Università Degli Studi di Padova
Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"
Corsi di laurea in Fisica e Astronomia

Studente: Federico Simioni
Email: federico.simioni@studenti.unipd.it
Disciplina: Analisi Matematica 1

Lezione 7

1 Studiare il limite delle seguenti successioni:

(a) $\frac{1}{n}$;
(b) $\frac{1}{n^2}$;
(c) $\frac{n}{n+1}$;
(d) α^n (con $\alpha > 1$);
(e) $\frac{\alpha^n}{n^q}$ (con $\alpha > 1$, $q > 0$);
(f) $\frac{\alpha^n}{n!}$ (con $\alpha > 1$);
(g) $\frac{n!}{n^n}$;
(h) $\sin(n)$;
(i) $\frac{2^n - 3^n}{1+3^n}$;
(j) $\frac{\sqrt{n} - n + n^2}{2n^2 - n^{\frac{3}{2}} + 1}$;
(k) $\frac{1+\log(n)}{\sqrt{n} - \log(n)}$;
(l) $\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n$;
(m) $\frac{(n^2+1)^n}{n^{2n}}$;
(n) $\sqrt[n]{n \cdot \log(n)}$;
(o) $\frac{\sin(e^{\pi \cdot \cos(n)})}{n^2}$;
(p) $\frac{\log(n^3+1)}{\log(2n^5-8)}$;
(q) $\left(1 + \frac{1}{n!}\right)^n$;
(r) $\sqrt[n]{a^{2n} + 1}$;
(s) $n^{(-1)^n}$;
(t) $\frac{n!}{2^n} \cdot \sin(n\frac{\pi}{2})$;

2 Sia data la seguente successione, definita in modo ricorsivo:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} \end{cases}$$

Dimostrare che la successione è limitata e calcolarne il limite.

3 Provare a rispondere alle seguenti domande di teoria, tratte da appelli passati:

(a) Dare la definizione di successione di Cauchy. La successione $a_n = \frac{n!}{3^n}$ è di Cauchy?
(b) Data una successione reale $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dare la definizione di successione limitata, poi di successione convergente.

(c) Risulta vero che ogni successione convergente è limitata? In caso affermativo, dimostrarlo, altrimenti fornire un controesempio.

(d) Risulta vero che se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a 0, allora il prodotto $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente? Se si, giustificare l'affermazione, altrimenti fornire un controesempio.

(e) Enunciare il criterio del rapporto per successioni e applicarlo per giustificare che $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$

(f) Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false e giustificare:
1) Esistono successioni limitate non convergenti
2) Esistono successioni convergenti non limitate