Tutorato Analisi1 M-Z - Scheda 5

Pasquale Porcu

13 Novembre 2023

Info generali

Indirizzo mail: `pasquale.porcu@phd.unipd.it`

Cartella github con materiale: `https://github.com/federicosimioni2?tab=repositories`

Incontri: Ogni **lunedì, 14:30-16:30**, Aula **2G** Complesso Fiore di Botta

ATTENZIONE: Prossimo lunedì (20 Novembre) non ci sarà l'incontro di Tutorato. **Ci vediamo direttamente il 27 Novembre** (solita aula)

Esercizi sui limiti

Esercizio 1 Verificare che

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\tanh(x)}{x} = 1$$

e scrivere le formule asintotiche corrispondenti.

Esercizio 2 Calcolare il limite:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{[1 - \cos(x)]^2}{\ln\left[1 + \sin^4(x)\right]}$$

Esercizio 3 Calcolare il limite:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^{\tan^3 x} - 1}{x\left[\cos(x) - e^{x^2}\right]}$$

Esercizio 4 Calcolare il limite:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin[\pi \cdot \cos(x)]}{x \cdot \sin(x)}$$

Esercizi sugli asintoti

Esercizio 5 Trovare, se esistono, gli asintoti della funzione:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

Esercizio 6 Trovare, se esistono, gli asintoti della funzione:

$$f(x) = \frac{(2 - x)^3}{3(x - 4)}$$

Esercizio 7 Trovare, se esistono, gli asintoti della funzione:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x - 1}{x}}$$

1) Verificare che $\lim_{x \to 0} \frac{\tanh(x)}{x} = 1$ e scrivere le formule asintotiche conseguenti

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tanh(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x(e^x + e^{-x})} \simeq \frac{0}{0} \text{ F.I.}$$

<u>IDEA</u>: usare il limite notevole

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 + 1 - e^{-x}}{x(e^x + e^{-x})}$$

$$\lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{e^x - 1}{x}}_{\to 1} \frac{1}{(e^x + e^{-x})} + \underbrace{\frac{e^{-x} - 1}{-x}}_{\to 1} \frac{1}{(e^x + e^{-x})}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{e^x + e^{-x}} + \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{2}{1 + 1} = 1$$

FORMULA ASINTOTICA

$$\tanh(x) \simeq x$$

$$\tanh(x) = x + o(x) \quad \text{per } x \to 0$$

2)

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)^2}{\ln(1+\sin^4 x)} = \frac{0}{0} \quad F.I.$$

<u>IDEA</u> Usare i seguenti limiti notevoli:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)^2}{\ln(1+\sin^4 x)} \cdot \frac{x^4}{x^4} \cdot \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x}$$

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{\left[\frac{1-\cos x}{x^2}\right]^2}_{\to \left(\frac{1}{2}\right)^2} \underbrace{\frac{\sin^4 x}{\ln(1+\sin^4 x)}}_{\to 1} \underbrace{\frac{x^4}{\sin^4 x}}_{\to 1} = \frac{1}{4}$$

3) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\tan^3 x}-1}{x(\cos x - e^{x^2})} \simeq \frac{0}{0} \quad F.I.$$

<u>IDEA</u> Usare il limite notevole

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{e^{\tan^3 x}-1}{\tan^3 x}}_{\to 1} \frac{\tan^3 x}{x(\cos(x)-e^{x^2})}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^3 x}{x(\cos(x)-e^{x^2})} \simeq \frac{0}{0} \quad F.I$$

<u>IDEA</u>: Usare il limite "notevole"

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{\left(\frac{\tan x}{x}\right)^3}_{\to 1^3} \frac{x^2}{\cos(x)-e^{x^2}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\cos(x)-e^{x^2}}$$

Studio il limite della funzione reciproca se esiste ed è finito, allora il limite cercato sarà il reciproco

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \ell \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = \frac{1}{\ell}$$

$\ell \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - e^{x^2} + 1 - 1}{x^2}$$

$$\lim_{x \to 0} - \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} - \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$$

Uso i limiti notevoli:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$- \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{e^x - 1}{x^2}}_{\to 1} - \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{1 - \cos(x)}{x^2}}_{\to \frac{1}{2}} = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

Quindi

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\cos(x) + e^{x^2}} = -\frac{2}{3}$$

4) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(\pi \cos x)}{x \sin x}$ * $= \dfrac{0}{0}$ F. I

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\pi \cos x - \pi + \pi)}{x \sin x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin[\pi(\cos x - 1) + \pi]}{x \sin x}$$

$\sin(\alpha + \pi) =$
$= -\sin \alpha$

$$= \lim_{x \to 0} - \frac{\sin[\pi(\cos x - 1)]}{x \sin x} = \frac{0}{0} \quad \text{F. I}$$

ma stavolta possiamo usare i prodotti notevoli:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$= \lim_{x \to 0} - \frac{\sin[\pi(\cos x - 1)]}{\pi(\cos x - 1)} \frac{\pi(\cos x - 1)}{x^2} \frac{x}{\sin x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\sin[\pi(\cos x - 1)]}{\pi(\cos x - 1)}}_{\to 1} \pi \cdot \underbrace{\frac{1 - \cos x}{x^2}}_{\to \frac{1}{2}} \underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\to 1}$$

$$= 1 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{\pi}{2}$$

* **N.B** Stavolta sarebbe sbagliato dividere e moltiplicare per $\pi\cos(x)$ e poi usare il limite notevole perché $\pi\cos(x)$ <u>non</u> tende a zero per $x \to 0$

5) Trovare se esistono, gli asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

È una funzione fratta

C.E. $x \neq 0$

DOM $= \mathbb{R} - \{0\}$

Può avere un asintoto verticale $x = 0$.

Verifichiamo:

A DESTRA:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2+1}{x} \simeq \frac{1}{0^+} = +\infty$$

A SINISTRA

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x^2+1}{x} \simeq \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Risposta: Sì, la funzione ha asintoto verticale $x = 0$

La funzione ha asintoti a $\pm\infty$?

A + INFINITO:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

Può avere asintoto obliquo a $+\infty$

Verifichiamo

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{x} - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Risposta $y = x$ è asintoto obliquo della funzione a + infinito

A - INFINITO:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+1}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

La funzione può avere asintoto obliquo a $-\infty$. Verifichiamo

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+1}{x} - x = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} + \frac{1}{x} = 0$$

Risposta $y = x$ è asintoto obliquo della funzione a - infinito

6) Trovare se esistono, gli asintoti della funzione:

$$f(x) = \frac{(2-x)^3}{3(x-4)}$$

È una funzione fratta

C.E. $x \neq 4$

Dom: $\mathbb{R} - \{4\}$

$x = 4$ potrebbe essere un asintoto verticale della funzione. Verifichiamo

$$\lim_{x \to 4^+} \frac{(2-x)^3}{3(x-4)} \simeq - \frac{8}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 4^-} \frac{(2-x)^3}{3(x-4)} \simeq - \frac{8}{0^-} = +\infty$$

Risposta $x = 4$ è asintoto verticale

Studiamo il limite a $\pm\infty$ per sapere se ci sono asintoti obliqui / orizzontali

A +INFINITO:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(2-x)^3}{3(x-4)} = \lim_{x \to +\infty} - \frac{x^{\cancel{3}}}{3\cancel{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} - \frac{x^2}{3} = -\infty$$

Può esistere un asintoto obliquo a $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(2-x)^3}{3(x-4)\cdot x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^{\cancel{3}}}{3\cancel{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} -\frac{x}{3} = -\infty$$

Risposta: Non ci sono asintoti a + infinito

A - INFINITO

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{(2-x)^3}{3(x-4)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^{\cancel{3}\,2}}{3\cancel{x}} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} -\frac{x^2}{3} = -\infty$$

Può esserci un asintoto obliquo in - inf.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{(2-x)^3}{3(x-4)\cdot x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^{\cancel{3}}}{3\cancel{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} -\frac{x}{3} = +\infty$$

Risposta: Non ci sono asintoti a - infinito

7) Trovare se esistono, gli asintoti della funzione:

$$f(x)=\sqrt{\frac{2x-1}{x}}$$

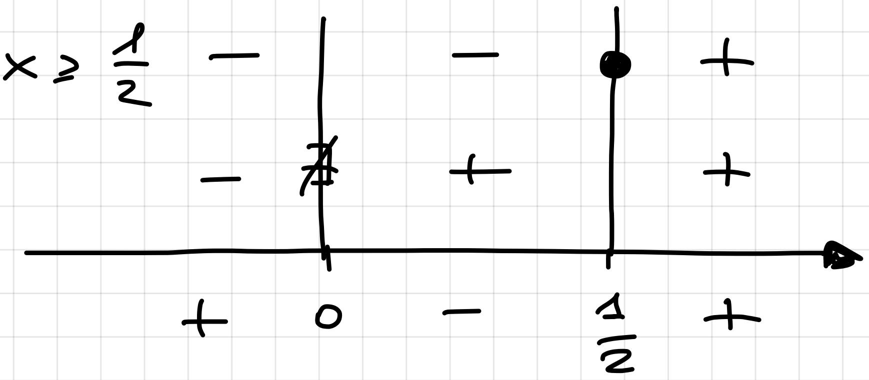
È una funzione irrazionale e fratta

C.E. $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{x} \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$

Studio la prima diseq. a parte

N: $2x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$

D: $x > 0$



Il sistema perciò diventa

$$\begin{cases} x < 0 \quad \vee \quad x \geq \frac{1}{2} \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x < 0 \quad \vee \quad x \geq \frac{1}{2}$$

Dom: $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \quad \vee \quad x \geq \frac{1}{2} \right\}$

In $x=0$ e in $x=\frac{1}{2}$ potrebbero trovarsi due asintoti verticali. Verifichiamo

$$\lim_{x \to 0^-} \sqrt{\frac{2x-1}{x}} \simeq \sqrt{\frac{-1}{0^-}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \sqrt{\frac{2x-1}{x}} \simeq \sqrt{\frac{0^+}{1/2}} = 0$$

Risposta $x = 0$ è un asintoto verticale sinistro per la funzione

Calcolo il limite a $\pm\infty$ per sapere se esistono asintoti obliqui/orizzontali per la funzione:

A +INFINITO

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{2x-1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}}} = \sqrt{2}$$

Risposta $y = \sqrt{2}$ è asintoto orizzontale per la funzione a $+\infty$

A -INFINITO

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{2x-1}{x}} = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}}} = \sqrt{2}$$

Risposta $y = \sqrt{2}$ è asintoto orizzontale per la funzione a $-\infty$