Tutorato Analisi1 M-Z - Scheda 10

Pasquale Porcu

15 Gennaio 2024

Info generali

Indirizzo mail: `pasquale.porcu@phd.unipd.it`

Cartella github con materiale: `https://github.com/federicosimioni2?tab=repositories`

Esercizi

Esercizio 1 Determinare il valore del seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{4x\ e^{-x} - \sin(7x^4)}{x^2(1-\cos(x))}$$

Esercizio 2 Si determini l'estremo locale $x_0 \in \mathbb{R}$ della funzione:

$$f(x) = \int_3^{x^2+4x} e^{-t^2}\ dt$$

e dire di che tipo si tratta (minimo o massimo).

Esercizio 3 Determinare l'unica primitiva $F(x)$ della funzione:

$$f(x) = \frac{3}{(x-1)(x+2)}$$

che soddisfa $F(0) = -\log(2)$.

Esercizio 4 **i)** Trovare tutte le soluzioni (integrale generale) dell'equazione differenziale

$$y' = x \cdot \sin(x)\ y^2$$

ii) Si scriva la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = x \cdot \sin(x)\ y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Esercizio 5 **i)** Trovare tutte le soluzioni (integrale generale) dell'equazione differenziale

$$y'' - y' - 2y = -4x$$

ii) Si scriva la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = -4x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 6 Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 6y' + 18y = 0 \\ y\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -2\ e^{\pi} \\ y'\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 9\ e^{\pi} \end{cases}$$

Esercizio 7 Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 10y' + 25y = 0 \\ y\left(0\right) = 1 \\ y'\left(0\right) = -3 \end{cases}$$

1)

Determinare il valore del seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{4x e^{-x} - \sin(7x^4)}{x^2(1-\cos(x))}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{4xe^{-x} - \sin(7x^4)}{x^4} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{1-\cos(x)}}_{\to 2}$$

$$2 \lim_{x \to 0} \frac{4xe^{-x} - \sin(7x^4)}{x^4}$$

$$2 \left[\lim_{x \to 0} \frac{4\cancel{x}e^{-x}}{x^{\cancel{4}3}} - \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\sin(7x^4)}{7x^4}}_{\to 1} \cdot 7 \right]$$

$$2 \left[\lim_{x \to 0} \frac{4e^{-x}}{x^3} - 7 \right]$$

$$8 \lim_{x \to 0} \frac{e^{-x}}{x^3} - 14$$

Calcolo separatamente:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-x}}{x^3} \simeq \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^{-x}}{x^3} \simeq \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Quindi: $$\lim_{x \to 0} \frac{4xe^{-x} - \sin(7x^4)}{x^2(1-\cos(x))} = \nexists$$

ALTERNATIVAMENTE: (uso gli sviluppi di Taylor)

$$\lim_{x \to 0} \frac{4x e^{-x} - \sin(7x^4)}{x^2 [1-\cos(x)]}$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\sin(7x^4) = 7x^4 + o(x^4)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{4x\left[1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right] - \left[7x^4 + o(x^4)\right]}{x^2\left[\cancel{1} - \left[\cancel{1} - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right]\right]}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{4x - 4x^2 + 2x^3 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) - 7x^4}{\frac{1}{2}x^4 + o(x^4)}$$

$$\simeq 8 \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x^4}^{\,3}} + o(x^4)$$

$$\simeq 8 \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^3}$$

$\to +\infty$ per $x \to 0^+$

$\to -\infty$ per $x \to 0^-$

2)

Si determini l'estremo locale $x_0 \in \mathbb{R}$ della funzione

$$f(x) = \int_3^{x^2+4x} e^{-t^2}\, dt$$

e dire di che tipo si tratta (minimo o massimo)

Manipolo $f(x)$ in questo modo:

$$f(x) = \int_3^{x^2+4x} e^{-t^2} dt + \int_{-4}^{3} e^{-t^2} dt - \int_{-4}^{3} e^{-t^2} dt$$

$$= \int_{-4}^{x^2+4x} e^{-t^2} dt - \underbrace{\int_{-4}^{3} e^{-t^2} dt}_{c}$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\int_{-4}^{x^2+4x} e^{-t^2} dt + c\right]$$

Sostituzione

$t = x'^2 + 4x'$

$dt = (2x'+4)\, dx' \overset{!}{=} 2(x'+2)\, dx'$

Sostituisco estremi di integrazione

$t = x^2 + 4x \Rightarrow x' = x$

$t = -4 \Rightarrow x'^2 + 4x' + 4 = 0$

$(x'+2)^2 = 0$

$x' = -2$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\int_{-2}^{x'} e^{-(x'^2+4x')} \cdot 2(x'+2)\, dx'\right]$$

Ora posso usare il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\frac{df(x)}{dx} = 2e^{-(x'^2+4x')}(x'+2)$$

Studio il segno di f':

1°F $\quad 2e^{-(x'^2+4x')} > 0 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2°F $\quad x'+2>0 \quad \Rightarrow \quad x'>-2$

		-2	
1°F	$+$		$+$
2°F	$-$		$+$
	$-$		$+$

$f(x)$ è decrescente per $x<-2$

$f(x)$ è crescente per $x>-2$

quindi $x_0=-2$ è di minimo.

3)

Determinare l'unica primitiva $F(x)$ della funzione

$$f(x) = \frac{3}{(x-1)(x+2)}$$

che soddisfa $F(0) = -\log(2)$

Scrivo il problema di Cauchy associato:

$$\begin{cases} F'(x) = \dfrac{3}{(x-1)(x+2)} \\ F(0) = -\log(2) \end{cases}$$

Risolvo prima l'eq. differenziale:

$$F'(x) = \frac{3}{(x-1)(x+2)}$$

Integro ambo i membri:

$$F(x) = 3\int \frac{1}{(x-1)(x+2)}\,dx$$

Calcolo A e B tali che:

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

$$= \frac{Ax+2A+Bx-B}{(x-1)(x+2)}$$

$$= \frac{(A+B)x+2A-B}{(x-1)(x+2)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A-B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-B \\ 2A+A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-1/3 \\ A=\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$F(x) = \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x+2}\,dx$$

$$= \log|x-1| - \log|x+2| + c$$

$$= \log\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + c$$

Calcolo c tale che $F(0) = -\log(2)$

$$F(0) = -\log(2) = \log\left|-\frac{1}{2}\right| + c$$

$$= -\log(2) - \log\left(\frac{1}{2}\right) = c$$

$$\Rightarrow c = -\log\left(\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\right) = -\log(1) = 0$$

$$F(x) = \log\left|\frac{x-1}{x+2}\right|$$

i) Trovare tutte le soluzioni (integrale generale) dell'equazione differenziale

$$y' = x \sin(x)\, y^2$$

ii) Si scriva la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x \sin(x)\, y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

i) È un'eq diff. a variabili separabili

$$\frac{dy}{y^2} = x \sin(x)\, dx$$

Integro ambo i membri:

$$\text{L.H.S.} = \int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y} + c_1$$

$$\text{R.H.S.} = \int x \sin(x)\, dx$$

per parti

$$\int f' g \, dx = fg - \int f g' \, dx$$

$$= -x\cos(x) + \int \cos(x)\, dx$$

$$= -x\cos(x) + \sin(x) + c_2$$

$$-\frac{1}{y} + c_1 = -x\cos(x) + \sin(x) + c_2$$

$$\frac{1}{y} = x\cos(x) - \sin(x) + c_1 - c_2 \qquad c = c_1 - c_2$$

$$y = \frac{1}{x\cos(x) - \sin(x) + c}$$

ii) $y(0) = 1$

$$1 = \frac{1}{c} \Rightarrow c = 1$$

RISPOSTA:

$$y(x) = \frac{1}{x\cos(x) - \sin(x) + 1}$$

5)

i) Trovare tutte le soluzioni (integrale generale) dell'equazione differenziale

$$y'' - y' - 2y = -4x$$

ii) Si trovi la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = -4x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

i) È un'eq. diff. lineare di II ordine disomogenea

Risolvo dapprima la parte omogenea:

$$y'' - y' - 2y = 0$$

Risolvo il polinomio caratteristico:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \qquad \lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = -1$$

$$y_0(x) = Ae^{2x} + Be^{-x}$$

Risolvo adesso la parte disomogenea:

cerco soluzioni $\hat{y}(x)$.

Siccome $g(x) = -4x$ è un polinomio di grado 1 e $b \neq 0$, cerco $\hat{y}(x) = Q(x)$ dove $Q(x)$

è un polinomio di grado $n = 1$.

$$\hat{y}(x) = ax + b$$
$$\hat{y}'(x) = a$$
$$\hat{y}''(x) = 0$$

sostituisco dentro l'eq. diff.

$$0 - a - 2(ax + b) = -4x$$
$$-a - 2ax - 2b = -4x$$
$$a + 2ax + 2b = 4x$$

confrontando coeff. dei termini dello stesso grado

$$\begin{cases} 2a = 4 \\ a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

Quindi: $\hat{y}(x) = 2x - 1$

Perciò le soluzioni complete dell'eq. diff. sono nella forma:

$$y(x) = y_0(x) + \hat{y}(x)$$
$$= Ae^{2x} + Be^{-x} + 2x - 1$$

ii) Risolvo il problema di Cauchy imponendo le condizioni al contorno: $y(0) = 1$ $y'(0) = 0$

$$y_c'(x) = 2 + 2c_1 e^{2x} - c_2 e^{-x}$$

$$\begin{cases} y(0) = 1 = -1 + c_1 + c_2 \\ y'(0) = 0 = 2 + 2c_1 - c_2 \end{cases}$$

è un sist. di 2 eq. in 2 inc.

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ 2c_1 - c_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ 3c_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Quindi il problema di Cauchy è risolto da:

$$y_c(x) = 2x - 1 + \frac{2}{3} e^{-x}$$

6)

Risolvi il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 6y' + 18y = 0 \\ y\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -2e^{\pi} \\ y'\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 9e^{\pi} \end{cases}$$

È un'eq. di II ordine lineare omogenea

Risolvo il polinomio caratteristico:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 18 = 0 \qquad \Delta = 36 - 4 \cdot 18 = -36$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-6 \pm 6i}{2} = -3 \pm 3i = \alpha \pm i\beta$$

Le soluzioni dell'eq. diff. sono nella forma:

$$y(x) = e^{\alpha x}\left[c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)\right] = e^{-3x}\left[c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)\right]$$

Trovo la soluzione del problema di Cauchy imponendo le condizioni al contorno:

$$y\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -2e^{\pi} = e^{+\pi}\left[c_1 \cos(-\pi) + c_2 \sin(-\pi)\right] = -e^{\pi} c_1$$

$$y'(x) = -3e^{-3x}\left[c_1\cos(3x) + c_2\sin(3x)\right]$$
$$+ e^{-3x}\left[-3c_1\sin(3x) + 3c_2\cos(3x)\right]$$

$$y'\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 9e^{\pi}$$
$$= -3e^{\pi}\left[c_1\cos(-\pi) + c_2\sin(-\pi)\right]$$
$$+ e^{\pi}\left[-3c_1\sin(-\pi) + 3c_2\cos(-\pi)\right]$$
$$= -3e^{\pi}(-1)c_1 - 3e^{\pi}c_2$$
$$= 3e^{\pi}(c_1 - c_2)$$

$$\begin{cases} c_1 = 2 \\ \cancel{9}^{3}\cancel{e^{\pi}} = \cancel{3}\cancel{e^{\pi}}(2 - c_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = -1 \end{cases}$$

Quindi la soluzione del problema di Cauchy è:

$$y(x) = e^{-3x}\left[2\cos(3x) - \sin(3x)\right]$$

7)

Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 10y' + 25y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -3 \end{cases}$$

Risolvo dapprima l'eq. differenziale.

$$y'' + 10y' + 25y = 0$$

Equazione differenziale del II ordine lineare

Risolvo il polinomio caratteristico:

$$\lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0 \qquad \Delta = 0$$

$$\lambda = -5$$

Le soluzioni cercate sono nella forma:

$$y(x) = c_1 e^{-5x} + c_2 x e^{-5x}$$

Trovo la soluzione del problema di Cauchy imponendo le condizioni al bordo

$$y(0) = 1 = c_1$$

$$y'(x) = -5c_1 e^{-5x} + c_2 e^{-5x} - 5c_2 x e^{-5x}$$

$$y'(0) = -3 = -5c_1 + c_2$$

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ -3 = -5 + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 2 \end{cases}$$

Allora la soluzione del problema di Cauchy:

$$y(x) = e^{5x} + 2x e^{5x}$$

$$= (1+2x) e^{5x}$$