Tutorato Analisi1 M-Z - Scheda 0

Pasquale Porcu

9 Ottobre 2023

Info generali

Indirizzo mail: `pasquale.porcu@phd.unipd.it`

Incontri: Ogni **lunedì, 14:30-16:30**, Aula **RL** Complesso Vallisneri (*Salvo diversa comunicazione*)

Risolvi le seguenti disequazioni

Esercizio 1

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} \leq 0 \tag{1}$$

Esercizio 2

$$x^3 - x^2 > 0 \tag{2}$$

Esercizio 3

$$\ln(3x + 3) \leq \ln\left(x^2 - 4x - 5\right) \tag{3}$$

Esercizio 4

$$1 + \sqrt{2x^2 + 3x - 2} > x \tag{4}$$

Esercizio 5

$$x^2 - 2|x| - 3 < 0 \tag{5}$$

Esercizio 6 (proposto in aula)

$$||x| - 1| < 2 \tag{6}$$

DISEQUAZIONE FRATTA

1) $$\frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} \leq 0$$

PASSO 0) Classificazione Disequazione fratta

[forma normale $\frac{N(x)}{D(x)} \lessgtr 0$]

PASSO 1) Condizioni di esistenza

$\Rightarrow$ DENOMINATORE $\neq 0$

$$x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$$

PASSO 2) Studio separatamente il segno del numeratore e del denominatore

N : $x^2 - 3x + 2 > 0$

Diseq. di II grado

Scrivo l'eq. associata

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$\Delta = 9 - 8 = 1$

$\Delta > 0$

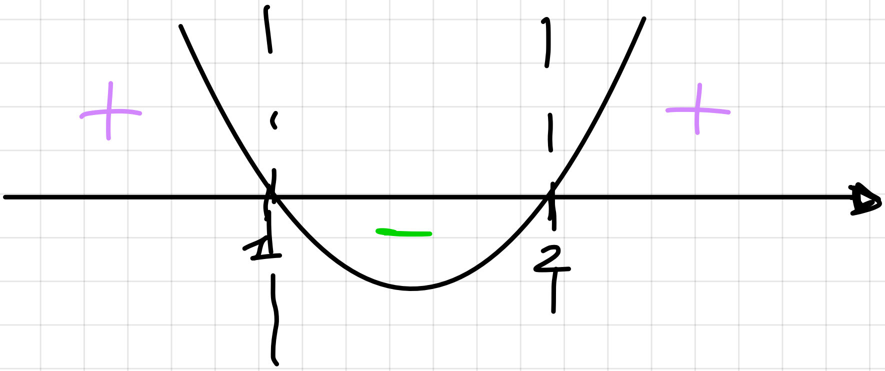
$$x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$x_1 = 1$ $\quad$ $x_2 = 2$

Disegno la parabola associata

$\Delta > 0 \Rightarrow$ 2 intersezioni con asse

$a > 0 \Rightarrow$ concavità verso il basso



D: $x + 1 > 0$

Diseq. di primo grado

$$x > -1$$

PASSO 3) Metto insieme i segni del numeratore e del denominatore

		-1		1		2	
N	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
D	$-$	$\nexists$	$+$		$+$		$+$
	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	0	$+$

PASSO 4) Risposta

(Il segno della diseq. è $\leq$)

$$x < -1 \quad \vee \quad 1 \leq x \leq 2$$

DISEQUAZIONE DI GRADO SUP. AL II

2) $x^3 - x^2 > 0$

PASSO 0) Classificazione $[p(x) \gtreqless 0$ è la forma normale$]$

È una diseq. di 3° grado

PASSO 1) Scompongo in fattori il polinomio $p(x)$

Ripasso della scomposizione in fattori:

si procede in quest'ordine

1) RAGGRUPPAMENTO A FATTOR COMUNE
2) " A FATTOR PARZIALE
3) RICONOSCIMENTO DI PRODOTTI NOTEVOLI
4) METODO DI RUFFINI

$$x^3 - x^2 = x^2(x-1)$$

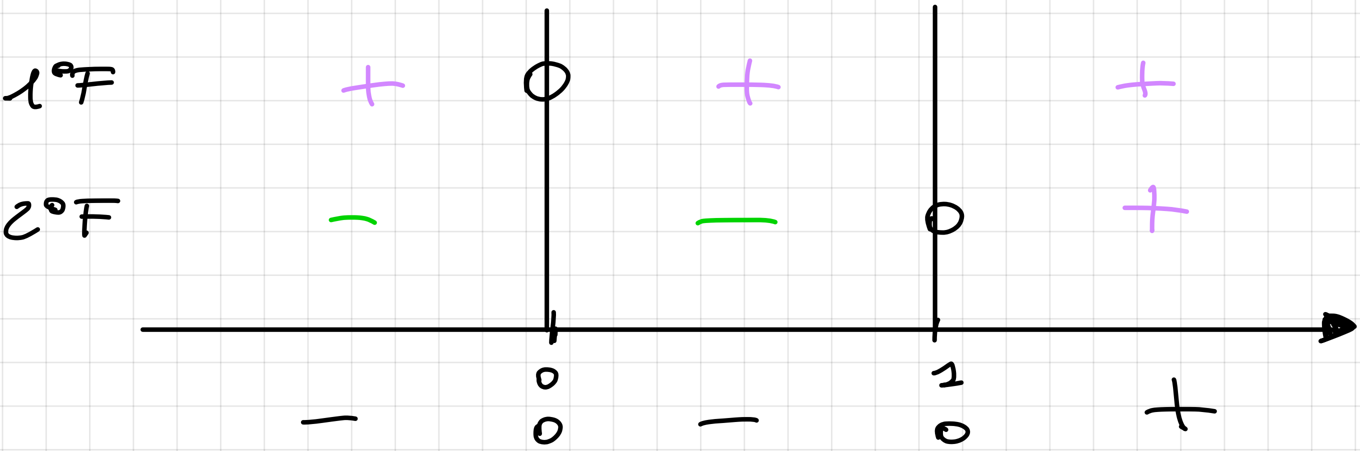
La scomposizione si ferma quando tutti i fattori sono al più di II grado

PASSO 2) Studio separatamente il segno di ciascun fattore

1°F : $x^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

2°F : $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$

PASSO 3) Studio il segno complessivo di: $p(x)$



PASSO 3) Risposta

(Il segno della diseq. è $>$)

$$x > 1$$

DISEQUAZIONI LOGARITMICHE

3) $\ln(3x+3) \le \ln(x^2-4x-5)$

PASSO 0) Diseq. logaritmiche

PASSO 1)

CONDIZIONI DI ESISTENZA: ARGOMENTO > 0

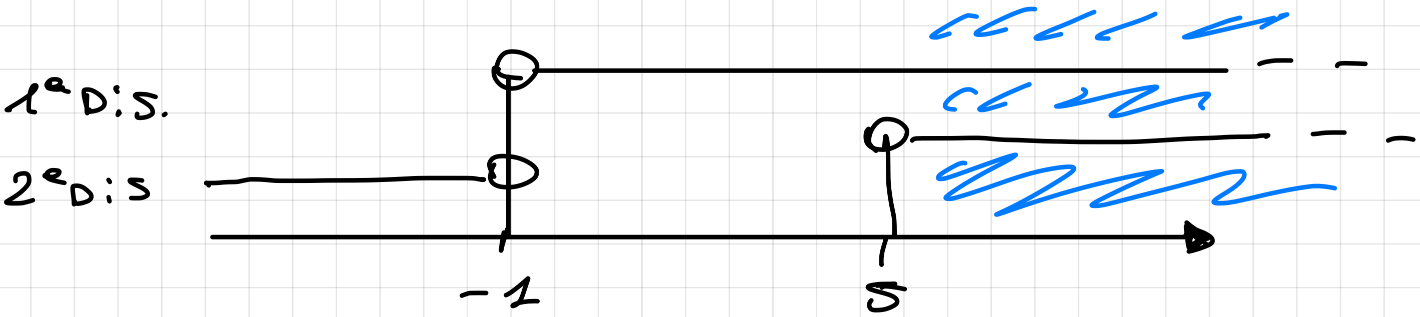
$$\begin{cases} 3x+3>0 \\ x^2-4x-5>0 \end{cases}$$

sistema di diseq. (vedi sù)

$3x+3>0 \Rightarrow x>-1$

$x^2-4x-5>0 \Rightarrow x<-1 \vee x>5$

Intersezione delle soluzioni:



C.E. $x>5$

PASSO 2) Porto il logaritmo tutti al primo membro

$$\ln(3x+3) - \ln(x^2-4x-5) \le 0$$

$$\ln\left(\frac{3x+3}{x^2-4x-5}\right) \le 0$$

PASSO 3) Risoluzione:

Metodo 1) Porto ambo i membri alla stessa base (possibilmente > 1)

$0 = \ln(1)$

$$\ln\left(\frac{3x+3}{x^2-4x-5}\right) \leq \ln(1)$$

$$\frac{3x+3}{x^2-4x-5} \leq 1$$

non cambia il segno della diseq. perché la base $e > 1$

Sono arrivato a una diseq. fratta che si risolve con il metodo di sopra

$$\frac{3x+3-x^2+4x+5}{x^2-4x-5} \leq 0$$

$$\frac{-x^2+7x+8}{x^2-4x-5} \leq 0$$

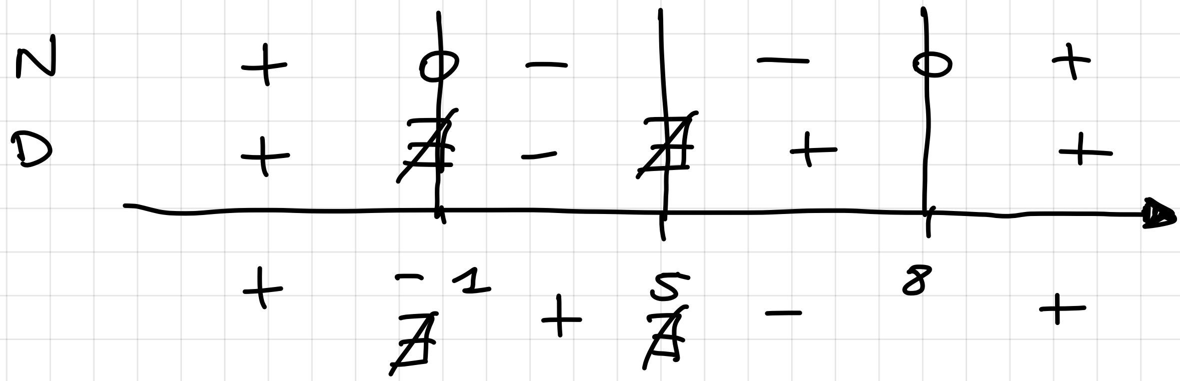
$$\frac{x^2-7x-8}{x^2-4x-5} \geq 0$$

Studio separatamente il segno del numeratore e del denominatore

$x^2 - 7x - 8 > 0 \Rightarrow x < -1 \vee x > 8$

$x^2 - 4x - 5 > 0 \Rightarrow x < -1 \vee x > 5$

Studio del segno complessivo



(Il segno della diseq. è ≥ 0)

Risposta: $x < -1 \vee -1 < x < 5$

$\vee \; x \geq 8$

PASSO 4) Discussione delle C.E.

C.E. $x > 5$

$x < -1$ non accettabile

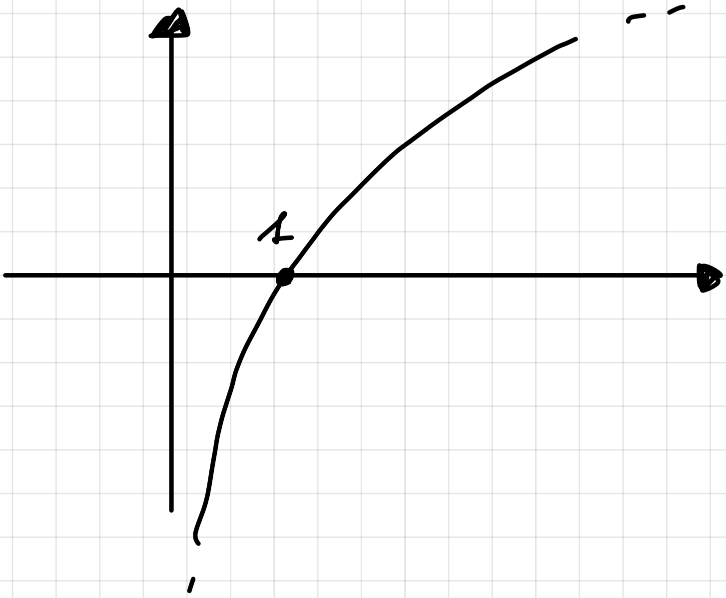
$-1 < x < 5$ non accettabile

$x \geq 8$ accettabile

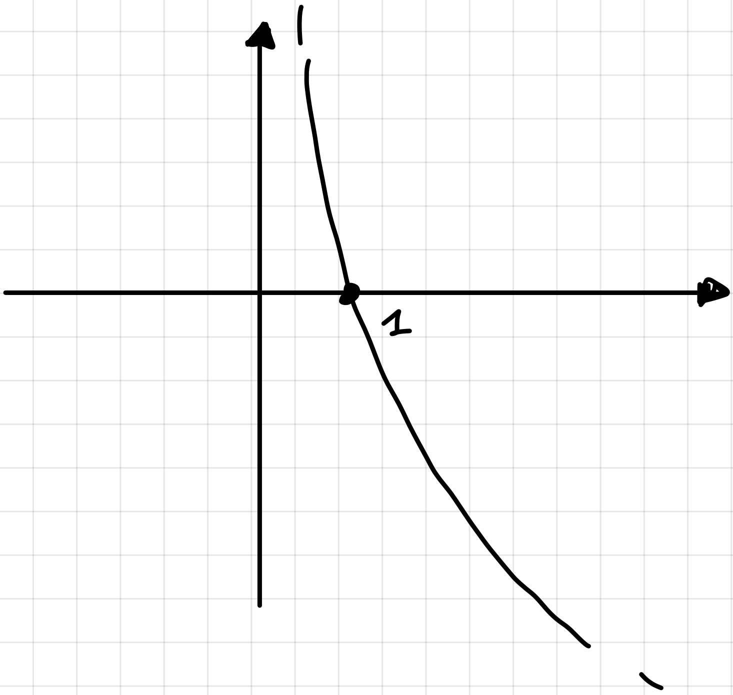
Quindi la soluzione finale è: $x \geq 8$

Metodo 2) Ricordarsi l'andamento della funzione logaritmica

$a > 1$



$0 < a < 1$



DISEQUAZIONI IRRAZIONALI CON INDICE PARI

4) $$1+\sqrt{2x^2+3x-2}>x$$

PASSO 0) Classificazione: Diseq. irrazionale

PASSO 1) CONDIZIONI D'ESISTENZA (RADICE PARI) ARGOMENTO ≥ 0

$2x^2+3x-2\geq 0$ Diseq II grado

Eq. associata

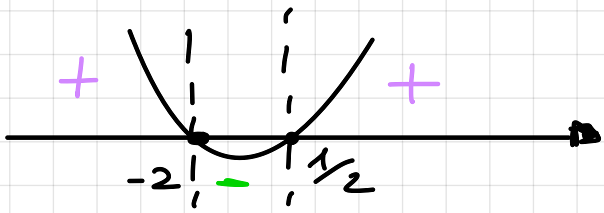
$2x^2+3x-2=0$ $\Delta = 9+16=25$

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm 5}{4}$$

$x_1=-2$ $x_2=\frac{1}{2}$

Disegno la parabola associata

$\Delta>0$, $a>0$



C.E. $x\leq -2 \quad \vee \quad x\geq \frac{1}{2}$

PASSO 2) Risoluzione

$$\sqrt{2x^2+3x-2} > x-1$$

Discuto i casi:

CASO 1: $x-1<0 \Rightarrow x<1$

in questo caso la radice è sempre maggiore del membro di destra

CASO 2: $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ \left[\sqrt{2x^2+3x-2}\right. > (x-1)^2 \end{cases}$

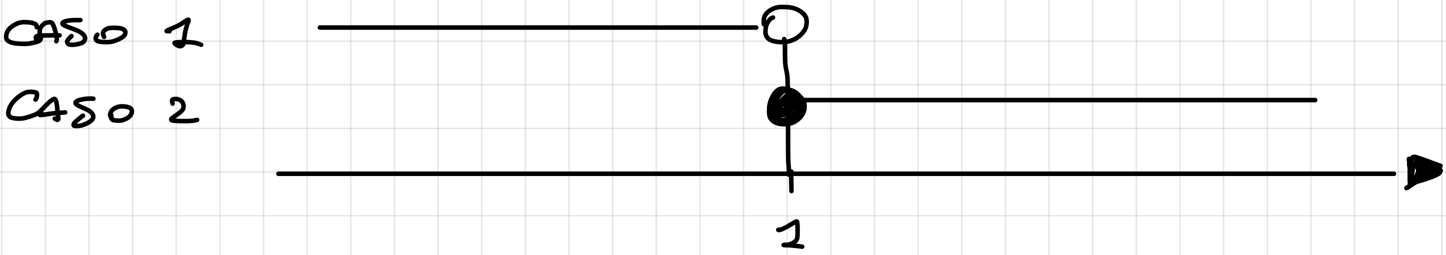
$$\begin{cases} x \geq 1 \\ 2x^2+3x-2 > x^2-2x+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x^2+5x-3 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x < \frac{-5-\sqrt{37}}{2} \quad \vee \quad x > \frac{-5+\sqrt{37}}{2} \end{cases}$$

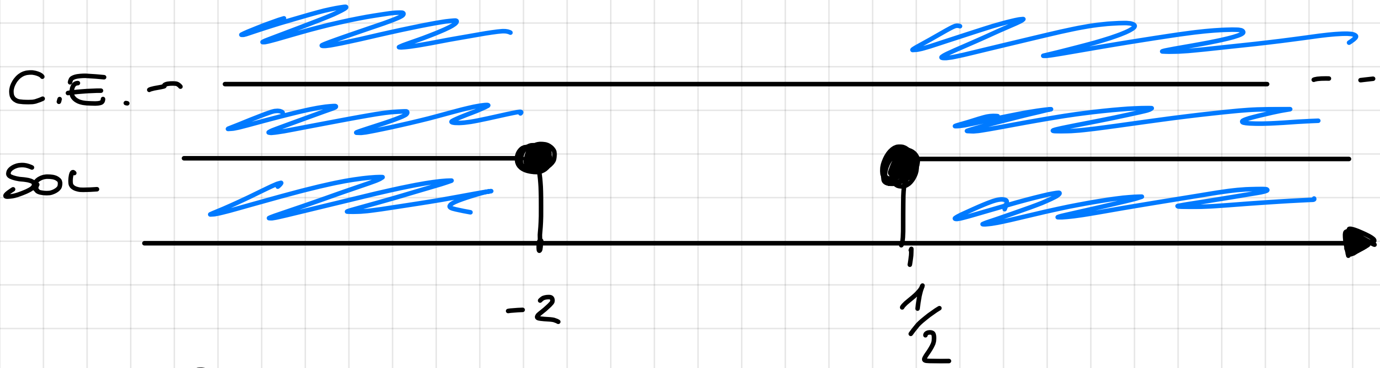
$x \geq 1$

PASSO 3) Unione delle soluzioni



$\Rightarrow$ soluzioni $\mathbb{R}$

PASSO 4) Confronto le soluzioni trovate con le condizioni di esistenza



PASSO 5) Risposta:

$x \leq -2 \quad \vee \quad x \geq \frac{1}{2}$

DISEQUAZIONI CON VALORE ASSOLUTO

5) $x^2 - 2|x| - 3 < 0$

Si distinguono i casi in cui:

CASO 1: l'argomento del modulo è positivo

CASO 2: " " " è negativo

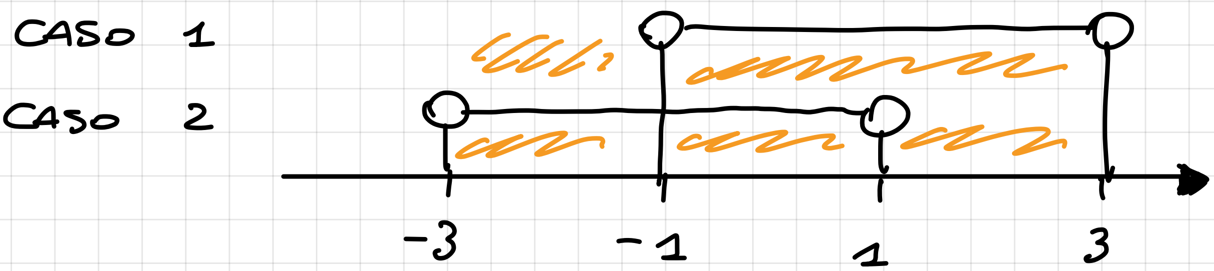
CASO 1 $\quad x^2 - 2x - 3 < 0$

$-1 < x < 3$

CASO 2 $\quad x^2 + 2x - 3 < 0$

$-3 < x < 1$

Poi unione delle soluzioni



Risposta $\quad -3 < x < 3$

6) $||x|-1|<2$

Diseq con valore assoluto

Discuto i casi

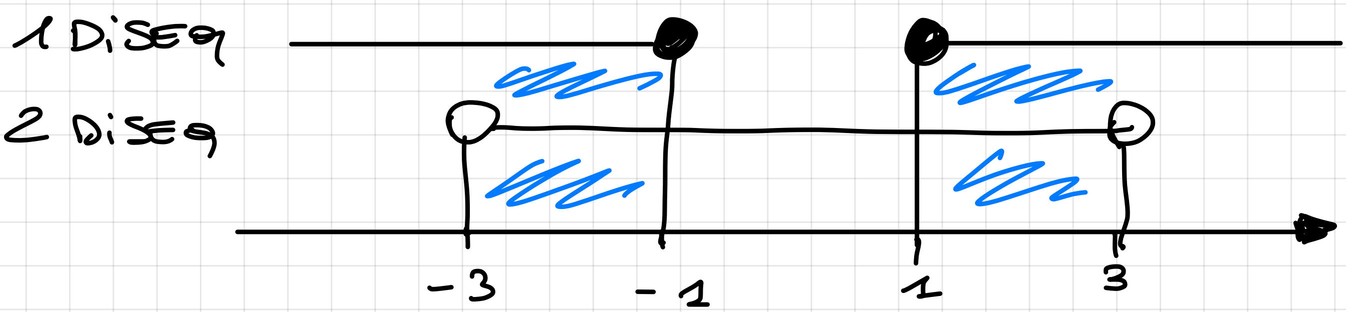
CASO 1: $\begin{cases} |x|-1 \geq 0 \\ |x|-1 < 2 \end{cases}$

CASO 2: $\begin{cases} |x|-1 < 0 \\ |x|-1 > -2 \end{cases}$

Risolvo i due casi separatamente

CASO 1: $\begin{cases} |x| \geq 1 \\ |x| < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ -3 < x < 3 \end{cases}$

Intersezione delle soluzioni

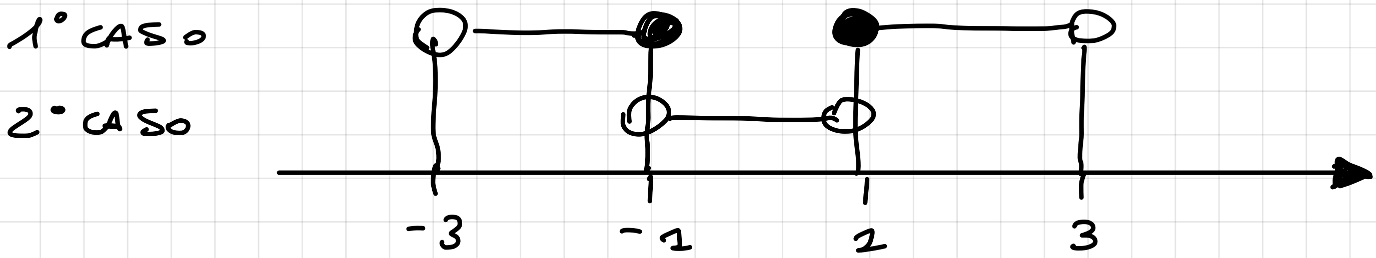


$-3 < x \leq -1 \quad \vee \quad 1 \leq x < 3$

CASO 2 $\begin{cases} |x| < 1 \\ |x| > -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$

$-1 < x < 1$

Unione delle soluzioni dei due casi



Risposta $-3 < x < 3$ $\quad (|x| < 3)$