XIII TUTORATO A.M. 1

$\boxed{ES.\ 1}$

a) $u' = e^{-u} \rightarrow \frac{du}{dt} = e^{-u} \rightarrow e^{u}du = dt \rightarrow \int e^{u}du = \int dt$

Quindi: $e^{u} = t + c \rightarrow \log|t+c| = u$

b) $u' = 1 + u^2 \rightarrow \frac{du}{dt} = 1 + u^2 \rightarrow \int \frac{du}{1+u^2} = \int 1 \cdot dt$

$\rightarrow \arctan(u) = t + c \longrightarrow u = \tan(t + c)$

c) $u' = (1+2t)e^{-u} \longrightarrow \frac{du}{dt} = (1+2t)e^{-u} \rightarrow \int e^{u}du = \int (1+2t)dt$

$\rightarrow e^{u} = t + \cancel{2}\frac{t^2}{\cancel{2}} + c \rightarrow u = \log|t + t^2 + c|$

d) $u' = u^2 + u \rightarrow$ Esistono delle soluzioni costanti del tipo $u(x) = a$?
Vediamolo:

$u' = 0$ (essendo costante)

$u(x) = a$

$\Rightarrow 0 = a^2 + a \rightarrow 0 = a(a+1) \rightarrow$ Abbiamo due soluzioni costanti: $u(x) = 0$

$a = 0 \vee a = -1$

$u(x) = -1$

Quindi, se cerchiamo una soluzione con condizione iniziale tale per cui

$$-1 < u(x_0) < 0$$

Allora questa funzione $u(x)$ sarà limitata verticalmente tra -1 e 0 (teorema di Cauchy).
Procediamo quindi a determinare le soluzioni della nostra equazione diff.:

$$\rightarrow \frac{du}{dt} = u^2 + u \rightarrow \int \frac{du}{\underbrace{u(u+1)}} = \int dt \qquad \circledast$$

$$\frac{A}{u} + \frac{B}{u+1} \rightarrow Au + A + Bu \rightarrow \begin{cases} A+B = 0 \rightarrow B = -1 \\ A = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \right) du = \log|u| - \log|u+1|$$

Otteniamo quindi: $\circledast \Rightarrow \log|u| - \log|u+1| = t + c$

$$\log\left|\frac{u}{u+1}\right| = t + c \rightarrow$$

Se immaginiamo di considerare le u definite al di fuori dell' intervallo (verticale) definito tra -1 e 0, possiamo togliere i moduli

$$\log\left(\frac{u}{u+1}\right) = t + c$$

$$e^{t+c} = \frac{u+1-1}{u+1} = 1 - \frac{1}{u+1}$$

$$e^{t+c} - 1 = -\frac{1}{u+1} \rightarrow 1 - e^{t+c} = \frac{1}{u+1}$$

$$\rightarrow u + 1 = \frac{1}{1 - ke^t} \rightarrow u = \frac{1 - 1 + ke^t}{1 - ke^t}$$

$$\rightarrow u = \frac{ke^t}{1 - ke^t}$$

$\boxed{\text{ES. 2}}$

a) $u' = \underbrace{\cos t}^{a(t)}\, u + \overbrace{\cos^3 t}^{b(t)}$

Siamo nel caso di un'equazione differenziale lineare al 1° ordine del tipo

$$u'(t) = a(t)\,u(t) + b(t)$$

Bisogna quindi trovare prima una soluzione all'omogenea associata, e poi una soluzione particolare (sfruttando il metodo della variazione delle costanti)

Per quanto riguarda l'omogenea, la soluzione sarà del tipo

$$u_0(x) = C\, e^{A(x)} \quad \text{dove} \quad A(x) = \int a(x)\,dx = \int \cos(x)\,dx = \sin(x)$$

Per la soluzione particolare, invece, avremo

$$u_p(x) = c(x)\, e^{A(x)} \quad \text{dove} \quad c(x) = \int b(x)\, e^{-A(x)}\,dx$$

$$\to c(x) = \int \cos^3(x) \cdot e^{-\sin(x)}\,dx = \int \cos^2(x) \cdot \cos(x)\, e^{-\sin(x)}\,dx$$

$$= -\left(\cos^2(x)\, e^{-\sin(x)} - \int 2\cos(x)\,(-\sin(x))\, e^{-\sin(x)}\,dx\right)$$

$$= -\left(\cos^2(x)\, e^{-\sin(x)} - 2\int \underbrace{\sin(x)}_{g(x)} \underbrace{(-\cos(x))\, e^{-\sin(x)}}_{f'(x)}\,dx\right)$$

$$= -\left(\cos^2(x)\, e^{-\sin(x)} - 2\left(\sin(x)\, e^{-\sin(x)} - \int \cos(x)\, e^{-\sin(x)}\,dx\right)\right)$$

$$= -\left(\cos^2(x)\, e^{-\sin(x)} - 2\sin(x)\, e^{-\sin(x)} - 2\, e^{-\sin(x)}\right)$$

$$= -\left(\cos^2(x) - 2\sin(x) - 2\right) e^{-\sin(x)} = -\left(1 - \sin^2(x) - 2\sin(x) - 2\right) e^{-\sin(x)}$$

$$= \left(1 + 2\sin(x) + \sin^2(x)\right) e^{-\sin(x)}$$

Da cui $u_p(x) = (1 + \sin(x))^2\, e^{-\sin(x)}\, e^{\sin(x)} = (1 + \sin(x))^2$

Quindi la sol. totale sarà : $u(x) = ce^{\sin(x)} + (1+\sin(x))^2$

b) $u' = \dfrac{u}{1-e^{-t}} + 2 = \underbrace{\dfrac{1}{1-e^{-t}}}_{a(t)} u + \underbrace{2}_{b(t)}$

In questo caso $1-e^{-t} \neq 0$
Quindi $t \neq 0$
→ Per le nostre soluzioni possiamo considerare o $]-\infty, 0[$ o $]0, +\infty[$ → Immaginiamo di scegliere quest'ultimo

$$\rightarrow A(t) = \int \frac{1}{1-e^{-t}}\,dt = \int \frac{1}{\frac{e^t-1}{e^t}}\,dt = \int \frac{e^t}{e^t-1}\,dt = \log|e^t-1| = \log(e^t-1)$$

Quindi avremo che

$$u(t) = e^{\log(e^t-1)}\left(C + \int 2 \cdot \frac{1}{e^t-1}\,dt\right)$$

$$\rightarrow \int 2 \cdot \frac{1}{e^t-1}\,dt \rightarrow \text{Sostituiamo } e^t - 1 = \omega$$

$$\rightarrow e^t = \omega+1 \rightarrow t = \log(\omega+1) \rightarrow dt = \frac{1}{\omega+1}\,d\omega$$

$$\rightarrow \int 2 \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{\omega+1}\,d\omega = \int \frac{2}{\omega(\omega+1)}\,d\omega = \int \left(\frac{A}{\omega} + \frac{B}{\omega+1}\right) d\omega = \circledast$$

Facendo denominatore comune otteniamo che

$$A\omega + A + B\omega \longrightarrow \begin{cases} A+B=0 \rightarrow B=-2 \\ A=2 \end{cases}$$

Quindi $\circledast = 2\log(\omega) - 2\log(\omega+1) = 2\log\left(\dfrac{\omega}{\omega+1}\right)$

Tornando alla variabile $t \rightarrow 2\log\left(\dfrac{e^t-1}{e^t-1+1}\right) = 2\log\left(\dfrac{e^t-1}{e^t}\right) = c(t)$

Da cui $u(t) = (e^t-1)\left(C + 2\log\left(\dfrac{e^t-1}{e^t}\right)\right)$

c) $u' = \frac{u+1}{t+1} = \frac{u}{t+1} + \frac{1}{t+1} = u \cdot \underbrace{\frac{1}{t+1}}_{a(t)} + \underbrace{\frac{1}{t+1}}_{b(t)}$

In questo caso $t \neq -1$, quindi le nostre soluzioni saranno definite considerando o l'intervallo $]-\infty, -1[$, o $]-1, +\infty[$ (immaginiamo di scegliere quest'ultimo)

Motivo per cui togliamo il modulo

$$\rightarrow A(t) = \int \frac{1}{t+1}\,dt = \log|t+1| = \log(t+1)$$

Quindi otteniamo che

$$u(t) = e^{\log(t+1)}\left(C + \int \frac{1}{t+1}\, e^{-\log(t+1)}\,dt\right)$$

$$= (t+1)\left(C + \int \frac{1}{(t+1)^2}\,dt\right)$$

$$= (t+1)\left(C + \frac{(t+1)^{-1}}{-1}\right) = (t+1)\left(C - \frac{1}{t+1}\right) = C(t+1) - 1$$

$\boxed{\text{ES. 3}}$

a) $u'' - 3u' + 2u = 2x^2$

Partiamo dalla soluzione omogenea

$$u'' - 3u' + 2u = 0$$

$$\rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \rightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow u_0(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x}$$

Per la soluzione particolare, sapendo che al secondo membro dell'equazione differenziale di partenza abbiamo la funzione $2x^2$, cercheremo una cosa del tipo

$$u_p(x) = M(x)\, e^{\alpha x} \cos(\beta x) + N(t)\, e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

Dove abbiamo che $\alpha = 0$ e $\beta = 0$ (visto che $2x^2$ è un semplice monomio di 2° grado, senza esponenziali o funzioni trigonometriche)

$$\rightarrow u_p(x) = P_m(x)$$

Il polinomio sarà di grado 2 dato che $\alpha + i\beta = 0 + i \cdot 0 = 0$ è diverso sia da λ_1 che da λ_2 trovate in precedenza

$\rightarrow u_p(x) = ax^2 + bx + c$

$\rightarrow u_p'(x) = 2ax + b$

$\rightarrow u_p''(x) = 2a$

Scrivo $u_p(x)$ nella sua forma più generica e ne calcolo le derivate prima e seconda. Dopodiché le sostituisco nell'equazione differenziale iniziale

$$\Rightarrow \underbrace{2a}_{u_p''(x)} - 3\underbrace{(2ax + b)}_{u_p'(x)} + 2\underbrace{(ax^2 + bx + c)}_{u_p(x)} = 2x^2$$

$$2a - 6ax - 3b + 2ax^2 + 2bx + 2c = 2x^2$$

Imponendo la condizione che il primo membro sia uguale al 2°, ottengo che a, b, c dovranno soddisfare il seguente sistema

$$\begin{cases} 2a = 2 \rightarrow a = 1 \\ -6a + 2b = 0 \rightarrow 2b = 6 \rightarrow b = 3 \\ 2a - 3b + 2c = 0 \rightarrow 2c = -2 + 9 \rightarrow c = 7/2 \end{cases}$$

Di conseguenza: $u_p(x) = x^2 + 3x - \frac{7}{2}$

Da cui la soluzione completa sarà

$$u(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x} + x^2 + 3x - \frac{7}{2}$$

b) $y'' + 4y = \underbrace{\sin(x)}_{①} + \underbrace{e^x}_{②}$

- SOL. OMOGENEA: $\lambda^2 + 4 = 0 \rightarrow \lambda = 0 \pm 2i$ $\left(-(2i)^2 = 4i^2 = -4\right)$

$$y_0(x) = e^0 \left(c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) \right)$$

• SOL. PARTICOLARE : Sfruttiamo il principio di superposizione

① è una funzione del tipo

$$1 \cdot e^0 \left(\sin(x) \right)$$

Quindi per questo ci aspetteremo una soluzione particolare del tipo

$$\underbrace{1 \cdot e^{0 \cdot x} \left(A\cos(x) + B\sin(x) \right)}_{\alpha = 0,\ \beta = 1}$$

② in questo caso, essendo definita come e^x, ci porta a concludere che avremo una soluzione particolare del tipo

$$\underbrace{1 \cdot e^{1 \cdot x} \left(\cos(0 \cdot x) + \sin(0 \cdot x) \right)}_{\alpha = 1,\ \beta = 0}$$

Procedendo come fatto per l'esercizio prima

① $y_{P1}(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$

$y'_{P1}(x) = -A\sin(x) + B\cos(x)$

$y''_{P2}(x) = -A\cos(x) - B\sin(x)$

Sostituendo nell' eq. diff. iniziale

$\rightarrow -A\cos(x) - B\sin(x) + 4\left(A\cos(x) + B\sin(x) \right) = \sin(x)$

$\cos(x)\left(-A + 4A \right) + \sin(x)\left(-B + 4B \right) = \sin(x)$

$$\begin{cases} A = 0 \\ 3B = 1 \rightarrow B = 1/3 \end{cases}$$

$$y_{p_1}(x) = \frac{1}{3}\sin(x)$$

② $y_{p_2}(x) = ae^x$

$$y'_{p_2}(x) = ae^x$$

$$y''_{p_2}(x) = ae^x$$

$$\rightarrow ae^x + 4ae^x = e^x \rightarrow 5a = 1 \rightarrow a = 1/5$$

$$\rightarrow y_{p_2}(x) = \frac{1}{5}e^x$$

La soluzione finale sarà quindi

$$y(x) = y_0(x) + y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x)$$

$$= c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(x) + \frac{1}{5}e^x$$

c) $y'' + y' = \underbrace{t+2}_{①}\underbrace{-3e^{2t}}_{②}$

- SOL. OMOGENEA: $\lambda^2 + \lambda = 0 \rightarrow \lambda(\lambda+1) = 0$ → $\lambda = 0$, $\lambda = -1$

$$\rightarrow y_0(t) = c_1 e^0 + c_2 e^{-t}$$

- SOL. PARTICOLARE

Coincide con una delle due λ trovate prima

① $= t+2 \rightarrow \alpha = 0, \beta = 0 \rightarrow \alpha + i\beta = 0$

② $= -3e^{2t} \rightarrow \alpha = 2, \beta = 0$

Per quanto riguarda ①, ci aspetteremmo una soluzione del tipo

$$y_{P1}(t) = (at^2 + bt + c) \rightarrow$$ Polinomio di grado aumentato di 1 poiché $\alpha = \beta$ coincide con una delle λ trovate per la soluzione omogenea

$$y_{P1}'(t) = (2at + b)$$

$$y_{P2}''(t) = 2a$$

$$\rightarrow 2a + 2at + b = t + 2$$

Da cui ne deriviamo le condizioni

$$\begin{cases} 2a = 1 \rightarrow a = 1/2 \\ 2a + b = 2 \rightarrow b = 1 \end{cases}$$

$$y_{P1}(t) = \frac{1}{2}x^2 + x + c$$

Per quanto riguarda ②, invece, ci aspetteremmo una soluzione del tipo

$$y_{P2}(t) = Ae^{2t}$$

$$y_{P2}'(t) = 2Ae^{2t}$$

$$y_{P2}''(t) = 4Ae^{2t}$$

$$\rightarrow 4Ae^{2t} + 2Ae^{2t} = -3e^{2t}$$

Quindi $4A + 2A = -3 \rightarrow A = -3/6 \rightarrow A = -1/2$

Da cui: $y_{P2}(t) = -\frac{1}{2}e^{2t}$

Quindi la soluzione totale sarà

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-t} + \frac{1}{2}t^2 + t - \frac{1}{2} e^{2t}$$

$\boxed{\text{ES. 4}}$

a) Vedere es. 6 del tutorato scorso (12/01/24)

b) La soluzione sarà del tipo

$$u(x) = c\, e^{A(x)} \qquad \text{dove} \qquad A(x) = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\, dx = \log|x^2+2x+2|$$

$$= \log(x^2+2x+2) \quad \text{dato che } \Delta < 0$$

$\Downarrow$

Quindi $x^2+2x+2>0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\rightarrow u(x) = c\, e^{\log(x^2+2x+2)} = c(x^2+2x+2)$$

c) La soluzione omogenea è già stata trovata nel punto precedente, non ci resta che trovare la soluzione particolare

$$u_p(x) = c(x)\, e^{A(x)} = c(x)(x^2+2x+2)$$

$$\rightarrow c(x) = \int b(x)\, e^{-A(x)}\, dx = \int \frac{x}{x^2+2x+2}\, dx$$

Ricordando quanto calcolato al primo punto di questo problema otteniamo che

$$c(x) = \frac{1}{2}\log(x^2+2x+2) - \arctan(x+1)$$

$$\rightarrow u_p(x) = (x^2+2x+2)\left[\frac{1}{2}\log(x^2+2x+2) - \arctan(x+1)\right]$$

Di cui, la soluzione generale sarà

$$u(x) = (x^2+2x+2)\left[c + \frac{1}{2}\log(x^2+2x+2) - \arctan(x+1)\right]$$

Ora, imponendo $u(0) = \log(2)$ otteniamo

$$u(0) = 2\left[c + \frac{1}{2}\log(2) - \arctan(1)\right] = \log(2)$$

$$\to 2c + \cancel{\log(2)} - 2\arctan(1) = \cancel{\log(2)}$$

$$\to c = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$\boxed{\text{ES. 5}}$

$\log(x^2) = 2\log(x)$

a) $$F(x) = \int x^2 \log(\sqrt{x})\, dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{x^2}_{f'(x)} \underbrace{\log(x)}_{g(x)}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}\log(x) - \frac{1}{3}\int x^3 \frac{1}{x}\, dx\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}\log(x) - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3}\right)$$

$$= \frac{x^3}{6}\log(x) - \frac{x^3}{18} + c$$

$\to$ Se $F(1) = 0$ allora abbiamo che $\to \frac{1}{6}\cdot 0 - \frac{1}{18} + c = 0 \to c = \frac{1}{18}$

b) L'equazione fornita $y' = \underbrace{(1+y^2)}_{g(y)}\underbrace{x^2\log(\sqrt{x})}_{h(x)}$ é a variabili separabili

$\hookrightarrow x > 0$

$$\to \frac{dy}{dx} = (1+y^2)\,x^2\log(\sqrt{x}) \to \int \frac{dy}{1+y^2} = \int x^2\log(\sqrt{x})\, dx$$

$$\to \arctan(y) = \frac{1}{6}x^3\log(x) - \frac{1}{18}x^3 + c$$

$$\to y = \tan\left(\frac{1}{6}x^3\log(x) - \frac{1}{18}x^3 + c\right)$$

c) Imponendo che $y(1)=0$:

$$0=\tan\left(0-\frac{1}{18}+c\right) \to c=\frac{1}{18}$$ poiché la tangente si annulla in 0

$\boxed{\text{ES. 6}}$

a) Volendo trovare una soluzione costante della nostra equazione differenziale, andiamo a sostituire $u(t)=c$

$$u'(t)\overset{\text{essendo costante}}{=}0=\frac{c^2-6c+13}{9t^2-1} \quad \forall t\in\mathbb{R}$$

$\to c^2-6c+13=0 \to \Delta=36-52<0 \to$ Non ci sono sol. costanti che soddisfano la nostra equazione differenziale

b) Procediamo a trovare una soluzione generale

$$u'=\frac{u^2-6u+13}{9t^2-1}$$ $\to$ Si tratta di un'equazione a variabili separabili

$t\neq\pm 1/3$

$$\frac{du}{dt}=\frac{u^2-6u+13}{9t^2-1} \to \underbrace{\int\frac{du}{u^2-6u+13}}_{A}=\underbrace{\int\frac{dt}{9t^2-1}}_{B}$$

A $$\int\frac{du}{u^2-6u+9-9+13}=\int\frac{du}{(u-3)^2+4}=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{u-3}{2}\right)$$

B $$\int\frac{dt}{9t^2-1}=\int\frac{dt}{(3t+1)(3t-1)}=\int\left(\frac{A}{3t+1}+\frac{B}{3t-1}\right)dt=\circledast$$

Facendo a denominatore comune otteniamo $\int\left(\frac{3At-A+3Bt+B}{9t^2-1}\right)dt$

$$\rightarrow \begin{cases} 3A + 3B = 0 \rightarrow A = -1/2 \\ B - A = 1 \rightarrow B = 1/2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \circledast = \int \left(\frac{-1/2}{3t+1} \cdot \frac{3}{3} + \frac{1/2}{3t-1} \cdot \frac{3}{3} \right) dt$$

$$= \frac{1}{6} \left[\log|3t-1| - \log|3t+1| \right] + c$$

Da cui $\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{u-3}{2}\right) = \frac{1}{6}\left(\log|3t-1| - \log|3t+1|\right) + c$

Imponendo $u(0) = 1$

$$\rightarrow \frac{1}{2}\arctan(-1) = \frac{1}{6}\left(\log|-1| - \log|1|\right) + c$$

$$\frac{1}{2}\arctan(-1) = c \rightarrow c = -\frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{8}$$

Dal momento che la condizione iniziale ci pone in $t = 0$, la soluzione che troveremo sarà unica e definita nell'intervallo di t $]-1/3, +1/3[$.
In questo intervallo avremo che

$$\frac{1}{6}\left(\log|3t-1| - \log|3t+1|\right) = \frac{1}{6}\left(\log(-(3t-1)) - \log(3t+1)\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\log\left(\frac{1-3t}{3t+1}\right)$$

Quindi otteniamo:

$$\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{u-3}{2}\right) = \frac{1}{6}\log\left(\frac{1-3t}{3t+1}\right) - \frac{\pi}{8}$$

$$\arctan\left(\frac{u-3}{2}\right) = \frac{2}{6}\log\left(\frac{1-3t}{3t+1}\right) - \frac{\pi}{8}$$

$$\frac{u-3}{2} = \tan\left(\frac{1}{3}\log\left(\frac{1-3t}{3t+1}\right) - \frac{\pi}{8}\right)$$

$$u = 3 + 2\tan\left(\frac{1}{3}\log\left(\frac{1-3t}{3t+1}\right) - \frac{\pi}{8}\right)$$

$\rightarrow t \in \left]-1/3, 1/3\right[$

Oltre alla condizione già menzionata in precedenza, bisogna anche che

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{1}{3} \log\left(\frac{1-3t}{3t+1}\right) - \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2} \rightarrow$$

Dato che l'arcotangente è definita tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ (o, per dirla in altra maniera, l'argomento della tangente deve essere diverso sia da $-\pi/2$, che da $\pi/2$ e più in generale da $\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$)

→ Una volta posta questa condizione (più restrittiva rispetto a $t \in \left]-1/3, +1/3\right[$) otteniamo l'intervallo massimo in cui è definita la nostra funzione (quindi oltre il quale non si può estendere la funzione