Tutorato Analisi1 M-Z - Scheda 7

Pasquale Porcu

4 Dicembre 2023

Info generali

Indirizzo mail: `pasquale.porcu@phd.unipd.it`

Cartella github con materiale: `https://github.com/federicosimioni2?tab=repositories`

Incontri: Ogni **lunedì, 14:30-16:30**, Aula **2G** Complesso Fiore di Botta

Esercizi sulle derivate

Esercizio 1 Calcola la derivata della funzione:

$$f(x) = x^x$$

Esercizio 2 Calcola la derivata della funzione:

$$f(x) = \operatorname{arcsen}(x) + \sqrt{1 - x^2}$$

Esercizio 3 Determinare gli intervalli di convessità, di concevità e i punti di flesso della funzione:

$$f(x) = (x^2 + x)e^{-x}$$

Esercizio 4 Scrivere fino al termine x^5 incluso lo sviluppo (in $x_0 = 0$) della funzione:

$$f(x) = \sin^3 x$$

Esercizio 5 Calcolare il limite:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{5\operatorname{arctg}(x) + 32x \cdot \sin^3 x}{1 - \cos(2x) + \sin(4x)}$$

Studi di funzione

Tracciare il grafico delle seguenti funzioni

Esercizio 6

$$f(x) = \frac{x + 3}{x^2 - 5}$$

1) Calcola la derivata di: $f(x) = x^x$

- derivata di: $f(x)^{g(x)}$

$$D\left[f(x)^{g(x)}\right] = f(x)^{g(x)}\left[g'(x)\log(f(x)) + \frac{g(x)}{f(x)}\cdot f'(x)\right]$$

$$D(x) = x^x\left[D(x)\log(x) + \frac{x}{x}D(x)\right]$$

$$= x^x\left(\log(x) + 1\right)$$

2) Calcolare la derivata di:

$$f(x) = \text{arcsen}(x) + \sqrt{1-x^2}$$

- derivata della funzione inversa

$$D\left[f^{-1}(x)\right] = \frac{1}{f'(y)\Big|_{y=f^{-1}(x)}}$$

- derivata della funzione composta

$$D\left[f(g(x))\right] = f'(g(x))\, g'(x)$$

Faccio da parte la derivata della funzione arcsen

$$D[\text{arcsen}(x)] = \frac{1}{D[\text{sen}(y)]\Big|_{y=\text{arcsen}(x)}}$$

$$D[\text{sen}(y)] = \cos(y)$$

$$y = \text{arcsen}(x) \Rightarrow x = \text{sen}(y)$$

$$\cos^2(y) = 1 - \text{sen}^2(y)$$

$$= 1 - x^2$$

Quindi:

$$D[\text{arcsen}(x)] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Per il resto della derivata, procedo in questo modo:

$$D\left[\arcsen(x) + \sqrt{1-x^2}\right] =$$

$$= D\left[\arcsen(x)\right] + D\left[\sqrt{1-x^2}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + D\left[\sqrt{y}\Big|_{y=1-x^2}\right] \cdot D\left[1-x^2\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\cancel{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (-\cancel{2}x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

3) Determinare gli intervalli di convessità, di concavità e i punti di flesso delle seguenti funzioni.

$$(x^2+x)e^{-x}$$

Calcolo la derivata prima:

$$D[(x^2+x)e^{-x}] = (2x+1)e^{-x} + (x^2+x)(-e^{-x})$$

$$= (2x+1)e^{-x} - (x^2+x)e^{-x}$$

$$= (2x+1-x^2-x)e^{-x}$$

$$= (-x^2+x+1)e^{-x}$$

Calcolo la derivata seconda:

$$D[(-x^2+x+1)e^{-x}] = (-2x+1)e^{-x} - (-x^2+x+1)e^{-x}$$

$$= (-2x+\cancel{1}+x^2-x-\cancel{1})e^{-x}$$

$$= (x^2-3x)e^{-x}$$

Studio il segno della derivata seconda:

$$(x^2-3x)e^{-x} > 0$$

1°F $\quad x^2-3x>0$

l'eq. associata ha soluzioni: $x=0$, $x=3$

$x<0 \quad \vee \quad x>3$

$2°F \quad e^{-x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Quindi lo studio complessivo del segno restituisce:

$(x^2 - 3x)e^{-x} > 0$

$x < 0 \quad \vee \quad x > 3$

<u>Risposta:</u>

- La funzione è convessa in $]-\infty, 0[\cup]3, +\infty[$
- La funzione è concava in $]0, 3[$

4) Scrivere fino al termine x^5 incluso lo sviluppo (in $x_0 = 0$) della funzione:

$$\sin^3 x$$

Lo sviluppo in serie di Taylor (in $x = 0$) della funzione fino al termine x^5 si scrive in questo modo:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0)x^3 +$$
$$+ \frac{1}{4!} f^{IV}(0)x^4 + \frac{1}{5!} f^{V}(0)x^5 + o(x^5)$$

Calcolo i vari termini dello sviluppo

- $f(0) = 0$

- $f'(x) = 3\sin^2 x \cdot \cos x$
  $f'(0) = 0$

- $f''(x) = 3\left[2\sin x\cos^2 x + \sin^2 x \cdot (-\sin x)\right]$
  $= 6\sin x\cos^2 x - 3\sin^3 x$

  $f''(0) = 0$

- $f'''(x) = 3\left[2\cos^3 x - 4\sin^2 x\cos x - 3\sin^2 x\cos x\right]$
  $= 3\left[2\cos^3 x - 7\sin^2 x\cos x\right]$

  $f'''(0) = 6$

- $f^{IV}(x) = 3\left[6\cos^2 x(-\sin x) - 14 \sin x \cos^2 x + 7 \sin^3 x\right]$
  $= 3\left[-20\cos^2 x \sin x + 7 \sin^3 x\right]$

$f^{IV}(0) = 0$

- $f^{V}(x) = 3\left[+40 \cos x \sin^2 x - 20\cos^3 x + 21 \sin^2 x \cos x\right]$
  $= 3\left[61 \cos x \sin^2 x - 20 \cos^3 x\right]$

$f^{V}(0) = -60$

Allora lo sviluppo cercato diventa:

$$f(x) = \frac{1}{3!} f'''(x) x^3 + \frac{1}{5!} f^{V}(x) x^5 + o(x^5)$$

$$= \frac{1}{\cancel{6}} \cdot \cancel{6} x^3 + \frac{1}{\underset{2}{\cancel{120}}} (-\cancel{60}) x^5 + o(x^5)$$

$$= x^3 - \frac{1}{2} x^5 + o(x^5)$$

5) Calcolare il limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{5\,\mathrm{arctg}\,x + 32x \cdot \sin^3 x}{1 - \cos(2x) + \sin(4x)} = \frac{0}{0}$$

Usiamo de l'Hopital. Calcolo la derivata del numeratore e del denominatore

$$D\left[5\,\mathrm{arctg}\,x + 32x \sin^3 x\right] =$$

$$= 5 \frac{1}{1+x^2} + 32 \sin^3 x + 32x \cdot 3 \sin^2 x \cos(x)$$

$$D\left[1 - \cos(2x) + \sin(4x)\right] =$$

$$= +2 \sin(2x) + 4 \cos(4x)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{5}{1+x^2} + 32 \sin^3 x + 32x \cdot 3 \sin^2 x \cos x}{2 \sin(2x) + 4 \cos(4x)} =$$

$$= \frac{5}{4}$$

6) Tracciare il grafico della funzione:

$$\frac{x+3}{x^2-5}$$

0) CLASSIFICAZIONE: funzione fratta

1) C.E. $x^2-5 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm\sqrt{5}$

Dom $= \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm\sqrt{5}\}$

2) PARITÀ, PERIODICITÀ? NO

3) INTERSEZIONE CON GLI ASSI

Con asse $\hat{x}$: $\begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x+3}{x^2-5} = 0 \end{cases} \Rightarrow x+3=0$

$x = -3$

Con asse $\hat{y}$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{0+3}{0-5} = -\dfrac{3}{5} \end{cases}$

4) STUDIO DEL SEGNO

$$\frac{x+3}{x^2-5} > 0$$

N: $x+3>0 \Rightarrow x>-3$

D: $x^2-5>0 \Rightarrow x<-\sqrt{5} \vee x>\sqrt{5}$

Studio del segno complessivo:

	$-\infty$ … -3	-3 … $-\sqrt{5}$	$-\sqrt{5}$ … $\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$ … $+\infty$
N	$-$	$+$	$+$	$+$
D	$+$	$+$	$-$	$+$
	$-$	$+$	$-$	$+$

La funzione è positiva in $]-3, -\sqrt{5}[\, \cup \,]\sqrt{5}, +\infty[$

" è negativa in $]-\infty, -3[\, \cup \,]-\sqrt{5}, \sqrt{5}[$

5) LIMITE AI BORDI DEL DOMINIO

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x+3}{x^2-5} = 0$$

$y = 0$ è un asintoto orizzontale a $-\infty$

$$\lim_{x \to -\sqrt{5}^-} \frac{x+3}{x^2-5} \simeq \frac{-\sqrt{5}+3}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\sqrt{5}^+} \frac{x+3}{x^2-5} \simeq \frac{-\sqrt{5}+3}{0^-} = -\infty$$

$x = -\sqrt{5}$ è un asintoto verticale

$$\lim_{x \to \sqrt{5}^-} \frac{x+3}{x^2-5} \simeq \frac{\sqrt{5}+3}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to \sqrt{5}^+} \frac{x+3}{x^2-5} \simeq \frac{\sqrt{5}+3}{0^+} = +\infty$$

$x = \sqrt{5}$ è un asintoto verticale

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+3}{x^2-5} = 0$$

$y = 0$ è un asintoto orizzontale a $+\infty$

6) DERIVATA PRIMA E STUDIO DEL SEGNO

$$D\left[\frac{x+3}{x^2-5}\right] = \frac{(x^2-5) - 2x(x+3)}{(x^2-5)^2}$$

$$= \frac{x^2-5-2x^2-6x}{(x^2-5)^2}$$

$$= \frac{-x^2-6x-5}{(x^2-5)^2} = -\frac{x^2+6x+5}{(x^2-5)^2}$$

Studio il segno della derivata prima

$$-\frac{x^2+6x+5}{(x^2-5)^2} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+6x+5}{(x^2-5)^2} < 0$$

N: $x^2+6x+5 > 0$

l'eq. associata ha soluzioni: $x_1 = -1$ e $x_2 = -5$

allora $x < -5 \quad \vee \quad x > -1$

D: $(x^2-5)^2 > 0 \qquad \forall x \in Dom$

N	+	●	−		−	●	+		+
D	+		+	∄	+		+	∄	+
	$+$	-5	$-$	$-\sqrt{5}$	$-$	-1	$+$	$\sqrt{5}$	$+$

La funzione è crescente in $]-5, -\sqrt{5}[\cup]-\sqrt{5}, -1[$

″ è decrescente in $]-\infty, -5[\cup]-1, \sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}, +\infty[$

$x = -1$ e $x = -5$ sono dei punti stazionari

Per sapere se sono di massimo o di minimi calcolo la derivata seconda

7) DERIVATA SECONDA

$$f''(x) = D\left[-\frac{x^2+6x+5}{(x^2-5)^2}\right]$$

$$= -\frac{(2x+6)(x^2-5)^2 - 2(x^2-5)\cdot 2x\,(x^2+6x+5)}{(x^2-5)^4}$$

$$= -\frac{\cancel{(x^2-5)}}{(x^2-5)^{\cancel{4}\,3}}\left[(2x+6)(x^2-5) - 4x(x^2+6x+5)\right]$$

$$= -\frac{1}{(x^2-5)^3}\left[2x^3+6x^2-10x-30-4x^3-24x^2-20x\right]$$

$$= -\frac{1}{(x^2-5)^3}\left[-2x^3-18x^2-30x-30\right]$$

$$= \frac{2(x^3+9x^2+15x+15)}{(x^2-5)^3}$$

$$f''(-1) = \frac{2(-1+9-\cancel{15}+\cancel{15})}{(1-5)^3}$$

$$= -\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{8}}{\cancel{64}_{\cancel{8}\,4}} = -\frac{1}{4} < 0$$

$x = -1$ è di massimo locale

$$f''(-5) = \frac{2(-125+9\cdot 25+15\cdot(-5)+15)}{(25-5)^3}$$

$$= \frac{2\cdot 5(-25+45-15+3)}{20^3}$$

$$= \frac{2\cdot 5}{20^3}\cdot 8 > 0$$

$x = -5$ è di minimo locale