Tutorato Analisi1 M-Z - Scheda 4

Pasquale Porcu

6 Novembre 2023

Info generali

Indirizzo mail: `pasquale.porcu@phd.unipd.it`

Incontri: Ogni **lunedì, 14:30-16:30**, Aula **2G** Complesso Fiore di Botta

Esercizi sui limiti

Esercizio 1

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin\left[\cos\left(x\right)\right]}{x^2}$$

Esercizio 2

$$\lim_{x \to \pi} \frac{1+\cos\left(x\right)}{\pi - x}$$

Esercizio 3

$$\lim_{x \to +\infty} x\ e^x\ \sin\left[e^{-x}\ \sin\left(\frac{2}{x}\right)\right]$$

Esercizio 4

$$\lim_{x \to 0} x\ \ln\left(x\right)$$

Esercizio 5

$$\lim_{x \to 0} \sin\left(x\right)\ \ln\left(x\right)$$

Esercizio 6

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{3^x}$$

Esercizio 7

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{2+x^3} - \sqrt[3]{1+2x^2+x^3}$$

Esercizio 8

$$\lim_{x \to -\infty} x\left(\sqrt{1+x^4} - x^2\right)$$

Esercizio 9

$$\lim_{x \to 0} \frac{x+|x|}{x^2}$$

Esercizio 10

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln\left[\cos\left(x\right)\right]}{x^2}$$

Esercizio 11 (proposto)

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x}$$

Esercizio sui numeri complessi

Risolvi la seguente equazione nei numeri complessi

Esercizio 12 (proposto)

$$i \cdot z^2 + 2z - 2 = 0$$

1) $\lim_{x \to 0} \frac{sen(\cos(x))}{x^2}$

PROVO A SOSTITUIRE

$\lim_{x \to 0} \frac{sen(\cos(x))}{x^2} \simeq \frac{sen(\cos(0))}{0} \simeq \frac{sen(1)}{0}$

$\simeq +\infty$

2) $$\lim_{x \to \pi} \frac{1+\cos(x)}{\pi - x}$$

provo a sostituire

$$\lim_{x \to \pi} \frac{1+\cos(x)}{\pi - x} \simeq \frac{1+\cos(\pi)}{\pi-(\pi)} = \frac{0}{0} \quad F.I.$$

Al numeratore posso far comparire il limite notevole

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Cambio di variabile $t = \pi - x$

$x \to \pi \qquad t \to 0$

$$\lim_{t \to 0} \frac{1+\cos(\pi - t)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1-\cos(t)}{t}$$

ORA MOLTIPLICO E DIVIDO PER t

$$= \lim_{t \to 0} \underbrace{\frac{1-\cos(t)}{t^2}}_{1/2} \cdot t$$

$$\simeq \lim_{t \to 0} \frac{1}{2} t = 0$$

3) $$\lim_{x \to +\infty} x e^x \sin\left(e^{-x} \sin\left(\frac{2}{x}\right)\right)$$

PROVO A SOSTITUIRE

$$\lim_{x \to +\infty} x e^x \sin\left[e^{-x} \sin\left(\frac{2}{x}\right)\right] \simeq +\infty \cdot +\infty \cdot 0 \quad \text{F.I.}$$

Visto che l'argomento di sin va a zero, posso provare a usare l'analogo del prodotto notevole:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{f(x) \to 0} \frac{\sin[f(x)]}{f(x)} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} x e^x \underbrace{\frac{\sin\left[e^{-x} \sin\left(\frac{2}{x}\right)\right]}{e^{-x} \sin\left(\frac{2}{x}\right)}}_{\to 1} e^{-x} \sin\left(\frac{2}{x}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} x \cancel{e^x} \cdot \cancel{e^{-x}} \sin\left(\frac{2}{x}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} x \sin\left(\frac{2}{x}\right)$$

Cambio di variabile: $y = \frac{2}{x}$ $\quad$ $x \to +\infty$, $y \to 0$

$$\lim_{y \to 0} \frac{2}{y} \sin(y) = 2 \lim_{y \to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 2$$

4) $\lim_{x \to 0^+} x \ln(x)$

PROVO A SOSTITUIRE

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln(x) \simeq 0 \cdot (-\infty) \qquad F.I.$$

Però:

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}$$

Cambio di variabile $\frac{1}{x} = y$

$x \to 0 \qquad y \to +\infty$

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{y}\right)}{y} = \frac{-\infty}{+\infty}$$

Ma y diverge più velocemente del logaritmo!

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{y}\right)}{y} \simeq \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{y} = 0$$

5) $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(x) \ln(x)$

PROVO A SOSTITUIRE

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(x) \ln(x) \simeq 0 \cdot (-\infty) \qquad \text{F.I.}$$

Uso il limite notevole

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$$

e moltiplico e divido per x

$$\lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}_{\to 1} x \ln(x) =$$

$$= \lim_{x \to 0} x \ln(x) = 0$$

7) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{2+x^3} - \sqrt[3]{1+2x^2+x^3}$

PROVO A SOSTITUIRE

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{2+x^3} - \sqrt[3]{1+2x^2+x^3} = +\infty - \infty \qquad F.I$$

Ricordo la formula del prodotto notevole della differenza di cubi:

$$A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$$

Se $A = \sqrt[3]{2+x^3}$

$B = \sqrt[3]{1+2x^2+x^3}$

posso liberarmi delle radici moltiplicando e dividendo per

$$\sqrt[3]{(2+x^3)^2} + \sqrt[3]{(2+x^3)(1+2x^2+x^3)} + \sqrt[3]{(1+2x^2+x^3)}$$

Il limite quindi diventa:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(2+\cancel{x^3}) - (1+2x^2+\cancel{x^3})}{\sqrt[3]{(2+x^3)^2} + \sqrt[3]{(2+x^3)(1+2x^2+x^3)} + \sqrt[3]{(1+2x^2+x^3)}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1-2x^2}{\sqrt[3]{(2+x^3)^2} + \sqrt[3]{(2+x^3)(1+2x^2+x^3)} + \sqrt[3]{(1+2x^2+x^3)}}$$

PROVO A SOSTITUIRE ORA:

$$\lim_{x \to +\infty} \dots = \frac{-\infty}{+\infty} \qquad F.I.$$

Raccolgo a ordine maggiore

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-2x^2\left(1-\frac{1}{2x^2}\right)}{x^2\left[\underbrace{\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{x^3}\right)^2}}_{\to 1}+\underbrace{\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{x^3}\right)\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}}_{\to 1}+\underbrace{\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^2}}_{\to 1}\right]}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-2\cancel{x^2}}{3\cancel{x^2}} = -\frac{2}{3}$$

8) $$\lim_{x\to -\infty} x\left(\sqrt{1+x^4}-x^2\right)$$

PROVO A SOSTITUIRE:

$$\lim_{x\to -\infty} x\left(\sqrt{1+x^4}-x^2\right) \simeq -\infty\,(+\infty-\infty) \quad F.I$$

Moltiplico e divido per $\sqrt{1+x^4}+x^2$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x\left(\sqrt{1+x^4}-x^2\right)\left(\sqrt{1+x^4}+x^2\right)}{\left(\sqrt{1+x^4}+x^2\right)}$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x\left(1+\cancel{x^4}-\cancel{x^4}\right)}{\sqrt{1+x^4}+x^2}$$

PROVO A SOSTITUIRE ORA:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^4}+x^2} \simeq \frac{-\infty}{+\infty} \quad F.I.$$

Raccolgo ordine maggiore:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}\left[\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}}+1\right]} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{2x} = 0$$

$\to 1$

$\to 2$

9.) $$\lim_{x\to 0} \frac{x+|x|}{x^2}$$

c'è il modulo, quindi conviene discutere separatamente i casi:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x+x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\cancel{x}-\cancel{x}}{x^2} \simeq 0$$

Limite destro e limite sinistro sono diversi

quindi:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+|x|}{x^2} \quad \text{non esiste}$$

10) $$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2}$$

PROVO A SOSTITUIRE:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2} \simeq \frac{\ln(1)}{0} = \frac{0}{0} \quad F.I.$$

Provo a usare i limiti notevoli:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln[(\cos(x)-1)+1]}{\underbrace{\cos(x)-1}_{\to 0}} \cdot \underbrace{\frac{\cos(x)-1}{x^2}}_{\to -\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

11)

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{tg(x)}$$

PROVO A SOSTITUIRE:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{tg(x)} = +\infty - \infty \quad F.I.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sin(x)} - \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$$

Si possono usare i limiti notevoli

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Moltiplico e divido per x^2

$$\lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{1-\cos(x)}{x^2}}_{\to \frac{1}{2}} \underbrace{\frac{x}{\sin(x)}}_{\to 1} \cdot x$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{2}x = 0$$

EQUAZIONE COMPLESSA (ESERCIZIO 12)

$$i z^2 + 2z - 2 = 0$$

METODO 1: Trattandola come un'eq. di II grado

$$\Delta = 4 - 4(-2)i = 4(1+2i)$$

$$z_{1,2} = \frac{-\cancel{2} \pm \cancel{2}\sqrt{1+2i}}{\cancel{2}i} = i \pm i\sqrt{1+2i}$$

Chiamo $1+2i = y$ e cerco di scriverla come:

$$y = |y| e^{i\theta} = |y|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$|y| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$y = \sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} i\right) = \sqrt{5}\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) = \sqrt{5}e^{i\theta}$$

θ è un angolo t.c. $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$ cioè appartiene al I quadrante

Quindi:

$$z_{1,2} = i \pm i\sqrt{\sqrt{5}e^{i\theta}} = i \pm i\sqrt[4]{5}\, e^{i\frac{\theta}{2}} = i \pm i\sqrt[4]{5}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$$ ☆

$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ e $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ possono essere ricavati da $\cos\theta$ e $\sin\theta$ (che sono noti) tramite le formule di bisezione:

$$\cos\theta = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2} \quad \star$$

$$= 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2} \quad \star\star$$

$$\star \quad \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{5}}}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$$

$$\star\star \quad \sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{5}}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$$

Siccome θ appartiene al primo quadrante, anche $\frac{\theta}{2}$ vi apparterrà. Quindi prendo le radici positive

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{\sqrt{5}+1}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{5}}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{5}}$$

Sostituisco dentro la formula risolutiva $\star$ di sopra per $z_{1,2}$:

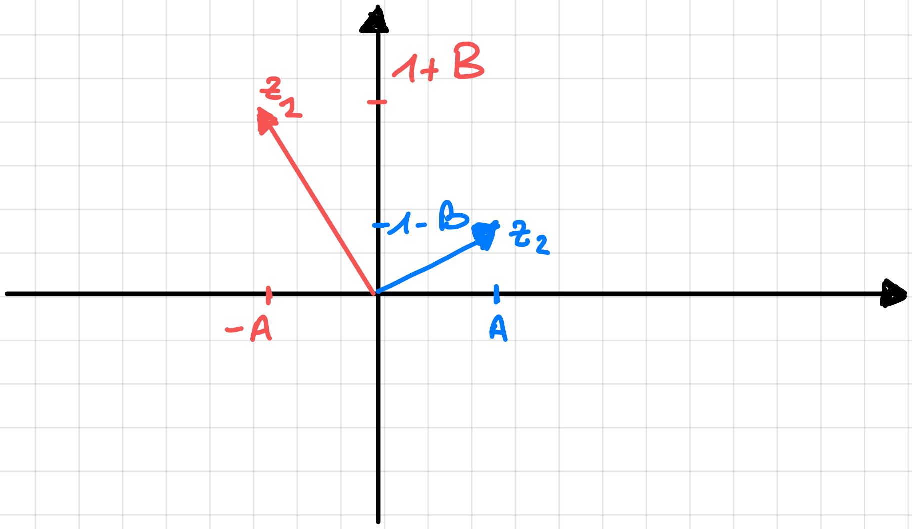
$$z_{1,2} = i \pm i\left[\frac{\sqrt{\sqrt{5}+1}}{\sqrt{2}} + i\,\frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{\sqrt{2}}\right]$$

$$z_2 = -\frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{\sqrt{2}} + i\left(1 + \frac{\sqrt{\sqrt{5}+1}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$z_2 = +\frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{\sqrt{2}} + i\left(1 - \frac{\sqrt{\sqrt{5}+1}}{\sqrt{2}}\right)$$

Rappresentazione nel piano complesso:

$$A = \frac{\sqrt{\sqrt{5} - 1}}{\sqrt{2}} \qquad B = \frac{\sqrt{\sqrt{5} + 1}}{2} < \frac{\sqrt{\sqrt{9} + 1}}{2} = \frac{\sqrt{3 + 1}}{2} = 1$$



$$iz^2 + 2z - 2 = 0$$

METODO 2: $z = x + iy$ e poi separo parte reale e parte immaginaria

$$i(x+iy)^2 + 2(x+iy) - 2 = 0$$

$$i(x^2 - y^2 + 2ixy) + 2x + 2iy - 2 = 0$$

$$ix^2 - iy^2 - 2xy + 2x + 2iy - 2 = 0$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2y = 0 \\ -2xy + 2x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2y = 0 \\ -xy + x - 1 = 0 \end{cases}$$

Esplicito x nella seconda eq. e lo sostituisco nella prima

$$x = \frac{1}{1-y} \qquad ☆ \qquad y \neq 1$$

$$\frac{1}{(1-y)^2} - y^2 + 2y = 0$$

$$1 - y^2(1-y)^2 + 2y(1-y)^2 = 0$$

$$1 = (y^2 - 2y)(1-y)^2$$ Aggiungo $(1-y)^2$ ad ambo i membri

$$1 + (1-y)^2 = (y^2-2y+1)(1-y)^2$$

$$1 + (1-y)^2 = (1-y)^4$$

sostituisco $t = (1-y)^2$ $\underline{\underline{t > 0}}$ PERCHÈ QUADRATO

$$t^2 - t - 1 = 0$$ È un eq. di II grado reale

$$\Delta = 1 + 4 = 5$$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$ soluzione con − non accettabile

$$t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

sostituisco indietro per trovare y

$t = (1-y)^2$ faccio la radice di ambo i membri

$\sqrt{t} = 1 - y_1$ ∨ $\sqrt{t} = -(1-y_2)$

$y_1 = 1 - \sqrt{t}$ ∨ $y_2 = 1 + t$

$$= 1 - \frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$$

Trovo i corrispondenti x sostituendo dentro ☆

$$x_1 = \frac{1}{1-y_1} = \frac{1}{\cancel{1} - \left(\cancel{1} - \frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{5}}} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{\sqrt{\sqrt{5}-1}}$$ Razionalizzo

$$= \frac{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{5}-1}}{\sqrt{5-1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sqrt{5}-1}$$

$$= \frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{\sqrt{2}}$$

$$x_2 = \frac{1}{1-y_2} = \frac{1}{\cancel{1} - \left(\cancel{1} + \frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{5}}} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{\sqrt{\sqrt{5}-1}}$$ Razionalizzo

$$= -\frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{\sqrt{2}}$$

Esistono soluzioni per $y=1$? Sostituisco dentro la prima eq. del sistema di sopra

$$x^2 - (1)^2 + 2(1) = 0$$

$$x^2 - 1 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$$ impossibile!

Quindi le soluzioni sono:

$z_1 = x_1 + iy_2$ e $z_2 = x_2 + iy_2$

$$z_1 = \frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{\sqrt{2}} + i\left(1 - \frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$z_2 = -\frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{\sqrt{2}} + i\left(1 + \frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}\right)$$

Sono le stesse di prima.