**Esercizio 1)** * Dati $z = -1 + 2i$ e $w = 3 + i$ calcolare $\overline{z}$, $\overline{z+w}$, $|z|$, $|w|$, $|zw|$, $\dfrac{1}{z}$, $\dfrac{1}{\overline{z}}$, $z - \overline{w}$, $\dfrac{z}{w}$, $\dfrac{w + z - \overline{w}}{z}$.

*Soluzione.* $\overline{z} = -1 - 2i$, $\overline{z+w} = 2 - 3i$, $|z| = \sqrt{5}$, $|w| = \sqrt{10}$, $|zw| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$, $\frac{1}{z} = \frac{-1-2i}{5}$, $\frac{1}{\overline{z}} = \frac{-1+2i}{5}$, $z - \overline{w} = -4 + 3i$, $\frac{z}{w} = \frac{-1+7i}{10}$, $\frac{w+z-\overline{w}}{z} = \frac{9-2i}{5}$. $\square$

**Esercizio 2)** * Calcolare la forma trigonometrica di $4$, $-1$, $-3i$, $-1 - i\sqrt{3}$, $1 + 2i$.

*Soluzione.* Ricordando che la forma trigonometrica di un numero complesso è della forma $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, indichiamo nelle soluzioni solo le coppie $(|z|, \theta)$.
$4 = (4, 0)$, $-1 = (1, \pi)$, $-3i = (3, -\frac{\pi}{2})$, $-1 - i\sqrt{3} = (2, \frac{4\pi}{3})$, $1 + 2i = (\sqrt{5}, 0.464)$. $\square$

**Esercizio 3)** * Calcolare l'esponenziale (in forma algebrica e trigonometrica) e il logaritmo di $i$, $-1 - i$, $\frac{1}{3} - i\pi$.

*Soluzione.* $e^i = \cos 1 + i \sin 1$, $e^{-1-i} = \frac{1}{e}(\cos 1 - i \sin 1)$, $e^{\frac{1}{3}-i\pi} = \sqrt[3]{e}\,(\cos\pi - i\sin\pi) = -\sqrt[3]{e}$. Per calcolare il logaritmo, è più utile passare alla forma esponenziale dei numeri complessi proposti, ottenendo $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, $-1-i = \sqrt{2}e^{i\frac{5}{4}\pi}$, $\frac{1}{3} - i\pi = \sqrt{\frac{1}{9} + \pi^2}\, e^{i\theta}$ dove $\theta = -1.465$. A questo punto, ricordiamo che $\log z = \log|z| + i(\theta + 2k\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$, dove il termine con $k = 0$ è chiamato *parte principale* del logaritmo. Nelle soluzioni ora indicheremo solo la parte principale del logaritmo, non tutto il logaritmo.
$\log i = i\frac{\pi}{2}$, $\log(-1-i) = \frac{1}{2}\log 2 + i\frac{5}{4}\pi$, $\log(\frac{1}{3} - i\pi) = \frac{1}{2}\log(\frac{1}{9} + \pi^2) + i\theta$. □

**Esercizio 4)** ** Sia $w = -1 + i$. Rispondere ai quesiti:

a) Determinare gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $\overline{z}w \in \mathbb{R}$ e $|z| = 3$.

b) Quali sono i numeri immaginari puri che distano almeno 4 da $w$?

c) Qual è il numero complesso $z$ tale che $\frac{w+3}{z-i} = 3 + 4i$?

d) Scrivere in forma algebrica i numeri $a = 3\overline{(w+1)} - 2i$, $b = -3iw^2$, $c = \frac{|w|^2+i}{w^3-2}$ e determinare le loro radici quadrate.

*Soluzione.* a) Parametrizzando $z = x + iy$, è semplice vedere che le condizioni richieste portano al sistema $\begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$ : la soluzione del sistema è dunque $z = \pm\frac{3}{\sqrt{2}} \mp i\frac{3}{\sqrt{2}} = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}(1-i)$. b) Parametrizziamo ora i numeri cercati come $z = iy$, e imponiamo la condizione $|w - z| \geq 4$: questa porta a una equazione di secondo grado che ha come soluzione $\{y < 1 - \sqrt{15} \vee y > 1 + \sqrt{15}\}$. Nel piano complesso, queste non sono altro che due porzioni di piano. c) Conviene usare per $z$ la forma algebrica, ottenendo una equazione $2 + i = (3+4i)(x + iy - i)$ (non dimenticate le condizioni di esistenza prima di fare questo passaggio). Risolvendo il sistema associato, si ottiene $z = \frac{2}{5} + i\frac{4}{5}$; d) i calcoli non sono troppo difficili: $a = -5i$, $b = -6$, $c = \frac{1}{2} - i$. Ricordando che ogni numero ha esattamente $n$ radici $n$-esime, e la formula per calcolarle $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}e^{i(\theta+2k\pi)/n}$, otteniamo $\sqrt{a} = \sqrt{5}e^{-i\pi/4} =, \sqrt{5}e^{-i3\pi/4} = \pm\frac{\sqrt{10}}{2}(1-i), \sqrt{b} = \sqrt{6}e^{\pm i\pi/2} = \pm i\sqrt{6}$, $\sqrt{c} = \sqrt[4]{\frac{5}{4}}e^{-i\theta/2}$, $\sqrt[4]{\frac{5}{4}}e^{i(-\theta/2+\pi)}$, dove $\theta \simeq -1.107$. Per avere una rappresentazione algebrica non approssimata per questa radice, si può parametrizzare $\sqrt{c} = x + iy$ e imporre che il suo quadrato sia uguale a $c$. Conto fastidioso. □

**Esercizio 5)** ** Risolvere le seguenti equazioni:

$$A.\, 4z^4 + 9 = 0 \qquad B.\, 2z^2 - 2z + 7 = 0 \qquad C.\, z^2 + 3iz + 4 = 0$$

$$D.\, z^4 + 2z^2 + 4 = 0 \qquad E.\, z\overline{z} - z + \frac{i}{4} = 0 \qquad F.\, \frac{1+iz}{iz+i} = z$$

*Soluzione.* A. le soluzioni sono semplicemente le radici quarte, $\sqrt[4]{\frac{9}{4}}e^{\pm i\pi/4}$, $\sqrt[4]{\frac{9}{4}}e^{\pm i\frac{3\pi}{4}}$; B. Le soluzioni si trovano usando la formula di risoluzione delle equazioni di secondo grado: $\frac{1\pm i\sqrt{13}}{2}$; C. un'altra equazione di secondo grado, $-4i$, $i$; D. l'equazione è una biquadratica, quindi prima si risolve la quadratica, poi si prendono le radici delle due soluzioni trovate; si ottengono quindi le soluzioni $\sqrt{2}e^{\pm i\pi/3} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$, $\sqrt{2}e \pm i\frac{4\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\pm 1 + i\sqrt{3})$; E. parametrizzando $z = x + iy$ e ricordando che $z\overline{z} = |z|^2$ otteniamo come soluzioni $\frac{2+\sqrt{3}+i}{4}$ e $\frac{2-\sqrt{3}+i}{4}$; F. facendo prima le condizioni di esistenza, poi moltiplicando per il denominatore, si ottiene l'equazione $1 = iz^2$, che ha come soluzioni $\pm e^{i\frac{3\pi}{4}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$. $\square$

**Esercizio 6)** ** Risolvere i seguenti problemi:

a) Risolvere l'equazione $p(z) = z^3 + z + 10 = 0$ sapendo che una soluzione è $1 - 2i$ e decomporlo in fattori irriducibili;

b) Risolvere l'equazione $q(z) = z^4 - 5z^3 + 10z^2 - 10z + 4 = 0$ sapendo che una soluzione è $1 + i$ e decomporlo in fattori irriducibili;

c) Risolvere l'equazione $r(z) = 6z^6 - 3z^5 + 14z^4 + 44z^2 + 15z = 0$ sapendo che due sue soluzioni sono $-\frac{3}{2}$ e $1 - 2i$ e decomporlo in fattori irriducibili;

*Soluzione.* a) Siccome il polinomio ha coefficienti reali, se $1 - 2i$ è soluzione, lo sarà anche il suo coniugato, $1 + 2i$. Ci basta quindi solo fare una divisione fra polinomi con il metodo di Ruffini.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 1 | 10 |
| 1-2i | | 1-2i | -3-4i | -10 |
| 0 | 1 | 1-2i | -2-4i | 0 |
| 1+2i | | 1+2i | 2+4i | // |
| | 1 | 2 | 0 | |

Si ottiene quindi che $p(z) = (z - 1 + 2i)(z - 1 - 2i)(z + 2)$. Allo stesso modo si trattano le domande c) e d), ottenendo $q(z) = (z - 1)(z - 2))(z - 1 - i)(z - 1 + i)$ e $r(z) = z(2z + 3)(z - 1 - 2i)(z - 1 + 2i)(\sqrt{3}z + i)(\sqrt{3}z - i)$.
**NOTA:** qualche volta si fa distinzione fra decomposizione in $\mathbb{R}$ e decomposizione in $\mathbb{C}$: quelle scritte sono le decomposizioni in $\mathbb{C}$, per ottenere quelle in $\mathbb{R}$ bisogna togliere con opportuni tramacci algebrici tutte le unità immaginarie (ad esempio, moltiplicando tra loro i fattori contenenti soluzioni coniugate).

$\square$

**Esercizio 7)** ** Risolvere i seguenti problemi:

a) Trovare un polinomio $p(z)$ a coefficienti reali di grado 5 avente 3 come radice semplice, $2 - 3i$ come radice doppia e tale che $p(0) = 169$;

b) Sia data l'equazione $(2 - i)z^2 + 3(1 + i)z + 2\alpha = 0$. Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ vi è una soluzione doppia? Si risolva poi per $\alpha = 1 + i$.

*Soluzione.* a) Il problema è abbastanza semplice, basta scrivere il polinomio come

$$p(z) = k\,\Pi_i(z - zi)^m$$

dove $z_i$ sono le radici del polinomio e $m$ la loro molteplicità. La costante $k$ serve sostanzialmente quindi solo ad aggiustare il valore finale del polinomio. Si ottiene quindi, dopo tutti i conti, $p(z) = -\frac{1}{3}(x^5 - 11x^4 + 66x^3 - 230x^2 + 481x - 507)$. b) La soluzione doppia si trova annullando il determinante di questa equazione di secondo grado e risolvendo in $\alpha = x + iy$, trovando $\alpha = -\frac{9}{20}(1 - 2i)$. Imponendo invece il valore di $\alpha$ dato, si trovano, dopo un po' di conti, le soluzioni $-\frac{3-i}{5}$ e $-2i$.
**NOTA:** spesso, quando si trovano questi problemi in cui dovete fare la radice di un numero complesso che ha un argomento non noto, conviene parametrizzare in forma algebrica la radice (ignota), imporre che il suo quadrato sia uguale al radicando e risolvere quindi il sistema associato. □

**Esercizio 7)** * Determinare se i seguenti sottoinsiemi sono aperti/chiusi/compatti:

A = ]a, b[; B = $\mathbb{N}$; C =$\{x_1, x_2, x_3, \dots x_n\}$ (con n finito);

D = ]-1, 2]; E: ]-1, 2] ∪ {2} F = $\{\frac{2n+3}{n+1} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$

G = F ∪ {2} H = $\{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} ]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[\}$; I = $\{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\frac{1}{n}, \frac{2n}{n+1}]\}$;

*Soluzione.* A: aperto; B: chiuso perché il suo complementare è una unione infinita di aperti dunque aperta; C: compatto; D: né aperto né chiuso; E: né aperto né chiuso; F: né aperto né chiuso; G: chiuso; H = {0}, che è chiuso (esempio di intersezione infinita di aperti che non è più aperta); I = ]0,2[, che è aperto (unione infinita di chiusi che non è più chiusa). □