IX TUTORATO A. M. 1

$\boxed{\text{ES. 2}}$

a) Sappiamo che $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \Rightarrow \sin(x) = x + o(x)$

Se ci limitassimo a questo, però, avremmo che

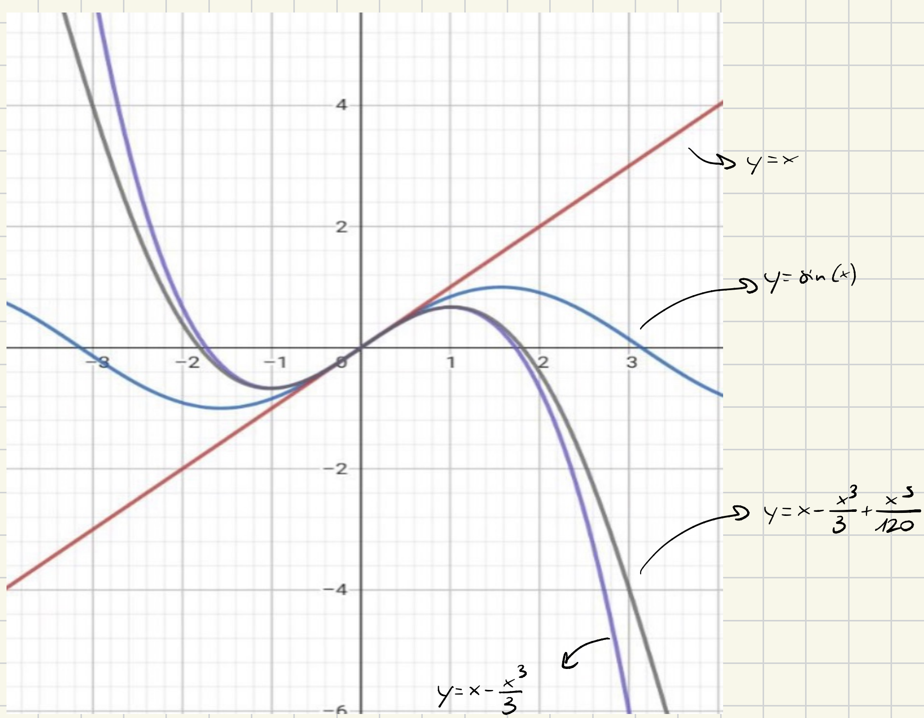
$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - x + o(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x^3} \quad ?$$

Quindi quanto visto fino ad ora non basta, proviamo ad usare de l'Hôpital ottenendo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{3x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Che ci porta a passare dal dire

$$\sin(x) = x + o(x) \Rightarrow \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$



b) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\log(1+x)^3}{\sin(5x)+x^{4/3}\sin(x)}$

- $\log(1+x)^3 = 3\log(1+x) = 3(x+o(x))$

- $\sin(5x) = 5x + o(x)$

- $\sin(x) = x + o(x)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0} \frac{\log(1+x)^3}{\sin(5x)+x^{4/3}\sin(x)} = \lim_{x\to0} \frac{3(x+o(x))}{5x+\underbrace{o(x)+x^{4/3}(x+o(x))}_{=o(x)}} = \lim_{x\to0}\frac{3x+o(x)}{5x+o(x)} = \frac{3}{5}$$

$$\Downarrow$$

1) $x^{\alpha} = o(x)$ se $\alpha > 1$

$$\lim_{x\to0}\frac{x^{\alpha}}{x} = \lim_{x\to0} x^{\alpha-1} \underset{\alpha>1}{=} 0 \Rightarrow x^{\alpha} = o(x)$$

$$\Rightarrow o(x) + \underbrace{x^{4/3}\cdot x}_{= x^{7/3} = o(x)} + \underbrace{x^{4/3}\cdot o(x)}_{= o(x^{7/3}) = o(x)} = o(x)$$

Se ora consideriamo $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log(1+x)^3 - 3\sin(x) + \frac{3}{2}x^2}{\sin(5x) - 5x\cos(x)} = ⊛$

Considerando gli sviluppi visti nelle scorse schermate:

$$\frac{3x+o(x) - 3x + o(x) + \frac{3}{2}x^2}{5x + o(x) - 5x\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)} = \frac{o(x) + \frac{3}{2}x^2}{o(x) + \frac{5}{2}x^2 + o(x^3)} = \frac{o(x)}{o(x)} \xrightarrow{x\to0} ?$$

Proviamo a usare de l'Hôpital

$$⊛ \overset{H}{=} \lim_{x\to0}\frac{3\cdot\frac{1}{1+x} - 3\cos(x) + 3x}{\cos(5x)\cdot5 - 5\cos(x) + 5x\sin(x)} \overset{H}{=} \lim_{x\to0}\frac{-3\frac{1}{(1+x)^2} + 3\sin(x) + 3}{-5\cdot\sin(5x)\cdot5 + 5\sin(x) + 5\sin(x) + 5x\cos(x)}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to0}\frac{\overbrace{+6\frac{1}{(1+x)^3}}^{\to6} + 3\overbrace{\cos(x)}^{\to1}}{\underbrace{-25\cos(5x)\cdot5}_{\to-125} + \underbrace{5\cos(x)}_{\to5} + \underbrace{5\cos(x)}_{\to5} + \underbrace{5\cos(x)}_{\to5} \underbrace{- 5x\sin(x)}_{\to0}} = -\frac{9}{110}$$

ES. 1

1) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}$

2) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x\ln(x)} - 1}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\ln(x)}\left[\ln(x)+1\right]}{1} = -\infty$

3) $\lim_{x\to 0} \frac{\log \frac{\sin(x)}{x}}{x^2} \overset{H}{=} \frac{\frac{\cancel{x}}{\sin x} \cdot \frac{\cos(x)\cdot x - \sin(x)}{x^{\cancel{2}}}}{2x} = \frac{\cos(x)\cdot x - \sin(x)}{2x^2 \sin(x)}$

$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)\cdot x + \cancel{\cos(x)} - \cancel{\cos(x)}}{4x\sin(x) + 2x^2\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{\frac{4x\cancel{\sin(x)}}{\cancel{x\sin(x)}} + \frac{2x^{\cancel{2}}\cos(x)}{\cancel{x}\sin(x)}}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{-1}{4 + 2\underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\cos(x)}_{\to 1}} = -\frac{1}{6}$

4) $\lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{1-x^2}}{2\cos x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}}\cdot(-\cancel{2}x)}{-\frac{1}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}}} = 1$

ES. 3

Per quanto riguarda il dominio: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Per i limiti notevoli andiamo a vedere

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \cdot 1 = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \cdot 1 = 0$

$\lim_{x\to 2} f(x) = e^2 \cdot (+\infty) = +\infty$

Quindi $x=2$ è un asintoto verticale

$y=0$ asintoto orizzontale per $x \to -\infty$

	0		2	
x	$-$	$+$		$+$
$x-2$	$-$	$-$		$+$
	$+$	$-$		$+$

Se $x \neq 2$ (e vedremo anche $x \neq 0$)

$|x| = x\,\mathrm{sgn}(x)$

$$f'(x) = e^x\left(\left|\frac{x}{x-2}\right| + \mathrm{sgn}\left(\frac{x}{x-2}\right)\frac{x-2-x}{(x-2)^2}\right) = \frac{e^x}{(x-2)^2}\,\mathrm{sgn}\left(\frac{x}{x-2}\right)\underbrace{\left(x(x-2)-2\right)}_{x^2-2x-2}$$

$$x^2-2x-2 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}$$

$x=2$ è già stato escluso ($\notin D$), però vediamo che anche 0 è un punto sospetto di non derivabilità, dato che il segno cambia

A conferma di ciò

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \frac{1}{2}\ ; \quad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\frac{1}{2}}$$

$$\mathrm{sgn}\, f' = \mathrm{sgn}\left(\frac{x}{x-2}\right)\mathrm{sgn}\left(x^2-2x-2\right)$$

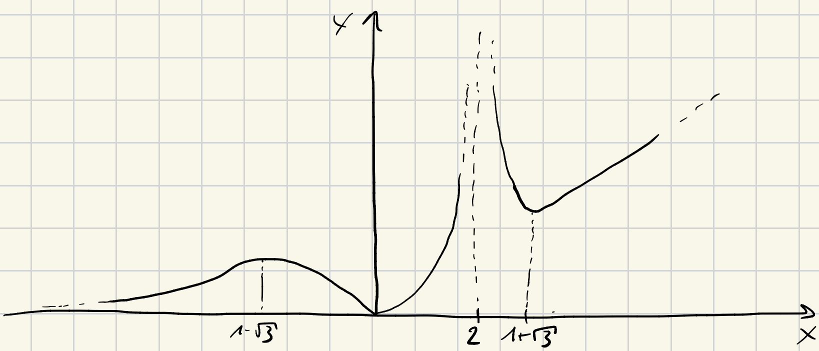
		$1-\sqrt{3}$		0		2		$1+\sqrt{3}$	
x	$-$		$-$		$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$		$+$		$+$
x^2-2x-2	$+$		$-$		$-$		$-$		$+$
	$+$		$-$		$+$		$-$		$+$
	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$

I punti di non derivabilità sono i punti del dominio in cui non è definita la derivata prima:

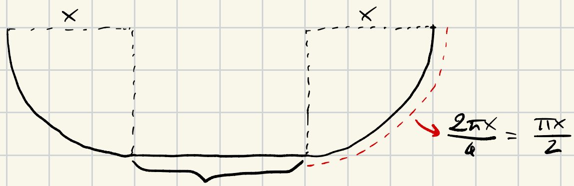
1) P.to angoloso (es. $|x|$)
2) Cuspide (es. $\sqrt{|x|}$)
3) P.to di flesso a tangente verticale (es. $\sqrt[3]{x}$)

$f(D) = [0, +\infty[$ dove 0 è il minimo assoluto

(già $f([0,2[) = [0,+\infty[$ per il th. degli zeri e $f \geq 0$)



$\boxed{\text{Es 4}}$



$$\Rightarrow 2 \cdot \frac{\pi x}{2} + y = L \Rightarrow \pi x + y = L \Rightarrow y = L - \pi x$$

Capacità è $\frac{\pi x^2}{4} \cdot 2 + x \cdot y = \frac{\pi x^2}{2} + Lx - \pi x^2 = \mathcal{C}$

$$\frac{d\mathcal{C}}{dx} = \pi x + L - 2\pi x = L - \pi x = 0 \iff x = \frac{L}{\pi} \rightarrow y = L - \pi \cdot \frac{L}{\pi}$$

$$\Rightarrow \mathcal{C} = Lx - \frac{\pi}{2} x^2 \Rightarrow \mathcal{C}\left(\frac{L}{\pi}\right) = L \cdot \frac{L}{\pi} - \frac{\cancel{\pi}}{2} \cdot \frac{L^2}{\cancel{\pi^2}} = \frac{L^2}{2\pi}$$