VIII INCONTRO TUTORATO A.M. 1

$\boxed{\text{ES.1}}$ → ES. 8.8 FOGLIO 8 di ESERCIZI

a) $f(x) = \frac{x^2-1}{x(x+2)}$

Sappiamo che $\frac{d}{dx}\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right] = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{(h(x))^2}$

$\Rightarrow g(x) = x^2-1 \Rightarrow g'(x) = 2x$

$\Rightarrow h(x) = x(x+2) \Rightarrow h'(x) = x+2+x = 2x+2$

Quindi

$$f'(x) = \frac{2x^2(x+2)-(x^2-1)(2x+2)}{x^2(x+2)^2} = \frac{2x^3+4x^2-2x^3-2x^2+2x+2}{x^2(x+2)^2}$$

$$= \frac{2x^2+2x+2}{x^2(x+2)^2}$$

b) $f(x) = \sqrt{1+x^3}$

Sappiamo che $\frac{d}{dx}\left[g(h(x))\right] = g'(h(x)) \cdot h'(x)$

$\Rightarrow g(x) = \sqrt{x} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$

$\Rightarrow h(x) = 1+x^3 \Rightarrow h'(x) = 3x^2$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[f(x)\right] = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x^3}} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}$

c) $h(x) = \sin\left(x^{2e-x}\right)$

Consideriamo che $\frac{d}{dx}\left[f(x)^{g(x)}\right] = f(x)^{g(x)}\left[g'(x) \cdot \log_e f(x) + \frac{g(x)\cdot f'(x)}{f(x)}\right]$

Di seguito la dimostrazione di quest'ultima relazione:

$$f(x)^{g(x)} = e^{\log_e\left(f(x)^{g(x)}\right)} = e^{g(x)\log_e(f(x))} = f(x)^{g(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[e^{g(x)\log_e(f(x))}\right] = e^{g(x)\log_e(f(x))} \cdot \left[g'(x)\log_e(f(x)) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$

Da questo si deriva quindi che

$$h'(x) = \cos\left(x^{2e-x}\right) x^{2e-x}\left[-\log_e(x) + \frac{2e-x}{x}\right]$$

d) $f(x) = \log_x(2x)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[\log_x(2x)\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{\ln(2x)}{\ln(x)}\right]$$

$$\log_b(a) = \frac{\log_c(a)}{\log_c(b)}$$

Consideriamo quindi che: $\frac{d}{dx}\left[\ln(2x)\right] = \frac{1}{2x}\cdot 2 = \frac{1}{x}$

$$\frac{d}{dx}\left[\ln(x)\right] = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[\frac{\ln(2x)}{\ln(x)}\right] = \frac{\frac{1}{x}\cdot\ln(x) - \ln(2x)\cdot\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \frac{1}{x(\ln(x))^2}\left[\cancel{\ln(x)} - \ln(2) - \cancel{\ln(x)}\right]$$

$\boxed{\text{ES. 2}}$

$$D\, a^x = a^x \log a$$

Consideriamo $a^x = y \iff \log_a y = x$

$$D\, a^x = \frac{1}{D \log_a y}$$

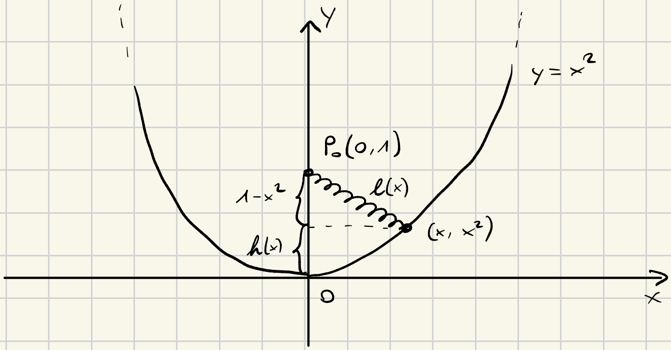
Per le proprietà dei logaritmi: $\log_a y = \log_a(e)\cdot\log_e(y)$

$$= \frac{1}{\frac{\log_a(e)}{y}}$$

Si è sfruttata la medesima proprietà dei logaritmi

$$= \frac{y}{\log_a(e)} = \frac{a^x}{\log_a(e)} = a^x \cdot \log_e(a)$$

$\boxed{\text{ES. 3}}$ → ES. 93 FOGLIO 8



$$\left.\begin{aligned} h(x) &= x^2 \\ \ell(x) &= \sqrt{x^2 + (1-x^2)^2} \end{aligned}\right\} \quad E(x) = \underbrace{mgh(x)}_{E_{grav.}} + \underbrace{k\,\ell(x)^2}_{E_{el}}$$

$$= mgx^2 + k\left[x^2 + (1-x^2)^2\right]$$

$$= mgx^2 + kx^2 + k(1 + x^4 - 2x^2)$$

$$= mgx^2 + kx^2 + k + kx^4 - 2kx^2$$

$$= kx^4 + (mg - k)x^2 + k$$

Calcolo la derivata di $E(x)$:

$$E'(x) = 4kx^3 + 2(mg-k)x = 2x(2kx^2 + mg - k)$$

Candidati minimi:

$$E'(x) = 0 \quad \begin{cases} \to x = 0 \\ \to 2kx^2 + mg - k = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{k - mg}{2k}} \end{cases}$$

Abbiamo quindi due possibili situazioni:

1) Se $mg \geq k \Rightarrow 2kx^2 + mg - k \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$2x(2kx^2 + mg - k) \geq 0 \quad \text{se} \quad x \geq 0$$

$$2x\left(2kx^2+mg-k\right)<0 \quad \text{se} \quad x<0$$

	$-$	0	$+$
	$\searrow$	min	$\nearrow$

Abbiamo quindi un minimo in $x=0 \Rightarrow \underbrace{E_{min}=k}$

Ottenuto sostituendo $x=0$ nell'espressione di $E(x)$

2) $mg<k \Rightarrow 2x\cdot\left(2kx^2+mg-k\right)\geq 0$

- $2x\geq 0 \Rightarrow x\geq 0$

- $2kx^2+mg-k\geq 0 \Rightarrow x<\underbrace{-\sqrt{\dfrac{k-mg}{2k}}}_{(x_1)} \;\wedge\; x>\underbrace{\sqrt{\dfrac{k-mg}{2k}}}_{(x_2)}$

	x_1		0		x_2	
x:	$-$		$-$		$+$	$+$
Denominatore:	$+$		$-$		$-$	$+$
	$-$		$+$		$-$	$+$
	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	$\nearrow$

Abbiamo quindi dei minimi in

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{k-mg}{2k}}$$

Per trovare i valori di E_{min} nelle due x appena menzionate basterà sostituire $x_{1,2}$ al posto di x nell'espressione di $\underbrace{E(x)}$

Dato che qui compare x^4 e x^2, E_{min} sarà lo stesso sia per x_1 che per x_2 (quindi non ci si dovrà preoccupare del segno diverso tra x_1 e x_2)

$$\Rightarrow E_{min}=k\left(\frac{k-mg}{2k}\right)^2+(mg-k)\cdot\frac{k-mg}{2k}+k=\frac{(k-mg)^2}{4k}-\frac{(k-mg)^2}{2k}+k=$$

$$=\frac{(k-mg)^2-2(k-mg)^2+4k^2}{4k}=\frac{-(k-mg)^2+4k^2}{4k}=\frac{-k^2-m^2g^2+2kmg+4k^2}{4k}$$

$$=\frac{3k^2+2kmg-m^2g^2}{4k}=\frac{3k^2+3kmg-kmg-m^2g^2}{4k}$$

$$= \frac{3K(K+mg) - mg(K+mg)}{4K} = \frac{(3K-mg)(K+mg)}{4K}$$

$\boxed{\text{ES. 4}}$ → ES 2 APPELLO 15/09/2022

$$f(x) = |x|\sqrt{1-x^3}$$

• Dominio: $1-x^3 \geq 0 \Rightarrow x^3 \leq 1 \Rightarrow x < 1 \Rightarrow D = (-\infty, 1]$

• Asintoti: $\lim_{x\to-\infty} |x|\sqrt{1-x^3} = \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2(1-x^3)} = \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2 - x^5}$

$$= \lim_{x\to-\infty}\sqrt{\underbrace{x^5}_{\to -\infty}\underbrace{\left(-1+\frac{1}{x^3}\right)}_{\to -1}} = +\infty$$ → Non è sono asintoti orizzontali

Asintoti obliqui?

$$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\overbrace{\cancel{|x|}}^{\to -1}\sqrt{1-x^3}}{\cancel{x}} = -\infty$$ → Non ci sono asintoti obliqui

• Derivata: $f(x)$ è derivabile in $(-\infty, 1] \setminus \{0\}$ → Basti pensare a $|x|$

$$|x| = x\cdot \text{sgn}(x) \Rightarrow f'(x) = \text{sgn}(x)\sqrt{1-x^3} - x\,\text{sgn}(x)\cdot\frac{1}{2}(1-x^3)^{-1/2}\cdot 3x^2$$

$$= \text{sgn}(x)\sqrt{1-x^3} - \frac{3x^3\,\text{sgn}(x)}{2\sqrt{1-x^3}}$$

$$= \frac{\text{sgn}(x)}{2\sqrt{1-x^3}}(2-2x^3-3x^3) = \frac{\text{sgn}(x)}{2\sqrt{1-x^3}}(2-5x^3)$$

Studio il segno di $f'(x)$

		0		$(2/5)^{1/3}$		1
$\text{sgn}(x)$	$-$		$+$		$+$	
$2-5x^3$	$+$		$+$		$-$	
	↘		↗		↘	

0 è un minimo

$\left(\frac{2}{5}\right)^{1/3}$ è un massimo

Non compare $\sqrt{1-x^3}$ perché, essendo nel dominio, già sappiamo che sarà positivo

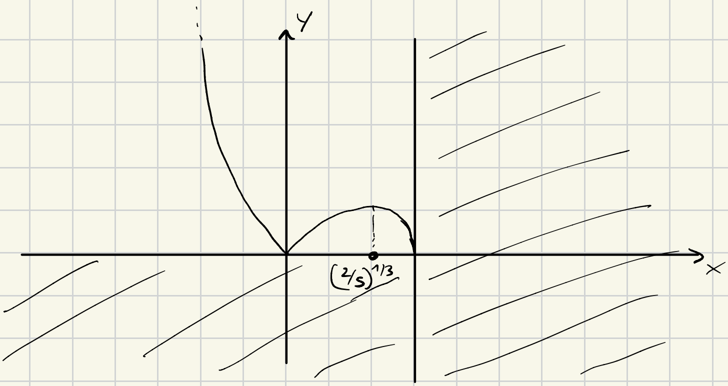
↳ Qui non siamo più dentro il dominio definito poco fa

Non ci resta che studiare il comportamento della derivata nei pressi di 0 e 1^-

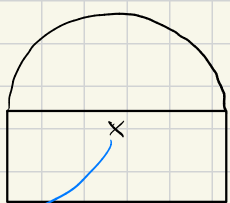
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{1-x^3}}}_{\to 1/2} \underbrace{(2-5x^3)}_{\to 2} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -1$$

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{1-x^3}}}_{\to +\infty} \underbrace{(2-5x^3)}_{\to -3} = -\infty$$



$\boxed{\text{ES. 5}}$ → ES. 88 FOGLIO 8 DI ESERCIZI



Scegliamo questa notazione, chiamando x il lato del rettangolo in comune con il semicerchio, e y l'altro

L'area della figura sarà:

$$A = \underbrace{x \cdot y}_{\text{AREA RETTANG.}} + \underbrace{\left(\frac{x}{2}\right)^2 \pi \cdot \frac{1}{2}}_{\text{AREA SEMICERCHIO DI DIAMETRO } x}$$

Per riuscire a trovare il massimo bisogna esprimere tutto in funzione di una sola coordinata (scegliamo la x)

$\Rightarrow$ Sappiamo che il perimetro (esterno) della figura è fissato a P

$$P = \underbrace{\cancel{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{\cancel{2}}}_{\text{PERIMETRO SEMICERCHIO}} + \underbrace{x+2y}_{\text{CONTRIBUTO AL PERIMETRO ESTERNO DATO DAL RETTANGOLO}}$$

$$\Rightarrow 2y = P - x - \frac{\pi}{2}x \Rightarrow y = \frac{P - x\left(1+\frac{\pi}{2}\right)}{2}$$

Andando a sostituire questa espressione per y in quella dell' area

$$A = x\left(\frac{P - x\left(1+\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right) + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \pi\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{xP}{2} - \frac{x^2}{2}\left(1+\frac{\pi}{2}\right) + \underbrace{\left(\frac{x}{2}\right)^2\frac{\pi}{2}}_{\frac{x^2}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{x^2\pi}{8}}$$

Andiamo ora a derivare per trovare gli estremi

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}[A] = \frac{P}{2} - \cancel{2}\cdot\frac{x}{\cancel{2}}\left(1+\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\cancel{2}x\pi}{\cancel{8}4} = \frac{P}{2} - x\left(1+\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi x}{4}$$

$$= \frac{P}{2} - x\left(1+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

Poniamo la derivata pari a 0

$$\Rightarrow \frac{P}{2} - x\left(1+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{\frac{P}{2}}{1+\frac{2\pi-\pi}{4}} = \frac{\frac{P}{2}}{\frac{4+\pi}{4}}$$

$$= \frac{P}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{4}^{2}}{4+\pi} = \frac{2P}{4+\pi}$$

Dal momento che l' espressione della derivata é un polinomio di 1° grado con coefficiente della x negativo (≡ retta con coefficiente angolare negativo), la derivata sarà positiva per $x < \frac{2P}{4+\pi}$ e negativa per $x > \frac{2P}{4+\pi}$

$\Rightarrow$ Per $x = \frac{2P}{4+\pi}$ abbiamo un massimo

Calcoliamo quindi l'area per tale x

$$\Rightarrow A\left(x=\frac{2P}{4+\pi}\right) = \frac{P}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}P}{4+\pi} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2P}{4+\pi}\right)^2\left(\frac{2+\pi}{2}\right) + \left(\frac{P}{4+\pi}\right)^2\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{P^2}{4+\pi} - \frac{\cancel{2}P^2}{(4+\pi)^2}\cdot\frac{2+\pi}{\cancel{2}} + \frac{P^2}{(4+\pi)^2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{P^2}{4+\pi} - \frac{P^2}{(4+\pi)^2}\cdot(2+\pi) + \frac{P^2}{(4+\pi)^2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{P^2}{(4+\pi)^2}\left(4+\cancel{\pi} - 2 - \cancel{\pi} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{P^2}{(4+\pi)^2}\left(2+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{P^2}{(4+\pi)^{\cancel{2}}}\cdot\frac{\cancel{4+\pi}}{2} = \frac{P^2}{2(4+\pi)}$$