TUTORATO 18/01/2023

$y''(x) - 6y'(x) = e^{7x} \Rightarrow$ EQUAZIONE DEL SECONDO ORDINE (non omogenea)

L'equazione omogenea associata è: $y'' - 6y' = 0$

Equazione caratteristica: $z^2 - 6z = 0 \Leftrightarrow z(z-6) = 0 \Leftrightarrow z = 0,\ z = 6$

Soluzione dell'omogenea associata: $y_0(x) = a e^{0 \cdot x} + b e^{6x} = a + b e^{6x}$

$y'' - 6y' = e^{7x} \Rightarrow g(x) = H(x) e^{\beta x} = H(x) e^{7x}$ ove $H(x) = 1 \Rightarrow \deg H = 0$

$\beta = 7 \Rightarrow$ non coincide con le soluzioni dell'eq. caratteristica

Soluzione particolare: $y_P(x) = c e^{7x}$ ove c ha lo stesso grado di $H(x)$

$\Rightarrow y_P'(x) = 7c e^{7x}$

$\Rightarrow y_P''(x) = 49 c e^{7x}$

Sostituisco nell'equazione: $49 c e^{7x} - 42 c e^{7x} = e^{7x}$

$7 c e^{7x} = e^{7x} \Leftrightarrow c = 1/7$

$\Rightarrow$ Soluzione particolare: $y_P(x) = \frac{1}{7} e^{7x}$

Soluzione equazione non omogenea: $\boxed{y(x) = y_P(x) + y_0(x) = a + b e^{6x} + \frac{1}{7} e^{7x}}$

$y''(x) - y(x) = -2x - 4$

L'equazione omogenea associata è: $y'' - y = 0$

Equazione caratteristica: $z^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow z = \pm 1$

Soluzione dell'omogenea associata: $y_0(x) = a e^{x} + b e^{-x}$

Cerchiamo una sol. particolare tramite il METODO DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI, ovvero cerchiamo una soluzione del tipo:

$y_P(x) = a(x) e^{x} + b(x) e^{-x}$

$\Rightarrow y_P'(x) = \underbrace{a'(x) e^{x} + b'(x) e^{-x}}_{\text{impongo che sia } = 0} + a(x) e^{x} - b(x) e^{-x}$

$\Rightarrow y_P''(x) = \left(a(x) e^{x} - b(x) e^{-x}\right)' = a'(x) e^{x} - b'(x) e^{-x} + \underbrace{a e^{x} + b e^{-x}}_{y_P(x)}$

Dobbiamo quindi risolvere il sistema:

$$\begin{cases} a'(x)\,e^{x} + b'(x)\,e^{-x} = 0 & (1) \\ a'(x)\,e^{x} - b'(x)\,e^{-x} = -2x-4 & (2) \end{cases}$$

Sommando le due equazioni: $2a'(x)e^{x} = -2x-4 \iff a'(x)e^{x} = -x-2$
$\iff a'(x) = -(x+2)e^{-x}$

Sostituendo nell'equazione (1): $-x-2+b'(x)e^{-x}=0 \iff b'(x)e^{-x} = x+2$
$\iff b'(x) = (x+2)e^{x}$

$\Rightarrow a(x) = \int a'(x)\,dx = \int -(x+2)e^{-x}\,dx = (x+2)e^{-x} - \int e^{-x}\,dx = (x+3)e^{-x}$

Parti: $u(x) = -e^{-x} \Rightarrow U(x) = e^{-x}$
$v(x) = x+2 \Rightarrow v'(x) = 1$

$\Rightarrow b(x) = \int b'(x)\,dx = \int (x+2)e^{x}\,dx = (x+2)e^{x} - \int e^{x}\,dx = (x+1)e^{x}$

Soluzione particolare: $y_P(x) = (x+3)e^{-x}e^{x} + (x+1)e^{-x}e^{x} = 2x+4$

$\Rightarrow$ Soluzione equazione non omogenea: $\boxed{y(x) = y_0(x) + y_P(x) = ae^{x} + be^{-x} + 2x + 4}$

$y''(t) + y'(t) = t+2-3e^{2t}$

L'equazione omogenea associata è: $z^2+z=0 \iff z(z+1)=0 \iff z=0,\ z=-1$

Soluzione equazione omogenea: $y_0(t) = a\,e^{0\cdot t} + b\,e^{-1\cdot t} = a + be^{-t}$

Soluzione particolare = somma di soluzioni particolari di:

1) $y''(t)+y'(t) = t+2$

2) $y''(t)+y'(t) = -3e^{2t}$

1) $y''+y' = t+2 \Rightarrow g(t) = H(t)e^{\lambda t}$ ove $H(t) = t+2 \Rightarrow \deg H(t) = 1$
$\lambda = 0 \Rightarrow$ radice dell'eq. caratteristica

Sol. particolare: $y_{P_1}(t) = t\,e^{\lambda t}\,\overline{H}(t) = t(At+B) = At^2+Bt$ ove $\deg \overline{H}(t) = \deg H(t) = 1$, $\lambda = 0$

$\Rightarrow y'_{P_1}(t) = 2At + B$

$\Rightarrow y''_{P_1}(t) = 2A$

Sostituisco nell'equazione: $2A + 2At + B \doteq t+2 \Rightarrow \begin{cases} 2A = 1 \Rightarrow A = 1/2 \\ 2A + B = 2 \Rightarrow B = 1 \end{cases}$

Sol. particolare: $y_{P_1}(t) = \frac{1}{2}t^2 + t$

2) $y'' + y' = -3e^{2t} \Rightarrow g(t) = -3e^{2t} = H(t)e^{\lambda t}$ ove $H(t) = -3 \Rightarrow \deg H = 0$
$\lambda = 2 \Rightarrow$ no soluzione eq. caratteristica

Sol. particolare: $y_{P_2}(t) = Ke^{2t}$ con $\deg K = 0$

$\Rightarrow y'_{P_2}(t) = 2Ke^{2t}$

$\Rightarrow y''_{P_2}(t) = 4Ke^{2t}$

Sostituisco nell'equazione: $y''_{P_2}(t) + y'_{P_2}(t) = 6Ke^{2t} = -3e^{2t} \Leftrightarrow 6K = -3 \Leftrightarrow K = -1/2$

Sol. particolare: $y_{P_2}(t) = -\frac{1}{2}e^{2t}$

$\Rightarrow$ Soluzione eq. non omogenea: $\boxed{y(t) = y_0(t) + y_{P_1}(t) + y_{P_2}(t) = a + be^{-t} + \frac{1}{2}t^2 + t - \frac{1}{2}e^{2t}}$

$f(x) = |x| e^{\arctan(-3/x)}$

- Dominio: $D = \mathbb{R} - \{0\}$
- Limiti/asintoti:

$\lim_{x \to \pm\infty} \underbrace{|x|}_{+\infty} \underbrace{e^{\arctan(-3/x)}}_{e^0 = 1} = +\infty \Rightarrow$ no asintoti orizzontali

Asintoti obliqui?

$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{|x| e^{\arctan(-3/x)}}{x} = (\pm 1) \cdot 1 = \pm 1$

$q_+ = \lim_{x \to +\infty} xe^{\arctan(-3/x)} - x = \lim_{x \to +\infty} x\left(e^{\arctan(-3/x)} - 1\right) = *$

$$* = \lim_{x\to+\infty} x\left(\cancel{1}+\arctan\left(-\tfrac{3}{x}\right)-\cancel{1}+o\left(\arctan\left(-\tfrac{3}{x}\right)\right)\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(-\frac{3}{x}+o\left(-\frac{3}{x}\right)\right) = -3$$

$$q_- = \lim_{x\to-\infty} -x\,e^{\arctan(-3/x)}+x = \lim_{x\to-\infty} -x\left(e^{\arctan(-3/x)}-1\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} -\cancel{x}\left(-\frac{3}{\cancel{x}}+o\left(-\frac{3}{x}\right)\right) = +3$$

$y = x-3 \Rightarrow$ as. obliquo per $x \to +\infty$

$y = -x+3 \Rightarrow$ as. obliquo per $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to0^\pm} \underbrace{|x|}_{0}\,\underbrace{e^{\arctan(-3/x)}}_{e^{\pm\pi/2}} = 0 \Rightarrow \text{NO AS. VERTICALI}$$

• Derivata / segno derivata:

$f(x)$ è derivabile in $\mathbb{R}-\{0\}$

$$f'(x) = \mathrm{sgn}(x)\,e^{\arctan(-3/x)} + \frac{|x|}{1+9/x^2}\,\frac{3}{x^2}\,e^{\arctan(-3/x)}$$

$$= \mathrm{sgn}(x)\,e^{\arctan(-3/x)} + x\,\mathrm{sgn}(x)\,\frac{x^2}{x^2+9}\,\frac{3}{x^2}\,e$$

$$= \mathrm{sgn}(x)\,e^{\arctan(-3/x)}\left(1+\frac{3x}{x^2+9}\right) = \mathrm{sgn}(x)\,\underbrace{e^{\arctan(-3/x)}}_{>0}\,\underbrace{\left(\frac{x^2+3x+9}{x^2+9}\right)}_{>0}$$

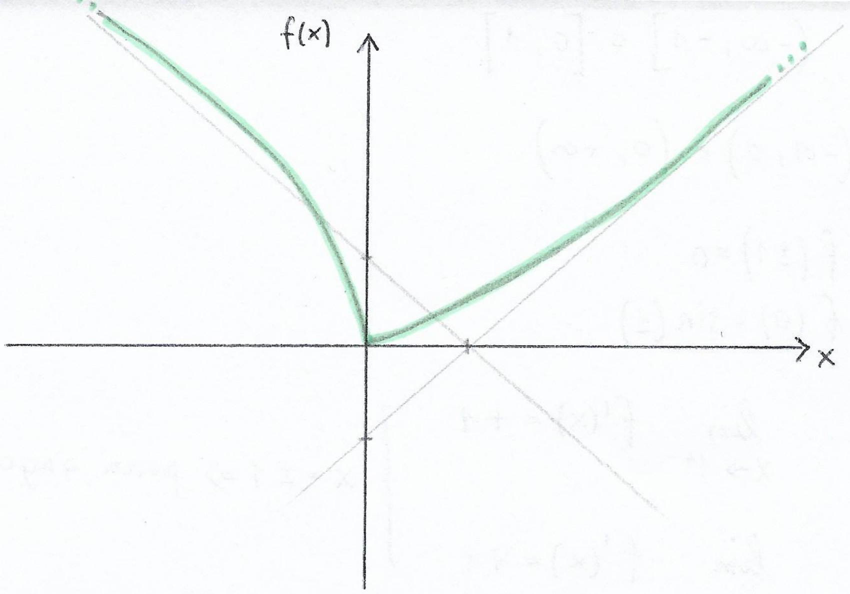
Studio il segno della derivata:

$\mathrm{sgn}(x)$: $-$ per $x<0$ ($\searrow$), $+$ per $x>0$ ($\nearrow$)

$$f(x) \begin{cases} \text{decresce in } (-\infty;0) \\ \text{cresce in } (0;+\infty) \end{cases}$$

$$\lim_{x\to0^+} f'(x) = \lim_{x\to0^+} \underbrace{e^{\arctan(-3/x)}}_{e^{-\pi/2}}\,\underbrace{\left(\frac{x^2+3x+9}{x^2+9}\right)}_{1} = e^{-\pi/2}$$

$$\lim_{x\to0^-} f'(x) = \lim_{x\to0^-} -\underbrace{e^{\arctan(-3/x)}}_{e^{\pi/2}}\,\underbrace{\left(\frac{x^2+3x+9}{x^2+9}\right)}_{1} = -e^{\pi/2}$$



$$f(x) = \text{sen}\left(\frac{|x^2-1|}{x^2+1}\right)$$

- Dominio: $D = \mathbb{R}$

  $f(x)$ e' pari perche' $f(x) = f(-x)$

- Limiti/asintoti:

$$\lim_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to+\infty} \sin\left[\frac{\cancel{x^2}(1-1/x^2)}{\cancel{x^2}(1+1/x^2)}\right] = \sin(1)$$

$y = \sin(1) \Rightarrow$ ASINTOTO ORIZZONTALE

- Derivata/segno derivata:

$f(x)$ e' derivabile nei punti in cui $x^2-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1$ $\quad (x^2-1)\,\text{sgn}(x^2-1)$

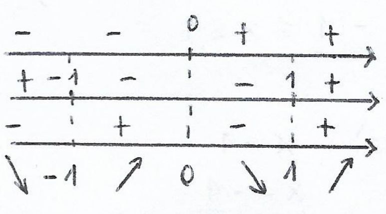
Se $x \neq \pm 1$:
$$f'(x) = \cos\left(\frac{|x^2-1|}{x^2+1}\right)\frac{(x^2+1)[2x\,\text{sgn}(x^2-1)] - |x^2-1|\,2x}{(1+x^2)^2}$$
$$= \cos\left(\frac{|x^2-1|}{x^2+1}\right) 2x\,\text{sgn}(x^2-1)\,\frac{1+\cancel{x^2}-\cancel{x^2}+1}{(1+x^2)^2}$$
$$= \underbrace{\cos\left(\frac{|x^2-1|}{x^2+1}\right)}_{\geq 0}\ \underbrace{\frac{4}{(1+x^2)^2}}_{>0}\ x\,\text{sgn}(x^2-1)$$

perche' $0 \leq \dfrac{|x^2-1|}{1+x^2} \leq 1$

$f'(x) \geq 0 \iff x\,\text{sgn}(x^2-1) \geq 0$

$x \geq 0$

$x^2-1 > 0$

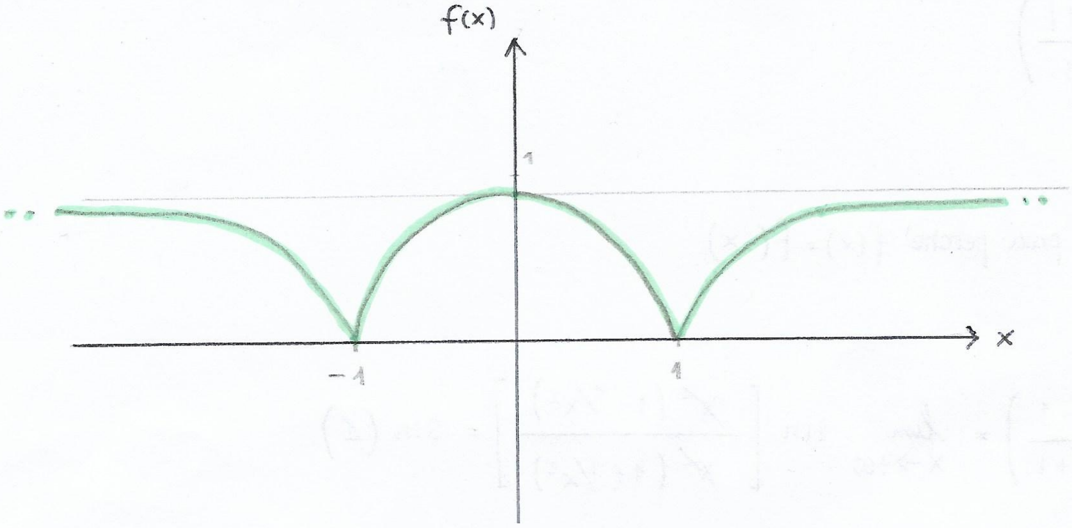


$f(x)$ $\begin{cases} \text{decresce in } (-\infty; -1] \text{ e } [0; 1] \\ \text{cresce in } (-1, 0) \text{ e } (0, +\infty) \end{cases}$

$x = \pm 1 \Rightarrow$ minimi $\Rightarrow f(\pm 1) = 0$

$x = 0 \Rightarrow$ massimo $\Rightarrow f(0) = \sin(1)$

$$\left.\begin{array}{ll} \lim_{x \to 1^-} f'(x) = -1 & \lim_{x \to 1^+} f'(x) = +1 \\ \lim_{x \to -1^+} f'(x) = -1 & \lim_{x \to -1^-} f'(x) = +1 \end{array}\right\} x = \pm 1 \Rightarrow \text{punti angolosi}$$



$$f(x) = e^{-|x^2 - 1|}$$

- Dominio: $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{-|x^2-1|} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{-|x^2-1|} = 0$$

- Asintoti: $y = 0 \Rightarrow$ asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$

  No asintoti verticali (funzione continua su $\mathbb{R}$)

- Derivata:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2+1} & \text{se } x < -1 \text{ e } x > 1 \\ e^{x^2-1} & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -2x\, e^{-x^2+1} & \text{se } x < -1 \text{ e } x > 1 \\ 2x\, e^{x^2-1} & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Punti di non derivabilita': $x = 1$

$x = -1$

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} \left(-2x e^{-x^2+1}\right) = -2$$

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} 2x e^{x^2-1} = 2$$

$$\lim_{x \to -1^-} f'(x) = 2$$

$$\lim_{x \to -1^+} f'(x) = -2$$

• Segno derivata:

Per $x>1$ e $x<-1$ si ha $f'(x) = -2x \underbrace{e^{-x^2+1}}_{>0} > 0 \iff x<0$

Per $-1<x<1$ si ha $f'(x) = 2x \underbrace{e^{x^2-1}}_{>0} > 0 \iff x>0$

$$\begin{array}{ccccccc} + & & - & & + & & - \\ \nearrow & -1 & \searrow & 0 & \nearrow & 1 & \searrow \end{array}$$

$f(x)$ cresce in $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

$f(x)$ decresce in $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

$\left.\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right\}$ massimi $\qquad x=0 \Rightarrow$ minimo $\Rightarrow f(0) = 1/e$

$f(1) = f(-1) = 1$