# X INCONTRO TUTORATO A.M. 1

## Es. 1

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\arcsin(x) - \tan x - x}{x^5}$$

Per calcolare lo sviluppo di $\arcsin(x)$, consideriamo:

$f(x) = \arcsin(x) \Rightarrow f(0) = 0$ $\qquad$ $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = \dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \Rightarrow f''(0) = 0$ $\qquad$ $f'''(x) = 3x^2(1-x^2)^{-\frac{5}{2}} + (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f'''(0) = 1$

Questo ci porta a concludere che, sviluppando fino all'ordine 3 otteniamo

$$f(x) = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

Procedendo in maniera analoga per $\tan(x)$:

$f(x) = \tan(x) \Rightarrow f(0) = 0$ $\qquad$ $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} \Rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = \dfrac{2\sin(x)}{\cos^3(x)} \Rightarrow f''(0) = 0$ $\qquad$ $f'''(x) = \dfrac{2}{\cos^2(x)}\left(-2 + \dfrac{3}{\cos^2(x)}\right) \Rightarrow f'''(0) = 2$

$$\Rightarrow f(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Al numeratore quindi otteniamo: $2\arcsin(x) - \tan(x) - x = \cancel{2x} + \cancel{\frac{x^3}{3}} + o(x^3) - \cancel{x} - \cancel{\frac{x^3}{3}} + o(x^3) - \cancel{x}$

Che non ci permette di concludere nulla dato che $\dfrac{o(x^3)}{x^5} \xrightarrow[x\to 0]{} ?$

Bisogna quindi proseguire fino all'ordine 5 al numeratore:

$\arcsin(x) = x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3x^5}{40} + o(x^5)$ $\qquad$ $\tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o(x^5)$

$$\Rightarrow 2\arcsin(x) - \tan(x) - x = \cancel{2x} + \cancel{\frac{x^3}{3}} + \frac{3x^5}{20} + o(x^5) - \cancel{x} - \cancel{\frac{x^3}{3}} - \frac{2}{15}x^5 + o(x^5) - \cancel{x}$$

$$= \left(\frac{3}{20} - \frac{2}{15}\right)x^5 + o(x^5) = \frac{1}{60}x^5 + o(x^5)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{2\arcsin(x)-\tan(x)-x}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{60}x^5 + o(x^5)}{x^5} = \frac{1}{60}$$

$\boxed{\text{ES. 2}}$

a) $(1+x^2)^7 = 1 + 7x^2 + \frac{7\cdot 6}{2}x^4 + o(x^4)$

$= 1 + 7x^2 + 21x^4 + o(x^4)$

b) $7x\sin(x) = 7x\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)$

$= 7x^2 - \frac{7}{6}x^4 + o(x^5)$

$\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$

Dunque: $7x\sin(x) + \cos(x^2) - (1+x^2)^7 = \cancel{7x^2} - \frac{7}{6}x^4 + o(x^5) + \cancel{1} - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$
$- \cancel{1} - \cancel{7x^2} - 21x^4 + o(x^4)$

$= \left(-\frac{7}{6} - \frac{1}{2} - 21\right)x^4 + o(x^4)$

$= \frac{-7-3-126}{6}x^4 + o(x^4) = -\frac{68}{3}x^4 + o(x^4) = A(x)$

Inoltre $x^4 + \cos(x^2) = x^4 + 1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) = 1 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$

$\Rightarrow B(x) = \log(x^4 + \cos(x^2)) = \log\left(1 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right)$

$= \frac{x^4}{2} + o(x^4)$

Da cui il limite vale

$$\lim_{x\to 0} \frac{A(x)}{B(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{68}{3}x^4 + o(x^4)}{\frac{x^4}{2} + o(x^4)} = -\frac{136}{3}$$

**ES. 3**

Sviluppo $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2)$

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$

Di conseguenza, nel nostro caso:

$$\Rightarrow \cos\left(\sqrt{1+x^2}-1\right) = \cos\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right)$$

$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}\right)^2 + o(x^6)$$

$$= 1 - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{16} + o(x^6)$$

In particolare $\cos\left(\sqrt{1+x^2}-1\right) = 1 - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$

Allora $e^{x^\alpha} - \cos\left(\sqrt{1+x^2}-1\right) = 1 + x^\alpha + o(x^\alpha) - 1 - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$

Mentre il denominatore: $\underbrace{x - \sinh(x) + e^{-1/x}}_{\to\, x - x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)} = -\frac{x^3}{6} + o(x^3)$

In conclusione:

Se $\alpha < 3$

$$L(\alpha) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha + o(x^\alpha)}{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = -\infty$$

Se $\alpha = 3$

$$L(\alpha) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3 + o(x^3)}{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = -6$$

Se $\alpha > 3$ il numeratore ha grado $> 3 \Rightarrow L(\alpha) = 0$

# CORREZIONE QUIZ

**ES. 1**

1. **Ordinare in modo crescente, secondo le gerarchie di infinito, i seguenti:**

   1. $(\log_a(x))^b$, $a>1$, $b>0$
   2. $a^x$, $a>1$
   3. $x^c$, $c>0$
   4. $x^x$
   5. $x!$

L'esercizio richiedeva di ordinare queste cinque funzioni in modo crescente, secondo le gerarchie di infinito viste a lezione (andare a vedere lezioni 13-14 settimana del 06/11/23)

Si è visto infatti come $\lim_{y\to+\infty} \frac{y}{\log^n(y)} = +\infty$ (generalizzato poi a $\lim_{y\to+\infty} \frac{y^\alpha}{\log^\beta(y)} = +\infty$ $\forall\alpha>0$ $\forall\beta>0$)

e anche $\lim_{y\to+\infty} \frac{\alpha^y}{y^k} = +\infty$ $\forall k>0,\ k\in\mathbb{R}$

$$\frac{a^x}{x!} \Rightarrow \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{a^n}$$

Per quanto riguarda il fatto che $\lim_{y\to+\infty} \frac{a^y}{y!} = 0$, si riveda l'incontro 7 dei tutorati, in cui si è mostrato, sfruttando il criterio del confronto asintotico, che:

$$a_n = \frac{\alpha^n}{n!} \quad (\text{con } \alpha>1)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{\alpha^{n+1}}}{\cancel{(n+1)!}_{\,n+1}}\cdot\frac{\cancel{n!}}{\cancel{\alpha^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha}{n+1} = 0 \to a_n \text{ tende a } 0$$

Lo stesso criterio è utilizzato anche per l'ultima relazione (dimostrata in aula nelle lezioni 13-14 della settimana del 06/11/23), che ci porta a concludere che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

**Risposta corretta**

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 1 | 3 |
| 2 | 3 | 3 |
| 4 | 2 | 4 |
| 5 | 5 | 3 |
| 1 | 4 | 3 |

$\boxed{\text{ES. 2}}$

Determinare il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to0^+}\frac{4xe^{-x}-\sin(7x^4)}{x^2(1-\cos x)} = L$$

In questo caso abbiamo che

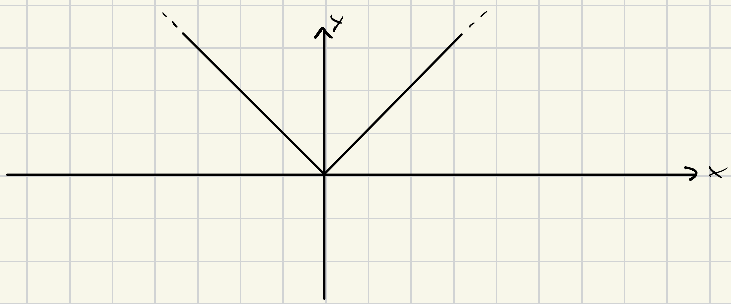
$$\lim_{x\to0^+} \frac{4xe^{-x} - \frac{\sin(7x^4)}{7x^4}x^4}{x^2\underbrace{\frac{(1-\cos(x))}{x^2}}_{\frac{1}{2} \text{ per } x\to0^+}x^2} = 2\lim_{x\to0^+}\left(\frac{4\cancel{x}\overbrace{e^{-x}}^{\to 1}}{x^{\cancel{4}\,3}} - \frac{\sin(7x^4)}{7x^4}\cdot\frac{\cancel{x^4}}{\cancel{x^4}}\right) = 2(+\infty - 1) = +\infty$$

## ES. 3

**3. Quali delle seguenti frasi sono corrette (possono essere più di una)**

- ✓ Sia f:]a,b[->R derivabile in x0 (appartenente ad ]a,b[). Allora f è continua in x0 — 63%
- Sia f:]a,b[->R continua in x0 (appartenente ad ]a,b[). Allora f è derivabile in x0 — 25%
- Sia f:]a,b[->R continua. Se x0 appartiene all'intervallo ]a,b[ ed è punto di massimo o minimo locale per f, allora f'(x0)=0 — 50%
- ✓ Sia f:[a,b]->R continua, con f derivabile in ]a,b[. Se f(a)=f(b) allora esiste un punto c appartenente ad ]a,b[ tale che f'(c)=0 — 75%
- Sia f:]a,b[->R, derivabile. Allora le seguenti sono equivalenti: 1) f monotona strettamente crescente in ]a,b[ 2)f'(x)>=0 per ogni x appartenente ad ]a,b[ — 25%

La seconda domanda è sbagliata perché una funzione derivabile è anche continua, ma il viceversa no. A conferma di ciò basti pensare a $f(x)=|x|$, funzione continua che però non è derivabile in $x=0$




La stessa funzione ci suggerisce che pure la terza proposizione non è corretta, dato che per $x=0$ in $f(x)=|x|$ abbiamo un minimo in cui però la funzione non risulta derivabile.

Infine, l'ultima proposizione è sbagliata perché una funzione è monotona STRETTAMENTE crescente quando $f'(x)>0$ (quindi maggiore di 0 in senso stretto). Se fosse stato espresso f monotona crescente (senza quel STRETTAMENTE), la frase sarebbe stata corretta

$\boxed{\text{ES. 4}}$

Determinare il termine principale dello sviluppo di Taylor per $x \to 0$ di

$f(x) = e^{2x^2} - (1 + 2x^2 \cos x^3)$

ovvero il più piccolo $m \in \mathbb{N}$ tale che per qualche $a \in \mathbb{R}$

$$e^{2x^2} - (1 + 2x^2 \cos x^3) = ax^m + o(x^m), \quad \text{per } x \to 0.$$

$a = \square$

$m = \square$

Consideriamo lo sviluppo di Taylor per $x \to 0$ di:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \qquad ①$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \qquad ②$$

Per come composto nell'esercizio avremo che:

$$e^{2x^2} = 1 + 2x^2 + \frac{4x^4}{2} + \frac{8x^6}{6} + o(x^6)$$ $\rightarrow$ Rispetto a ① abbiamo sostituito $x$ con $2x^2$

$$\cos(3x^3) = 1 - \frac{9x^6}{2} + o(x^7)$$ $\rightarrow$ Rispetto a ② abbiamo sostituito $x$ con $3x^3$

$f(x)$ diventa quindi

$$\underbrace{1+2x^2+\frac{4x^4}{2}+\frac{8x^6}{6}+o(x^6)}\ \underbrace{-1-2x^2\left(1-\frac{9x^6}{2}+o(x^9)\right)} =$$

$$= \cancel{1}+\cancel{2x^2}+2x^4+\underbrace{\frac{4}{3}x^6+o(x^6)}-\cancel{1}-\cancel{2x^2}+\underbrace{9x^8+o(x^7)} = \underbrace{2}_{a}x^{\underbrace{4}_{m}}+o(x^4)$$

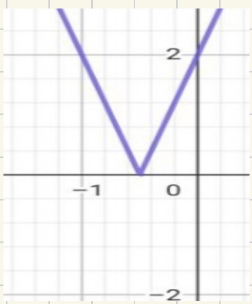
$= o(x^4)$

ES. 5

**5.** **Sia f:R->R una funzione continua tale che f(-1)=2, f(0)=2, f(1)=-1. Possiamo affermare che:**

- Esiste un punto c appartenente all'intervallo ]-1,0[ tale che f'(c)=0 — 14%
- L'equazione f(x)=0 non ha soluzioni nell'intervallo [-1,0] — 0%
- f ha un massimo locale nell'intervallo ]-1,0[ — 0%
- L'equazione f(x)=0 ha almeno due soluzioni nell'intervallo [-1,1] — 0%
- ✓ L'equazione f(x)=1 ha almeno una soluzione nell'intervallo [-1,1] — 86%

La prima è sbagliata perché nulla vieta di ritrovarci in un caso simile a $f(x)=|x|$ ma traslato in modo tale da avere $f(-1)=2$, $f(0)=2$ ed un minimo tra $-1$ e $2$ corrispondente ad un punto angoloso

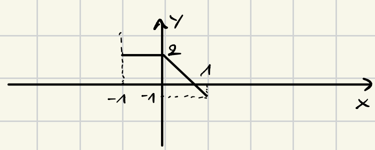



La funzione poi può continuare fino ad avere $f(1)=-1$

→ In questo caso la funzione è continua e $f(-1)=f(0)=2$, però non esiste un punto $c \in ]-1,0[$ tale che $f'(c)=0$

Con lo stesso esempio è possibile smentire pure la seconda e la terza proposizione, mentre per quanto riguarda la quarta, è sbagliata poiché nulla ci vieta di avere anche solo una intersezione tra $f(x)$ e l'asse $x$

Ad esempio



$\boxed{\text{ES. 6}}$

Si determini l'estremo locale $x_0 \in \mathbb{R}$ della funzione

$$f(x) = (x-7)^3(x+9)$$

$x_0 =$ $\boxed{\phantom{xx}}$

e dire di che tipo di estremo si tratta min= $-1$; max= $1$

$\boxed{\phantom{xx}}$

(Si ricorda che per estremo locale si intende un massimo o un minimo locale)

Svolgiamo subito la derivata di questa funzione

$$\frac{df}{dx} = 3(x-7)^2(x+9) + (x-7)^3$$

Raccogliendo a fattor comune

$$= (x-7)^2(3x+27+x-7) = (x-7)^2(4x+20) = 4(x-7)^2(x+5)$$

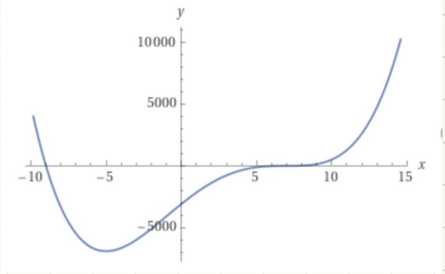
Avremmo due punti in cui la derivata si annulla: $x=7$ e $x=-5$. Andiamo a vedere il segno:

| | | $-5$ | | $+7$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $(x-7)^2$ | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $x+5$ | $-$ | | $+$ | | $+$ |
| | $-$ ↘ | | $+$ ↗ | | $+$ ↗ |

→ Funzione quadratica, quindi sempre positiva

→ Come possiamo vedere, solo $x=-5$ rappresenta un estremo, in particolare un minimo.

→ $x=7$ rappresenta un punto di flesso a tangente orizzontale




→ Il grafico della funzione appena discussa

ES. 7

**7. Quali tra le seguenti frasi sono errate?**

- Sia f:[a,b]->R continua e derivabile due volte in ]a,b[. Allora: 1) f è convessa se e solo se f''(x)>=0 per ogni x appartenente ad ]a,b[. 2) f è concava se e solo se f''(x)<=0 per ogni x appartenente ad ]a,b[ — 63%
- Sia f:I->R continua e derivabile due volte all'interno di I. Sia x0 appartenente ad int(I) tale che f'(x0)=0. Allora: 1) se f''(x0)>0 allora x0 è massimo locale 2) Se f''(x0)<0 allora x0 è minimo locale — 38%
- ln(x) è una funzione concava — 63%
- ln(x) è una funzione convessa — 38%
- Se f''(x0)=0 allora posso giungere a delle conclusioni sulla concavità/convessità della funzione in esame — 38%

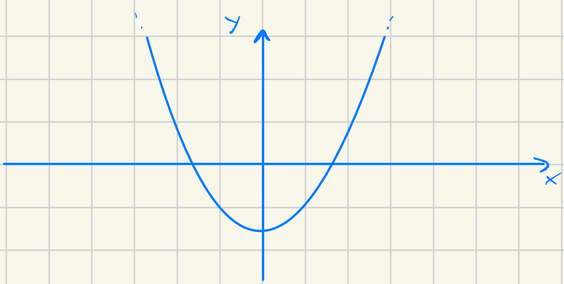
In questo caso era richiesto di segnare le frasi errate.

- La seconda frase è sbagliata poiché la sua versione corretta prevede che:
  1) Se $f''(x_0)<0$ allora $x_0$ è massimo locale
  2) Se $f''(x_0)>0$ allora $x_0$ è minimo locale

Come si può notare, c'è un'inversione tra $<$ e $>$

→ Per aiutarsi a ricordarsi di questa relazione basti pensare ad una parabola definita da: $f(x)=ax^2+bx+c$ (con $a>0$)

↳ Quindi una parabola con la concavità rivolta verso l'alto



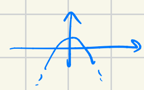

→ $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2} = 2a > 0$

↓ Poiché $a>0$

→ Quindi derivata seconda positiva implica minimo

↓

Il viceversa invece per un massimo (con $a<0$ avremo una parabola con concavità rivolta verso il basso



- $\ln(x)$ è una funzione concava (quindi con concavità rivolta verso il basso)

$\rightarrow$ difatti $\dfrac{d(\ln(x))}{dx} = \dfrac{1}{x}$, $\dfrac{d^2(\ln(x))}{dx^2} = -\dfrac{1}{x^2} < 0 \quad \forall x \in$ Dominio (ovvero $x>0$)

- Come visto a lezione (04/12/23) durante il criterio della derivata seconda, quando $f''(x_0)=0$ non possiamo giungere a conclusioni su concavità o convessità della funzione in considerazione

$\boxed{\text{ES. 8}}$

**8.** **Quale delle seguenti opzioni risulta essere lo sviluppo di McLaurin di ordine 5 di sin[ (sin(x))^(3) ]**

Consideriamo che, per quanto riguarda lo sviluppo di Taylor per $x \to 0$ abbiamo

$$\sin(y) = y - \frac{y^3}{6} + o(y^3)$$

Dunque nel nostro caso sarà

$$\sin(\sin^3 x) = \sin^3(x) - \frac{(\sin^3 x)^3}{6} + o(x^9) = \sin^3(x) + o(x^8)$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + o(x^8)$$

$$= x^3 - 3x^2\frac{x^3}{6} + o(x^5) = x^3 - \frac{x^5}{2} + o(x^5)$$

Sfruttando nuovamente lo sviluppo del seno

Sviluppando il cubo, tengo solo i termini che mi servono per il quinto ordine (tutto il resto sarà quindi $o(x^5)$)

$\hookrightarrow$ per $x \to 0$

$\boxed{\text{Es. 9}}$

Calcolare la derivata della seguente funzione

$$\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$$

Definiamo anzitutto il dominio $\Rightarrow \dfrac{1-x}{1+x} \geq 0 \Rightarrow$

| | | $-1$ | | $+1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $1-x$ | $+$ | | $+$ | | $-$ |
| $1+x$ | $-$ | | $+$ | | $+$ |
| | $-$ | | $+$ | | $-$ |

$$\Rightarrow D = -1 < x \leq 1$$

$$\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Andando quindi a derivare abbiamo che

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{1+\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{\overbrace{-1(1+x)-1(1-x)}^{-1-\cancel{x}-1+\cancel{x}=-2}}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{1}{\frac{1+\cancel{x}+1-\cancel{x}}{\cancel{1+x}}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{(-\cancel{2})}{(1+x)^{\cancel{2}}}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$$

Moltiplichiamo e dividiamo per la stessa quantità, per razionalizzare la nostra espressione

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{1+x}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{\frac{1-x}{\cancel{1+x}}} = \frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{2(x-1)}$$

→ Questa potrebbe essere un'espressione valida per la derivata. Dato però che non compare tra le opzioni è necessario manipolarla leggermente

$$= -\frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{2(1-x)} = -\frac{1}{2\sqrt{(1+x)(1-x)}} = -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

In maniera più diretta potremmo giungerci anche nel seguente modo

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{1+\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{1}{\frac{1-\cancel{x}+1+\cancel{x}}{\cancel{1+x}}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{-1-\cancel{x}-1+\cancel{x}}{(1+x)^{\cancel{2}}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\sqrt{\frac{\cancel{1+x}}{1-x}}\,\frac{(-\cancel{2})}{(1+x)^{1/2}}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{(1-x)(1+x)}} = -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$\boxed{\text{ES. 10}}$

Dominio : $x>0$

**10. Si consideri la funzione: f(x) = $\underbrace{2\log(x) - 5\arctan(x)}$ Il punto x = 2 che tipo ti estremo (locale) rappresenta? Ed il punto x = 1/2?**

- x = 2 rappresenta un massimo, x = 1/2 rappresenta un massimo — 0%
- x = 2 rappresenta un flesso, x = 1/2 rappresenta un minimo — 0%
- x = 2 rappresenta un massimo, x = 1/2 rappresenta un flesso — 14%
- ✓ x = 2 rappresenta un minimo, x = 1/2 rappresenta un massimo — 71%
- x = 2 rappresenta un minimo, in x = 1/2 la derivata non si annulla — 14%

Si consideri la derivata

$$f'(x) = 2\cdot\frac{1}{x} - 5\,\frac{1}{1+x^2} = \frac{2(1+x^2)-5(x)}{x(1+x^2)} = \frac{2x^2-5x+2}{x(1+x^2)}$$

$$\Rightarrow 2x^2-5x+2 \rightarrow \Delta = 25-4\cdot 4 = 9 \rightarrow x_{1,2} = \frac{5\pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{8}{4}=2 \\ \frac{2}{4}=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi si può riscrivere tutto come

$$f'(x) = \frac{(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{x\,(1+x^2)}$$

Andiamo quindi a studiare il segno di $f'(x)$

| | | $0$ | | $1/2$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-2$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $+$ |
| $x-\frac{1}{2}$ | $-$ | | $-$ | | $+$ | | $+$ |
| $x$ | $-$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| | | | $+$ | | $-$ | | $+$ |
| | | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

NON APPARTIENE AL DOMINIO DELLA FUNZIONE

MAX LOCALE (in $1/2$)

MIN LOCALE (in $2$)

$\boxed{\text{ES. 11}}$

Qual è il dominio della seguente funzione?

$$\arccos\left(\sqrt{x^2-2x}\right)$$

Ricordando che l'arccos è la funzione inversa del coseno, questa funzione rappresenta l'angolo (compreso tra $0$ e $\pi$) il cui coseno è pari a $\sqrt{x^2-2x}$

$\Rightarrow$ Di conseguenza, essendo il coseno compreso tra $-1$ e $1$, anche $\sqrt{x^2-2x}$ dovrà esserlo

$\Rightarrow$ Inoltre, essendoci una radice, l'argomento al suo interno dovrà essere $\geq 0$

Riassumendo:

$$\begin{cases} ① \; x^2-2x \geq 0 \longrightarrow x \leq 0 \vee x \geq 2 \\ ② \; -1 \leq \sqrt{x^2-2x} \leq 1 \rightarrow \text{Considerando ① diventa } 0 \leq \sqrt{x^2-2x} \leq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2-2x} \leq 1 \overset{\text{ELEVO AL QUADRATO}}{\Longrightarrow} x^2-2x \leq 1$$

$$x^2-2x-1 \leq 0 \rightarrow \Delta = 4+4 = 8 \rightarrow x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ Considerando l'intersezione di ① e ②, il dominio sarà

$$1-\sqrt{2} \leq x \leq 0 \quad \vee \quad 2 \leq x \leq 1+\sqrt{2}$$

⚠ LA $2^a$ RISPOSTA È IL DOMINIO CHE SI OTTIENE CONSIDERANDO LA ② COME

$$0 \leq \sqrt{x^2-2x} \leq \pi$$

È IL VALORE DI arccos AD ESSERE UN ANGOLO, NON IL SUO ARGOMENTO

NON È UN ANGOLO

MA QUESTO È SBAGLIATO! L'ARGOMENTO DELL'ARCOCOSENO (COSÌ COME ARCSIN) VA POSTO COMPRESO TRA $-1$ E $1$!

$\boxed{\text{ES. 12}}$

**12.** **Quali delle seguenti opzioni, sono i corretti sviluppi in serie di Taylor (x0=0) delle funzioni sin(-x) e cos(-x)?**

È sufficiente prendere gli sviluppi in serie di $\sin(x)$ e $\cos(x)$, e sostituire $x \Leftrightarrow -x$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6); \qquad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

Da cui:

$$\sin(-x) = -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + o(x^6); \qquad \cos(-x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

$\boxed{\text{ES. 13}}$

Tutte le opzioni sono corrette e prese dagli appunti caricati dal professore

$\boxed{\text{ES. 14}}$

Tutti gli integrali negli intervalli considerati sono pari a 0 (anche quelli della 5ª proposizione)