VII Incontro Tutorato A.M.1

ES. 1

A) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ → In questo caso utilizzare il criterio del confronto asintotico non ci permette di giungere a conclusioni

B) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

C) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$

D) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha^{n+1}}{\alpha^n} = \alpha$ → Quindi a_n tende a $+\infty$ essendo $\alpha > 1$

E) $a_n = \frac{\alpha^n}{n^q}$ (con $\alpha > 1$, $q > 0$)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha^{\cancel{n}+1}}{(n+1)^q} \cdot \frac{n^q}{\cancel{\alpha^n}} = \lim_{n\to+\infty} \alpha \underbrace{\frac{n^q}{(n+1)^q}}_{\to 1} = \alpha \ (>1) \to a_n \text{ tende a } +\infty$$

F) $a_n = \frac{\alpha^n}{n!}$ (con $\alpha > 1$)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{\cancel{n}+1}}{\cancel{(n+1)!}_{\,n+1}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{\alpha^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha}{n+1} = 0 \to a_n \text{ tende a } 0$$

G) $a_n = \frac{n!}{n^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\cancel{(n+1)!}^{\,n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}} = \frac{\cancel{n+1}}{\cancel{n+1}} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$

$$= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow \frac{1}{e} < 1$$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

H) NON ESISTE

I) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 3^n}{1+3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{3^n}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right)}{\cancel{3^n}\left(1 + \frac{1}{3^n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n} = -1$

J) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}-n+n^2}{2n^2-n^{3/2}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^{3/2}}\right)}{\cancel{n^2}\left(2-\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{2}$

K) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\log(n)}{\sqrt{n}-\log(n)} = \frac{\cancel{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{\log(n)}{\sqrt{n}}\right)}{\cancel{\sqrt{n}}\left(1-\frac{\log(n)}{\sqrt{n}}\right)} = 0$

SAPPIAMO CHE $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log^\beta(x)}{x^\alpha} = 0$ $\forall \alpha>0$ $\forall \beta>0$

L) $a_n = \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1+2}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{2}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{n+1}{2}\cdot\frac{2}{n+1}\cdot n}$

$= \Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{n+1}{2}}}_{\to e}\Bigg]^{\frac{2}{1+\frac{1}{n}}} = e^2$

M) $a_n = \frac{(n^2+1)^n}{n^{2n}} = \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2\cdot\frac{1}{n}} \to 1$

N) $a_n = \sqrt[n]{n\log(n)} = e^{\log\left[(n\log(n))^{1/n}\right]} = e^{\frac{\log(n\log(n))}{n}} = e^{\cancel{\frac{\log(n)}{n}}+\cancel{\frac{\log(\log(n))}{n}}} = 1$

O) $\to 0$

P) $\frac{\log\left(n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\right)}{\log\left(n^5\left(2-\frac{8}{n^5}\right)\right)} = \frac{\log(n^3)+\log\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{\log(n^5)+\log\left(2+\frac{8}{n^5}\right)} = \frac{3\log(n)+\dots}{5\log(n)+\dots} = \frac{3}{5}$

Q) $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n!}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n!}\right)^{n!}\right]^{\frac{n}{n!}} = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n!}\right)^{n!}\right]^{\frac{n}{n(n-1)!}} =$

$= \lim_{n\to+\infty}\Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{1}{n!}\right)^{n!}}_{\to e}\Bigg]^{\boxed{\frac{1}{(n-1)!}}\to 0} = e^0 = 1$

4) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a^{2n}+1}$

Bisogna distinguere 2 casi:

• $a>1$: $a^2 = \sqrt[n]{a^{2n}} \leq \sqrt[n]{a^{2n}+1} \leq \sqrt[n]{a^{2n}+a^{2n}} = \sqrt[n]{2}\, a^2$

$\hookrightarrow = 2^{1/n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

• $0\leq a\leq 1$: $1 \leq \sqrt[n]{a^{2n}+1} \leq \sqrt[n]{1+1} = 2^{1/n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

Quindi, abbiamo che:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^{2n}+1} = \begin{cases} a^2 & \text{se } a>1 \\ 1 & \text{se } 0\leq a\leq 1 \end{cases}$$

5) $a_n = n^{(-1)^n}$

Abbiamo che: $a_n = \begin{cases} n & \text{se } n \text{ é pari} \\ n^{-1} = \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é dispari} \end{cases}$

Considerando la sottosuccessione definita dagli n pari abbiamo che

$$a_{2n} \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$$

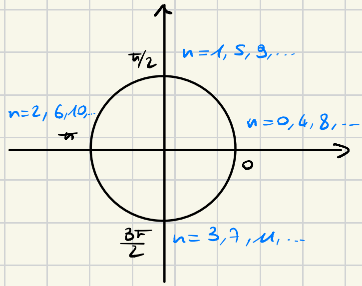
Mentre per la sottosuccessione con n dispari

$$a_{2n+1} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

1) $a_n = \frac{n!}{2^n} \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right)$

Considerando innanzitutto il seno, abbiamo

$$\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} \left.\begin{matrix} 0 & \text{se } n=0,4,8,\dots \\ & \text{se } n=2,6,10,\dots \end{matrix}\right] \to n \text{ pari} \\ 1 & \text{se } n=1,5,9,\dots \\ -1 & \text{se } n=3,7,11,\dots \end{cases}$$



Di conseguenza

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n=0,2,4,6,\dots \\ \frac{n!}{2^n} & \text{se } n=1,5,9,\dots \longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{2^n} = +\infty \\ -\frac{n!}{2^n} & \text{se } n=3,7,11,\dots \longrightarrow \lim_{n\to\infty} -\frac{n!}{2^n} = -\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Per il criterio del confronto asintotico

$\boxed{\text{ES. 2}}$

Anzitutto dimostriamo che la successione è monotona e limitata, ovvero

$$a_n < a_{n+1} < \ell \quad \forall n$$

Vediamolo per induzione:

1) Dimostriamo che è monotona: • $a_0 < a_1 = 1$ ✓

• Assumendolo vero per a_n, verifichiamo che

$$a_{n+1} < a_{n+2}$$

$$\Rightarrow a_{n+2} = \sqrt{1 + a_{n+1}} > \sqrt{1+a_n} = a_{n+1} \quad ✓$$

2) Dimostriamo che è limitata da 2: • Per $n=0$ vale ✓

- Assumendo vero per n, verifichiamo per $n+1$

$$a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \leq \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$$

Ora che abbiamo dimostrato che la successione è monotona e limitata, calcoliamone il limite, tale per cui

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{1+a_n} \Rightarrow \ell = \sqrt{1+\ell}$$

Essendo sicuramente $0 \leq \ell \leq 2$, possiamo elevare al quadrato ambo i membri

$$\ell^2 = 1+\ell \Rightarrow \ell^2 - \ell - 1 = 0$$

$$\Delta = 1+4 = 5 \Rightarrow \ell_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

L'unica soluzione di interesse sarà quella positiva, quindi $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$