Tutorato Analisi1 M-Z - Scheda 3

Pasquale Porcu

30 Ottobre 2023

Info generali

Indirizzo mail: `pasquale.porcu@phd.unipd.it`

Incontri: Ogni **lunedì, 14:30-16:30**, Aula **2G** Complesso Fiore di Botta

Esercizio dimostrativo

Esercizio 1 Dimostrare il seguente enunciato:

Se $E \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto. Se E non è superiormente limitato allora $+\infty$ è un suo punto di accumulazione

Esercizi su funzioni

Esercizio 2 Calcolare l'immagine, tramite la funzione, dell'insieme indicato a fianco:

$$|x^2 - x| \qquad (0, 2)$$

Esercizio 3 Calcolare l'immagine, tramite la funzione, dell'insieme indicato a fianco:

$$\log_5(10^x + 1) \qquad (-\infty, 1)$$

Esercizio 4 Calcolare la controimmagine, tramite la funzione, dell'insieme indicato a fianco:

$$\sqrt{1+x} \qquad [0, 1)$$

Esercizio 5 Calcolare la controimmagine, tramite la funzione, dell'insieme indicato a fianco:

$$\frac{x+1}{x+2} \qquad (-\infty, -1)$$

Esercizio 6 Data la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x) = x^2 + 2Ax$$

determinare il minimo dell'immagine di $f(x)$.

1) Dimostrare il seguente enunciato:

"Se $E \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto. Se E non è superiormente limitato allora $+\infty$ è un suo punto di accumulazione"

Se E non è superiormente limitato allora non ha maggioranti, cioè $\forall p \in \mathbb{R}$ $\exists m \in E$ t.c.

$$p < m$$

Questo equivale a dire che, preso un qualunque intorno di $+\infty$ delimitato da p ci sarà comunque un qualche elemento di E m che vi appartiene.

Ma quanto appena detto coincide con la definizione di punto di accumulazione

$\blacksquare$

2) Calcolare l'immagine, tramite la funzione, dell'insieme indicato a fianco

$|x^2 - x|$ $\qquad\qquad$ $(0, 2)$

$x^2 - x$ è una parabola di vertice:

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{(-1)}{2} = \frac{1}{2}$$

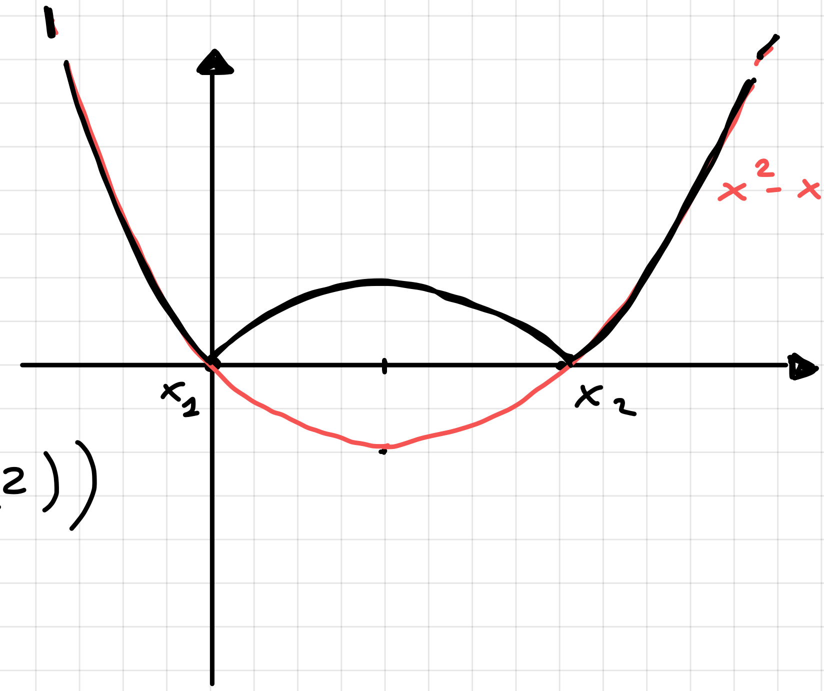
$$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

ed è nulla in:

$$x^2 - x = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm 1}{2} \qquad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Il grafico di $|x^2 - x|$ è perciò:



Quindi $(0, 2)$ è mappato in $(0, f(2))$

$$f(2) = |4 - 2| = 2$$

$$\Rightarrow [0, 2)$$

Lo 0 è compreso perché $f(1) = 0$

3) Calcolare l'immagine, tramite la funzione, dell'insieme indicato a fianco

$\log_5(10^x + 1)$ $\qquad\qquad$ $(-\infty, 1)$

Il logaritmo con base $a>1$ è una funzione sempre crescente. Inoltre, $10^x + 1$ è sempre positivo su tutto $\mathbb{R}$, in più è anch'esso crescente.
Quindi l'immagine, tramite la funzione, dell'insieme dato è l'insieme $(f(-\infty), f(1))$

$$\lim_{x \to -\infty} \log_5(\underbrace{10^x}_{\to 0} + 1) \simeq \log_5(0+1) = \log_5(1) = 0$$

$$f(1) = \log_5(10+1) = \log_5(11) \simeq 1,49$$

$\Rightarrow$ Risposta: $(0, \log_5(11))$

4) Calcolare la controimmagine, tramite la funzione, dell'insieme indicato a fianco

$\sqrt{1+x}$ $\qquad\qquad$ $[0, 1)$

$1+x$ è crescente nell'intervallo indicato

$\sqrt{1+x}$ " " " "

C.E. $\quad 1+x \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$

Basta risolvere le due eq:

$\sqrt{1+x} = 0 \Rightarrow 1+x=0 \Rightarrow x=-1$

$\sqrt{1+x} = 1 \Rightarrow \cancel{1}+x=\cancel{1} \Rightarrow x=0$

Risposta $\quad [-1, 0)$

5) Calcolare la controimmagine, tramite la funzione, dell'insieme indicato a fianco

$$\frac{x+1}{x+2} \qquad (-\infty, -1)$$

$$\lim_{x \to y} \frac{x+1}{x+2} = -\infty \quad ?$$

quando $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

Quando $x = -2$, il numeratore è negativo

$\Rightarrow y = -2^+$

L'altro estremo della controimmagine si trova risolvendo l'equazione:

$$\frac{x+1}{x+2} = -1 \qquad C.E.\ x \neq -2$$

$$\frac{x+1+x+2}{\cancel{x+2}} = 0$$

$$2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ Risposta: $\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$

6) Data la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x^2 + 2Ax$$

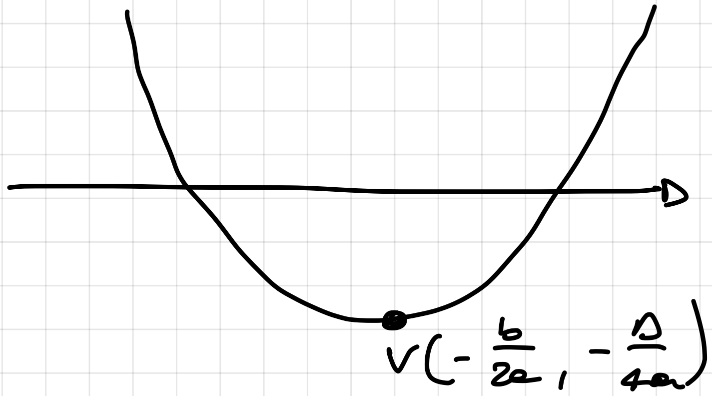
determinare il minimo dell'immagine di $f(x)$

$x^2 + 2Ax$ è una parabola di vertice

$$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right).$$

Ha inoltre concavità verso il basso

Quindi il minimo dell'immagine di $f(x)$ è in: $-\frac{\Delta}{4a}$



$$-\frac{4A^2}{4} = -A^2$$

Alternativa

$$x^2 + 2Ax = x^2 + 2Ax + A^2 - A^2$$

$$\overset{!}{=} \underbrace{(x+A)^2}_{\text{è un quadrato, } \geq 0} - A^2 \geq -A^2$$

7) Calcola l'insieme di definizione della funzione:

$$\arccos\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$\begin{cases} -1 \leq \dfrac{x}{x+1} \leq 1 \\ x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{x+1} \geq -1 & A \\ \dfrac{x}{x+1} \leq 1 & B \\ x \neq -1 \end{cases}$$

Studio ciascuna delle due disequazioni da parte

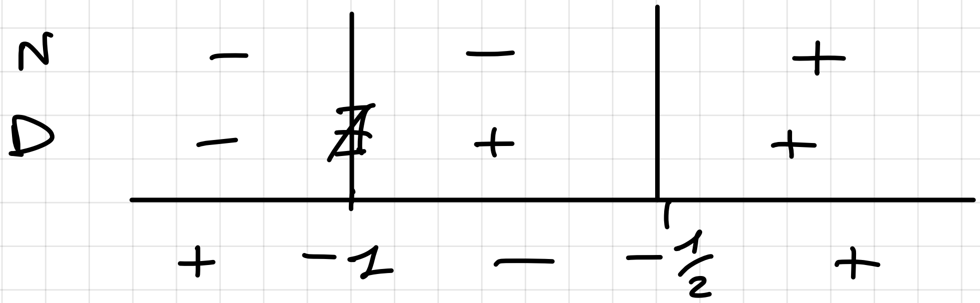
A $\quad \dfrac{x}{x+1} \geq -1$

$$\frac{x+x+1}{x+1} \geq 0$$

$$\frac{2x+1}{x+1} \geq 0$$

N $\quad 2x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$

D $\quad x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$



Soluzioni: $x < -1 \quad \lor \quad x \geq -\frac{1}{2}$

(B) $$\frac{x}{x+1} \leq 1$$

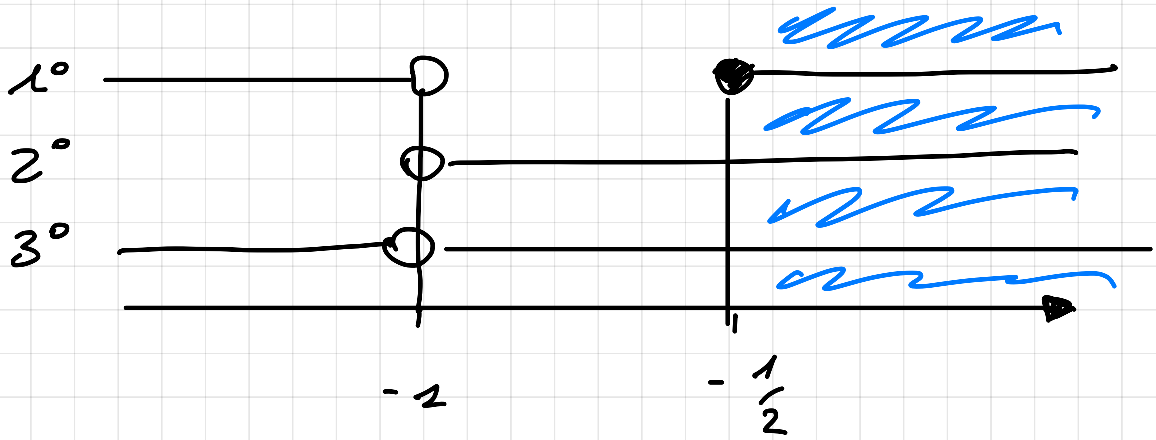
$$\frac{\cancel{x} - \cancel{x} - 1}{x+1} \leq 0$$

$$\frac{1}{x+1} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x + 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > -1$$

Le soluzioni del sistema sono:

$$\begin{cases} x < -1 \quad \lor \quad x \geq -\frac{1}{2} \\ x > -1 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

Calcolo l'intersezione delle soluzioni:



Risposta: $x \geq -\frac{1}{2}$