Tutorato Analisi1 M-Z - Scheda 6

Pasquale Porcu

27 Novembre 2023

Info generali

Indirizzo mail: `pasquale.porcu@phd.unipd.it`

Cartella github con materiale: `https://github.com/federicosimioni2?tab=repositories`

Incontri: Ogni **lunedì, 14:30-16:30**, Aula **2G** Complesso Fiore di Botta

Esercizi sulle successioni ricorsive

Studiare il comportamento delle seguenti successioni definite per ricorrenza:

Esercizio 1

$$a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_n \qquad \text{con } a_1 > 0$$

Esercizio 2 (proposto)

$$a_{n+1} = \frac{2\left(2a_n + 1\right)}{a_n + 3} \qquad \text{con } a_0 < 3$$

Esercizi sulla continuità delle funzioni

Esercizio 3 Dire se la seguente funzione è continua e i caso trovarne i punti di discontinuità

$$f(x) = 1 + \left[\frac{2x}{1+x^2}\right] \qquad \text{con } [\cdots] \text{ funzione parte intera}$$

Esercizio 4 Sia $f(x) = x^2, \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Verificare che **non** è uniformemente continua.

Esercizio 5 Dire se la seguente funzione è uniformemente continua nell'intervallo indicato:

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (-1, 0)$$

Esercizio 6 Dire se la seguente funzione è uniformemente continua nell'intervallo indicato:

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (0, 1)$$

Ancora limiti...

Esercizio 9

$$\lim_{x \to 0} \frac{6x^6 - \sin^2\left(2x^2\right)}{\cos x^2 - 1 - 5x^5}$$

ESEMPIO: (LIMITE DI SUCCESSIONI RICORSIVE)

Sia $f: X \to X$ funzione continua.

La successione:

$$a_0 \in X \quad \text{e} \quad a_{n+1} = f(a_n)$$

è detta SUCCESSIONE RICORSIVA (o sistema dinamico a tempo discreto)

Supponiamo di voler calcolare $\lim_{n \to +\infty} a_n$.

L'IDEA è che, se esiste

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}^*$$

allora

$$\ell = \lim_{n \to +\infty} a_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} f(a_n) = \lim_{x \to \ell} f(x)$$

Distinguiamo i casi:

- $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell \in X$

$$\Rightarrow \ell = \lim_{x \to \ell} f(x) = f(\ell)$$

il punto ℓ che soddisfa la relazione di sopra: $\ell = f(\ell)$ è detto PUNTO FISSO

- $\ell = \pm\infty \Rightarrow \pm\infty = \lim_{x \to \pm\infty} f(x)$

1) Studiare il comportamento della seguente successione definita per ricorrenza

$$a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_n \qquad a_1 > 0$$

IDEA:

PROPOSIZIONE (CRITERIO DEL RAPPORTO PER LE SUCCESSIONI)

Sia $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ successione, $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(i) se esiste $0 < r < 1$ tale che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r < 1$$ definitivamente (da un certo n in poi)

allora $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

(ii) se esiste $r > 1$ tale che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq r > 1$$

allora $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$

Calcolo:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

e $\frac{n}{n+1} > 0$

allora la successione è <u>sempre</u> convergente

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$$

Caso limite: si poteva notare che:

$\Rightarrow$ per $n = 0$ $\quad \left.\dfrac{n}{n+1}\right|_{n=0} = 0$

Quindi, senza la condizione $a_1 > 0$, la successione poteva essere fatta così:

$$a_1 = 0$$
$$a_2 = \frac{1}{2} a_1 = 0$$
$$\vdots$$
$$a_n = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$$

2) Studiare il comportamento della seguente successione definita per ricorrenza:

$$a_{n+1} = \frac{2(2a_n+1)}{a_n+3} \qquad a_0 < -3$$

Uso la stessa idea di sopra, cioè uso il criterio del rapporto per le successioni e calcolo:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2(2a_n+1)}{a_n(a_n+3)}$$

Studio per quali valori di a_n il rapporto è > 0

$$\frac{2(2a_n+1)}{a_n(a_n+3)} > 0$$

N $\quad 2a_n + 1 > 0 \Rightarrow a_n > -\frac{1}{2}$

D $\quad a_n > 0$

$\quad\;\; a_n > -3$

		-3		0	
$a_n > 0$	$-$		$-$		$+$
$a_n > -3$	$-$		$+$		$+$
	$+$	-3	$-$	0	$+$

$$a_n < -3 \quad \vee \quad a_n > 0$$

Studio complessivo del segno:

		-3		$-\frac{1}{2}$		0	
N	$-$		$-$		$+$		$+$
D	$+$		$-$		$-$		$+$
	$-$	-3	$+$	$-\frac{1}{2}$	$-$	0	$+$

Quindi:

$$-3 < a_n < -\frac{1}{2} \quad \vee \quad a_n > 0 \quad ☆$$

$$\frac{2(2a_n+1)}{a_n(a_n+3)} > 0$$

Da ☆, deduco che, siccome la mia successione parte da $a_0 < -3$, a_1 avrà segno opposto.
Sarà cioè positivo $\Rightarrow a_1 > 0$

Dopodiché, tutti gli altri termini della successione avranno segno positivo.

Calcolo adesso:

$$\frac{2(2a_n+1)}{a_n(a_n+3)} > 1$$

Per vedere se la successione converge oppure no.

$$\frac{2(2a_n+1)}{a_n(a_n+3)} > 1$$

$$\Rightarrow \frac{2(2a_n+1) - a_n(a_n+3)}{a_n(a_n+3)} > 0$$

$$\frac{+4a_n + 2 - a_n^2 - 3a_n}{a_n(a_n+3)} > 0$$

$$\frac{a_n^2 - a_n - 2}{a_n(a_n+3)} < 0$$

$N > 0 \qquad a_n^2 - a_n - 2 > 0 \qquad \Delta = 1 + 8 = 9$

$$a_n^{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} a_n^1 = 2 \\ a_n^2 = -1 \end{cases}$$

$N > 0 \qquad a_n < -1 \quad \lor \quad a_n > 2$

$D > 0 \qquad a_n < -3 \quad \lor \quad a_n > 0$ COME SOPRA

Studio complessivo del segno:

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
N	+	+	−	−	+
D	+	−	−	+	+
	+	−	+	−	+

Quindi:

$$\frac{2(2a_n + 1)}{a_n(a_n + 3)} > 1 \implies -3 < a_n < -1 \quad \lor \quad 0 < a_n < 2$$

La mia successione non è definitivamente crescente o decrescente (da un certo n in poi). Questo criterio in questo caso non mi è utile per determinare se la successione è convergente o no.

Però posso usare un altro risultato!

Siccome è una funzione ricorsiva, se $\exists \ell$ t.c.

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$$

allora:

$$\ell = \lim_{n \to +\infty} a_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n \to +\infty} a_n\right) = f(\ell)$$

cioè, se esiste, il limite finito della successione va cercato nei suoi punti fissi. Ovvero, quelli che realizzano:

$$\ell = f(\ell) \qquad \text{con } f(a_n) = a_{n+1}$$

Risolvo quindi l'equazione:

$$\ell = \frac{2(2\ell + 1)}{\ell + 3}$$

con $\ell > 0$ perché la successione ha segno costante positivo per $n \geq 1$

$$\ell(\ell + 3) = 2(2\ell + 1)$$

$$\ell^2 + 3\ell = 4\ell + 2$$

$$\ell^2 - \ell - 2 = 0$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9$$

$$\ell_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$\ell_1 = 2$ ← accettabile

$\ell_2 = -1$

Conclusione

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 2$$

3) Dire se la seguente funzione è continua e in caso trovare i punti di discontinuità

$$1 + \left[\frac{2x}{1+x^2}\right]$$

Se ci sono punti di discontinuità, cerchiamo = li dopp.ma ai bordi del dominio

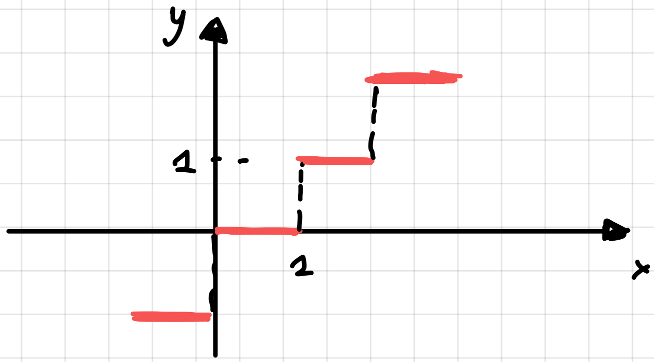
$[\dots]$ è la funzione parte intera, che è definita sempre (non ha condizioni di esistenza)

Valgono solo le condizioni di esistenza della frazione:

$$C.E. \quad 1+x^2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \nexists x \in \mathbb{R}$$

$$Dom = \mathbb{R}$$

Dopodiché, la funzione parte intera ha questo andamento:



$$[x] = \max\{k \in \mathbb{Z}, k \leq x\}$$

$$[f(x)] = \max\{k \in \mathbb{Z}, k \leq f(x)\}$$

Per trovare l'andamento della funzione data calcolo:

$$\frac{2x}{1+x^2} \geq k$$

$$k + kx^2 - 2x \leq 0$$

$$kx^2 - 2x + k \leq 0 \qquad \Delta = 4 - 4k^2 = 0$$

$$= 4(1 - k^2) = 0$$

L'equazione associata ha soluzioni

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{1-k^2}}{2k} = \frac{1 \pm \sqrt{1-k^2}}{k}$$

Perciò la disequazione ha soluzioni:

$$x \leq \frac{1+\sqrt{1-k^2}}{k} \quad \vee \quad x \geq \frac{1-\sqrt{1-k^2}}{k} \qquad k<0$$

$$\frac{1-\sqrt{1-k^2}}{k} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{1-k^2}}{k} \qquad k>0$$

Le condizioni di esistenza delle soluzioni sono

$$1 - k^2 \geq 0 \Rightarrow |k| \leq 1$$

$$k \neq 0$$

Perciò mi sono ridotto a due casi: $k \neq \pm 1$

In altre parole:

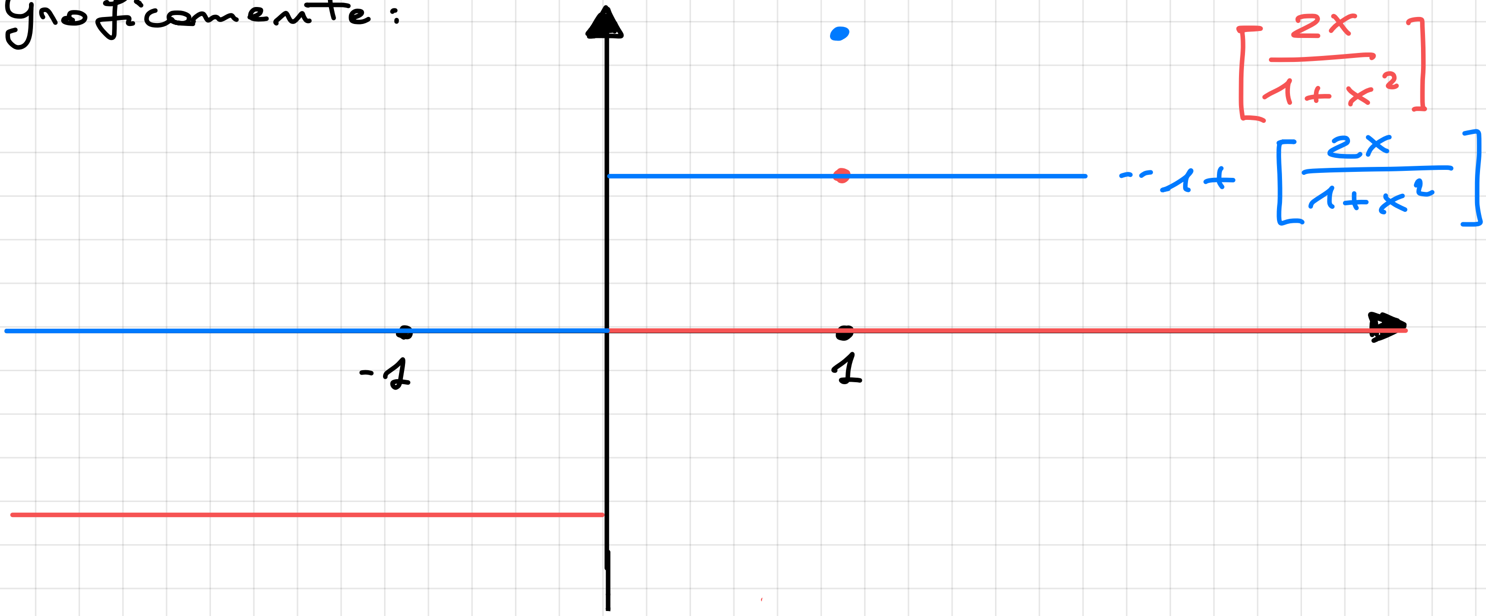
$$k=-1 \qquad \frac{2x}{1+x^2} \geq -1 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$$

$$k=1 \qquad \frac{2x}{1+x^2} \geq 1 \Rightarrow x = 1$$

Studio il caso $k=0$ da parte:

$$k=0 \qquad \frac{2x}{1+x^2} \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

Graficamente:



Concludiamo che ci sono due punti di discontinuità:

- $x = 0 \Rightarrow$ DISC. DI PRIMA SPECIE

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

- $x = 1 \Rightarrow$ DISC. ELIMINABILE

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$$

4) Sia $f(x) = x^2$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Verificare che <u>non</u> è uniformemente continua

Recupero la definizione:

$f(x)$ è uniformemente continua se:

$\exists \delta > 0$ t.c.

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Allora prendo x_1 e $x_2 \in \mathbb{R}$ e valuto

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1^2 - x_2^2| =$$

$$= |(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)|$$

$$= |x_1 - x_2| \, |x_1 + x_2|$$

se $|x_1 + x_2| < L$

$$|f(x_1) - f(x_2)| < L \, |x_1 - x_2|$$

quindi basterebbe scegliere $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ per avere:

$$|x_1 - x_2| < \delta \to |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Ma, su tutto $\mathbb{R}$, $|x_1 + x_2|$ non è limitato

quindi x^2 <u>non</u> è uniformemente continua su tutto $\mathbb{R}$

5) Dire se la seguenti funzione è uniformemente continua nell'intervallo indicato accanto:

$$\arctg\left(\frac{1}{x}\right) \qquad\qquad (-1,0)$$

Nell'intervallo $(-1,0)$ l'arctg è derivabile.

Calcolo la derivata:

$$D[\arctg(x)] = \frac{1}{D[tg(y)]\Big|_{y=\arctg x}}$$

Calcolo separatamente la derivata della tangente

$$D[tg(y)] = \frac{d}{dy}\frac{\sin(y)}{\cos(y)}$$

$$= \frac{\cos(y)\cdot\cos(y) - \sin(y)\cdot[-\sin(y)]}{\cos^2(y)}$$

$$= \frac{\cos^2(y)+\sin^2(y)}{\cos^2(y)} = \frac{1}{\cos^2(y)}$$

$$D[\arctg(x)] = \frac{1}{D[tg(y)]\Big|_{y=\arctg x}}$$

$$= \cos^2(y)\Big|_{y=\arctg x}$$

$$y = \arctan x \Rightarrow x = \operatorname{tg}(y) = \frac{\sin(y)}{\cos(y)} = \frac{\sqrt{1-\cos^2(y)}}{\cos(y)}$$

$$x^2 = \frac{1-\cos^2(y)}{\cos^2(y)}$$

$$\cos^2(y)\left(x^2+1\right) = 1$$

$$\cos^2(y) = \frac{1}{1+x^2}$$

DA SOSTITUIRE SOPRA

$$D\left[\operatorname{arctg}(x)\right] = \frac{1}{1+x^2}$$

Possiamo quindi scrivere

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(x_2)\cdot(x_1 - x_2)|$$

$$= |f'(x_2)|\,|x_1 - x_2|$$

Se $|f'(x_2)| < L \in \mathbb{R}$

$$|f(x_1) - f(x_2)| < L\,|x_1 - x_2|$$

ovvero basterebbe scegliere $|x_1 - x_2| < \delta = \frac{\varepsilon}{L}$ per mostrare che $f(x)$ è uniformemente continua

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{1+x_2^2}$$

$$\frac{1}{2} \le \frac{1}{1+x_2^2} \le 1$$ per $x_2 \in (-1, 0)$

Quindi $|f'(x_2)|$ è limitato

$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$ è uniformemente continua in $(-1,0)$

6) $\exists$ in $(0,1)$?

Valgono le stesse considerazioni di sopra

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x_2^2} \leq 1 \qquad \text{per} \quad x_2 \in (0,1)$$

Quindi $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$ è uniformemente continua in $(0,1)$

7) $$\lim_{x\to 0} \frac{6x^6 - \sin^2(2x^2)}{\cos(x^2) - 1 - 5x^5}$$

PROVO A VALUTARE

$$\lim_{x\to 0} \frac{6x^6 - \sin^2(2x^2)}{\cos(x^2) - 1 - 5x^5} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0} \quad \text{F.I.}$$

IDEA: utilizzare i limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{6x^6}{\cos(x^2) - 1 - 5x^5} \text{ (I)} - \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(2x^2)}{\cos(x^2) - 1 - 5x^5} \text{ (II)}$$

Studio ciascuno dei due limiti separatamente

(I) $$\lim_{x\to 0} \frac{6x^6}{\cos(x^2) - 1 - 5x^5}$$

Calcolo il limite del reciproco

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2) - 1 - 5x^5}{6x^6} =$$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{1}{6} \underbrace{\frac{1-\cos(x^2)}{x^4}}_{\to \frac{1}{2}} \frac{1}{x^2} - \frac{5\cancel{x^5}}{6x^{\cancel{6}}}$$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{1}{12x^2} - \frac{5}{6x} = -\infty$$

Quindi:

$$\text{I} = 0^-$$

$$\text{II} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(2x^2)}{\cos(x^2)-1-5x^5}$$

divido ambo i membri per $4x^4$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(2x^2)}{4x^4} \cdot \frac{4x^4}{\cos(x^2)-1-5x^5}$$

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{\left[\frac{\sin(2x^2)}{2x^2}\right]^2}_{\to 1} \cdot \frac{4x^4}{\cos(x^2)-1-5x^5}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{4x^4}{\cos(x^2)-1-5x^5}$$

Faccio come prima, studio il limite del reciproco

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2)-1-5x^5}{4x^4}$$

$$\lim_{x\to 0} -\frac{1}{4}\underbrace{\frac{1-\cos(x^2)}{x^4}}_{\to \frac{1}{2}} - \underbrace{\frac{5x^{\cancel{5}}}{4\cancel{x^4}}}_{\to 0} = -\frac{1}{8}$$

Quindi:

$$\lim_{x\to 0} \frac{4x^4}{\cos(x^2)-1-5x^5} = -8 = \text{II}$$

Tornando all'integrale iniziale:

$$\lim_{x\to 0} \frac{6x^6-\sin^2(x^2)}{\cos(x^2)-1-5x^5} = \text{I} - \text{II} = 8$$

ALTERNATIVAMENTE Uso gli o-piccoli

$$\lim_{x \to 0} \frac{6x^6 - \sin^2(x^2)}{\cos(x^2) - 1 - 5x^5}$$

Usare i limiti notevoli

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x^2)}{2x^2} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^4} = \frac{1}{2}$$

è equivalente a scrivere

$$\sin(x^2) = 2x^2 + o(x^2)$$

$$1 - \cos(x^2) = \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$$

Infatti, sostituendo dentro il calcolo del limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{6x^6 - \sin^2(x^2)}{\cos(x^2) - 1 - 5x^5} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{6x^6 - \left(2x^2 + o(x^2)\right)^2}{-\frac{1}{2}x^4 + o(x^4) + 5x^5}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{6x^6 - 4x^4 + o(x^4)}{-\frac{1}{2}x^4 + 5x^5 + o(x^4)}$$

$6x^6 = o(x^4)$
$5x^5 = o(x^4)$
per $x \to 0$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-4x^4 + \overset{\to 0}{o(x^4)}}{-\frac{1}{2}x^4 + \overset{\to 0}{o(x^4)}}$$

$$\simeq \lim_{x \to 0} \frac{8\cancel{x^4}}{\cancel{x^4}} = 8$$