V Incontro Tutorato A.M. 1

$\boxed{ES. 1}$

a) Dobbiamo risolvere la disequazione $\left|\frac{x}{x-1} - 2\right| < \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$, e verificare che è soddisfatta in un intorno di 2.
La disequazione equivale al sistema

$$\begin{cases} \frac{x}{x-1} - 2 > -\varepsilon \\ \\ \frac{x}{x-1} - 2 < \varepsilon \end{cases}$$

Dal momento che l'obiettivo è trovare un intorno di 2 in cui il sistema è soddisfatto e non scrivere tutte le soluzioni del sistema, possiamo supporre che sia $x-1>0$, cioè $x>1$; questo ci consente di moltiplicare i due membri della disequazione per $x-1$ e ricondurci al seguente:

$$\begin{cases} x - 2(x-1) > -\varepsilon(x-1) \\ \\ x - 2(x-1) < \varepsilon(x-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-\varepsilon)x < 2-\varepsilon \\ \\ (1+\varepsilon)x > 2+\varepsilon \end{cases}$$

Dovendo verificare il limite, POSSIAMO SUPPORRE ε ARBITRARIAMENTE PICCOLO, DI MODO TALE DA AVERE $\varepsilon < 1 \rightarrow 1-\varepsilon > 0$.
DIVIDIAMO QUINDI AMBO I MEMBRI PER $1-\varepsilon$ SENZA CAMBIARE VERSO DELLA DISEQUAZIONE, TROVANDO CHE

$$\frac{2+\varepsilon}{1+\varepsilon} < x < \frac{2-\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

$$\frac{2+2\varepsilon-\varepsilon}{1+\varepsilon} = \frac{2(1+\varepsilon)-\varepsilon}{1+\varepsilon} = 2 - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

$$\frac{2-2\varepsilon+\varepsilon}{1-\varepsilon} = \frac{2(1-\varepsilon)+\varepsilon}{1-\varepsilon} = 2 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

$$2 - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} < x < 2 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

$\rightarrow$ SI TRATTA DI UN INTORNO DI 2, QUINDI IL LIMITE È VERIFICATO

b) Bisogna risolvere la disequazione $\ln(1-x^2) < -M$, con $M>0$, e verificare che è soddisfatta in un intorno sinistro di 1.

Questa disequazione equivale al sistema

$$\begin{cases} 1-x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1 \\ 1-x^2 < e^{-M} \Rightarrow x^2 > 1-e^{-M} \Rightarrow x < -\sqrt{1-e^{-M}} \vee x > \sqrt{1-e^{-M}} \end{cases}$$

Da cui $-1 < x < -\sqrt{1-e^{-M}} \vee \underbrace{\sqrt{1-e^{-M}} < x < 1}_{\text{È un intorno sinistro di } 1 \Rightarrow \checkmark}$

c) Bisogna verificare la disequazione $\left|\frac{x+1}{x} - 1\right| < \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$, e verificare che è soddisfatta in un intorno di $-\infty$.

Svolgendo i calcoli si trova che la disequazione equivale alla seguente

$$\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{|x|} < \varepsilon \Rightarrow 1 < \varepsilon|x| \Rightarrow |x| > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \underline{x < -\frac{1}{\varepsilon}} \vee x > \frac{1}{\varepsilon}$$

Essendo un intorno di $-\infty$,
il limite è verificato

d) Bisogna verificare che la disequazione $x^2+1 > M$, con $M>0$, è soddisfatta in un intorno di $+\infty$.

La disequazione equivale a $x^2 > M-1$. Visto il limite considerato, possiamo supporre M arbitrariamente grande. Possiamo quindi supporre $M>1$ $\Rightarrow M-1>0$ e la disequazione risulta soddisfatta per

$$x < -\sqrt{M-1} \vee \underline{x > \sqrt{M-1}}$$

È un intorno di $+\infty$, limite verificato ✓

ES. 2

a) PER $x \to +\infty$ I DUE ADDENDI DIVENTANO UGUALI A $\sqrt{x^2} - \sqrt{x} = |x| - \sqrt{x}$
TUTTAVIA PER $x \to +\infty$ DOMINERÀ LA x, DUNQUE IL LIMITE SARÀ $+\infty$ *

b) STESSO RAGIONAMENTO DI (a), ORA PERÒ OTTENIAMO $-\infty$

* SI POTEVA GIUNGERE ANCHE ATTRAVERSO CONTI ESPLICITI: RACCOGLIAMO x^2 NELLA PRIMA RADICE $\to |x| \underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$ $\to$ TENDERÀ A 1

NELLA SECONDA INVECE RACCOGLIAMO x
$\to$ RACCOGLIAMO x DA ENTRAMBI I FATTORI (TRASCURIAMO IL MODULO DATO CHE $x \to +\infty$) E OTTENIAMO UNA COSA DEL TIPO $x(\ldots)$ DOVE $(\ldots) \to 1$. DUNQUE SI GIUNGE ALLE STESSE CONCLUSIONI

c) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^3+x^2}-\sqrt{x^3-2x}}{\sqrt{x^3+x^2}+\sqrt{x^3-2x}}\left(\sqrt{x^3+x^2}+\sqrt{x^3-2x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^3}+x^2-\cancel{x^3}+2x}{\sqrt{x^3+x^2}+\sqrt{x^3-2x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(+1+\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^3}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}\right)} = \lim_{x\to+\infty} x^{1/2}\frac{\left(+1+\cancel{\frac{2}{x}}\right)}{\sqrt{1+\cancel{\frac{1}{x}}}+\sqrt{1-\cancel{\frac{2}{x^2}}}} = +\infty$$

d) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3\left(1+\cancel{\frac{1}{x}}+\cancel{\frac{1}{x^2}}\right)}{x^2\left(2-\cancel{\frac{1}{x}}+\cancel{\frac{3}{x^2}}\right)} = -\infty$$

e) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(2+\cancel{\frac{5}{x}}-\cancel{\frac{7}{x^2}}\right)}{x^2\left(5-\cancel{\frac{2}{x}}+\cancel{\frac{3}{x^2}}\right)} = \frac{2}{5}$$

f) $$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(1+\cancel{\frac{\sin x}{\sqrt{x}}}\right) = +\infty$$

g) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x}\cdot\frac{x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot x = 0$$

h) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(2-\cancel{\frac{\sin x}{x}}\right)}{x\left(3+\cancel{\frac{\cos x}{x}}\right)} = \frac{2}{3}$$

i) PROVIAMO AD EFFETTUARE UN CAMBIO DI VARIABILI $y = x-1 \to x = y+1$

$$\lim_{x\to1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1-x} = \lim_{y\to0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}y+\frac{\pi}{2}\right)}{y} = \lim_{y\to0} -\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)}{y}\cdot\frac{\pi/2}{\pi/2} = -\pi/2$$

j) $$\lim_{x\to5} \frac{\cancel{(x-5)}(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{\cancel{x-5}} = 2\sqrt{5}$$

k) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{3^x+\frac{1}{3^x}}{3^x-\frac{1}{3^x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{3^{2x}+1}{\cancel{3^x}}}{\frac{3^{2x}-1}{\cancel{3^x}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3^{2x}+1}{3^{2x}-1} = -1$$

l) SFRUTTIAMO IL CAMBIO DI VARIABILE $y = e^x$. LA FUNZIONE QUINDI POSSIAMO SCRIVERLA COME

$$\frac{y^2-1}{y^3-1} = \frac{\cancel{(y-1)}(y+1)}{\cancel{(y-1)}(y^2+y+1)} = \frac{y+1}{y^2+y+1}$$

LA CRITICITÁ É SPARITA, POSSIAMO RIPORTARE TUTTO A COM'ERA PRIMA DEL CAMBIO DI VARIABILE

$$\lim_{x\to0} \frac{e^x+1}{e^{2x}+e^x+1} = \frac{2}{3}$$

m) CONSIDERIAMO PRIMA LE DUE FRAZIONI: DALLA PRIMA

$$\frac{\pi x + x^{3/2}}{ex^4+x^3} \to \frac{\pi x}{ex^4}$$

LA SECONDA INVECE $\to \dfrac{3x^3}{x^2}$

$$\approx \lim_{x\to 0} \frac{\pi \cancel{x}}{e x^{\cancel{4}3}} \sin\left(\frac{3x^{\cancel{5}3}}{\cancel{x^2}}\right) = \frac{\pi}{e} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x^3)}{3x^3} \cdot 3 = \frac{3\pi}{e}$$

Procedendo in altra maniera, esplicitando meglio i conti e sbattendo gli o-piccolo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(\pi + x^{1/2})}{\cancel{x}(e x^3 + x^8)} \underbrace{\sin\left(\frac{\cancel{x^2}(3x^3+2x^6)}{\cancel{x^2}(1+6x^{1/2})}\right)}_{\left(\frac{3x^3+2x^6}{1+6x^{1/2}} + o\left(\frac{3x^3+2x^6}{1+6x^{1/2}}\right)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\pi+x^{1/2})(3x^3+2x^6)}{(ex^3+x^8)(1+6x^{1/2})} + \frac{(\pi+x^{1/2})}{ex^3+x^8}\, o\left(\frac{3x^3+2x^6}{1+6x^{1/2}}\right) \to o\left(\frac{(\pi+x^{1/2})(3x^3+2x^6)}{(ex^3+x^8)(1+6x^{1/2})}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^3}(\pi+x^{1/2})(3+2x^3)}{\cancel{x^3}(e+x^5)(1+6x^{1/2})} + o\left(\frac{(\pi+x^{1/2})(3x^3+2x^6)}{(ex^3+x^8)(1+6x^{1/2})}\right) = \frac{3\pi}{e}$$

n) NON ESISTE, PERCHÉ $\lim_{x\to\infty} \sin(x)$ NON ESISTE

o) LIMITE NON ESISTE, $e^{1/x}$ HA COMPORTAMENTI DIVERSI A SECONDA DA DOVE SI TENDE

p) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi\cos x)}{x\sin x} \cdot \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi\cos x)}{x^2} \cdot \frac{x}{\sin(x)}$$

QUESTO POSSO TRASCURARLO

$\to$ AGGIUNGO E SOTTRAGGO π DENTRO L'ARGOMENTO DI $\sin(\pi\cos x)$

$\sin(\alpha+\pi) = -\sin(\alpha)$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(-\pi(1-\cos x)+\pi)}{x^2} = \lim_{x\to 0} -\frac{\sin(-\pi(1-\cos x))}{x^2}$$

MOLTIPLICO E DIVIDO $(1-\cos(x))$ $\to$ PER x^2

NEL LIMITE QUESTO TENDERÀ A $1/2$, MOLTIPLICATO PER 2 TENDERÀ A 1

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{\sin\left(-\pi \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot x^2 \cdot \frac{2}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0} -\frac{\sin\left(-\pi\frac{x^2}{2}\right)}{x^2} \cdot \frac{\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = +\frac{\pi}{2}$$

Proviamo a rivedere lo stesso esercizio, considerando ora gli o-piccolo.
Partiamo anzitutto riscrivendo il numeratore (pagina successiva

$$\sin(\pi\cos x) \overset{\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{=} \sin\left(\pi - \frac{\pi x^2}{2} + o(x^2)\right) = \underset{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\overset{0}{\sin\pi}\cos\left(-\frac{\pi x^2}{2}+o(x^2)\right) + \overset{-1}{\cos\pi}\sin\left(-\frac{\pi x^2}{2}+o(x^2)\right)} =$$

$$= -\sin\left(-\frac{\pi x^2}{2}+o(x^2)\right) \overset{\sin(-\alpha)=-\sin\alpha}{=} \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}+o(x^2)\right)$$

Quindi il nostro limite diventa $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x\sin x} = \circledast$

Riscriviamo (nuovamente) sia il numeratore che il denominatore

- $\sin\left(\frac{\pi x^2}{2}+o(x^2)\right) = \frac{\pi x^2}{2} + o(x^2) + \overbrace{o\left(\frac{\pi x^2}{2}+o(x^2)\right)}^{=o(x^2)} = \frac{\pi x^2}{2} + o(x^2)$
- $x\sin(x) = x(x+o(x)) = x^2 + o(x^2)$

$$\circledast = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\pi x^2}{2}+o(x^2)}{x^2+o(x^2)} = \frac{\pi}{2}$$

⚠ DA QUI IN AVANTI, PER log SI INTENDE IL LOGARITMO NATURALE (IN BASE e)

ES. 3

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^{(3x^3)}-1}{(\tan 4x^3)(\log x)} \overset{x^{3x^3} = e^{\log(x^{3x^3})} = e^{3x^3\log x}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^{3x^3\log x}-1}{(\tan 4x^3)(\log x)} \cdot \frac{3x^3}{3x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{3x^3\log x}-1}{3x^3\log x} \cdot \frac{3x^3}{\tan(4x^3)} \cdot \frac{4}{4} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{e^{3x^3\log x}-1}{3x^3\log x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{4x^3}{\tan 4x^3}}_{\to 1} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

ES. 4

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos(3x^3)}-e}{x^6} = \lim_{x\to 0} e\,\frac{\left(e^{\cos(3x^3)-1}-1\right)}{x^6} \cdot \frac{\cos(3x^3)-1}{\cos(3x^3)-1}$$

$$= \lim_{x\to 0} e\,\frac{e^{\cos(3x^3)-1}-1}{\cos(3x^3)-1} \cdot \frac{\cos(3x^3)-1}{(x^3)^2} \cdot \frac{9}{9} = \lim_{x\to 0} 9e\,\underbrace{\frac{e^{\cos(3x^3)-1}-1}{\cos(3x^3)-1}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\cos(3x^3)-1}{(3x^3)^2}}_{\to -1/2}$$

$$= -\frac{9}{2}e$$

ES. 5

Partiamo considerando il termine all'interno delle parentesi tonde

Dato che: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4+7x^\alpha}{3+7x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{x} \cdot \underbrace{\dfrac{(7+4/x^\alpha)}{(7+3/x)}}_{1} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha>1 \\ 1 & \text{se } \alpha=1 \\ 0 & \text{se } \alpha<1 \end{cases}$

Abbiamo che: $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{4+7x^\alpha}{3+7x}\right)^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha>1 \\ 0 & \text{se } \alpha<1 \end{cases}$

Nel caso in cui $\alpha=1$ abbiamo:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{4+7x}{3+7x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1+3+7x}{3+7x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{3+7x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} \left[\left(1+\frac{1}{3+7x}\right)^{3+7x}\right]^{\frac{x}{3+7x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{3+7x}\right)^{3+7x}}_{e}\right]^{\underbrace{\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(7+\frac{3}{x})}}_{\frac{1}{7}}} = e^{1/7} = \sqrt[7]{e}$$

ES. 6

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+6}{x}\right)^{\frac{x^2+5}{x+3}} = \lim_{x\to+\infty} \left[1+\frac{1}{(x/6)}\right]^{\frac{x^{\cancel{2}}(1+5/x^2)}{\cancel{x}(1+3/x)}} = \lim_{x\to+\infty} \left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{x/6}\right)^{x/6}}_{e}\right]^{\underbrace{6\,\frac{(1+5/x^2)}{(1+3/x)}}_{6}} = e^6$$

ES. 7

$$e^{2/x} + \frac{5}{x} = e^{2/x}\left(1+\frac{5}{xe^{2x}}\right) = e^{2/x}\left(1+\frac{1}{\frac{xe^{2/x}}{5}}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\log\left(e^{2/x}+\frac{5}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} x\log\left[e^{2/x}\left(1+\frac{1}{\frac{xe^{2/x}}{5}}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left\{\log e^{2/x} + \log\left[\left(1+\frac{1}{\frac{xe^{2/x}}{5}}\right)^{\frac{xe^{2/x}}{5}}\right]^{\frac{5}{xe^{2/x}}}\right\}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x \left\{ \frac{2}{x} + \frac{s}{x e^{2/x}} \log \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x e^{2/x}}{s}} \right)^{\frac{x e^{2/x}}{s}} \right] \right.$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 2 + \underbrace{\frac{s}{e^{2/x}}}_{\to s} \underbrace{\log \left[\underbrace{\left(1 + \frac{1}{\frac{x e^{2/x}}{s}} \right)^{\frac{x e^{2/x}}{s}}}_{\to e} \right]}_{\to 1} = 7$$