Tutorato Analisi1 M-Z - Scheda 2

Pasquale Porcu

23 Ottobre 2023

Info generali

Indirizzo mail: `pasquale.porcu@phd.unipd.it`

Incontri: Ogni **lunedì, 14:30-16:30**, Aula **2G** Complesso Fiore di Botta

Esercizi sui numeri complessi

Esercizio 1 Verificare che se $|z| = 1$ si ha:

$$\left|\frac{3z - i}{3 + iz}\right| = 1$$

Esercizio 2 Risolvi la seguente equazione nell'insieme dei numeri complessi:

$$z + \bar{z} + z^2 + |z|^2 = i\,(z + \bar{z})$$

Esercizio 3 Risolvi la seguente equazione nell'insieme dei numeri complessi:

$$z^3 = |z|^2$$

Esercizio 4 Risolvi la seguente equazione nell'insieme dei numeri complessi:

$$2z^4 + \left(3 - \sqrt{3}i\right) z^2 + 1 - \sqrt{3}i = 0$$

1)

Dimostra che se $|z| = 1$ allora:

$$\left|\frac{3z-i}{3+iz}\right| = 1$$

Risoluzione:

La condizione $|z|=1$ significa $(z=a+ib)$:

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} = 1$$

$$\Rightarrow a^2+b^2 = 1 \quad \star$$

$$\left|\frac{3z-i}{3+iz}\right| = \frac{|3z-i|}{|3+iz|}$$

$$= \frac{|3(a+ib)-i|}{|3+i(a+ib)|}$$

$$= \frac{|3a+3ib-i|}{|3+ia-b|} = \frac{|3a+i(3b-1)|}{|(3-b)+ia|} = \frac{|N|}{|D|}$$

Calcolo separatamente $|N|$ e $|D|$

$$|N| = \sqrt{(3a)^2+(3b-1)^2}$$

$$= \sqrt{9a^2+9b^2+1-6b}$$

$$= \sqrt{9-\cancel{9b^2}+\cancel{9b^2}+1-6b}$$

$$= \sqrt{10-6b}$$

uso $\star$ $a^2 = 1-b^2$

$$|D| = \sqrt{(3-b)^2 + a^2}$$

uso ☆
$a^2 = 1 - b^2$

$$= \sqrt{9 - 6b + b^2 + a^2}$$

$$= \sqrt{9 - 6b + \cancel{b^2} + 1 - \cancel{b^2}}$$

$$= \sqrt{10 - 6b}$$

Quindi:

$$\left|\frac{3z - i}{3 + iz}\right| = \frac{|N|}{|D|} = \frac{\sqrt{10 - 6b}}{\sqrt{10 - 6b}} = 1 \qquad \square$$

2) $z + \bar{z} + z^2 + |z|^2 = i(z + \bar{z})$

Sostituisco $|z| = z \cdot \bar{z}$

$$z + \bar{z} + z^2 + z\bar{z} - i(z + \bar{z}) = 0$$

$$(z + \bar{z}) + z(z + \bar{z}) - i(z + \bar{z}) = 0$$

$$(z + \bar{z})(z + 1 - i) = 0$$

$$z + \bar{z} = a + ib + a - ib = 2a$$

$$2a(z + 1 - i) = 0$$

Le soluzioni sono fornite da

$2a = 0 \quad \vee \quad z = 1 - i$

$[z = ib$ con $b \in \mathbb{R} \quad \vee \quad z = 1 - i]$ Sol.

3) $z^3 = |z|^2$

Metodo standard

$z = a + ib$

$(a+ib)^3 = a^2 + b^2$

$a^3 - ib^3 + 3ia^2b - 3ab^2 = a^2 + b^2$

Separo parte reale e parte immaginaria

$$\begin{cases} a^3 - 3ab^2 = a^2 + b^2 \\ -b^3 + 3a^2 b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^3 - a^2 - 3ab^2 - b^2 = 0 \\ b(3a^2 - b^2) = 0 \end{cases}$$

Uso la legge dell'annullamento del prodotto nella seconda equazione

$$\begin{cases} b = 0 \\ a^3 - a^2 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} b^2 = 3a^2 \\ a^3 - a^2 - 3a(3a^2) - 3a^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 0 \\ a^2(a-1) = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} b^2 = 3a^2 \\ a^3 - a^2 - 9a^3 - 3a^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} b = 0 \\ a = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} b^2 = 3a^2 \\ 8a^3 + 4a^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2 = 3a^2 \\ 4a^2(2a+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} b^2 = \frac{3}{4} \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} b = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} b = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Le soluzioni sono:

$z_1 = 0$

$z_2 = 1$

$z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

Metodo con formule di de Moivre

$$z^3 = |z|^2$$

$$|z|^{\cancel{3}}\left(\cos(3\theta) + i\sin(3\theta)\right) = \cancel{|z|^2}$$

Occhio: Questo passaggio lo si può fare $\forall z$ t.c. $|z| \neq 0$. Questo significa che il caso $|z| = 0 \Rightarrow z = 0$ va discusso a parte

$$|z|\cos(3\theta) + i|z|\sin(3\theta) = 1$$

Separo la parte reale dalla parte immaginaria

$$\begin{cases} |z| \cos(3\theta) = 1 \\ |z| \sin(3\theta) = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda eq. ho le seguenti casistiche:

$$\begin{cases} |z| = 0 \\ |z| \cos(3\theta) = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} \cancel{\sin(3\theta) = 0} \\ \cancel{-|z| = 1} \end{cases} \vee \begin{cases} \sin(3\theta) = 0 \\ |z| = 1 \end{cases}$$

impossibile

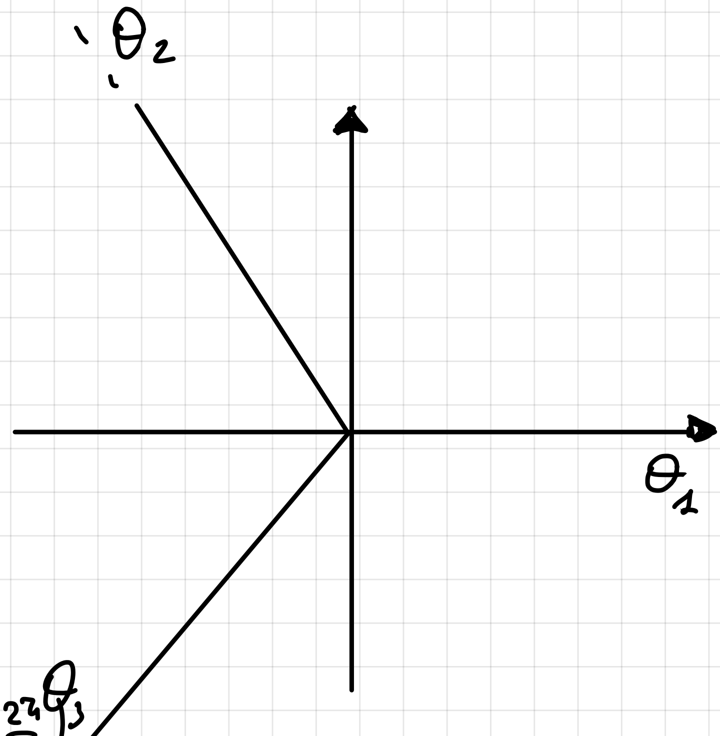
$\cos(3\theta) = -1$ $\qquad$ $\cos(3\theta) = 1$

non accettabile perché $|z| \geq 0$

$$\begin{cases} 3\theta = 0 + 2k\pi \\ |z| = 1 \end{cases} \quad [\text{perché } \cos(3\theta) = 1]$$

$$\begin{cases} \theta = \frac{2}{3}\pi k \\ |z| = 1 \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Nel piano complesso:



$$\begin{cases} \theta_1 = 0 \\ |z| = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad z = 1$$

$$\begin{cases} \theta_2 = \frac{2\pi}{3} \\ |z| = 1 \end{cases} \Rightarrow z = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{cases} \theta_3 = \frac{4\pi}{3} \\ |z| = 1 \end{cases} \Rightarrow z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Come detto sopra, discuto il caso $z=0$ a parte

$$0^3 \overset{?}{=} |0|^2 \Rightarrow 0=0 \quad \checkmark$$

$z=0$ è una soluzione!

Le soluzioni sono le stesse rispetto a quelle ottenute col metodo standard!
I metodi sono equivalenti, ma occhio a semplificare $|z|=0$ nel caso di de Moivre

Domanda: Verifica che $z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$ è soluzione dell'eq.

$$\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^3 \overset{?}{=} \left|-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right|^2$$

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) \overset{?}{=} \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$$

$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) \overset{?}{=} 1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \overset{?}{=} 1 \Rightarrow 1 = 1 \quad \checkmark$$

4) $$2z^4 + (3-\sqrt{3}i)z^2 + 1-\sqrt{3}i = 0$$

CAMBIO DI VARIABILI $z^2 = y$

$$2y^2 + (3-\sqrt{3}i)y + (1-\sqrt{3}i) = 0$$

La risolvo come una eq. di II grado

$$\Delta = (3-\sqrt{3}i)^2 - 8(1-\sqrt{3}i)$$
$$= 9 - 6\sqrt{3}i - 3 - 8 + 8\sqrt{3}i$$
$$= -2 + 2\sqrt{3}i$$
$$= -2(1-\sqrt{3}i)$$

$$y = \frac{-3+\sqrt{3}i \pm \sqrt{\Delta}}{4}$$

dove

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-2(1-\sqrt{3}i)} = \sqrt{x}$$

scrivo il numero complesso x nella forma $x = |x|e^{i\theta}$

calcolo il modulo

$$|x| = 2\sqrt{1+3} = 4$$

$$x = 4\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$$
$$= 4 e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

Perciò:

$$y = \frac{-(3-\sqrt{3}\, i) \pm 2 e^{i\frac{\pi}{3}}}{4}$$

$$y_1 = \frac{-(3-\sqrt{3}\, i) + 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)}{4}$$
$$= \frac{-3+\sqrt{3}\, i + 1 + \sqrt{3}\, i}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$y_2 = \frac{-(3-\sqrt{3}\, i) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)}{4}$$
$$= \frac{-3+\cancel{\sqrt{3}\, i} - 1 - \cancel{\sqrt{3}\, i}}{4}$$
$$= -\frac{\cancel{4}}{\cancel{4}} = -1$$

Tornando al cambio di variabile

$$z_{1,2} = \pm\sqrt{y_2} = \pm i$$

$$z_{3,4} = \pm\sqrt{y_2} = \pm e^{+i\frac{\pi}{3}} \qquad \begin{cases} z_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = e^{i\frac{\pi}{3}} \\ z_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i = e^{i\frac{4\pi}{3}} \end{cases}$$