Tutorato Analisi1 M-Z - Scheda 8

Pasquale Porcu

11 Dicembre 2023

Info generali

Indirizzo mail: `pasquale.porcu@phd.unipd.it`

Cartella github con materiale: `https://github.com/federicosimioni2?tab=repositories`

Incontri: Ogni **lunedì, 14:30-16:30**, Aula **2G** Complesso Fiore di Botta

ATTENZIONE: Prossimo lunedì (18 Dicembre) non ci sarà l'incontro di Tutorato.
Ci vediamo direttamente Lunedì 8 Gennaio (solita aula)

Esercizio su sviluppo di Taylor

Esercizio 1 Trovare lo sviluppo di Taylor all'ordine 2 di:

$$f(x) = \frac{1}{1-x-x^2} \qquad \text{in } x_0 = 0$$

Grafici di funzione

Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

Esercizio 2

$$f(x) = \ln\left(1 + 2\sin^2(x)\right)$$

Esercizio 3

$$f(x) = e^{-\frac{x}{(x-2)^2}}$$

Esercizio 4

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x-1}{x}}$$

Limite

Esercizio 5 (proposto)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[4]{1+\sin^2(x)}-1}{\ln\left[1+\sqrt{1-e^{-x^2}}\right]\cdot\left[(1+\sin(x))^{-\frac{1}{x}}-\frac{1}{e}\right]}$$

1) Trovare lo sviluppo di Taylor all'ordine 2 di:

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2} \qquad \text{in} \qquad x_0 = 0$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0) x^2 + o(x^2)$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(x) = -\frac{1}{(1-x-x^2)^2}\left[-1-2x\right]$$

$$= \frac{1+2x}{(1-x-x^2)^2}$$

$$f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{2(1-x-x^2)^2 + 2(1-x-x^2)(1+2x)^2}{(1-x-x^2)^4}$$

$$f''(0) = \frac{2+2}{1} = 4$$

Quindi lo sviluppo di Taylor cercato è:

$$f(x) = 1 + x + 2x^2 + o(x^2)$$

2) Tracciare il grafico della funzione:

$$\ln(1+2\sin^2 x)$$

0) CLASSIFICAZIONE: funzione logaritmica

1) C.E. $1+2\sin^2 x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

DOM $= \mathbb{R}$

2) PARITÀ, PERIODICITÀ?

La funzione è pari $f(-x) = f(x)$

La funzione è periodica con periodo π

3) INTERSEZIONE CON GLI ASSI

asse $\hat{x}$: $\begin{cases} y = 0 \\ \ln(1+2\sin^2 x) = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \cancel{1} + 2\sin^2 x = \cancel{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 + k\pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

asse $\hat{y}$: $\begin{cases} x = 0 \\ \ln(1) = y = 0 \end{cases}$

4) STUDIO DEL SEGNO

$\ln(1+2\sin^2 x) > 0$

$\Rightarrow \cancel{1} + 2\sin^2 x > \cancel{1} \Rightarrow \sin^2 x > 0 \quad \forall x \in DOM$

La funzione è sempre positiva

5) LIMITE AI BORDI DEL DOMINIO

$$\lim_{x \to -\infty} \ln(1+2\sin^2 x) = \nexists$$

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(1+2\sin^2 x) = \nexists$$

6) DERIVATA PRIMA

$$D\left[\ln(1+2\sin^2 x)\right] = \frac{1}{1+2\sin^2 x} \cdot 4\sin(x)\cos(x)$$

$$= \frac{2\sin(2x)}{1+2\sin^2 x}$$

Studio il segno

N: $2\sin(2x) > 0 \Rightarrow 0 + 2k\pi < 2x < \pi + 2k\pi$

$0 + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$

D: $1+2\sin^2 x > 0 \Rightarrow \forall x \in DOM$

La funzione è crescente tra 0 e $\frac{\pi}{2}$ con periodicità π. È decrescente tra $-\frac{\pi}{2}$ e 0 con la stessa periodicità.

$x = 0 + k\pi$ e $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ sono punti stazionari. Per sapere se sono di minimo o di massimo calcolo la derivata seconda

7) DERIVATA SECONDA

$$D\left[\frac{2\sin(2x)}{1+2\sin^2(x)}\right] =$$

$$= \frac{4\cos(2x) - 4\sin x\cos x \cdot 2\sin(2x)}{(1+2\sin^2 x)^2}$$

$$= \frac{4\left(\cos(2x) - \sin^2(2x)\right)}{(1+2\sin^2 x)^2} = f''(x)$$

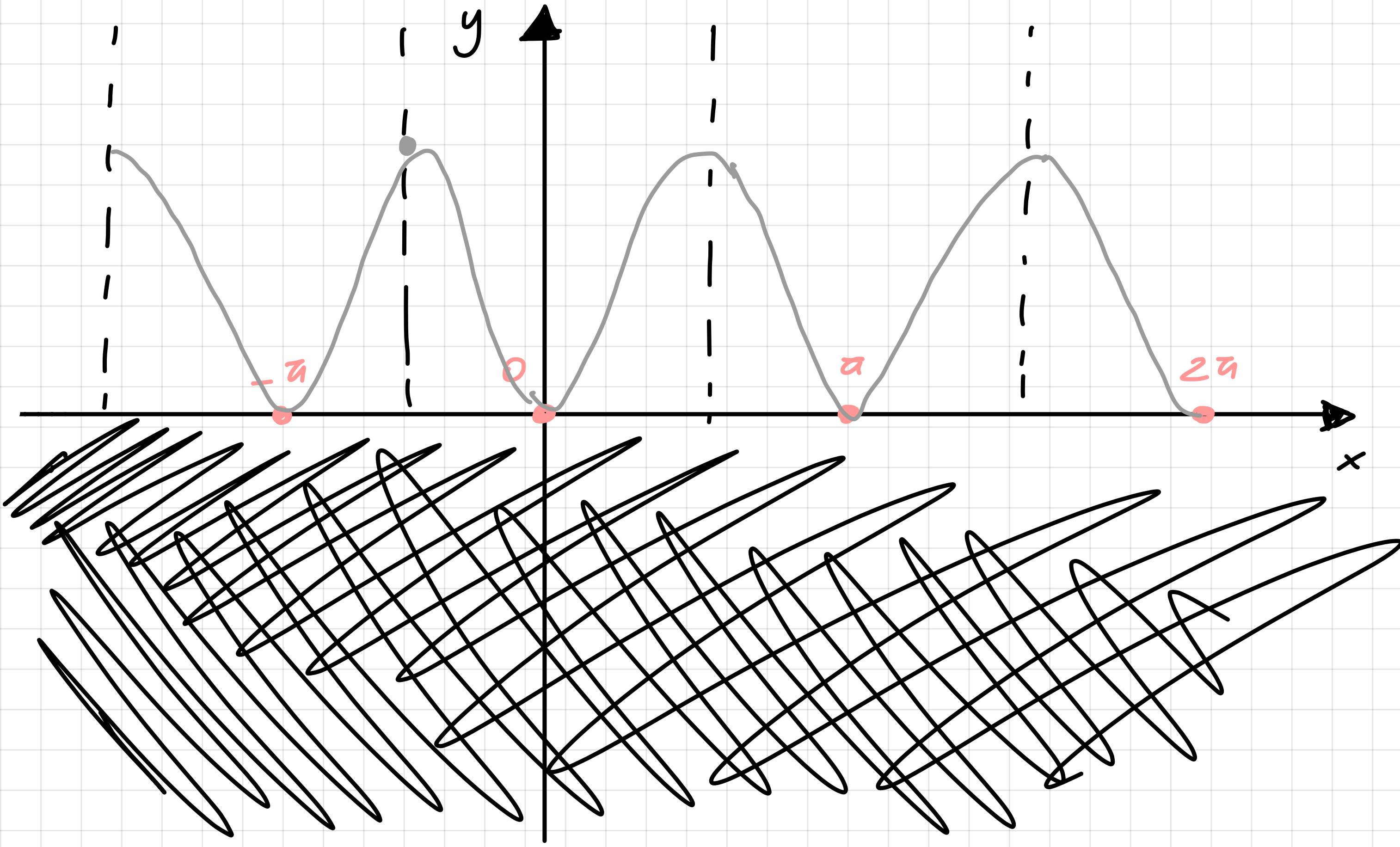
$$f''(0) = \frac{4\left(\cos(0) - \sin^2(0)\right)}{\left(1+2\sin^2(0)\right)^2} = 4 > 0$$

$x = 0$ è di minimo locale

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4\left(\cos(\pi) - \sin^2(\pi)\right)}{\left(1+2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2}$$

$$= \frac{-4}{(1+2)^2} = -\frac{4}{9} < 0$$

$x = \frac{\pi}{2}$ è di massimo locale


y
x
-π
0
π
2π

3) Tracciare il grafico della funzione:

$$e^{-\frac{x}{(x-2)^2}}$$

0) funzione esponenziale

1) C.E. $(x-2)^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

Dom $= \mathbb{R} - \{2\}$

2) PARITÀ, PERIODICITÀ? NO

3) INTERSEZIONE CON GLI ASSI

ASSE $\hat{x}$: $\begin{cases} y = 0 \\ e^{-\frac{x}{(x-2)^2}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$

ASSE $\hat{y}$: $\begin{cases} x = 0 \\ y = e^{0} = 1 \end{cases}$

4) STUDIO DEL SEGNO

È una funzione esponenziale, quindi è sempre positiva

5) LIMITE AI BORDI DEL DOMINIO

$$\lim_{x \to -\infty} e^{-\frac{x}{(x-2)^2}} = \lim_{x \to -\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$$

Analogamente:

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-\frac{x}{(x-2)^2}} = 1$$

$y = 1$ è asintoto orizzontale sia a $+\infty$ che a $-\infty$

$$\lim_{x \to 2^-} e^{-\frac{x}{(x-2)^2}} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to 2^+} e^{-\frac{x}{(x-2)^2}} = 0 \quad \text{analogamente}$$

6) DERIVATA PRIMA

$$D\left[e^{-\frac{x}{(x-2)^2}} \right] = -e^{-\frac{x}{(x-2)^2}} \left[\frac{(x-2)^2 - 2x(x-2)}{(x-2)^4} \right]$$

$$= -e^{-\frac{x}{(x-2)^2}} \left[\frac{x^2 \cancel{-4x} + 4 - 2x^2 \cancel{+4x}}{(x-2)^4} \right]$$

$$= \frac{e^{-\frac{x}{(x-2)^2}} (x^2 - 4)}{(x-2)^4}$$

$$= \frac{x+2}{(x-2)^3} e^{-\frac{x}{(x-2)^2}}$$

Trovo gli eventuali punti stazionari.

$$\frac{x+2}{(x-2)^3} e^{-\frac{x}{(x-2)^2}} = 0 \Rightarrow x + 2 = 0$$

$$x = -2$$

Studio il segno della derivata prima

$$\frac{x+2}{(x-2)^3} e^{-\frac{x}{(x-2)^2}} > 0$$

N: $x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$

D: $(x-2)^3 > 0 \Rightarrow x > 2$

FATT $\quad e^{-\frac{x}{(x-2)^2}} > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

	$x<-2$	-2	$-2<x<2$	2	$x>2$
N	$-$		$+$		$+$
D	$-$		$-$	$\nexists$	$+$
FATT	$+$		$+$	$\nexists$	$+$
	$+$	-2	$-$	2	$+$

La funzione è crescente in $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

〃 è decrescente in $]-2, 2[$

7) DERIVATA SECONDA

$$D\left[\frac{x+2}{(x-2)^3}\, e^{-\frac{x}{(x-2)^2}}\right] =$$

$$= \frac{(x-2)^3 - 3(x-2)^2(x+2)}{(x-2)^6}\, e^{-\frac{x}{(x-2)^2}} +$$

$$+ \underbrace{D\left[e^{-\frac{x}{(x-2)^2}}\right]}_{✲}\frac{x+2}{(x-2)^3}$$

✲ = CALCOLATO PRIMA

$$= \frac{x-2-3(x+2)}{(x-2)^4}\, e^{-\frac{x}{(x-2)^2}} - \frac{(x+2)^2}{(x-2)^6}\, e^{-\frac{x}{(x-2)^2}}$$

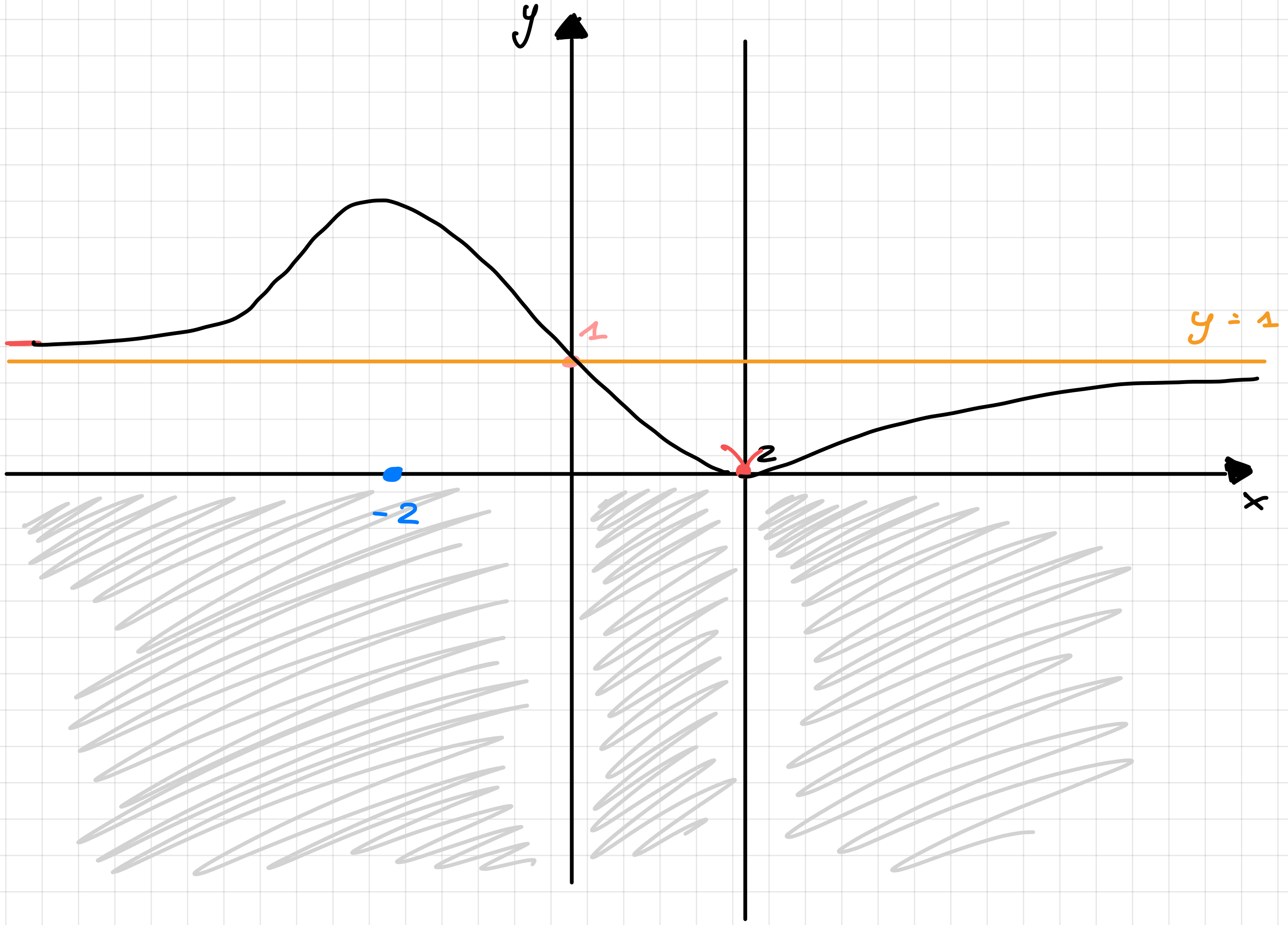
$$= \left[-2\,\frac{x+4}{(x-2)^4} - \frac{(x+2)^2}{(x-6)^6}\right] e^{-\frac{x}{(x-2)^2}}$$

Valuto direttamente la derivata seconda in $x = -2$ per vedere se è di massimo o di minimo

$$f''(-2) = -2 \frac{(-2)+4}{[(-2)-2]^4}$$

$$= -2 \frac{2}{4^4} < 0$$

$x = -2$ è di massimo



4) Tracciare il grafico della funzione:

$$\sqrt{\frac{2x-1}{x}}$$

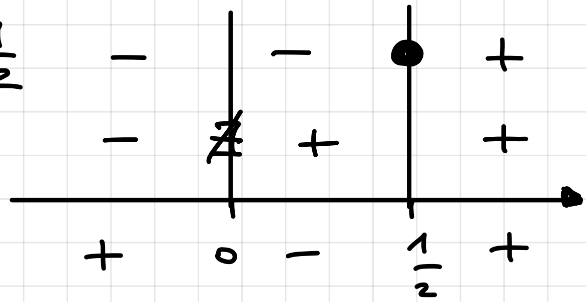
0) funzione radicale (pari)

1) C.E. $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{x} \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$

Studio la prima diseq. da parte

$\dfrac{2x-1}{x} \geq 0 \Rightarrow$ N: $2x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \dfrac{1}{2}$

D: $x > 0$



$x < 0 \quad \vee \quad x \geq \dfrac{1}{2}$

$\text{Dom} = \left]-\infty, 0\right[\cup \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$

2) PARITÀ, PERIODICITÀ? NO

3) INTERSEZIONE CON GLI ASSI

ASSE $\hat{x}$: $\begin{cases} y = 0 \\ 0 = \sqrt{\dfrac{2x-1}{x}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

ASSE $\hat{y}$: $x = 0 \notin \text{Dom}$

4) STUDIO DEL SEGNO

È una radice quadrata, quindi è sempre positiva

5) LIMITE AI BORDI DEL DOMINIO

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{2x-1}{x}} = \sqrt{2}$$

$$\lim_{x\to0^-} \sqrt{\frac{2x-1}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \sqrt{\frac{2x-1}{x}} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{2x-1}{x}} = \sqrt{2}$$

$y = \sqrt{2}$ è asintoto orizzontale sia a $+\infty$ che $-\infty$

$x = 0$ è asintoto verticale sinistro

6) DERIVATA PRIMA

$$D\left[\sqrt{\frac{2x-1}{x}}\right] = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{2x-1}} \cdot \frac{\cancel{2x}-(\cancel{2x}-1)}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2x^2}\sqrt{\frac{x}{2x-1}}$$

Trovo gli eventuali punti stazionari:

$$\frac{1}{2x^2}\sqrt{\frac{x}{2x-1}} = 0 \Rightarrow x = 0 \notin \text{DOM}$$

Studio il segno della derivata prima

$$\frac{1}{2x^2}\sqrt{\frac{x}{2x-1}} > 0$$

1F $\quad \frac{1}{2x^2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2F $\quad \sqrt{\frac{x}{2x-1}} > 0 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}$

La funzione è sempre crescente

7) DERIVATA SECONDA

$$D\left[\frac{1}{2x^2}\sqrt{\frac{x}{2x-1}}\right] =$$

$$= -\frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{2x-1}} + \frac{1}{2x^2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2x-1}{x}}\;\frac{(\cancel{2x}-1)-\cancel{2x}}{(2x-1)^2}$$

$$= -\frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{2x-1}} - \frac{1}{4x^2(2x-1)^2}\sqrt{\frac{2x-1}{x}}$$

$$= -\frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{2x-1}} - \frac{1}{4x^3(2x-1)}\;\frac{x}{(2x-1)}\sqrt{\frac{2x-1}{x}}$$

$$= \left[-\frac{1}{x^3} - \frac{1}{4x^3(2x-1)}\right]\sqrt{\frac{x}{2x-1}}$$

$$= -\frac{4(2x-1)+1}{4x^3(2x-1)}\sqrt{\frac{x}{2x-1}}$$

$$= -\frac{8x-3}{4x^3(2x-1)}$$

Studio del segno della derivata seconda

$$-\frac{8x-3}{12x^3(2x-1)}\sqrt{\frac{x}{2x-1}} > 0$$

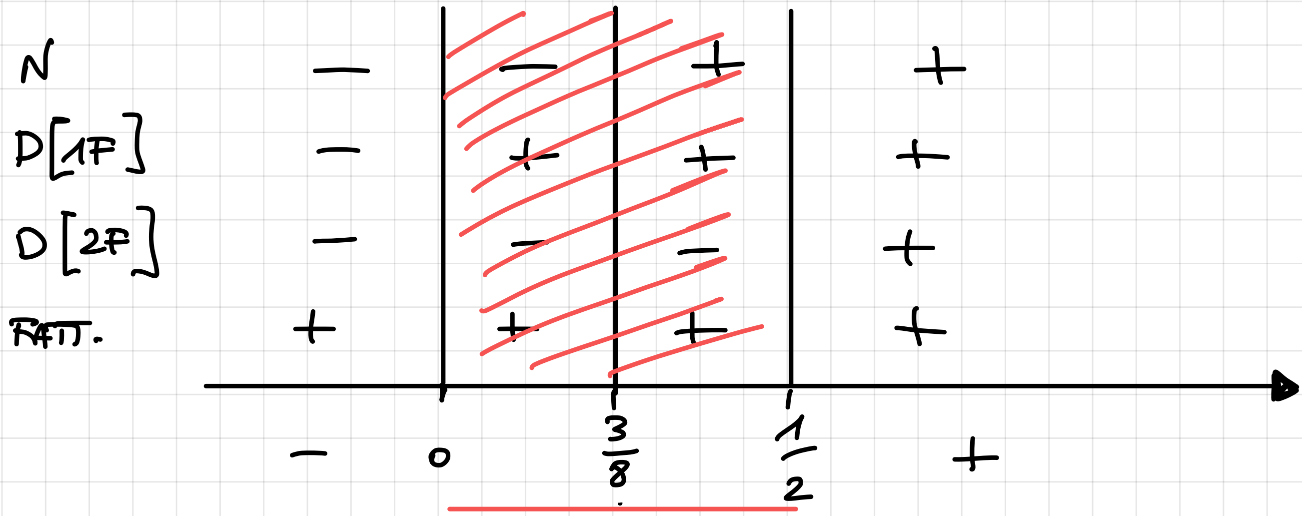
$$\frac{8x-3}{12x^3(2x-1)}\sqrt{\frac{x}{2x-1}} < 0$$

N: $8x-3>0 \Rightarrow x>\frac{3}{8}$

D: $x^3(2x-1)>0 \Rightarrow$ D[1F] $x>0$

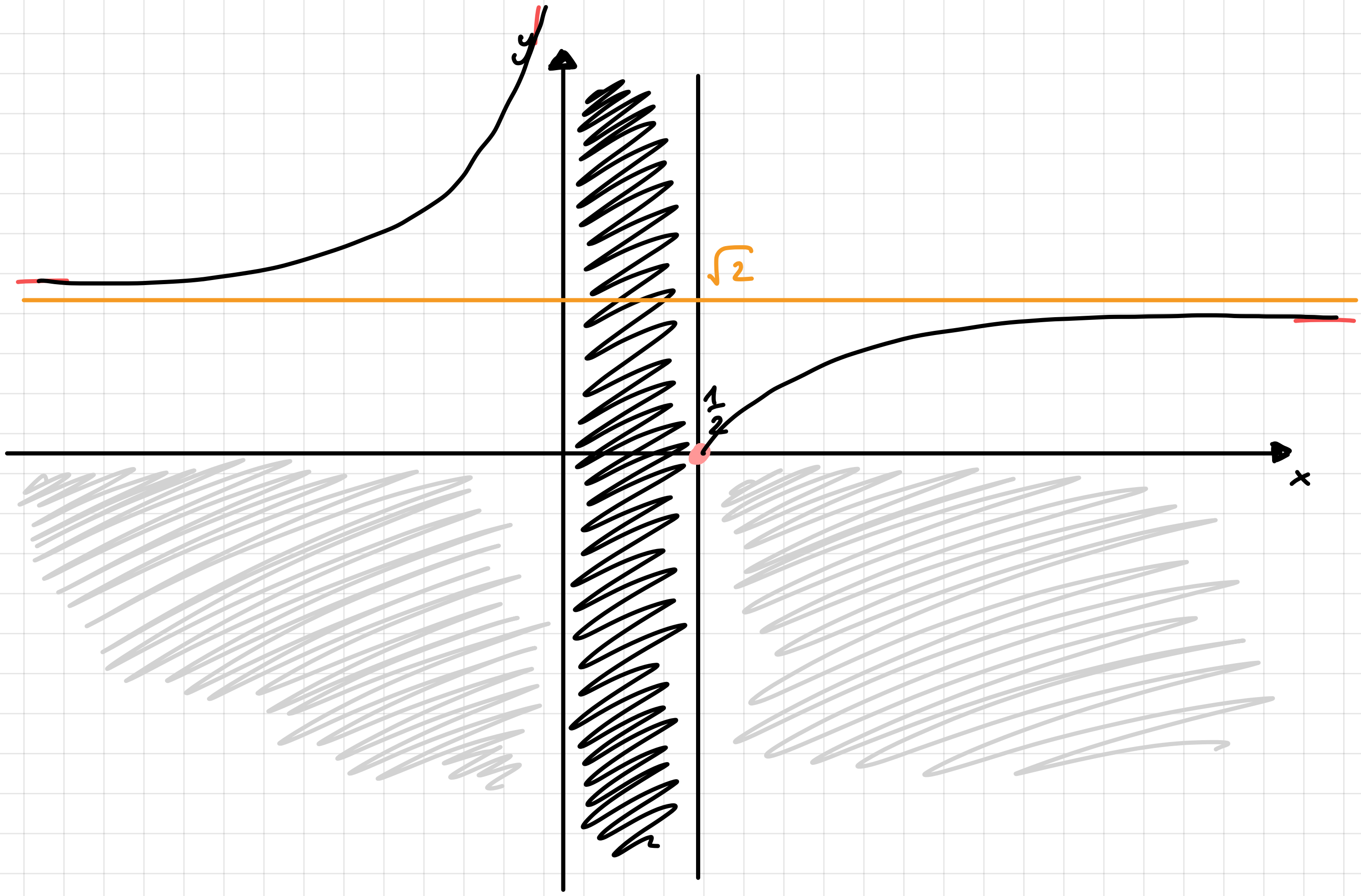
D[2F] $x>\frac{1}{2}$

FATT. $\sqrt{\frac{x}{2x-1}}>0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ perché radice quadrata



qui: la funzione non è definita

La funzione è convessa in $]-\infty, 0[$. La funzione è concava in $]\frac{1}{2}, +\infty[$



y
x
√2
1/2

5) $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[4]{1+\sin^2 x}-1}{\ln\left[1+\sqrt{1-e^{-x^2}}\right]\left[(1+\sin(x))^{-\frac{1}{x}}-\frac{1}{e}\right]}$$

PROVO A SOSTITUIRE

$$\sim \frac{0}{0} \qquad F.I$$

IDEA $\sqrt{1-e^{-x^2}} \to 0$

Posso usare il limite notevole

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+f(x))}{f(x)} = 1 \qquad \text{con } f(x)\to 0 \text{ per } x\to 0^+$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1-e^{-x^2}}}{\underbrace{\ln\left[1+\sqrt{1-e^{-x^2}}\right]}_{\to 1}} \cdot \frac{\sqrt[4]{1+\sin^2 x}-1}{\sqrt{1-e^{-x^2}}\left[(1+\sin(x))^{-\frac{1}{x}}-\frac{1}{e}\right]}$$

Quindi il limite diventa

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[4]{1+\sin^2 x}-1}{\left[(1+\sin(x))^{-1/x}-\frac{1}{e}\right]\sqrt{1-e^{-x^2}}}$$

PROVO A SOSTITUIRE $\frac{0}{0}$

IDEA $-x^2 \to 0$ per $x\to 0^+$

Posso usare il limite notevole

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{f(x)}-1}{f(x)} = 1 \qquad \text{se } f(x)\to 0 \text{ per } x\to 0^+$$

Moltiplicando e dividendo per $|x|$, il limite diventa:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{|x|} \frac{\left[\sqrt[4]{1+\sin^2 x} - 1\right]}{\left[(1+\sin(x))^{-1/x} - \frac{1}{e}\right]} \sqrt{\frac{-x^2}{e^{-x^2}-1}} \xrightarrow{} 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{|x|} \frac{\left[\sqrt[4]{1+\sin^2 x} - 1\right]}{\left[(1+\sin(x))^{-1/x} - \frac{1}{e}\right]}$$

Ora posso provare a usare de l'Hopital

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{\lim_{x \to 0^+} N'(x)}{\lim_{x \to 0^+} D'(x)}$$

$$N(x) = \sqrt[4]{1+\sin^2 x} - 1$$

$$N'(x) = \frac{1}{4}(1+\sin(x))^{-\frac{3}{4}} \sin(2x)$$

$$\lim_{x \to 0^+} N'(x) = 0$$

$$D(x) = |x| \left[(1+\sin(x))^{-1/x} - \frac{1}{e}\right]$$

$$D'(x) = \left[(1+\sin(x))^{-1/x} - \frac{1}{e}\right] \frac{|x|}{x} +$$

$$+ |x| (1+\sin(x))^{-1/x} \left[\frac{1}{x^2} \log[1+\sin(x)] - \frac{1}{x} \frac{\cos(x)}{(1+\sin(x))}\right]$$

Siccome sto studiando il limite per $x \to 0^+$, per fare le cose più semplici sostituisco $|x|/x = 1$

$$D'(x) = \left[\left(1+\sin(x)\right)^{-\frac{1}{x}} - \frac{1}{e}\right] +$$

$$+ \left(1+\sin(x)\right)^{-\frac{1}{x}} \left[\frac{1}{x} \log\left[1+\sin(x)\right] - \frac{\cos(x)}{(1+\sin(x))}\right]$$

$$\lim_{x\to 0^+} D'(x) = \lim_{x\to 0^+} \left[\left(1+\sin(x)\right)^{-\frac{1}{x}} - \frac{1}{e}\right] \quad ✱Ⓐ$$

$$+ \lim_{x\to 0} \left(1+\sin(x)\right)^{-\frac{1}{x}} \left[\frac{1}{x} \log\left[1+\sin(x)\right] - \frac{\cos(x)}{(1+\sin(x))}\right] \quad ✱Ⓑ$$

$$= \cancel{\frac{1}{e}} - \cancel{\frac{1}{e}} + \frac{1}{e} \cdot 0 = 0$$

Quindi:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{N'(x)}{D'(x)} = \frac{0}{0} \quad F.I.$$

L'idea è di usare ancora

$$N''(x) = -\frac{3}{16}\left(1+\sin(x)\right)^{-\frac{7}{4}} \sin(2x) + \frac{1}{2}\left(1+\sin(x)\right)^{-\frac{3}{4}} \cos(2x)$$

$$\lim_{x\to 0^+} N''(x) = \frac{1}{2}$$

$$D''(x) = D\left[\left(1+\sin(x)\right)^{-\frac{1}{x}}\right] +$$

$$+ D\left[\left(1+\sin(x)\right)^{-\frac{1}{x}}\right]\left[\frac{1}{x} \log\left[1+\sin(x)\right] - \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}\right]$$

$$+ \left(1+\sin(x)\right)^{-\frac{1}{x}} \left[-\frac{1}{x^2} \log\left[1+\sin(x)\right] + \frac{1}{x} \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)} + \frac{+\sin(x)\left[1+\sin(x)\right] + \cos^2(x)}{\left[1+\sin(x)\right]^2}\right]$$

✱ Vedi dopo

$$= D\left[\left(1+\sin(x)\right)^{-\frac{1}{x}}\right]\left[1 + \frac{1}{x}\log\left[1+\sin(x)\right] - \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}\right]$$

$$+ \left(1+\sin(x)\right)^{-\frac{1}{x}}\left[-\frac{1}{x^2}\log\left[1+\sin(x)\right] + \frac{1}{x}\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\cancel{\sin(x)+1}}{\left[1+\sin(x)\right]^2}\right]$$

$$= \left(1+\sin(x)\right)^{-\frac{1}{x}}\left[-\frac{1}{x^2}\log\left[1+\sin(x)\right] + \frac{1}{x}\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)} + \frac{1}{1+\sin(x)}\right]$$

$$\left(1+\sin(x)\right)^{-\frac{1}{x}}\left[+\frac{1}{x^2}\log\left[1+\sin(x)\right] - \frac{1}{x}\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}\right]$$

$$\left[1 + \frac{1}{x}\log\left[1+\sin(x)\right] - \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}\right]$$

$$= \left(1+\sin(x)\right)^{-\frac{1}{x}}\left[\cancel{-\frac{1}{x^2}\log\left[1+\sin(x)\right]} + \cancel{\frac{1}{x}\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}} + \frac{1}{1+\sin(x)}\right] +$$

$$\left(1+\sin(x)\right)^{-\frac{1}{x}}\left[\cancel{+\frac{1}{x^2}\log\left[1+\sin(x)\right]} - \cancel{\frac{1}{x}\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}}\right] +$$

$$\left(1+\sin(x)\right)^{-\frac{1}{x}}\left[\frac{1}{x^2}\log\left[1+\sin(x)\right] - \frac{1}{x}\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}\right]\left[\frac{1}{x}\log\left[1+\sin(x)\right] - \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}\right]$$

$$= \left(1+\sin(x)\right)^{-\frac{1}{x}}\left\{\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}\log\left[1+\sin(x)\right] - \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}\right]^2 + \frac{1}{1+\sin(x)}\right\}$$

$$\lim_{x \to 0^+} D''(x) =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \underbrace{\left(1 + \sin(x)\right)^{-\frac{1}{x}}}_{\to 1/e} \left[\frac{1}{x^2} \log\left[1 + \sin(x)\right] \underbrace{-}_{\to 1} \frac{\cos(x)}{x\left(1+\sin(x)\right)} \right] \cdot$$

$$\cdot \underbrace{\left[\frac{1}{x} \log\left[1 + \sin(x)\right] - \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)} \right]}_{\to 0}$$

$$+ \lim_{x \to 0^+} \underbrace{\left(1 + \sin(x)\right)^{-\frac{1}{x}}}_{\to 1/e} \underbrace{\left[\frac{1}{1 + \sin(x)} \right]}_{\to 1}$$

$$= \frac{1}{e}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{N(x)}{D(x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{N'(x)}{D'(x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{N''(x)}{D''(x)} = \frac{e}{2}$$

✿ A

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1+\sin(x)\right)^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}$$

Cambio di variabile $y = \frac{1}{x}$ $x \to 0^+$ $y \to +\infty$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1+\sin(x)\right)^{-\frac{1}{x}} = \lim_{y\to+\infty}\left\{\left[1+\sin\left(\frac{1}{y}\right)\right]^{y}\right\}^{-1} =$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left\{\left[1+\frac{y}{y}\sin\left(\frac{1}{y}\right)\right]^{y}\right\}^{-1}$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left\{\left[1+\frac{1}{y}\right]^{y}\right\}^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

dove ho usato i limiti notevoli

$$\lim_{f(x)\to 0}\frac{\sin[f(x)]}{f(x)} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

✿ B

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{x}\log\left(1+\sin(x)\right) - \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}\right] = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\to 1}\;\underbrace{\frac{\log[1+\sin(x)]}{\sin(x)}}_{\to 1} - \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}\right]$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left[1 - \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}\right] = 1-1 = 0$$

dove ho usato i limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{f(x)\to 0}\frac{\log(1+f(x))}{f(x)} = 1$$

c

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\log\left(1+\sin(x)\right) - \frac{\cos(x)}{x\left(1+\sin(x)\right)} = 1$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x^2}\,\underbrace{\frac{\log\left[1+\sin(x)\right]}{\sin(x)}}_{\to 1} - \frac{\cos(x)}{x\left(1+\sin(x)\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\,\underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\to 1} - \frac{\cos(x)}{x\left(1+\sin(x)\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} - \frac{\cos(x)}{x\left(1+\sin(x)\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1+\sin(x)-\cos(x)}{x\left(1+\sin(x)\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{1-\cos(x)}{x^2}}_{\to \frac{1}{2}}\,\frac{x}{1+\sin(x)} + \underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\to 1}\,\frac{1}{1+\sin(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2}\,\frac{x}{1+\sin(x)} + \frac{1}{1+\sin(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2}\left[\frac{x}{1+\sin(x)} + \frac{1}{1+\sin(x)}\right] + \frac{1}{2\underbrace{\left(1+\sin(x)\right)}_{\to 1}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2}\left[\frac{1+x}{1+\sin(x)}\right] + \frac{1}{2}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2}\,\frac{1+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\to 1}} + \frac{1}{2}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2} \frac{\cancel{1 + \frac{1}{x}}}{\cancel{1 + \frac{1}{x}}} + \frac{1}{2} = 1$$

Dove ho usato: limiti notevoli

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{f(x) \to 0} \frac{\log(1 + f(x))}{f(x)} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$