

Incontro 1

(1) Calcolare la somma delle seguenti serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \ln \left(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)} \right)$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n-1}{n!}$$

(2) Determinare il carattere della serie al variare di $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 \frac{|x|^n}{5^n}$$

(3) Determinare il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{3n}{3n-1} \right)^{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3 + \sin(n)}{2n^5 + \ln(n) + n}$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$$

(4) Provare che la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k!}{k^{\alpha}}$$

converge solo se $\alpha > 2$.

(5) Al variare dei parametri $x, y > 0$ si studi il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left[\frac{n^y + 1}{n^{x+2}(\ln n)^2} + \left(\frac{x}{y} \right)^n \right]$$

(6) Determinare il carattere della serie al variare di $\alpha > 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\frac{2}{3}} \left| \sin \left(\frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n^{\alpha}} \right|$$

⑦ Determinare il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n} \cos(\pi n)}{n^3 + 3}$$

$$\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \ln \left(\frac{n-2}{n+1} \right)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \left(\frac{n^2 + n + 1}{n+1} \pi \right)$$

⑧ Discutere al variare di $x \in \mathbb{R}$ il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+3}}{7^n \cdot \arctan(n) \cdot \ln(n^3 + 1)}$$

ES.1

Per alcune tipologie di serie è possibile determinare la somma

$$1) \text{ SERIE GEOMETRICA: } \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad q \in (-1, 1)$$

$$2) \text{ SERIE TELESCOPICA: } \sum a_n \text{ con } a_n = b_{n+1} - b_n$$

Per quanto riguarda le serie riportate nel foglio esercizi:

A) Dando $a_k = \ln\left[\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}\right]$ vediamo come unirsi per ottenere qualcosa di più familiare

$$a_k = \frac{\ln(k+1)^2 - \ln(k) - \ln(k+2)}{2 \cdot \ln(k+2)} = [\ln(k+1) - \ln(k)] + [\ln(k+2) - \ln(k+1)]$$

$$\text{Dovendo } b_k = \ln(k) \Rightarrow a_k = \underbrace{[b_{k+1} - b_k]}_{\textcircled{1}} + \underbrace{[b_{k+2} - b_{k+1}]}_{\textcircled{2}} \Rightarrow \text{Somma di serie telescopiche}$$

Calcoliamo separatamente le somme parziali ① e ②

$$S_n^{(1)} = b_3 - b_2 + b_4 - b_3 + \dots + b_{n+1} - b_n = -\ln(2) + \ln(n+1)$$

$$S_n^{(2)} = b_3 - b_4 + b_4 - b_3 + \dots + b_{n+1} - b_{n+2} = \ln(3) - \ln(n+2)$$

In totale avremo quindi: $S_n = S_n^{(1)} + S_n^{(2)} = \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{+\infty} \ln\left(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$B) \quad a_n = \frac{n-1}{n!} = \frac{n}{n!} - \frac{1}{n!} = \underbrace{\frac{1}{(n-1)!}}_{b_{n-1}} - \underbrace{\frac{1}{n!}}_{b_n}$$

$$\Rightarrow S_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_2 + \dots + b_{n-1} - b_n = 1 - \frac{1}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

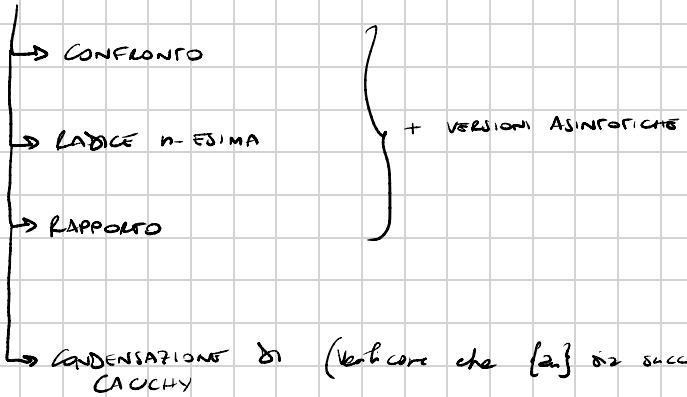
$$\text{Di conseguenza } \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n-1}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$$

Vediamo ora alcuni criteri di convergenza, almeno per quanto riguarda le serie a termini positivi

$$\sum a_n, \quad \{a_n\} \text{ successione a termini positivi}$$

\Rightarrow condizione necessaria per la convergenza: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Per determinare il carattere di una serie posiamo utilizzare i seguenti criteri:



ES. 2

Verifichiamo per quali $x \in \mathbb{R}$ vale la condizione necessaria:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 |x|^n}{s^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(\frac{|x|}{s}\right)^n = \begin{cases} 0, & x \in (-s, s) \\ +\infty, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\Rightarrow \forall x \notin (-s, s)$ la serie diverge positivamente

Negli altri casi, per vedere se converge applichiamo il criterio del rapporto asintotico

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{|x|}{s} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{|x|}{s} < 1 \quad \forall x \in (-s, s)$$

\Rightarrow la serie converge $\Leftrightarrow x \in (-s, s)$

ES. 3

A) Verifichiamo la condizione necessaria affinché converga

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3n}{3n-1}\right)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\underbrace{\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{(3n)}}\right)}_{\frac{1}{e}}^{-3n}\right]^{-\frac{n^2}{3}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{e}\right)^n = +\infty$$

\Rightarrow la serie data diverge positivamente

B) In questo caso, come prima cosa ci chiediamo se si tratta di una serie a termini positivi.

\Rightarrow Sì, $a_n \geq 1$

Primo ad utilizzare il criterio del confronto asintotico con $\sum b_n = \sum \frac{1}{n^2}$

$$\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{2} \Rightarrow \text{SMESSO CARATTERE} \Rightarrow \text{la serie data converge}$$

④ Poiché $n! = n(n-1)\dots 1 < n^n \Rightarrow \ln(n!) < n\ln(n)$ (per $n \geq 2$)

Di conseguenza abbiamo che $\frac{1}{\ln(n!)} > \frac{1}{n\ln(n)}$

⚠

Ma dato che la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$ diverge, per confronto anche la serie data diverge positivamente.

⚠ Questa serie è un tipo di serie armonica, in cui è applicabile il criterio di condensazione.

Possiamo osservare infatti che si tratta di una serie a termini positivi, e la successione $\left\{\frac{1}{n\ln(n)}\right\}_n$ è decrescente

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)} \text{ e } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^n}{2^n \ln(2^n)} \text{ hanno lo stesso carattere}$$

↓

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(2^n)} = \frac{1}{\ln(2)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$$

[E.S. 4]

Se si considera l'approssimazione di Stirling, possiamo sottrarre il confronto con altre due serie ricordando che, asintoticamente: $e^n < n! < n^n$

Asintoticamente vale l'approssimazione di Stirling

$$\ln(n!) \approx n\ln(n) - n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^\alpha} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^{\alpha-1}} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Ma in questo caso abbiamo che questa somma (sottrazione) di due serie converge solo se le due serie convergono separatamente \Rightarrow Entrambe convergono se e solo se $\alpha-1 > 1 \Rightarrow \alpha > 2$

[E.S. 5]

Separiamo in due termini la serie considerata

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{n^x + 1}{n^{x+2} (\ln(n))^2} \right]}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{x}{y} \right)^n}_{\textcircled{2}}$$

Per quanto riguarda ①, consideriamo il criterio del confronto asintotico con:

$$\sum_n b_n = \sum_n \frac{1}{n^{x+2-y} (\ln(n))^2} \quad (\text{stesso carattere di ①})$$

$$\Rightarrow \text{La serie converge} \Leftrightarrow x+2-y \geq 1$$

Se prendiamo invece ②, questo è una serie geometrica, e converge se $x < y$

Mettendo insieme le due condizioni, otteniamo convergenza se

$$x < y \leq x+1$$

[ES 6]

Le serie è a termini positivi per via del valore assoluto.

Svolgendo il seno:

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) \approx \frac{1}{n} - \frac{1}{3!} \frac{1}{n^3} + \dots \quad (n \rightarrow +\infty)$$

$$\Rightarrow \left| \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right| \approx \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{3!n^3} - \frac{1}{n} \right|$$

Se $\underline{x=1} \Rightarrow a_n \approx \frac{1}{3!} \frac{1}{n^{2/3}} \Rightarrow$ CONVERGE (serie armonica generalizzata)

Se $\underline{x>1} \Rightarrow a_n \approx \frac{1}{n} n^{2/3} = \frac{1}{n^{1/3}} \Rightarrow$ DIVERGE

Se $\underline{x<1} \Rightarrow a_n \approx \frac{1}{n^\alpha} n^{2/3} = \frac{1}{n^{\alpha-2/3}} \Rightarrow$ DIVERGE poiché $\alpha \in (0,1)$ e quindi $\alpha - \frac{2}{3} < 1$

[ES 7]

Vediamo ora come studiare le serie a segno alternato: $\sum_n b_n$, dove $b_n = (-1)^n a_n$

{ a_n } successione a termini positivi

Per determinare la convergenza di solito possiamo considerare:

$$\rightarrow$$
 Criterio di LEIBNIZ $\Rightarrow \begin{cases} a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Vale anche se le ipotesi sono} \\ \text{soddisfatte definitivamente} \end{array}$

\rightarrow CONVERGENZA ASSOLUTA (convergenza della serie dei moduli) \Rightarrow convergenza semplice

Lo studio di convergenza assoluta equivale a studiare la convergenza di una serie a termini positivi, quindi si ottiene gli stessi criteri.

(A) Poiché $\cos(\pi n) = (-1)^n \Rightarrow b_n = (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^3+3} \rightarrow a_n$

Provo a studiare la convergenza assoluta: $\sum_n a_n$

Antotomicamente: $a_n \approx \frac{\sqrt{n}}{n^3} = \frac{1}{n^{5/2}} \Rightarrow$ CONVERGE \Rightarrow E si converge assolutamente, converge anche semplicemente

B) Proviamo a ricavare i termini della serie come:

$$b_n = \underbrace{(-1)^{n+1} \ln\left(\frac{n+1}{n-2}\right)}_{= (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{3}{n-2}\right)} \rightarrow (-1)^n \ln\left(\left(\frac{n+1}{n-2}\right)^{-1}\right)$$

Po quanto riguarda la convergenza assoluta, la serie non converge.

$$\Rightarrow \frac{\ln\left(1 + \frac{3}{n-2}\right)}{\frac{3}{n-2}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1 \Rightarrow \text{Diverge per confronto asintotico con } \sum_n \frac{3}{n-2}$$

Po quanto riguarda la convergenza semplice

$$\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(\frac{n-2}{n+1}\right) = - \underbrace{\left[\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n-2}\right) \right]}_{\hookrightarrow \textcircled{*}}$$

Applichiamo Leibniz a $\textcircled{*}$ con $a_n = \ln\left(\frac{n+1}{n-2}\right)$

Dato che a_n soddisfa le ipotesi \Rightarrow la serie converge semplicemente.

C) Moltiplichiamo l'espressione per ricavare a qualcosa di più facile da gestire

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{n^2+n+1}{n+1}\pi\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{n(n+1)+1}{n+1}\pi\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\sin(n\pi) \cancel{\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)} + \cos(n\pi) \sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right) \right] \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right) = \sum_n (-1)^n a_n \end{aligned}$$

\Rightarrow Non converge assolutamente perché a_n è asintotica a $\frac{1}{n}$

\Rightarrow Converge semplicemente perché a_n soddisfa le ipotesi del criterio di Leibniz.

ES. 8

Proviamo considerando diversi casi possibili:

1) $x=0$ \Rightarrow Somma di zeri \Rightarrow converge a zero

2) $x>0$ \Rightarrow Serie \Rightarrow termini positivi

Asintoticamente avremo che: $\bullet x^{n+3} \sim x^n$

- $\arctan(n) \sim \pi/2$
- $\ln(n^3+1) \sim 3\ln(n)$

$$\Rightarrow \text{Possiamo studiare } \sum a_n \text{ con } a_n = \frac{x}{7^n \ln(n)}$$

Studiamo il criterio sintetico della radice n-esima:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{x}{7^n \ln(n)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt[7]{x} \equiv l$$

• Se $l > 1 \Rightarrow$ Diverge positivamente ($\forall x > 7$ grandi)

• Se $l < 1 \Rightarrow$ Converge ($x < 7$)

• Se $l = 1 \Rightarrow x = 7$ e non possiamo concludere nulla

\Rightarrow Fattoris in questo caso $a_n = \frac{1}{\ln(n)} \Rightarrow$ Diverge

\Rightarrow Abbiamo convergenza per $0 < x < 7$

3) $x < 0$ \Rightarrow Scriviamo $x = (-1)|x|$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n / |x|^n}{7^n \arctan(n) \ln(n^3+1)}$$

Come primo caso studiamo la convergenza assoluta

\Rightarrow In questo caso vale lo stesso discorso visto per $x > 0 \Rightarrow$ Po $|x| < 7$ c'è convergenza

$$\Downarrow \\ -7 < x < 0$$

\Rightarrow Dato che per $x > -7$ converge assolutamente, converge anche semplicemente

Se invece $x < -7 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow$ non è h2 convergenza

Nel caso $x = -7$:

$$a_n = (-1)^n \frac{(-7)^n}{\ln(n^3+1) \arctan(n)} = (-7)^n \underbrace{\left((-1)^n \frac{1}{\ln(n^3+1) \arctan(n)} \right)}_{b_n}$$

A questa serie possiamo applicare leibniz perché:

$$\begin{cases} b_n > 0, \quad \forall n \geq 1 \\ b_{n+1} \leq b_n, \quad \forall n \geq 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{c'è convergenza semplice}$$

- Riassumendo:
- Convergenza assoluta per $x \in (-7, 7)$
 - Convergenza semplice per $x \in [-7, 7]$
 - In tutti gli altri casi non c'è convergenza