Esercizio 3) * Determinare il dominio delle seguenti funzioni:

$$A. \frac{x}{2-x} \qquad B. \sqrt{x+1} \qquad C. \sqrt{\frac{x}{2x-3}} \qquad D. \sqrt{x+1} - x + \sqrt{2-x}$$

$$E. \sqrt{\sin x} \qquad F. \log(x^2+2x+1) \qquad G. \log\left(\frac{1-3x}{7x+2}\right)$$

Soluzione. A. $\mathbb{R} - \{2\}$; B. $\{x > -1\}$; C. $\{x < 0 \vee x > \frac{3}{2}\}$; D. $\{-1 \le x \le 2\}$; E. $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[2k\pi, (2k+1)\pi]$; F. $\mathbb{R} - \{-1\}$; G. $\{-\frac{2}{7} < x < \frac{1}{3}\}$. $\square$

Esercizio 4) ** Determinare dominio e immagine delle seguenti funzioni:

$$A. \frac{\sqrt{x^2-3x-4}}{x+5} \qquad B. \begin{cases} \dfrac{1}{2x+1} & \text{se } x \ge 0 \\ e^{\sqrt{x+1}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$C. \sqrt{\cos x - 1} \qquad D. \frac{1}{4\arcsin x - \pi}$$

Soluzione. A. $Dom =]-\infty, -5[\, \cup\,]-5, -1] \cup [4, +\infty[$;
B. $Dom = [-1, +\infty[$;
C. $Dom = \{x = 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $Imm = 0$;
D. $Dom = [-1, \frac{\sqrt{2}}{2}[\, \cup\,]\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$, $Imm =]-\infty, -\frac{1}{3\pi}] \cup [\frac{1}{\pi}, +\infty[$

$\square$

Esercizio 5) ** Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da $f(x) = x^2 - 2x - 3$ calcolare $f^{-1}(]0,5])$ e $f([-2,2[)$. Dire poi se f è iniettiva e se è suriettiva e calcolare ove possibile (eventualmente restringendo e corestringendo) la funzione inversa f^{-1}.

Soluzione. Il calcolo della antiimmagine $f^{-1}(]0,5])$ equivale a risolvere il sistema $0 < f(x) \leq 5$, che dà $-2 \leq x < -1$ oppure $3 < x \leq 4$, dunque $f^{-1}(]0,5]) = [-2,0[\cup]3,4]$. Usiamo per le altre domande il metodo della fibra: fissando y nel codominio si ha che l'equazione $y = x^2 - 2x - 3$ ha soluzione se e solo se $y \geq 4$, dunque se $y < 4$ f^{-1} è vuoto e dunque la funzione non è suriettiva. Se invece $y = -4$ l'unica soluzione è $x = 1$, mentre per $y \geq -4$ otteniamo due distinte soluzioni x_1 e x_2, dunque f non è neppure iniettiva. Per renderla biiettiva occorre corestringere ai soli $y \geq -4$ e restringere, per esempio, ai soli $x > 1$ (si nota infatti che $x_1 < 1 < x_2$; si potrebbe anche restringere a $x < 2$ con uguale risultato), ottenendo $f' : [1, +\infty] \to [-4, +\infty[$. $\square$

Esercizio 7) *** Sia $A = \mathbb{R}_{>0} =]0, +\infty[$, e sia $g : A \to \mathbb{R}$ la funzione $g(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x}}$. Discutere iniettività e suriettività, calcolare $g^{-1}(]-2, \frac{7}{2}])$ e calcolare la funzione inversa dopo averla resa biiettiva.

Stesse domande per $h : A \to \mathbb{R}$ data da $h(x) = 2\sqrt{x} - x + 3$.

Soluzione. a) Iniettività: sia $g(x_1) = g(x_2)$, dunque $\sqrt{\frac{x_1+2}{x_1}} = \sqrt{\frac{x_1+2}{x_1}}$ si ottiene $x_1x_2 + 2x_2 = x_1x_1 + 2x_1$ da cui $x_1 = x_2$, dunque g è iniettiva. Suriettività: poichè $g(x) > 0\,\forall x$, g non è suriettiva. $g^{-1}(-2, \frac{7}{2}) = [\frac{8}{45}, +\infty[$.
b) Iniettività: sia $h(x_1) = h(x_2)$, si ottiene allora $2(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}) = x_1 - x_2$ da cui si ottengono due possibilità, $x_1 = x_2$, oppure anche $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 2$, dunque h non è iniettiva. Suriettività: cerchiamo di invertire la funzione: ponendo $t = \sqrt{x}$ si ottiene $t^2 - 2t + y - 3 = 0$, che ammette soluzioni solo quando $y \leq 4$, dunque non è suriettiva. Inversione: per rendere h biiettiva si può per esempio restringere il dominio a $]4, +\infty[$ e il codominio a $]-\infty, 3[$. Si ottiene quindi la inversa $h^{-1}(y) = (1 + \sqrt{4-y})^2$. Immagine: l'immagine $h([\frac{1}{4}, 3[)$ è data dalla soluzione di due sistemi (le due soluzioni della quadratica in t sono entrambe positive), che danno $]2\sqrt{3}, 4] \cup [\frac{15}{4}, 4] =]2\sqrt{3}, 4]$. L'immagine $h^{-1}(]-2, \frac{7}{2}]) = [0, \frac{3}{2} - \sqrt{2}] \cup [\frac{3}{2} + \sqrt{2}, 7 + 2\sqrt{6}[$. $\square$

Esercizio 8) * Risolvere le seguenti disequazioni:

$A.\ |2x+3| < 2 \qquad B.\ |-5x+1| \leq 1 \qquad C.\ |x| = x+5$

$D.\ |2x+1| \leq |x+2| \qquad E.\ |x^2 - 7x + 12| > x^2 - 7x + 12 \qquad F.\ \dfrac{|x-1|}{|x+1|} = 1$

Soluzione. A. $]-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}[$; B. $]0, \frac{2}{5}[$; C. $x = -\frac{5}{2}$; D. $[-\frac{1}{2}, 1]$; E. $]3, 4[$; F. $x = 0$. $\square$