Università Degli Studi di Padova
Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"
Corsi di laurea in Fisica ed Astronomia

Tutor: Federico Simioni
Email: federico.simioni@studenti.unipd.it
Disciplina: Analisi Matematica 2

Incontro 1

1 Calcolare la somma delle seguenti serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \ln\left(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}\right)$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n-1}{n!}$$

2 Determinare il carattere della serie al variare di $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 \frac{|x|^n}{5^n}$$

3 Determinare il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{3n}{3n-1}\right)^{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3 + sin(n)}{2n^5 + ln(n) + n}$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{ln(n!)}$$

4 Provare che la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k!}{k^\alpha}$$

converge solo se $\alpha > 2$.

5 Al variare dei parametri $x, y > 0$ si studi il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left[\frac{n^y + 1}{n^{x+2}(\ln n)^2} + \left(\frac{x}{y}\right)^n\right]$$

6 Determinare il carattere della serie al variare di $\alpha > 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\frac{2}{3}} \left| sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n^\alpha}\right|$$

7 Determinare il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n} cos(\pi n)}{n^3+3}$$

$$\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n ln\left(\frac{n-2}{n+1}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} sin\left(\frac{n^2+n+1}{n+1}\pi\right)$$

8 Discutere al variare di $x \in \mathbb{R}$ il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+3}}{7^n \cdot arctan(n) \cdot ln(n^3+1)}$$

ES. 1

Per alcune tipologie di serie è possibile determinare la somma

1) SERIE GEOMETRICA: $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, $q \in (-1,1)$

2) SERIE TELESCOPICA: $\sum a_n$ con $a_n = b_{n+1} - b_n$

Per quanto riguarda le serie riportate nel foglio esercizi:

Ⓐ Scrivendo $a_k = \ln\left[\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}\right]$ vediamo come manipolarlo per ottenere qualcosa di più familiare

$$a_k = \underbrace{\ln(k+1)^2}_{2\cdot\ln(k+1)} - \ln(k) - \ln(k+2) = [\ln(k+1) - \ln(k)] + [\ln(k+1) - \ln(k+2)]$$

Denotando $b_k \equiv \ln(k) \Rightarrow a_k = \underbrace{[b_{k+1} - b_k]}_{①} + \underbrace{[b_{k+1} - b_{k+2}]}_{②} \Rightarrow$ Somma di serie telescopiche

Calcoliamo separatamente le somme parziali ① e ②

$$S_n^{①} = \cancel{b_3} - b_2 + \cancel{b_4} - \cancel{b_3} + \dots + b_{n+1} - \cancel{b_n} = -\ln(2) + \ln(n+1)$$

$$S_n^{②} = b_3 - \cancel{b_4} + \cancel{b_4} - b_5 + \dots + \cancel{b_{n+1}} - b_{n+2} = \ln(3) - \ln(n+2)$$

In totale avremo quindi: $S_n = S_n^{①} + S_n^{②} = \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{+\infty} \ln\left(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}\right) = \lim_{n\to+\infty} S_n = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

Ⓑ $a_n = \frac{n-1}{n!} = \frac{n}{n!} - \frac{1}{n!} = \underbrace{\frac{1}{(n-1)!}}_{b_{n-1}} - \underbrace{\frac{1}{n!}}_{b_n}$

$$\Rightarrow S_n = b_1 - \cancel{b_2} + \cancel{b_2} - b_3 + \dots + \cancel{b_{n-1}} - b_n = 1 - \frac{1}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Di conseguenza $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n-1}{n!} = \lim_{n\to+\infty} S_n = 1$

Vediamo ora alcuni criteri di convergenza, almeno per quanto riguarda le serie a termini positivi

$\sum_n a_n$, $\{a_n\}$ successione a termini positivi

$\Rightarrow$ condizione necessaria per la convergenza: $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

Per determinare il carattere di una serie possiamo sfruttare i seguenti criteri:

- CONFRONTO
- RADICE n-ESIMA
- RAPPORTO

$\Big\}$ + VERSIONI ASINTOTICHE

- CONDENSAZIONE DI CAUCHY (verificare che $\{a_n\}$ sia successione decrescente)

$\boxed{\text{ES. 2}}$

Verifichiamo per quali $x \in \mathbb{R}$ vale la condizione necessaria:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2|x|^n}{5^n} = \lim_{n\to+\infty} n^2\left(\frac{|x|}{5}\right)^n = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in (-5,5) \\ +\infty, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\Rightarrow \forall x \notin (-5,5)$ la serie diverge positivamente

Negli altri casi, per vedere se converge applichiamo il criterio del rapporto asintotico

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{|x|}{5} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{|x|}{5} < 1 \quad \forall x \in (-5,5)$$

$\Rightarrow$ La serie converge $\iff x \in (-5,5)$

$\boxed{\text{ES. 3}}$

Ⓐ Verifichiamo la condizione necessaria affinché converga

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3n}{3n-1}\right)^{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \Bigg[\underbrace{\left(\frac{1}{1+\frac{1}{(-3n)}}\right)^{-3n}}_{\frac{1}{e}}\Bigg]^{-\frac{n}{3}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[3]{e}\right)^n = +\infty$$

$\Rightarrow$ La serie data diverge positivamente

Ⓑ In questo caso, come prima cosa ci chiediamo se si tratta di una serie a termini positivi

$\Rightarrow$ Sì, $\forall n \geq 1$

Proviamo ad utilizzare il criterio del confronto asintotico con $\sum_n b_n = \sum \frac{1}{n^2}$

$$\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2} \Rightarrow \text{STESSO CARATTERE} \Rightarrow \text{La serie data converge}$$

c) Poiché $n! = n(n-1)\dots 1 < n^n \Rightarrow \log(n!) < n\log(n)$ (con $n \geq 2$)

Di conseguenza abbiamo che $\dfrac{1}{\log(n!)} > \dfrac{1}{n\log(n)}$

⚠

Ma dato che la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\log(n)}$ diverge, per confronto anche la serie data diverge positivamente.

⚠ Questa serie è un tipo di serie armonica, in cui è applicabile il criterio di condensazione.
Possiamo osservare infatti che si tratta di una serie a termini positivi, e la successione $\left\{\frac{1}{n\ln(n)}\right\}_n$ è decrescente

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)} \quad e \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cancel{2^n}}{\cancel{2^n}\ln(2^n)} \quad \text{hanno lo stesso carattere}$$

$\to 2^n a_{2^n}$

$$\downarrow$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(2)} = \frac{1}{\ln(2)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$$

ES. 4

Senza considerare l'approssimazione citata, possiamo sfruttare il confronto con altre due serie ricordando che, asintoticamente:
$$e^n < n! < n^n$$

Asintoticamente vale l'approssimazione di Stirling

$$\ln(n!) \simeq n\ln(n) - n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln(n!)}{n^\alpha} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^{\alpha-1}} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Ma in questo caso abbiamo che questa somma (sottrazione) di due serie converge solo se le due serie convergono separatamente $\Rightarrow$ Entrambe convergono se e solo se $\alpha - 1 > 1 \Rightarrow \alpha > 2$

ES. 5

Separiamo in due termini la serie considerata

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} \left[\frac{n^y+1}{n^{x+2}(\ln(n))^2}\right]}_{1} + \underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{x}{y}\right)^n}_{2}$$

Per quanto riguarda 1, consideriamo il criterio del confronto asintotico con:

$$\sum b_n = \sum_n \frac{1}{n^{x+2-y}(\ln(n))^2} \quad \text{(stesso carattere di 1)}$$

$\Rightarrow$ la serie converge $\Leftrightarrow$ $x + 2 - y \geq 1$

Se prendiamo invece 2, questa è una serie geometrica, e converge se $x < y$

Mettendo insieme le due condizioni, otteniamo convergenza se

$$x < y \leq x+1$$

$\boxed{ES. 6}$

La serie è a termini positivi per via del valore assoluto.
Sviluppando il seno:

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) \simeq \frac{1}{n} - \frac{1}{3!}\frac{1}{n^3} + \dots \quad (n \to +\infty)$$

$$\Rightarrow \left|\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n^\alpha}\right| \simeq \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{3!\,n^3} - \frac{1}{n^\alpha}\right|$$

Se $\underline{\underline{\alpha = 1}}$ $\Rightarrow a_n \simeq \frac{1}{3!}\frac{1}{n^{7/3}} \Rightarrow$ CONVERGE (serie armonica generalizzata)

Se $\underline{\underline{\alpha > 1}}$ $\Rightarrow a_n \simeq \frac{1}{n} n^{2/3} = \frac{1}{n^{1/3}} \Rightarrow$ DIVERGE

Se $\underline{\underline{\alpha < 1}}$ $\Rightarrow a_n \simeq \frac{1}{n^\alpha} n^{2/3} = \frac{1}{n^{\alpha - 2/3}} \Rightarrow$ DIVERGE perché $\alpha \in (0,1)$ e quindi $\alpha - \frac{2}{3} < 1$

$\boxed{ES. 7}$

Vediamo ora come studiare le serie a segno alterno: $\sum_n b_n$, dove $b_n = (-1)^n a_n$

$\{a_n\}$ successione a termini positivi

Per determinare la convergenza di solito possiamo considerare:

→ CRITERIO DI LEIBNIZ $\Rightarrow \begin{cases} a_n > 0 & \forall n \in \mathbb{N} \\ a_{n+1} \leq a_n & \forall n \in \mathbb{N} \\ \lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \end{cases}$ → Vale anche se le ipotesi sono soddisfatte definitivamente

→ CONVERGENZA ASSOLUTA (convergenza della serie dei moduli) $\Rightarrow$ convergenza semplice

↳ Studiare la convergenza assoluta equivale a studiare la convergenza di una serie a termini positivi, quindi si utilizzano gli stessi criteri

(A) Poiché $\cos(\pi n) = (-1)^n \Rightarrow b_n = (-1)^n \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{n^3+3}}_{a_n}$

Proviamo a studiare la convergenza assoluta: $\sum_n a_n$

Asintoticamente: $a_n \simeq \frac{\sqrt{n}}{n^3} = \frac{1}{n^{5/2}} \Rightarrow$ CONVERGE $\Rightarrow$ E se converge assolutamente, converge anche semplicemente

(B) Proviamo a riscrivere i termini della serie come:

$$b_n = \underbrace{(-1)^{n+1} \log\left(\frac{n+1}{n-2}\right)}_{(-1)^n \log\left(\left(\frac{n+1}{n-2}\right)^{-1}\right)} = (-1)^{n+1} \log\left(1+\frac{3}{n-2}\right)$$

Per quanto riguarda la convergenza assoluta, la serie non converge

$$\Rightarrow \frac{\log\left(1+\frac{3}{n-2}\right)}{\frac{3}{n-2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \Rightarrow \text{diverge per confronto asintotico con } \sum_n \frac{3}{n-2}$$

Per quanto riguarda la convergenza semplice

$$\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \log\left(\frac{n-2}{n+1}\right) = -\underbrace{\left[\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \log\left(\frac{n+1}{n-2}\right)\right]}_{\hookrightarrow \circledast}$$

Applichiamo Leibniz a $\circledast$ con $a_n = \log\left(\frac{n+1}{n-2}\right)$

Dato che a_n soddisfa le ipotesi $\Rightarrow$ la serie converge semplicemente

(C) Manipoliamo l'espressione per ricondurci a qualcosa di più facile da gestire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{n^2+n+1}{n+1}\pi\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{n(n+1)+1}{n+1}\pi\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(n\pi+\frac{\pi}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\cancel{\sin(n\pi)\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)} + \cos(n\pi)\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right) \equiv \sum_n (-1)^n a_n$$

$\Rightarrow$ Non converge assolutamente perché a_n è asintotico a $\frac{1}{n}$

$\Rightarrow$ Converge semplicemente perché a_n soddisfa le ipotesi del criterio di Leibniz

$\boxed{\text{ES. 8}}$

Procediamo considerando diversi casi possibili

1) $\underline{\underline{x=0}}$ $\Rightarrow$ Somma di zeri $\Rightarrow$ converge a zero

2) $\underline{\underline{x>0}}$ $\Rightarrow$ Serie a termini positivi

Asintoticamente avremo che: • $x^{n+3} \sim x^n$

- $\arctan(n) \sim \pi/2$
- $\log(n^3+1) \sim 3\log(n)$

$\Rightarrow$ Possiamo studiare $\sum a_n$ con $a_n = \dfrac{x^n}{7^n \log(n)}$

Sfruttiamo il criterio asintotico della radice n-esima:

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{x}{7}\left[\log(n)\right]^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{x}{7} \equiv \ell$$

- Se $\ell > 1 \Rightarrow$ Diverge positivamente (per $x>7$ quindi)
- Se $\ell < 1 \Rightarrow$ Converge $(x<7)$
- Se $\ell = 1 \Rightarrow x = 7$ e non possiamo concludere nulla

$\Rightarrow$ Tuttavia in questo caso $a_n = \dfrac{1}{\log(n)} \Rightarrow$ Diverge

$\Rightarrow$ Abbiamo convergenza per $0<x<7$

3) $\underline{\underline{x<0}}$ $\Rightarrow$ Scriviamo $x = (-1)|x|$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^3 |x|^n}{7^n \arctan(n)\log(n^3+1)}$$

Come prima cosa studiamo la convergenza assoluta

$\Rightarrow$ In questo caso vale lo stesso discorso visto per $x>0 \Rightarrow$ Per $|x|<7$ c'è convergenza

$$\Downarrow$$

$$-7<x<0$$

$\Rightarrow$ Dato che per $x>-7$ converge assolutamente, converge anche semplicemente

Se invece $x<-7 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow$ non si ha convergenza

Nel caso $x=-7$:

$$a_n = (-1)^n \frac{(-7)^3}{\log(n^3+1)\arctan(n)} = (-7)^3\left[(-1)^n \underbrace{\frac{1}{\log(n^3+1)\arctan(n)}}_{b_n}\right]$$

A questa serie possiamo applicare Leibniz perché: $\begin{cases} b_n > 0, & \forall n \geq 1 \\ b_{n+1} \leq b_n, & \forall n \geq 1 \\ \lim_{n\to+\infty} b_n = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ c'è convergenza semplice

Riassumendo:
- Convergenza assoluta per $x \in (-7, 7)$
- Convergenza semplice per $x \in [-7, 7)$
- In tutti gli altri casi non c'è convergenza