Esercizio 4) *** Determinare, al variare di $\alpha \geq 0$, il limite di queste successioni:

$$i)\ \frac{n(1-n)+n^{\alpha}}{\alpha^{-n}-n} \qquad ii)\ \sqrt[n]{3n+\alpha^{n}}-3^{n\alpha}$$

Soluzione. *i)* Notiamo banalmente che se $\alpha = 0$, il limite è $+\infty$. Se $0 < \alpha < 1$ allora si ha che il limite è 0 (basta raccogliere il fattore $\frac{1}{\alpha}$, che tende a $+\infty$ per n grande e ricordare che l'esponenziale vince sulla potenza). Se invece $1 \leq \alpha < 2$, si ottiene che il limite è $+\infty$, se $\alpha = 2$ il limite è -1, se $\alpha > 2$ allora il limite è $-\infty$ (il vario comportamento è a seconda della potenza dominante nel numeratore); *ii)* osserviamo separatamente il comportamento dei due termini, poi considereremo la loro somma (solo in caso trovassimo comportamenti patologici tipo $+\infty - \infty$

dovremo usare altre tecniche ma - spoiler - in questo caso non serve). Osserviamo che il primo termine tende a 1 nel caso in cui $\alpha \leq 1$: con l'uguaglianza è ovvio, con la disuguaglianza basta fare un raccoglimento di $\sqrt[n]{n}$, nel caso invece $\alpha > 1$ allora basta raccogliere α fuori radice per notare che quello che rimane dentro tende a 1. Il secondo termine invece è un semplice esponenziale: tende a $+\infty$ se $\alpha > 0$, 1 se $\alpha = 0$, Dunque, sinotticamente, se $\alpha = 0$ allora $\lim \to 0$, se $\alpha > 0$ allora $\lim \to -\infty$. $\square$