Tutorato Analisi1 M-Z - Scheda 1

Pasquale Porcu

16 Ottobre 2023

Info generali

Indirizzo mail: `pasquale.porcu@phd.unipd.it`

Incontri: Ogni **lunedì, 14:30-16:30**, Aula **RL** Complesso Vallisneri (*Salvo diversa comunicazione*)

Esercizi dimostrativi

Esercizio 1 (proposto) Dimostra il seguente enunciato:

Se p è massimo dell'insieme A allora p è l'estremo superiore di A

Esercizio 2 Dimostra la seguente proprietà usando il principio d'induzione:

$$1^2 + 2^2 + \cdots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \forall n \geq 1, \quad n \in N$$

Esercizio 3 Dimostra la seguente proprietà usando il principio d'induzione:

$$2^{n-1} \leq n! \qquad \forall n \geq 1, \quad n \in N$$

Esercizio 4 Dimostra la seguente proprietà usando il principio d'induzione:

$$1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2 \qquad \forall n \geq 1, \quad n \in N$$

Esercizi sui numeri complessi

Esercizio 5 Risolvi la seguente equazione nell'insieme dei numeri complessi:

$$z^2 + 2z + 1 - i = 0$$

Esercizio 6 Risolvi la seguente equazione nell'insieme dei numeri complessi:

$$z|z| - 2z - i + 1 = 0$$

Esercizio 7 Risolvi la seguente equazione nell'insieme dei numeri complessi:

$$z + i\bar{z}^2 + 2i = 0$$

TUTORATO 1 - 16 OTTOBRE

Def (INSIEME LIMITATO SUPERIORMENTE)

Un insieme $A \subset \mathbb{R}$ è limitato superiormente se esiste almeno un M tale che

$$\forall a \in A \qquad a \leq M$$

(M è detto maggiorante)

Def (ESTREMO SUPERIORE)

Sia $A \subset \mathbb{R}$ limitato superiormente. Il minimo dei maggioranti di A si dice estremo superiore di A

Def (MASSIMO)

Sia $A \subset \mathbb{R}$ limitato superiormente. Sia $p \in \mathbb{R}$ tale che:

- p maggiorante di A
- $p \in A$

allora p si dice massimo dell'insieme

MASSIMO ED ESTREMO SUPERIORE

1) Dimostrare il seguente enunciato
"Se p è massimo di A allora p è l'estremo superiore di A"

Dimostrazione per assurdo.
Assumiamo come falsa la tesi:
"p non è estremo superiore di A"

questo vuol dire che:
"p non è il minimo dei maggioranti"

allora $\exists q$ t.c. $q < p$ e q maggiorante

Ma se q è maggiorante allora
$q \geq a \quad \forall a \in A$

siccome abbiamo scritto prima che $q < p$
allora p non può appartenere ad A.

ma p <u>deve</u> appartenere ad A perché massimo.

PRINCIPIO D'INDUZIONE

2) Dimostrare il seguente enunciato:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Si uso il principio d'induzione:

(PASSO BASE)

$$P_1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} \stackrel{?}{=} 1$$ si è vero ✓

(PASSO INDUTTIVO)

Considero P_n vera e dimostro che la formula è valida per $(n+1)$, cioè

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 \stackrel{?}{=}$$

$$= \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$\underline{1^2 + 2^2 + \dots + n^2} + (n+1)^2 =$$

$$= P_n + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= (n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right]$$

$$= \frac{(n+1)}{6}\left(2n^2 + n + 6n + 6\right)$$

$$= \frac{(n+1)}{6}\left(2n^2 + 7n + 6^{*}\right)$$

$$= \frac{(n+1)}{6}\, 2\,(n+2)\left(n+\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \qquad ✓$$

$$\square$$

* gli zeri del polinomio $2n^2+7n+6$ sono:

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm 1}{4} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -2 \\ x_2 = -\frac{3}{2} \end{array}$$

3) Dimostrare il seguente enunciato

$$2^{n-1} \leq n! \qquad \forall n \geq 1$$

(PASSO BASE)

$P_1 = 2^0 = 1 \overset{?}{\leq} 1 \Rightarrow 1 = 1$ quindi è vero

(PASSO INDUTTIVO)

$$P_{n+1} = 2^{(n-1)+1} = 2^n \overset{?}{\leq} (n+1)!$$

$2^n = 2^{n-1} \cdot 2$ $\qquad$ P_n è vero

$\leq n! \cdot 2$ $\qquad$ $2 \geq (n+1)$ per $n \geq 1$

$\leq n! \cdot (n+1)$

$= (n+1)!$

Quindi abbiamo concluso che:

$$2^n \leq (n+1)! \quad \checkmark$$

$\square$

4) Dimostrare il seguente enunciato:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = \sum_{i=1}^{n} (2 \cdot i - 1) = n^2$$

(PASSO BASE)

$$P_1 = 2 \cdot 1 - 1 \stackrel{?}{=} 1 \quad \text{sì è vero} \quad \checkmark$$

(PASSO INDUTTIVO)

$$P_{n+1} \stackrel{?}{=} (n+1)^2$$

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)}_{P_n} + [2(n+1) - 1] =$$

$$= P_n + 2(n+1) - 1$$

$$= n^2 + 2n + 2 - 1$$

$$= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \quad \checkmark$$

EQUAZIONI CON NUMERI COMPLESSI

5) $z^2 + 2z + 1 - i = 0$

Come eq. di II grado

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1-i)}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{1 - 1 + i}}{2} = -1 \pm \sqrt{i}$$

$$\sqrt{i} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

Quindi:

$$z_{1,2} = -1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

6) $z|z| - 2z - i + 1 = 0$

$$z\left(|z| - 2\right) + 1 - i = 0$$

$$z = \left(\frac{1}{|z|-2}\right)(-1+i) = A(-1+i)$$

con $$A = \frac{1}{|z|-2} \quad ☆$$

Allo stesso tempo:

$$z = A(-1+i) \implies |z| = A\sqrt{2} \quad \text{con } A \geq 0 \quad ☆☆$$

Sostituisco ☆☆ dentro ☆:

$$A = \frac{1}{A\sqrt{2}-2}$$

$$A\left(A\sqrt{2}-2\right) = 1$$

$$A^2\sqrt{2} - 2A - 1 = 0$$

ho appena ottenuto un' eq. di II grado nella variabile reale A

$$A_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4\sqrt{2}}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} = \frac{1 \pm \sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$$

Di queste, solo quella col segno +
è accettabile perché abbiamo imposto
prima $A \geq 0$

Quindi la soluzione della nostra eq.
iniziale è:

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \left(-1+i\right)$$

Osservazione: Avremmo potuto sostituire
$z = A(-1+i)$ direttamente dentro il
testo dell' eq. principale, ottenendo:

$$-A\cancel{(1-i)}\left(A\sqrt{2}-2\right)+1\,\cancel{(1-i)}=0$$

con $A \geq 0$
perché ho
sostituito
$|z| = A\sqrt{2}$

$$-A^2\sqrt{2}+2A+1=0$$

$$A^2\sqrt{2}-2A-1=0$$

È la stessa eq. di II grado nella variabile
reale A ottenuta sopra.

Morale: non c'è un modo standard
per risolvere queste eq., ma basta
ragionare!

7) $z + i\bar{z}^2 + 2i = 0$

$$\bar{z}^2 = (a - ib)^2 = a^2 - b^2 - 2aib$$

$$a + ib + i(a^2 - b^2) - 2aib + 2i = 0$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b + (\cancel{a^2} - b^2) - \cancel{2ab} + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b^2 - b - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 0 \\ b = +2 \end{cases}$$

Soluzioni: $-i$, $+2i$