Tutorato Analisi1 M-Z - Scheda 9

Pasquale Porcu

8 Gennaio 2024

Info generali

Indirizzo mail: `pasquale.porcu@phd.unipd.it`

Cartella github con materiale: `https://github.com/federicosimioni2?tab=repositories`

Prossimi incontri:
- **giovedì 11, 16:30-18:30**, Aula **P150** Complesso Paolotti
- **lunedì 15, 14:30-16:30**, Aula **2G** Complesso Fiore di Botta

Integrali

Calcolare i seguenti integrali:

Esercizio 1

$$\int \frac{x^2-8}{x^2-16}\,dx$$

Esercizio 2

$$\int \sqrt{\frac{3+4\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}\,dx$$

Esercizio 3

$$\int_0^1 x\cdot \operatorname{arctg}(x+2)\,dx$$

Esercizio 4 (proposto)

$$\int \sqrt{\frac{\cos x}{1-\sin x}}\,dx$$

Equazioni differenziali

Esercizio 4 Risolvere l'equazione differenziale:

$$u' = u\,(u-1)\,(2t-1)$$

Esercizio 5 Risolvere il problema di Cauchy:

$$y' - 2y = 2y^2 \qquad y(0) = 1$$

Esercizio 6 Risolvere il problema di Cauchy:

$$y' - 2xy = e^{x^2} \qquad y(0) = 2$$

1)
$$\int \frac{x^2-8}{x^4-16}\,dx$$

Scompongo il denominatore:

$$x^4-16 = (x^2-4)(x^2+4) = (x-2)(x+2)(x^2+4)$$

Calcolo A, B, C, D tale che l'integrando si può scrivere come:

$$\frac{x^2-8}{x^4-16} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+4} = \frac{(x+2)(x^2+4)\cdot A + (x-2)(x^2+4)B + (Cx+D)(x^2-4)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}$$

$$= \frac{1}{x^4-16}\left[(x^3+2x^2+4x+8)A + (x^3-2x^2+4x-8)B + (Cx^3+Dx^2-4Cx-4D)\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B+C=0 \\ 2A-2B+D=1 \\ 4A+4B-4C=0 \\ 8A-8B-4D=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B+C=0 \\ A+B-C=0 \\ 2A-2B+D=1 \\ 2A-2B-D=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 2A-2B+D=1 \\ 2A+2B=0 \\ 4A-4B=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \Rightarrow A=-B \\ C=0 \\ 4A+4A=-1 \\ 2A+2A+D=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -\dfrac{1}{8} & C = 0 \\ B = \dfrac{1}{8} & D = 1 - 4A = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$\frac{x^2-8}{x^4-16} = -\frac{1}{8}\,\frac{1}{x-2} + \frac{1}{8}\,\frac{1}{x+2} + \frac{3}{2}\,\frac{1}{x^2+4}$$

sostituisco dentro l'integrale:

$$\int \frac{x^2-8}{x^4-16}\,dx = -\frac{1}{8}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2+4}$$

$$= -\frac{1}{8}\ln|x-2| + \frac{1}{8}\ln|x+2| + \frac{3}{4}\int \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right| + \frac{3}{4}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

2) $$\int \sqrt{\frac{3+4\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}\,dx$$

sostituzione $\quad t = \sqrt{x} \qquad dt = \left.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{t=\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2t}\,dx$

$$dx = 2t\,dt$$

$$\int \sqrt{\frac{3+4t}{t}} \cdot 2t\,dt$$

$$2\int \sqrt{3+4t}\,\sqrt{t}\,dt$$

$$2\int \sqrt{3t+4t^2}\,dt$$

$$2\int \sqrt{\frac{9}{16}+3t+4t^2-\frac{9}{16}}\,dt$$

$$2\int \sqrt{\left[\frac{3}{4}+2t\right]^2-\frac{9}{16}}\,dt$$

sostituzione $\quad \frac{3}{4}\cosh u = \frac{3}{4}+2t$

$$\frac{3}{4}\cosh u - \frac{3}{4} = 2t$$

$$\frac{3}{8}\cosh u - \frac{3}{8} = t$$

$$\frac{3}{8}\sinh u\,du = dt$$

$$2\int \sqrt{\left[\frac{3}{4}\cosh u\right]^2-\frac{9}{16}}\;\frac{3}{8}\sinh u\,du$$

$$\cancel{2}\,\frac{3}{\cancel{4}_2}\cdot\frac{3}{8}\int\sqrt{\cosh^2 u-1}\;\sinh u$$

$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$

$\sinh^2 u = \cosh^2 u - 1$

$$\frac{9}{16}\int \sinh^2 u \, du \qquad \cosh u = \frac{e^{u}+e^{-u}}{2}$$

$$\frac{9}{16}\,\frac{1}{4}\int \left(e^{u}-e^{-u}\right)^2 du$$

$$\frac{9}{64}\int \left[e^{2u}-2+e^{-2u}\right] du$$

$$\frac{9}{64}\int e^{2u}\,du-\frac{9}{32}\int du+\frac{9}{64}\int e^{-2u}\,du$$

$$\frac{9}{64}\,\frac{1}{2}\int 2e^{2u}\,du-\frac{9}{32}u-\frac{9}{64}\,\frac{1}{2}\int -2e^{-2u}\,du$$

$$\frac{9}{128}e^{2u}-\frac{9u}{32}-\frac{9}{128}e^{-2u}+c$$

$$-\frac{9}{32}u+\frac{9}{64}\,\frac{e^{2u}-e^{-2u}}{2}+c$$

$$-\frac{9}{32}u+\frac{9}{64}\sinh(2u)+c$$

3) $$\int_0^1 x \cdot \text{arctg}(x+2)\, dx$$

Risolvo prima l'integrale indefinito

Integrazione per parti:

$$\int f'(x)\, g(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f(x)\, g'(x)\, dx$$

$$\int x \cdot \text{arctg}(x+2) = \frac{x^2}{2}\,\text{arctg}(x+2) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+(x+2)^2}\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\,\text{arctg}(x+2) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2+4x+4}\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\,\text{arctg}(x+2) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+4x+5}{x^2+4x+5}\, dx + \frac{1}{2}\int \frac{4x+5}{x^2+4x+5}\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\,\text{arctg}(x+2) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\int \frac{4x+5+3}{x^2+4x+5}\, dx - \frac{1}{2}\int \frac{3\, dx}{x^2+4x+5}$$

$$= \frac{x^2}{2}\,\text{arctg}(x+2) - \frac{x}{2} + \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\, dx - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$$

$$= \frac{x^2}{2}\,\text{arctg}(x+2) - \frac{x}{2} + \ln\left[1+(x+2)^2\right] - \frac{3}{2}\int \frac{1}{1+(x+2)^2}\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\,\text{arctg}(x+2) - \frac{x}{2} + \ln\left[1+(x+2)^2\right] - \frac{3}{2}\,\text{arctg}(x+2) + c$$

$$= F(x)$$

Allora l'integrale definito risulta:

$$\int_0^1 x \cdot \operatorname{arctg}(x+2)\, dx = F(1) - F(0)$$

$$= \left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(3) - \frac{1}{2} + \ln[10] - \frac{3}{2}\operatorname{arctg}(3)\right] + - \left[\ln(5) - \frac{3}{2}\operatorname{arctg}(2)\right]$$

$$= -\operatorname{arctg}(3) - \frac{1}{2} + \ln(2) + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}(2)$$

4) $$\int \sqrt{\frac{\cos(x)}{1-\sin(x)}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \sqrt{\frac{2\cos(x)}{1-\sin(x)}}\,dx$$

SOSTITUZIONE:

$$u = \sqrt{\frac{2\cos(x)}{1-\sin(x)}}$$

$$du = \frac{1}{\cancel{2}} \left(\frac{2\cos(x)}{1-\sin(x)}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2}\, \frac{-\sin(x)[1-\sin(x)] - \cos(x)[-\cos(x)]}{[1-\sin(x)]^2}\,dx$$

$$= \left[\frac{2\cos(x)}{1-\sin(x)}\right]^{-1/2} \frac{-\sin(x) + \overbrace{\sin^2(x) + \cos^2(x)}^{=1}}{[1-\sin(x)]^2}\,dx$$

$$= \left[\frac{2\cos(x)}{1-\sin(x)}\right]^{-1/2} \frac{\cancel{1-\sin(x)}}{[1-\sin(x)]^{\cancel{2}}}\,dx$$

$$= \left[\frac{2\cos(x)}{1-\sin(x)}\right]^{-1/2} \frac{1}{1-\sin(x)}\,dx$$

$$= \frac{1}{u}\,\frac{1}{1-\sin(x)}\,dx$$

$$dx = [1-\sin(x)]\,u\,du$$

COME SI ELIMINA?

OBIETTIVO: Scrivere $\sin(x)$ in funzione di u

$$u = \sqrt{\frac{2\cos(x)}{1-\sin(x)}}$$

$$u^2 = \frac{2\cos(x)}{1-\sin(x)}$$

$$u^4 = \frac{4\cos^2(x)}{[1-\sin(x)]^2}$$

$$\cos^2(x) = 1-\sin^2(x)$$

$$= (1-\sin(x))(1+\sin(x))$$

$$u^4 = 4\,\frac{\cancel{(1-\sin(x))}(1+\sin(x))}{[1-\sin(x)]^{\cancel{2}}}$$

$$u^4 = 4\,\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}$$

$$[1-\sin(x)]\,u^4 = 4\,(1+\sin(x))$$

$$u^4 - u^4\sin(x) = 4 + 4\sin(x)$$

$$(u^4+4)\sin(x) = u^4 - 4$$

$$\sin(x) = \frac{u^4-4}{u^4+4}$$

Quindi

$$dx = u \cdot \left[1 - \frac{u^4 - 4}{u^4 + 4}\right] du$$

$$= u \cdot \left[\frac{\cancel{u^4} + 4 - \cancel{u^4} + 4}{u^4 + 4}\right] du$$

$$= \frac{8u}{u^4 + 4} du$$

E l'integrale diventa:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int \sqrt{\frac{2\cos(x)}{1 - \sin(x)}} \, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int u \cdot \frac{8u}{u^4 + 4} du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{8u^2}{u^4 + 4} du$$

Quello scritto sopra è un integrale razionale, scompongo il denominatore

$$u^4 + 4 + 4u^2 - 4u^2 =$$

$$= u^4 + 4u^2 + 4 - 4u^2$$

$$= (u^2 + 2)^2 - 4u^2$$

$$= \left[u^2 + 2 + 2u\right]\left[u^2 + 2 - 2u\right]$$

$$= \left(u^2+2u+2\right)\left(u^2-2u+2\right)$$

Scrivo la frazione dentro e' integrale così:

$$\frac{Au+B}{u^2+2u+2} + \frac{Cu+D}{u^2-2u+2} = \frac{8u^2}{\left(u^2+2u+2\right)\left(u^2-2u+2\right)}$$

e calcolo i coefficienti A, B, C, D

$$(Au+B)\left(u^2-2u+2\right) + (Cu+D)\left(u^2+2u+2\right) = 8u^2$$

Per confronto dei coefficienti dello stesso ordine, viene fuori questo sistema

$$\begin{cases} A+C=0 \\ 2A+B-2C+D=8 \\ 2A+2B+2C-2D=0 \\ 2B+2D=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=0 \\ C=-2 \\ D=0 \end{cases}$$

L'integrale si può scrivere quindi in questo modo:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{2u}{u^2-2u+2} - \frac{2u}{u^2+2u+2}\, du$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int \overset{\mathrm{I}}{\frac{2u}{u^2-2u+2}}\, du - \frac{1}{\sqrt{2}} \int \overset{\mathrm{II}}{\frac{2u}{u^2+2u+2}}\, du$$

Calcolo ciascuno dei due integrali separatamente

$$\mathrm{I} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{2u + 2 - 2}{u^2 - 2u + 2} \, du$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int \overbrace{\frac{2u - 2}{u^2 - 2u + 2}}^{\mathrm{I_a}} \, du + \frac{2}{\sqrt{2}} \int \overbrace{\frac{1}{u^2 - 2u + 2}}^{\mathrm{I_b}} \, du$$

Risolvo gli integrali separatamente

$$\mathrm{I_a} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{2u - 2}{u^2 - 2u + 2} \, du = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| u^2 - 2u + 2 \right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left(u^2 - 2u + 2 \right)$$

PERCHÉ POLINOMIO SEMPRE POSITIVO

$$\mathrm{I_b} \quad \sqrt{2} \int \frac{1}{(u^2 - 2u + 1) + 1} \, du$$

$$\sqrt{2} \int \frac{1}{(u - 1)^2 + 1} \, du = \sqrt{2} \arctan (u - 1)$$

Quindi:

$$\mathrm{I} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left(u^2 - 2u + 2 \right) + \sqrt{2} \arctan (u - 1)$$

$$\mathrm{II} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{2u+2-2}{u^2+2u+2}\, du$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{2u+2}{u^2+2u+2}\, du - \sqrt{2} \int \frac{1}{u^2+2u+2}\, du$$

Risolvo i due integrali analogamente a quanto fatto sopra e ottengo:

$$\mathrm{II} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left(u^2+2u+2\right) - \sqrt{2} \arctan(u+1)$$

Quindi l'integrale complessivamente vale

$$\star = \mathrm{I} - \mathrm{II}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left(u^2-2u+2\right) + \sqrt{2} \arctan(u-1)$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left(u^2+2u+2\right) + \sqrt{2} \arctan(u+1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left[\frac{u^2-2u+2}{u^2+2u+2}\right] + \sqrt{2}\left[\arctan(u+1) + \arctan(u-1)\right]$$

Verifico che

$$\frac{u^4-4}{u^4+4} = \sin(x) \qquad \text{con} \qquad u = \sqrt{\frac{2\cos(x)}{1-\sin(x)}}$$

$$\frac{\dfrac{4\cos^2(x)}{[1-\sin(x)]^2} - 4}{\dfrac{4\cos^2(x)}{[1-\sin(x)]^2} + 4} =$$

$$= \frac{\cancel{4}\cos^2(x) - \cancel{4}[1-\sin(x)]^2}{\cancel{4}\cos^2(x) + \cancel{4}[1-\sin(x)]^2}$$

$$= \frac{\cos^2(x) - [1+\sin^2(x) - 2\sin(x)]}{\cos^2(x) + [1+\sin^2(x) - 2\sin(x)]}$$

$$= \frac{\cos^2(x) - 1 - \sin^2(x) + 2\sin(x)}{\cos^2(x) + 1 + \sin^2(x) - 2\sin(x)}$$

$$= \frac{\cancel{1} - \sin^2(x) - \cancel{1} - \sin^2(x) + 2\sin(x)}{2 - 2\sin(x)}$$

$$= \frac{-2\sin^2(x) + 2\sin(x)}{2 - 2\sin(x)}$$

$$= \frac{\cancel{2}\sin(x)\cancel{[1-\sin(x)]}}{\cancel{2}\cancel{[1-\sin(x)]}} = \sin(x)$$

4) Risolvere la seguente eq. diff.

$$u' = u(u-1)(2t-1)$$

È un'eq. diff. del primo ordine a variabili separabili

$$\frac{du}{u(u-1)} = (2t-1)\,dt$$

Calcolo l'integrale di ambo i membri

L.H.S.

$$= \int \frac{du}{u(u-1)} = \int \left[\frac{A}{u} + \frac{B}{u-1} \right] du$$

Trovo A e B tale che:

$$\frac{1}{u(u-1)} = \frac{A(u-1) + Bu}{u(u-1)}$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}$$

$$\text{L.H.S.} = -\int \frac{1}{u}\,du + \int \frac{1}{u-1}\,du$$

$$= -\ln|u| + \ln|u-1| + c$$

$$= \ln\left|\frac{u-1}{u}\right| + c_1$$

R.H.S. =

$$= \int (2t + 1)\, dt = t^2 + t + c_2$$

Quindi:

$$\ln \left| \frac{u-1}{u} \right| + c_1 = t^2 + t + c_2$$

$$\ln \left| 1 - \frac{1}{u} \right| = t^2 + t + c$$

$c = c_2 - c_1$

Esplicito u, elevo ad esponente ambo i membri:

$$1 - \frac{1}{u} = e^{t^2 + t + c}$$

$e^c = k$

$$\frac{1}{u} = 1 - k e^{t^2 + t}$$

$$u(t) = \frac{1}{1 - k e^{t^2 + t}}$$

5) Risolvi il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - 2y = 2y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Risolvo prima l'eq. diff.

$$y' = 2y + 2y^2$$

Eq. diff. del primo ordine a variabili separabili

$$\frac{dy}{y+y^2} = 2\,dx$$

Calcolo l'integrale di ambo i membri:

$$L.H.S. = \int \frac{dy}{y+y^2} = \int \frac{A}{y} + \frac{B}{y+1}\,dy$$

Calcolo A e B tali che:

$$\frac{1}{y^2+y} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y+1} = \frac{A(y+1) + By}{y^2+y}$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -1 \\ A = 1 \end{cases}$$

$$L.H.S. = \int \frac{1}{y}\,dy - \int \frac{1}{y+1}\,dy$$

$$= \ln|y| - \ln|y+1| + c_1$$

$$= \ln\left|\frac{y}{y+1}\right| + c_1$$

$$R.H.S. = 2\int dx = 2x + c_2$$

Quindi:

$$\ln\left|\frac{y}{y+1}\right| + c_1 = 2x + c_2$$

Esplicito $y = y(x)$

$$\ln\left|\frac{y}{y+1}\right| = 2x + c \qquad c = c_2 - c_1$$

$$\frac{y}{y+1} = e^{2x+c} = k e^{2x}$$

$$y = ke^{2x} y + ke^{2x}$$

$$y\left(1 - ke^{2x}\right) = k e^{2x}$$

$$y(x) = \frac{k e^{2x}}{1 - k e^{2x}}$$

Calcolo la soluzione particolare imponendo le condizioni di contorno

$$y(0) = 1 = \frac{k}{1-k}$$

$$1 - k = k$$

$$k = \frac{1}{2}$$

Allora la soluzione del problema di Cauchy è:

$$y(x) = \frac{\frac{1}{2}e^{2x}}{1 - \frac{1}{2}e^{2x}}$$

6) Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' - 2xy = e^{x^2} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Risolvo doppprima l'eq. diff.

$$y' - 2xy = e^{x^2}$$

È un'eq. diff. del I ordine disomogenea.

Risolvo prima la parte omogenea

$$y' - 2xy = 0$$ è a variabili separabili

$$dy = 2xy \, dx$$

$$\frac{dy}{y} = 2x \, dx$$

Integro ambo i membri:

$$\ln|y| + c_1 = x^2 + c_2$$

Esplicito $y = y(x)$

$$\ln|y| = x^2 + c \qquad c = c_2 - c_1$$

$$y(x) = k e^{x^2}$$

Per trovare l'espressione della soluzione totale, la cerco nella forma:

$$y_c(x) = k(x)\, e^{x^2}$$

Calcolo la derivata di ambo i membri rispetto a x:

$$\frac{dy}{dx}(x) = k'(x)\, e^{x^2} + k(x)\, e^{x^2} \cdot 2x$$

e confronto con l'espressione dell'eq. diff.

$$y' = 2xy + e^{x^2}$$
$$= 2x\, k(x)\, e^{x^2} + e^{x^2}$$

$$k'(x)\cancel{e^{x^2}} + \cancel{k(x)\, e^{x^2} \cdot 2x} = \cancel{e^{x^2}} + \cancel{k(x)\, e^{x^2} \cdot 2x}$$

$$k'(x) = 1$$

integro ambo i membri

$$k(x) = x + c$$

sostituisco dentro

$$y_c(x) = (x + c)\, e^{x^2}$$

Risolvo il problema di Cauchy sostituendo il dato al bordo:

$$y_c(0) = 2 = c$$

Concludiamo che la soluzione del problema di Cauchy è:

$$y(x) = (x + 2)\, e^{x^2}$$