

XIII TUTORATO A.M. 1



ES. 1

a) $u' = e^{-u} \rightarrow \frac{du}{dt} = e^{-u} \rightarrow e^u du = dt \rightarrow \int e^u du = \int dt$

Quindi: $e^u = t + c \rightarrow \log|t + c| = u$

b) $u' = 1+u^2 \rightarrow \frac{du}{dt} = 1+u^2 \rightarrow \int \frac{du}{1+u^2} = \int 1 dt$

$\rightarrow \arctan(u) = t + c \rightarrow u = \tan(t + c)$

c) $u' = (1+2t)e^{-u} \rightarrow \frac{du}{dt} = (1+2t)e^{-u} \rightarrow \int e^u du = \int (1+2t) dt$

$\rightarrow e^u = t + \cancel{\frac{t^2}{2}} + c \rightarrow u = \log|t + t^2 + c|$

d) $u' = u^2 + u \rightarrow$ Esistono delle soluzioni costanti del tipo $u(x) = \alpha$?
Vediamo:

$u' = 0$ (sono costante)

$u(x) = \alpha$

$\curvearrowright \alpha = 0 \vee \alpha = -1$

$\Rightarrow 0 = \alpha^2 + \alpha \rightarrow 0 = \alpha(\alpha + 1) \rightarrow$ Abbiamo due soluzioni

costanti: $u(x) = 0$

$u(x) = -1$

Quindi, se cerchiamo una soluzione con condizione iniziale tale per cui

$-1 < u(x_0) < 0$

Allora questa funzione $u(x)$ sarà limitata verticalmente tra -1 e 0 (teorema di Cauchy).

Procediamo quindi a determinare le soluzioni della nostra equazione dff.

$$\rightarrow \frac{du}{dt} = u^2 + u \rightarrow \int \frac{du}{u(u+1)} = \int dt \quad \textcircled{*}$$

$$\frac{A}{u} + \frac{B}{u+1} \rightarrow Au + A + Bu \rightarrow \begin{cases} A+B=0 \rightarrow B=-1 \\ A=1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \right) du = \log|u| - \log|u+1|$$

Ottieniamo quindi: $\textcircled{*} \Rightarrow \log|u| - \log|u+1| = t + c$

$$\log \left| \frac{u}{u+1} \right| = t + c \rightarrow$$

Se immaginiamo di considerare le u definite al di fuori dell'intervallo (verticale) definito tra -1 e 0 , possiamo togliere i moduli

$$\log \left(\frac{u}{u+1} \right) = t + c$$

$$e^{t+c} = \frac{u+1-1}{u+1} = 1 - \frac{1}{u+1}$$

$$e^{t+c} - 1 = -\frac{1}{u+1} \rightarrow 1 - e^{t+c} = \frac{1}{u+1}$$

$$\rightarrow u+1 = \frac{1}{1-Ke^t} \rightarrow u = \frac{1-1+Ke^t}{1-Ke^t}$$

$$\rightarrow u = \frac{Ke^t}{1-Ke^t}$$

ES. 2

$$y' = a \cos t + b \sin^3 t$$

Siamo nel caso di un'equazione differenziale lineare di 1° ordine del tipo

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$$

Bisogna quindi trovare prima una soluzione dell'omogenea associata, e poi una soluzione particolare (sviluppando il metodo della variazione delle costanti)

Per quanto riguarda l'¹ omogenea, la soluzione sarà del tipo

$$u_0(x) = C e^{A(x)} \quad \text{dove} \quad A(x) = \int a(x) dx = \int \cos(x) dx = \sin(x)$$

Per la soluzione particolare, invece, avremo

$$u_p(x) = c(x) e^{A(x)} \quad \text{dove} \quad c(x) = \int b(x) e^{-A(x)} dx$$

$$\begin{aligned} \rightarrow c(x) &= \int \cos^3(x) \cdot e^{-\sin(x)} dx = \int \cos^2(x) \cdot \cos(x) e^{-\sin(x)} dx \\ &= - \left(\cos^2(x) e^{-\sin(x)} - \int 2 \cos(x) (-\sin(x)) e^{-\sin(x)} dx \right) \\ &\quad \text{g(x) } \overset{F(x)}{\text{F(x)}} \\ &= - \left(\cos^2(x) e^{-\sin(x)} - 2 \int \sin(x) (\cos(x)) e^{-\sin(x)} dx \right) \\ &= - \left(\cos^2(x) e^{-\sin(x)} - 2 \left(\sin(x) e^{-\sin(x)} - \int \cos(x) e^{-\sin(x)} dx \right) \right) \\ &= - \left(\cos^2(x) e^{-\sin(x)} - 2 \sin(x) e^{-\sin(x)} - 2 e^{-\sin(x)} \right) \\ &= - \left(\cos^2(x) - 2 \sin(x) - 2 \right) e^{-\sin(x)} = - \left(1 - \sin^2(x) - 2 \sin(x) - 2 \right) e^{-\sin(x)} \\ &= \left(1 + 2 \sin(x) + \sin^2(x) \right) e^{-\sin(x)} \end{aligned}$$

$$\text{Dunque } u_p(x) = (1 + \sin(x))^2 e^{-\sin(x)} e^{\sin(x)} = (1 + \sin(x))^2$$

Quando la sol. totale sarà: $a(t) = ce^{\sin(t)} + (1+\sin(t))^2$

b) $a' = \frac{a}{1-e^{-t}} + 2 = \frac{1}{1-e^{-t}} a + 2$

In questo caso $1-e^{-t} \neq 0$
 Quindi $t \neq 0$
 Per le nostre soluzioni possiamo considerare $t \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ → Emanzipismo di scegliere quest'ultimo

$$\rightarrow A(t) = \int \frac{1}{1-e^{-t}} dt = \int \frac{1}{e^t-1} dt = \int \frac{e^t}{e^t-1} dt = \log|e^t-1| = \log(e^t-1)$$

Quindi scriviamo che

$$a(t) = e^{\log(e^t-1)} \left(C + \int 2 \cdot \frac{1}{e^t-1} dt \right)$$

$$\rightarrow \int 2 \cdot \frac{1}{e^t-1} dt \rightarrow \text{Sostituiamo } e^t-1=\omega$$

$$\rightarrow e^t = \omega+1 \rightarrow t = \log(\omega+1) \rightarrow dt = \frac{1}{\omega+1} d\omega$$

$$\rightarrow \int 2 \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{\omega+1} d\omega = \int \frac{2}{\omega(\omega+1)} d\omega = \int \left(\frac{A}{\omega} + \frac{B}{\omega+1} \right) d\omega = \textcircled{*}$$

Faccendo denominatore comune otteniamo che

$$Aw+A+Bw \rightarrow \begin{cases} A+B=0 \rightarrow B=-2 \\ A=2 \end{cases}$$

$$\text{Quindi } \textcircled{*} = 2\log(\omega) - 2\log(\omega+1) = 2\log\left(\frac{\omega}{\omega+1}\right)$$

$$\text{Tornando alla variabile } t \rightarrow 2\log\left(\frac{e^t-1}{e^t-1+1}\right) = 2\log\left(\frac{e^t-1}{e^t}\right) = c(t)$$

$$\text{Dove cioè } a(t) = (e^t-1) \left(C + 2\log\left(\frac{e^t-1}{e^t}\right) \right)$$

$$c) u' = \frac{au+1}{t+1} = \frac{a}{t+1} + \frac{1}{t+1} = au \cdot \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t+1}$$

a(t) b(t)

En questo caso $t \neq -1$, quindi le nostre soluzioni saranno definite considerando o l'intervallo $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ (immaginiamo di scegliere quest'ultima).

Motivo per cui togliamo il modello

$$\rightarrow A(t) = \int \frac{1}{t+1} dt = \log|t+1| = \log(t+1)$$

Quindi otteniamo che

$$\begin{aligned}
 u(t) &= e^{\log(t+1)} \left(C + \int \frac{1}{t+1} e^{-\log(t+1)} dt \right) \\
 &= (t+1) \left(C + \int \frac{1}{(t+1)^2} dt \right) \\
 &= (t+1) \left(C + \frac{(t+1)^{-1}}{-1} \right) = (t+1) \left(C - \frac{1}{t+1} \right) = C(t+1) - 1
 \end{aligned}$$

ES. 3

$$2) u'' - 3u' + 2u = 2x^2$$

Per prima cosa dobbiamo trovare soluzioni omogenee

$$u'' - 3u' + 2u = 0$$

$$\rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \rightarrow (\lambda-2)(\lambda-1) = 0$$

d₁ = 2
d₂ = 1

$$\rightarrow u_0(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^x$$

Per la soluzione particolare, sapendo che il secondo membro dell'equazione differenziale di partenza è dato da $2x^2$, costruiamo una così del tipo

$$u_p(x) = M(x) e^{2x} \cos(\beta x) + N(x) e^{2x} \sin(\beta x)$$

Dove stabbiamo che $\alpha=0$ e $\beta=0$ (visto che $2x^2$ è un semplice monomio di 2° grado, senza esponenti o funzioni trigonometriche)

$$\rightarrow c_p(x) = P_m(x)$$

Il polinomio di grado 2 dato da $\alpha+i\beta=0+i\cdot 0=0$
è diverso dai due λ_1 e λ_2 trovati in precedenza

$$\rightarrow c_p(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\rightarrow c_p'(x) = 2ax + b$$

$$\rightarrow c_p''(x) = 2a$$

$$\Rightarrow \underbrace{c_p''(x)}_{2a} - 3 \underbrace{c_p'(x)}_{2ax+b} + 2 \underbrace{c_p(x)}_{2x^2+bx+c} = 2x^2$$

Scrivo $c_p(x)$ nella sua forma più generale e ne calcolo le derivate prima e seconda.

Dopo di che le sostituisco nell'equazione differenziale

integrale

$$2a - 6ax - 3b + 2ax^2 + 2bx + 2c = 2x^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a = 2 \rightarrow a = 1 \\ -6a + 2b = 0 \rightarrow 2b = 6 \rightarrow b = 3 \end{array} \right.$$

Supponendo le condizioni che
il primo membro sia uguale
al 2°, allora da a, b, c
dovranno soddisfare il
seguinte sistema

$$2a - 3b + 2c = 0 \rightarrow 2c = -2 + 9 \rightarrow c = 7/2$$

di conseguenza: $c_p(x) = x^2 + 3x - \frac{7}{2}$

da cui la soluzione completa sarà

$$u(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + x^2 + 3x - \frac{7}{2}$$

b) $y'' + 4y = \underbrace{\sin(x)}_{①} + \underbrace{e^x}_{②}$

• Sol. OMO GENERA: $\lambda^2 + 4 = 0 \rightarrow \lambda = 0 \pm 2i \quad (- (2i)^2 = 4i^2 = -4)$

$$y_0(x) = e^x (c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x))$$

• Sol. parziale: sfruttiamo il principio di superposizione

① è una funzione del tipo

$$1 \cdot e^x (\sin(x))$$

Quindi per questo ci aspettiamo una soluzione particolare del tipo

$$\underbrace{1 \cdot e^{0 \cdot x} (A \cos(x) + B \sin(x))}_{\alpha=0, \beta=1}$$

② in questo caso, essendo definita come e^x , a parte a concludere che saremo una soluzione particolare del tipo

$$\underbrace{1 \cdot e^{1 \cdot x} (\cos(0 \cdot x) + \sin(0 \cdot x))}_{\alpha=1, \beta=0}$$

Procedendo come fatto per l'esercizio prima

$$\textcircled{1} \quad y_{P1}(x) = A \cos(x) + B \sin(x)$$

$$y'_{P1}(x) = -A \sin(x) + B \cos(x)$$

$$y''_{P1}(x) = -A \cos(x) - B \sin(x)$$

Sostituendo nell'eq. dell'ind. si avrà

$$\rightarrow -A \cos(x) - B \sin(x) + 4(A \cos(x) + B \sin(x)) = \sin(x)$$

$$\cos(x)(-A + 4A) + \sin(x)(-B + 4B) = \sin(x)$$

$$\begin{cases} A=0 \\ 3B=1 \rightarrow B=1/3 \end{cases}$$

$$y_{P_1}(x) = \frac{1}{3} \sin(x)$$

$$\textcircled{2} \quad y_{P_2}(x) = 2e^x$$

$$y_{P_2}'(x) = 2e^x$$

$$y_{P_2}''(x) = 2e^x$$

$$\rightarrow 2e^x + 4e^x = e^x \rightarrow 5e^x = e^x \rightarrow 5=1 \rightarrow 2=1/5$$

$$\rightarrow y_{P_2}(x) = \frac{1}{5}e^x$$

\hookrightarrow soluzioni hankel e siano quindi

$$y(x) = y_0(x) + y_{P_1}(x) + y_{P_2}(x)$$

$$= c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(x) + \frac{1}{5} e^x$$

$$\textcircled{c}) \quad y'' + y' = \underbrace{t+2}_{\textcircled{1}} - \underbrace{3e^{2t}}_{\textcircled{2}}$$

$$\bullet \text{ SOL. OMogenea: } \lambda^2 + \lambda = 0 \rightarrow \lambda(\lambda+1) = 0 \quad \begin{cases} \lambda=0 \\ \lambda=-1 \end{cases}$$

$$\rightarrow y_0(t) = c_1 e^0 + c_2 e^{-t}$$

\bullet SOL. PARZIALE

$$\textcircled{1} = t+2 \rightarrow \alpha=0, \beta=0 \rightarrow \alpha \neq \beta = 0$$

$$\textcircled{2} = -3e^{2t} \rightarrow \alpha=2, \beta=0$$

Coincide con una delle due che ho trovato prima

Per quanto riguarda ①, si supponga una soluzione del tipo

$$y_{p_1}(t) = (at^2 + bt + c) \rightarrow \text{Polinomio di grado minore o uguale a 1}$$

poiché ormai coincide con una delle
a trovare per la soluzione omogenea

$$y_{p_1}'(t) = (2at + b)$$

$$y_{p_1}''(t) = 2a$$

$$\rightarrow 2a + 2at + b = t + 2$$

Si, cioè si desiderano le condizioni

$$\begin{cases} 2a = 1 \rightarrow a = 1/2 \\ 2a + b = 2 \rightarrow b = 1 \end{cases}$$

$$y_{p_1}(t) = \frac{1}{2}t^2 + t + c$$

Per quanto riguarda ②, invece, si supponga una soluzione del tipo

$$y_{p_2}(t) = A e^{2t}$$

$$y_{p_2}'(t) = 2A e^{2t}$$

$$y_{p_2}''(t) = 4A e^{2t}$$

$$\rightarrow 4A e^{2t} + 2A e^{2t} = -3e^{2t}$$

$$\text{Quindi } 4A + 2A = -3 \rightarrow A = -3/6 \rightarrow A = -1/2$$

$$\text{Si, cioè: } y_{p_2}(t) = -\frac{1}{2} e^{2t}$$

Quando la soluzione totale sarà

$$y(t) = c_1 + c_2 e^{-t} + \frac{1}{2} t^2 + t - \frac{1}{2} e^{2t}$$

[Es. 4]

a) Vedere es. 6 del tesserato scorso (12/01/24)

b) La soluzione sarà del tipo

$$u(x) = c e^{A(x)} \quad \text{dove} \quad A(x) = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx = \log|x^2+2x+2|$$
$$= \log(x^2+2x+2) \quad \text{dato che } \Delta < 0$$

Quando $x^2+2x+2 > 0$
 $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\rightarrow u(x) = c e^{\log(x^2+2x+2)} = c(x^2+2x+2)$$

c) La soluzione omogenea è già stata trovata nel punto precedente, non ci resta che trovare la soluzione particolare

$$u_p(x) = c(x) e^{A(x)} = c(x)(x^2+2x+2)$$

$$\rightarrow c(x) = \int b(x) e^{-A(x)} dx = \int \frac{x}{x^2+2x+2} dx$$

ricordando quanto calcolato al primo punto di questo problema otteniamo che

$$c(x) = \frac{1}{2} \log(x^2+2x+2) - 2 \operatorname{ctg}(\pi x+2)$$

$$\rightarrow u_p(x) = (x^2+2x+2) \left[\frac{1}{2} \log(x^2+2x+2) - 2 \operatorname{ctg}(\pi x+2) \right]$$

In così, la soluzione generale sarà

$$u(x) = (x^2 + 2x + 2) \left[c + \frac{1}{2} \log(x^2 + 2x + 2) - 2 \operatorname{arctan}(x+1) \right]$$

Or, imponendo $u(0) = \log(2)$ ottieniamo

$$u(0) = 2 \left[c + \frac{1}{2} \log(2) - 2 \operatorname{arctan}(1) \right] = \log(2)$$

$$\rightarrow 2c + \cancel{\log(2)} - 2 \operatorname{arctan}(1) = \cancel{\log(2)}$$

$$\rightarrow c = 2 \operatorname{arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$$

ES. S

$$\begin{aligned} \text{a) } F(x) &= \int x^2 \log(\sqrt{x}) dx = \frac{1}{2} \int x^2 \log(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x^3}{3} \log(x) - \frac{1}{3} \int x^3 \frac{1}{x} dx \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{x^3}{3} \log(x) - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3} \right) \\ &= \frac{x^3}{6} \log(x) - \frac{x^3}{18} + C \end{aligned}$$

$$\rightarrow \text{Se } F(1) = 0 \text{ allora abbiamo che } \rightarrow \frac{1}{6} \cdot 0 - \frac{1}{18} + C = 0 \rightarrow C = \frac{1}{18}$$

$$\text{b) L'equazione fondita } y' = \frac{g(y)}{h(x)} \text{ è a variabili separabili}$$

$\frac{g(y)}{h(x)}$

$\hookrightarrow x > 0$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = (1+y^2) x^2 \log(\sqrt{x}) \rightarrow \int \frac{dy}{1+y^2} = \int x^2 \log(\sqrt{x}) dx$$

$$\rightarrow \operatorname{arctan}(y) = \frac{1}{6} x^3 \log(x) - \frac{1}{18} x^3 + C$$

$$\rightarrow y = \tan \left(\frac{1}{6} x^3 \log(x) - \frac{1}{18} x^3 + C \right)$$

c) Supponendo che $y(1) = 0$:

$$0 = t^2 \ln\left(t - \frac{1}{18} + c\right) \rightarrow c = \frac{1}{18} \quad \text{punto la tangente si annulla in } 0$$

ES. 6

2) Volendo trovare una soluzione costante della nostra equazione differenziale, non dobbiamo a ottenere $a(t) = c$

$$\begin{aligned} a'(t) &= 0 = \frac{c^2 - 6c + 13}{9t^2 - 1} \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ &\uparrow \text{costante costante} \end{aligned}$$

$\rightarrow c^2 - 6c + 13 = 0 \rightarrow \Delta = 36 - 52 < 0 \rightarrow$ Non c'è una sol. costante
che soddisfa la nostra
equazione differenziale

b) Procediamo a trovare una soluzione generale

$$a' = \frac{a^2 - 6a + 13}{9t^2 - 1} \quad \rightarrow \text{Si tratta di un'equazione a variabili} \\ \text{separabili}$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{a^2 - 6a + 13}{9t^2 - 1} \quad \rightarrow \int \frac{da}{a^2 - 6a + 13} = \int \frac{dt}{9t^2 - 1}$$

Ⓐ Ⓛ

$$\textcircled{A} \quad \int \frac{da}{a^2 - 6a + 9 - 9 + 13} = \int \frac{da}{(a-3)^2 + 4} = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{a-3}{2}\right)$$

$$\textcircled{B} \quad \int \frac{dt}{9t^2 - 1} = \int \frac{dt}{(3t+1)(3t-1)} = \int \left(\frac{A}{3t+1} + \frac{B}{3t-1} \right) dt = \textcircled{②}$$

Faccendo i denominatori comuni ottieniamo $\int \left(\frac{3At - A + 3Bt + B}{9t^2 - 1} \right) dt$

$$\rightarrow \begin{cases} 3A + 3B = 0 \rightarrow A = -1/2 \\ 3 - A = 1 \rightarrow B = 1/2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \textcircled{+} = \int \left(\frac{-1/2}{3t+1} \cdot \frac{3}{3} + \frac{1/2}{3t-1} \cdot \frac{3}{3} \right) dt$$

$$= \frac{1}{6} \left[\log|3t-1| - \log|3t+1| \right] + C$$

$$\text{Sì con } \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{u-3}{2}\right) = \frac{1}{6} (\log|3t-1| - \log|3t+1|) + C$$

$$\text{Imponendo } u(0) = 1$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \arctan(-1) = \frac{1}{6} (\log|-1| - \log|1|) + C$$

$$\frac{1}{2} \arctan(-1) = C \rightarrow C = -\frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{8}$$

Dal momento che la condizione iniziale ci pone in $t=0$, le soluzioni che troveremo saranno unica e definito solo nell'intervallo di $t \in]-1/3, +1/3[$.
In questo intervallo avremo che

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} (\log|3t-1| - \log|3t+1|) &= \frac{1}{6} (\log(-(3t-1)) - \log(3t+1)) = \\ &= \frac{1}{6} \log\left(\frac{1-3t}{3t+1}\right) \end{aligned}$$

Quindi otteniamo:

$$\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{u-3}{2}\right) = \frac{1}{6} \log\left(\frac{1-3t}{3t+1}\right) - \frac{\pi}{8}$$

$$\arctan\left(\frac{u-3}{2}\right) = \frac{2}{6} \log\left(\frac{1-3t}{3t+1}\right) - \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{u-3}{2} = \tan\left(\frac{1}{3} \log\left(\frac{1-3t}{3t+1}\right) - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$u = 3 + 2 \tan\left(\frac{1}{3} \log\left(\frac{1-3t}{3t+1}\right) - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow t \in]-1/3, 1/3[$$

Oltre alle condizioni già menzionate in precedenza, bisogna anche che

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{1}{3} \log\left(\frac{1-3t}{3t+1}\right) - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \rightarrow$$

Dato che l'arcotangente è definito
tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ (0, per dirla
in maniera più semplice,
l'argomento della tangente
deve essere diverso da $-\pi/2$, che
è $\pi/2$ e più in generale da
 $\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$)

\rightarrow Una volta posta questa condizione (più restrittiva rispetto a $t \in]-1/3, 1/3[$)
otteniamo l'intervalle massimo in cui è definita la nostra funzione
(quindi oltre il quale non si può estendere la funzione)