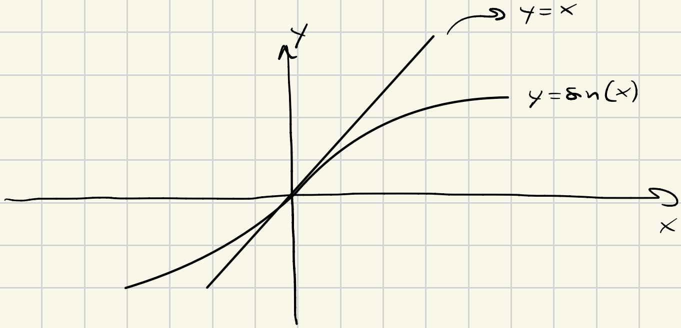
$\rightarrow 1-\sqrt{2} \leq x \leq 1+\sqrt{2}$

Otteniamo che $\begin{cases} x \leq 0 \vee x \geq 2 \\ 1-\sqrt{2} \leq x \leq 1+\sqrt{2} \end{cases}$



$\rightarrow 1-\sqrt{2} \leq x \leq 0 \vee 2 \leq x \leq 1+\sqrt{2}$

b) $\begin{cases} 1+x^2 > 0 \\ \sin(x) - x \neq 0 \rightarrow x \neq \sin(x) \end{cases}$



→ L'unico caso in cui $\sin x = x$ é per $x=0$ (importante avere in mente come sono i grafici di una funzione, un'alternativa valida é considerare le derivate, per chi già le conosce)

c) Il $\sin(\dots)$ non ci dá problemi, dal momento che l'argomento può essere definito su tutto $\mathbb{R}$.
Diverso é il discorso per l'$\arcsin(\dots)$, il cui argomento deve essere compreso tra -1 e 1

$$-1 \leq \frac{1}{2+x^2} \leq 1 \rightarrow -(2+x^2) \leq 1 \leq 2+x^2$$

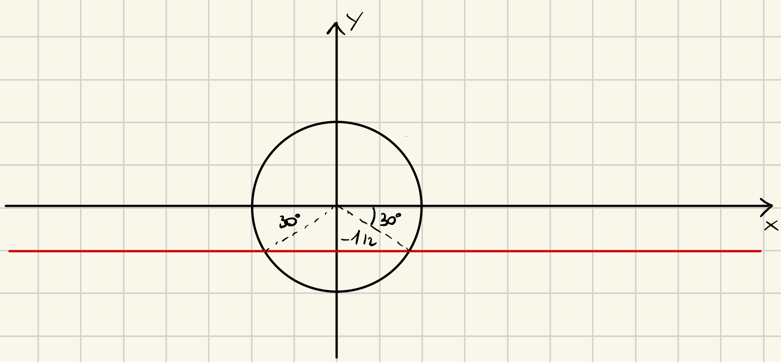
$$\begin{cases} -(2+x^2) \leq 1 & ① \\ 2+x^2 \geq 1 & ② \end{cases}$$

① → $x^2+3 \geq 0$ ✓ SEMPRE VERIFICATA

⇒ $\mathbb{R}$

② → $x^2+1 \geq 0$ ✓ SEMPRE VERIFICATA

d) $\sin(x) + \frac{1}{2} \geq 0 \rightarrow \sin(x) \geq -\frac{1}{2}$



Possiamo definire il dominio come

$$2k\pi \leq x \leq \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \ \vee \ \frac{11}{6}\pi + 2k\pi \leq x \leq 2(k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

e) $3+2\cos x - \cos^2 x > 0$

Procediamo per sostituzione $\cos x = t$

$$3+2t-t^2>0 \rightarrow t^2-2t-3<0$$

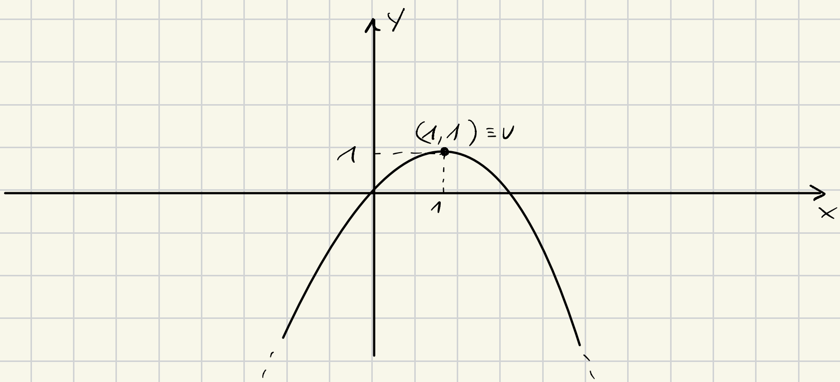
$$\Delta = 4+12 = 16 \rightarrow t_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2 \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

$$\rightarrow -1<t<3 \rightarrow -1 < \cos x < 3 \rightarrow x \neq \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

ES. 3

SAPPIAMO CHE $f(x) = 2x - x^2$ É UNA PARABOLA DI VERTICE

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = (1,1)$$



LA FUNZIONE É INVERTIBILE IN OGNI INTERVALLO: • $[a,b] \subset (-\infty, 1]$
• $[a,b] \subset [1,+\infty)$

CALCOLO LA FUNZIONE INVERSA

$$y = 2x - x^2 \rightarrow x^2 - 2x = -y \rightarrow x^2 - 2x + 1 - 1 = -y \rightarrow (x-1)^2 = 1-y$$

$$\rightarrow x = 1 \pm \sqrt{1-y}$$

DUNQUE AVREMO: • $f^{-1}(y) = 1-\sqrt{1-y}$ per $x \in (-\infty, 1]$

• $f^{-1}(y) = 1+\sqrt{1-y}$ per $x \in [1, +\infty)$

$\boxed{\text{ES. 4}}$

a) C.E: $x \neq 0$

PONENDO $f(x_1) = f(x_2)$ OTTENIAMO $x_1 = x_2$

$$\frac{1}{1-3^{x_1}} = \frac{1}{1-3^{x_2}} \rightarrow 1-3^{x_1} = 1-3^{x_2} \rightarrow x_1 = x_2$$

→ LA FUNZIONE È INIETTIVA

MANIPOLANDO L'ESPRESSIONE OTTENIAMO QUANTO SEGUE

$$y = \frac{1}{1-3^{x}} \overset{x\neq 0}{\Longrightarrow} 1-3^{x} = \frac{1}{y} \rightarrow 3^{x} = 1-\frac{1}{y} \rightarrow x = \log_3\left(\frac{y-1}{y}\right) \circledast$$

	0		1	
$y-1$	$-$	$-$		$+$
y	$-$	$+$		$+$
	$+$	$-$		$+$

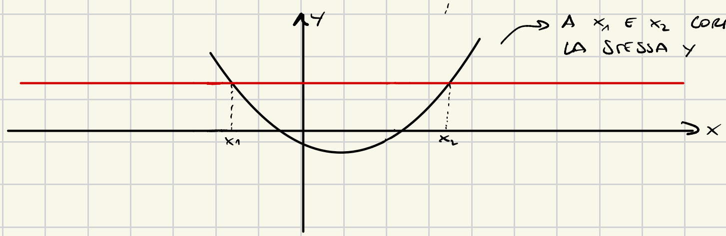
→ NO SOL. in $y \in [0, 1]$
↓
La funzione non è SUR.

→ POSSIAMO RENDERLA BIETTIVA RESTRINGENDOCI A $y \in]1, +\infty[$ CON INVERSA DATA DALLA $\circledast$

b) C.E: $x^2 - 3x + 1 > 0 \rightarrow \Delta = 9-4 = 5 \rightarrow x_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2} \rightarrow x < \frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

POSSIAMO PROVARE A PORRE $f(x_1) = f(x_2)$ PER VERIFICARE CHE NON È INIETTIVA. BASTA PERÒ OSSERVARE CHE L'ARGOMENTO DEL LOGARITMO È UNA PARABOLA, DI VERTICE

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{9-4}{4}\right) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}\right)$$



→ A x_1 E x_2 CORRISP. LA STESSA y

PER VERIFICARE LA SURIETTIVITÀ, MANIPOLIAMO L'ESPRESSIONE

$$y = \ln(x^2-3x+1) \Rightarrow e^y = x^2-3x+1 = x^2+2\cdot A x + A^2 + B$$

CONSIDERIAMO $-3 = 2\cdot A \Rightarrow A = -3/2 \Rightarrow A^2 = 9/4 \Rightarrow$ SOMMO E SOTTRAGGO $5/4$

$$\rightarrow e^y = x^2-3x+\frac{9}{4}-\frac{5}{4} = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4} \Rightarrow e^y+\frac{5}{4} = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2$$

$\rightarrow x_\pm = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5+4e^y}{4}} \Rightarrow$ FUNZIONE DEFINITA PER OGNI $y \Rightarrow$ SURIETTIVA

PER RENDERE LA FUNZIONE INVERTIBILE BISOGNA RENDERLA INIETTIVA (BIETTIVA = INVERTIBILE)

$\Rightarrow$ SI PUÒ PRENDERE METÀ PARABOLA, QUINDI RESTRINGERE IL DOMINIO DELLE x A $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right) \Rightarrow$ PERÒ NON DOBBIAMO DIMENTICARE LE C.E.

$\Rightarrow$ POSSIAMO QUINDI RESTRINGERCI ALL'INTERVALLO $\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$, CON FUNZIONE INVERSA DATA DALLA $x_+(y)$ DI PRIMA

c) C.E: $x^2-x+3 \neq 0 \Rightarrow \Delta = 1-12 = -11 \Rightarrow \mathbb{R}$ È DOMINIO

LA FUNZIONE NON È INIETTIVA (STESSO MOTIVO DI b), IN QUESTO CASO

x^2-x+3 RAPPRESENTA PARABOLA CON VERTICE $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1-12}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{11}{4}\right)$

↳ SENZA INTERSEZIONI CON ASSE X

LA FUNZIONE NON È NEPPURE SURIETTIVA

$$y = \frac{1}{x^2-x+3}-\frac{3}{11} \Rightarrow \frac{1}{x^2-x+3} = y+\frac{3}{11} \Rightarrow x^2-x+3 = \frac{1}{\frac{11y+3}{11}}$$

$$\left[\Rightarrow 2A = -1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2} \Rightarrow A^2 = \frac{1}{4}\right] \Rightarrow x^2-x+\frac{1}{4}+\frac{11}{4} = \frac{11}{11y+3}$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4y+3} - \frac{1}{4} \rightarrow x_\pm = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4y+3} - \frac{1}{4}}$$

→ QUESTE SOL. ESISTONO PER $y \in \overbrace{\left]-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right]}^{A}$

→ PER RENDERE BIETTIVA LA FUNZIONE SI PUÒ QUINDI RESTRINGERE L'INTERVALLO DELLE y AD A, E QUELLO DELLE x A $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$, OTTENENDO COME INVERSA $x_+(y)$

$\boxed{\text{ES. 5}}$

1) QUESTA OPZIONE NON È CORRETTA, PERCHÉ IMPLICA CHE $0 \in A$ MA NOI NON LO SAPPIAMO A PRIORI.
$\inf(A)$ INDICA INFATTI L'ESTREMO INFERIORE DELL'INSIEME A, MA QUESTO PUÒ ANCHE NON APPARTENERE AD A

2) QUESTA OPZIONE, IN MANIERA SIMILE MA OPPOSTA A 1), NON VA BENE PERCHÉ IMPLICA CHE $0 \notin A$, COSA CHE NOI NON SAPPIAMO A PRIORI.
POSSIAMO AVERE INFATTI CHE $0 = \inf(A) = \min(A)$, IN TAL CASO $\forall x \in A$ ABBIAMO $x \geq 0$ (IL PROBLEMA STA NEL FATTO CHE LA DISEQUAZIONE DELL'OPZIONE RIPORTATA PRESENTA UNA DISUGUAGLIANZA STRETTA)

3) STESSO DISCORSO DEL PUNTO 2)

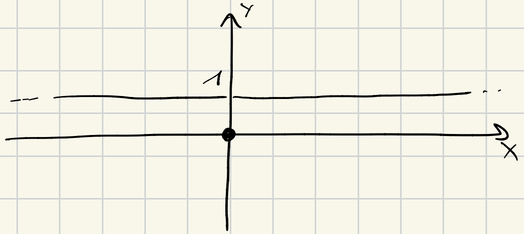
4) QUESTA OPZIONE VA BENE, E RICHIAMA LA DEFINIZIONE VISTA A LEZIONE DI ESTREMO INFERIORE

5) NON VA BENE, IMMAGINIAMO DI AVERE A SUP. LIMITATO, CON $\sup(A) = 1$. DATO CHE L'OPZIONE PARLA DI "PER OGNI $\varepsilon > 0$", QUESTO SIGNIFICA CHE POTREMMO PRENDERE $\varepsilon = 3$. PERÒ NON ESISTE $x \in A$ TALE CHE $x > 3$

ES. 6

1) OPZIONE CORRETTA

2) CONSIDERIAMO LA FUNZIONE "SEGNO AL QUADRATO" VISTA A LEZIONE



$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

IL LIMITE DI UNA FUNZIONE NON È DETTO CHE CORRISPONDA AL VALORE DELLA FUNZIONE IN QUEL PUNTO

3) NULLA CI VIETA DI PRENDERE UNA FUNZIONE COSTANTE

$$f(x) = -2$$

4) SE FOSSE VERO, CIÒ IMPLICHEREBBE CHE $f(x)$ È NEGATIVA SEMPRE, PERCHÉ POSSO PRENDERE ε GRANDE QUANTO VOGLIO

5) QUESTO NON È VERO, PERCHÉ POSSO PRENDERE UNA FUNZIONE CHE COMPRENDE ANCHE VALORI PIÙ PICCOLI DI -2

ES. 7

Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{6x^6 - \sin^2(2x^2)}{\cos(x^2) - 1 - 5x^5} = \boxed{}$$

Se il limite è $+\infty$ scrivere 2022

Se il limite è $-\infty$ scrivere -2022

$$\lim_{x \to 0} \frac{6x^6 - \sin^2(2x^2)}{\cos(x^2) - 1 - 5x^5} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{6x^6 - \frac{\sin^2(2x^2)}{4x^4} 4x^4}{\cos(x^2) - 1 - 5x^5}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{6x^6 - \frac{\sin^2(2x^2)}{4x^4}4x^4}{\cos(x^2) - 1 - 5x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{6x^6 - \left(\frac{\sin(2x^2)}{2x^2}\right)^2 4x^4}{\boxed{\cos(x^2)-1} - 5x^5}$$

MI RICORDA CHE $\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$

QUESTO SEMBRA RICONDUCIBILE A

$$\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos(t)}{t^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\cos(t)-1}{t^2} \equiv \lim_{t\to 0} -\left(\frac{1-\cos(t)}{t^2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$\downarrow$

CON LA SOLA DIFFERENZA CHE AL POSTO DI t ABBIAMO x^2

$\downarrow$

PROVO A MOLTIPLICARE E DIVIDERE PER x^4 $(\equiv t^2)$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{6x^6 - \left(\frac{\sin(2x^2)}{2x^2}\right)^2 4x^4}{\frac{\cos(x^2)-1}{x^4}x^4 - 5x^5}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left[\underbrace{\frac{6x^6}{\left(\frac{\cos(x^2)-1}{x^4}\right)x^4 - 5x^5}} - \underbrace{\frac{\left(\frac{\sin(2x^2)}{2x^2}\right)^2 4x^4}{\left(\frac{\cos(x^2)-1}{x^4}\right)x^4 - 5x^5}} \right]$$

x^6 TENDE A 0 PIÚ VELOCE DI QUALSIASI TERMINE AL DENOMINATORE, QUINDI POSSO TRASCURARE QUESTA PARTE

QUI x^5 TENDERÁ A 0 PIÚ VELOCEMENTE DI x^4, DI CONSEGUENZA NEL FARE IL LIMITE L'UNICO TERMINE CHE BISOGNERÁ CONSIDERARE PER IL DENOMINATORE É QUELLO DI x^4

$$= \lim_{x\to 0} \left[- \frac{\left(\frac{\sin(2x^2)}{2x^2}\right)^2 4\cancel{x^4}}{\left(\frac{\cos(x^2)-1}{x^4}\right)\cancel{x^4}} \right] = - \frac{(1)^2 \cdot 4}{-\frac{1}{2}} = +8$$

$\boxed{\text{ES. BONUS 1}}$

$$f(x) = \sqrt{\ln \frac{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}}{\alpha}} \qquad (\alpha > 0)$$

TROVARE L'INSIEME DI DEFINIZIONE DI $f(x)$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \rightarrow x \leq 1 \\ \ln\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}{\alpha}\right) \geq 0 = \ln(1) \rightarrow \frac{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}{\alpha} \geq 1 \rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{1-x} \geq \alpha \end{cases}$$

ELEVO ENTRAMBI I MEMBRI AL QUADRATO

SE $0 < \alpha \leq 1$ QUESTA È SEMPRE VERIFICATA

$$x + 1 - x + 2\sqrt{x(1-x)} \geq \alpha^2 \rightarrow 2\sqrt{x(1-x)} \geq \alpha^2 - 1$$

CONSIDERANDO $\alpha^2 > 1$

NUOVAMENTE: $4x(1-x) \geq (\alpha^2-1)^2$

$$4x - 4x^2 - (\alpha^2-1)^2 \geq 0 \rightarrow 4x^2 - 4x + (\alpha^2-1)^2 \leq 0$$

$$\Delta = 16 - 16(\alpha^2-1)^2 = 16\left[1 - (\alpha^2-1)^2\right]$$

$$= 16\left[1 - \alpha^4 - 1 + 2\alpha^2\right]$$

$$= 16\alpha^2(2-\alpha^2)$$

$$x = \frac{4 \pm 4\alpha\sqrt{2-\alpha^2}}{8} = \frac{1 \pm \alpha\sqrt{2-\alpha^2}}{2}$$

SOLUZIONE: $\frac{1-\alpha\sqrt{2-\alpha^2}}{2} \leq x \leq \frac{1+\alpha\sqrt{2-\alpha^2}}{2}$

$\rightarrow$ VALIDA SOLO SE: $2-\alpha^2 \geq 0 \rightarrow \alpha^2 - 2 \leq 0 \rightarrow -\sqrt{2} \leq \alpha \leq \sqrt{2}$

E DATO CHE $\alpha > 0$ LA CONDIZIONE SI RESTRINGE A: $0 < \alpha \leq \sqrt{2} \rightarrow 1 < \alpha \leq \sqrt{2}$

DUNQUE IL DOMINIO DI $f(x)$ È:

- $\emptyset$ SE $\alpha > \sqrt{2}$

- $\{1/2\}$ SE $\alpha = \sqrt{2}$

- NELL'INTERVALLO $(0, \sqrt{2})$:

$$\alpha = 1: \quad x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{2-1} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \Bigg\} \, 0 \le x \le 1$$

PER $0 < \alpha \le 1$: $[0, 1]$

DEFINITO NELLE C.E.

PER $1 < \alpha \le \sqrt{2}$: $\left(\frac{1-\alpha\sqrt{2-\alpha^2}}{2} \le x \le \frac{1+\alpha\sqrt{2-\alpha^2}}{2} \right) \cap [0, 1]$