TUTORATO 26 ottobre 2022

- es. 4 appello 19/01/2022

Determinare tutte le soluzioni complesse dell'equazione seguente:

$$\frac{z^3}{z^3+2} = 1 - \frac{i}{\sqrt{3}}$$

e poi disegnarle nel piano complesso.

$$\frac{z^3}{z^3+2} = 1 - \frac{i}{\sqrt{3}} \longrightarrow \cancel{z^3} = \cancel{z^3} + 2 - \frac{i}{\sqrt{3}}(z^3+2) \longrightarrow 2 = \frac{i}{\sqrt{3}}(z^3+2) \longrightarrow z^3 + 2 = \frac{2\sqrt{3}}{i} \cdot \frac{i}{i} = -2\sqrt{3}i$$

$$\longrightarrow z^3 = -2 - 2\sqrt{3}i = 4\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 4\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}\right) = 4e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

Pongo $z = re^{i\theta}$:

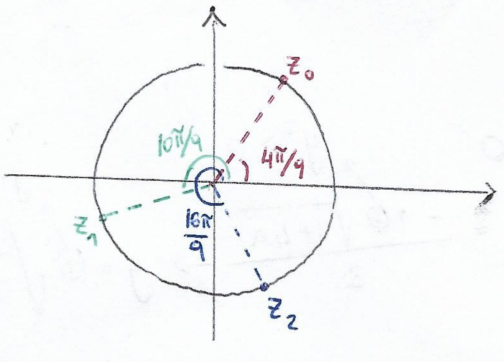
$$r^3 e^{i3\theta} = 4e^{i\,4\pi/3} \Rightarrow \begin{cases} r^3 = 4 \longrightarrow r = \sqrt[3]{4} \\ 3\theta = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \longrightarrow \theta = \frac{4\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi \end{cases}$$

All'interno di $[0, 2\pi[$ ho tre valori di θ:
- $K=0$: $\theta_0 = \frac{4\pi}{9}$
- $K=1$: $\theta_1 = \frac{4\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} = \frac{10}{9}\pi$
- $K=2$: $\theta_2 = \frac{4\pi}{9} + \frac{4\pi}{3} = \frac{16}{9}\pi$

Soluzioni:
- $K=0 \longrightarrow z_0 = \sqrt[3]{4}\, e^{i\,4\pi/9}$
- $K=1 \longrightarrow z_1 = \sqrt[3]{4}\, e^{i\,10\pi/9}$
- $K=2 \longrightarrow z_2 = \sqrt[3]{4}\, e^{i\,16\pi/9}$

$$z = \sqrt[3]{4}\, e^{i\left(\frac{4\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi\right)}, \quad K = 0,1,2$$

Graficamente:



- es. 4 appello 01/09/2022

$$\left(\frac{z}{i}+1\right)^4 = 16 \longrightarrow \left(\frac{z}{i}+1\right)^2 = \pm 4 \begin{cases} \left(\frac{z}{i}+1\right)^2 = +4 & (1) \\ \left(\frac{z}{i}+1\right)^2 = -4 & (2) \end{cases}$$

(1) $\left(\frac{z}{i}+1\right)^2 = 4 \longrightarrow \left(\frac{z+i}{i}\right)^2 = 4 \longrightarrow -(z+i)^2 = 4 \longrightarrow z^2 - 1 + 2iz = -4 \longrightarrow z^2 + 2iz + 3 = 0$

$\Delta = 4i^2 - 12 = -16 = 16i^2$ $\qquad z = \frac{-2i \pm 4i}{2} = \begin{cases} -3i \\ i \end{cases}$

② $\left(\frac{z}{i}+1\right)^2=-4 \longrightarrow \left(\frac{z+i}{i}\right)^2=-4 \longrightarrow \frac{(z+i)^2}{-1}=-4 \longrightarrow z^2-1+2iz=4$

$\longrightarrow z^2+2iz-5=0$

$\Delta = 4i^2+20=-4+20=+16 \qquad z=\frac{-2i\pm 4}{2} = \begin{cases} 2-i \\ -2-i \end{cases}$

Soluzioni: $i,\ -3i,\ 2-i,\ -2-i$

• $\boxed{\text{es. 1 quiz } 10/11/2021:}$

Si calcoli la soluzione $z \in \mathbb{C}$ con parti reali e immaginarie positive dell'equazione

$$\operatorname{Re}(z^2)+z^2=2+2i\sqrt{A}$$

Tale soluzione verifica: $|z|^2=\sqrt{1+4A}$

Pongo $z=x+iy$ con $x>0,\ y>0$.

In questo caso: $z^2=(x+iy)^2=x^2+i^2y^2+2ixy=x^2-y^2+i(2xy)$

$\operatorname{Re}(z^2)=x^2-y^2$

Sostituisco nell'equazione: $x^2-y^2+x^2-y^2+i(2xy)=2+2i\sqrt{A}$

$\cancel{2}x^2-\cancel{2}y^2+i(\cancel{2}xy)=\cancel{2}+\cancel{2}i\sqrt{A}$

$x^2-y^2+i(xy)=1+\sqrt{A}$

Devo risolvere: $\begin{cases} x^2-y^2=1 \rightarrow x=\sqrt{y^2+1} \quad (\text{prendo } + \text{ perche' } x>0) \\ xy=\sqrt{A} \end{cases}$

$\left(\sqrt{y^2+1}\right)y=\sqrt{A}$

$(y^2+1)y^2=A \rightarrow y^4+y^2-A=0$

$\Delta = 1+4A \qquad y^2=\frac{-1\oplus\sqrt{1+4A}}{2} \rightarrow y=\oplus\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+4A}}{2}}$

$y^2>0 \qquad y>0$

Sostituisco y nella 1^a equazione:

$x=\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+4A}}{2}+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\sqrt{1+4A}}$

$y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1+\sqrt{1+4A}}$

$\Big\} \ z=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1+\sqrt{1+4A}}+i\sqrt{-1+\sqrt{1+4A}}\right)$

$\Rightarrow |z|^2=\frac{1}{2}\left(\cancel{1}+\sqrt{1+4A}-\cancel{1}+\sqrt{1+4A}\right)=\sqrt{1+4A}$

• $\boxed{\text{es. 1 quiz gennaio 2021}}$:

Calcolare la soluzione $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione:

$$7 + e^{i\pi/2} z = z + 3i$$

$e^{i\pi/2} \longrightarrow i$ Sostituisco nell'equazione: $7 + iz = z + 3i$

$$z(1-i) = 7 - 3i$$

$$z = \frac{7-3i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{(7-3i)(1+i)}{2}$$

$$= \frac{7 + 7i - 3i - 3i^2}{2} = \frac{4i + 10}{2} = 5 + 2i$$

Soluzione: $z = 5 + 2i$

• $\boxed{\text{es. 2.34}}$

④ $z|z| - 2z - i + 1 = 0 \longrightarrow z|z| - 2z = -1 + i$

Scrivo $-1+i$ in forma esponenziale:

$|w| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow -1 + i = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Sostituisco $z = re^{i\theta}$ nell'equazione:

$r^2 e^{i\theta} - 2re^{i\theta} = \sqrt{2}\, e^{i3\pi/4}$

$(r^2 - 2r)e^{i\theta} = \sqrt{2}\, e^{i3\pi/4} \Rightarrow \begin{cases} r^2 - 2r = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$

• $r^2 - 2r = \sqrt{2}$

$r^2 - 2r - \sqrt{2} = 0$

$\Delta = 4 + 4\sqrt{2} = 4(1 + \sqrt{2})$ $\quad r = \frac{\cancel{2} \pm \cancel{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\cancel{2}} = 1 \pm \sqrt{1+\sqrt{2}}$

no perche' $r > 0$

• $\theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \longrightarrow$ dentro $[0, 2\pi[$ abbiamo solo $\theta = \frac{3\pi}{4}$

Sol: $z = e^{i\frac{3\pi}{4}}\left(1 + \sqrt{1+\sqrt{2}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(1 + \sqrt{1+\sqrt{2}}\right)$

⑤ $z^4 = |z|^2 + 2$

Sostituisco $z = re^{i\theta}$ nell'equazione:

$r^4 e^{i4\theta} = r^2 + 2 \longrightarrow r^4 e^{i4\theta} = r^2 e^{i0} + 2e^{i0} \longrightarrow r^4 e^{i4\theta} = (r^2 + 2)e^{i0}$

$\begin{cases} r^4 = r^2 + 2 \\ 4\theta = 0 + 2k\pi \end{cases}$

- $r^4 = r^2 + 2 \longrightarrow r^4 - r^2 - 2 = 0$

  $\Delta = 1 + 8 = 9 \qquad r^2 = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} r^2 = 2 \rightarrow r = \pm\sqrt{2} \\ r^2 = -1 \rightarrow \text{mai verificata in } \mathbb{R} \end{cases}$

  no perche' $r > 0$

- $4\theta = 2k\pi \longrightarrow \theta = k\frac{\pi}{2} \longrightarrow$ dentro $[0, 2\pi[$ abbiamo $k = 0, 1, 2, 3$:
  - $k = 0$: $\theta_0 = 0$
  - $k = 1$: $\theta_1 = \pi/2$
  - $k = 2$: $\theta_2 = \pi$
  - $k = 3$: $\theta_3 = \frac{3\pi}{2}$

<u>Soluzioni</u>: $z = \sqrt{2}\, e^{i0} = \sqrt{2}$

$z = \sqrt{2}\, e^{i\pi/2} = \sqrt{2}\, i$

$z = \sqrt{2}\, e^{i\pi} = -\sqrt{2}$

$z = \sqrt{2}\, e^{i3\pi/2} = -\sqrt{2}\, i$
