TUTORATO 19 ottobre 2022

$2+4+6+\dots+2n = n(n+1)$

- $P(1)$ e' vera, infatti: $2 = 1\cdot(1+1) = 2$
- Voglio mostrare che se vale $P(n)$ allora $P(n+1)$ e' vera:

$$2+4+6+\dots+2n+2(n+1) \overset{?}{=} (n+1)(n+2)$$

$$\underbrace{2+4+6+\dots+2n}+2(n+1) \underset{P(n)\ \text{vera}}{=} n(n+1)+2(n+1) = (n+1)(n+2)$$

Dunque $P(n+1)$ e' vera!

Per principio d'induzione $P(n)$ e' vera $\forall n \geq 1$

$$1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- $P(1)$ e' vera, infatti: $1 = \frac{1\cdot(1+1)(2+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$
- Voglio mostrare che se vale $P(n)$ allora $P(n+1)$ e' vera:

$$1^2+2^2+\dots+n^2+(n+1)^2 \overset{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$\underbrace{1^2+2^2+\dots+n^2}+(n+1)^2 \underset{P(n)\ \text{vera}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 = (n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6}+(n+1)\right] =$$

$$= (n+1)\left(\frac{2n^2+n+6n+6}{6}\right) = (n+1)\left(\frac{2n^2+7n+6}{6}\right) = (n+1)\left[\frac{(n+2)(n+3/2)}{6}\right] =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Dunque $P(n+1)$ e' vera!

Per principio d'induzione $P(n)$ e' vera $\forall n \geq 1$

$$\sum_{K=1}^{n}(2K-1) = n^2$$

- $P(1)$ e' vera, infatti: $1 = (1)^2 = 1$
- Voglio mostrare che se vale $P(n)$ allora $P(n+1)$ e' vera:

$$\sum_{K=1}^{n+1}(2K-1) \overset{?}{=} (n+1)^2$$

$$2(n+1)-1+\sum_{K=1}^{n}(2K-1) \underset{P(n)\ \text{vera}}{=} 2(n+1)-1+n^2 = 2n+2-1+n^2 = n^2+2n+1 =$$

$= (n+1)^2$ Dunque $P(n+1)$ vera!

Per principio d'induzione $P(n)$ è vera $\forall n \geq 1$

Dati $a_1, \dots, a_n \geq 0$, dimostrare che:

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

- $P(1)$ è vera, infatti: $\frac{a_1}{1} \geq (a_1)^{1/1} \iff a_1 \geq a_1$
- Voglio dimostrare che se vale $P(n-1)$ allora $P(n)$ è vera:

$P(n-1)$: $\frac{a_1 + \dots + a_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}}$ ove $A_{n-1} = \frac{a_1 + \dots + a_{n-1}}{n-1}$

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \overset{?}{\geq} \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

Poniamo: $A_n = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = \frac{a_1 + \dots + a_{n-1}}{n} \frac{n-1}{n-1} + \frac{a_n}{n}$

$$= \underbrace{\frac{a_1 + \dots + a_{n-1}}{n-1}}_{A_{n-1}} \frac{n-1}{n} + \frac{a_n}{n}$$

$$= A_{n-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{a_n}{n}$$

Divido entrambi i membri per A_{n-1}:

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{\cancel{A_{n-1}}}{\cancel{A_{n-1}}}\left(1 - 1/n\right) + \frac{a_n}{n A_{n-1}} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{a_n}{n A_{n-1}} = 1 + \frac{a_n - A_{n-1}}{n A_{n-1}}$$

Elevo entrambi i membri alla n:

$$\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)^n = \left(1 + \frac{a_n - A_{n-1}}{n A_{n-1}}\right)^n \geq 1 + \cancel{n} \frac{a_n - A_{n-1}}{\cancel{n} A_{n-1}} = \cancel{1} + \frac{a_n}{A_{n-1}} - \cancel{1}$$

Applico disuguaglianza di Bernoulli: $(1+a)^n \geq 1 + na$

$$\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)^n = \frac{A_n^n}{A_{n-1}^{\cancel{n}\, n-1}} \geq \frac{a_n}{\cancel{A_{n-1}}}$$

$$\Rightarrow A_n^n \geq a_n (A_{n-1})^{n-1} \geq a_n \left(\sqrt[n-1]{a_1 \cdots a_{n-1}}\right)^{\cancel{n-1}} = a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

$P(n-1)$ vera

$$\Rightarrow A_n \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \Rightarrow \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

Dunque $P(n)$ vera!

Per principio d'induzione $P(n)$ vera $\forall n \geq 1$

$$A = \left\{ \frac{3n^2-1}{2n^2} \,,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

Trovare, se esistono, maxA, minA, supA, infA.

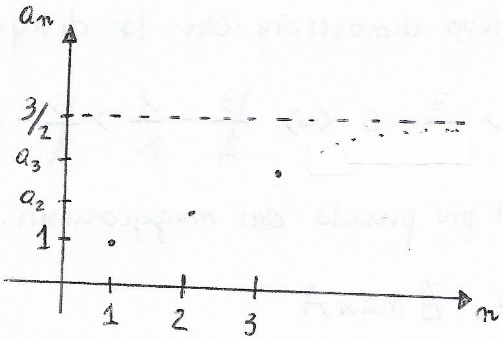
Denoto : $a_n = \frac{3n^2-1}{2n^2} \longrightarrow A = \{ a_n \,,\ n \in \mathbb{N} \}$

Osservo che A e' infinito.

$a_n = \frac{3n^2-1}{2n^2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2} \longrightarrow a_n \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

allora 1 e' un minorante $\Rightarrow \exists \inf A$

$n = 1$: $a_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 = \min A$



Osservo che : $\frac{3n^2-1}{2n^2} \leq \frac{3n^2}{2n^2} = \frac{3}{2} \longrightarrow \frac{3}{2}$ e' un maggiorante

Voglio dimostrare $\sup A = \frac{3}{2}$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad a_{n_0} > \frac{3}{2} - \varepsilon$

Ovvero devo dimostrare che la disequazione $a_n > \frac{3}{2} - \varepsilon$ ha almeno una soluzione.

$\frac{3n^2-1}{2n^2} > \frac{3}{2} - \varepsilon \quad \rightarrow$ ha una soluzione in $\mathbb{N}$?

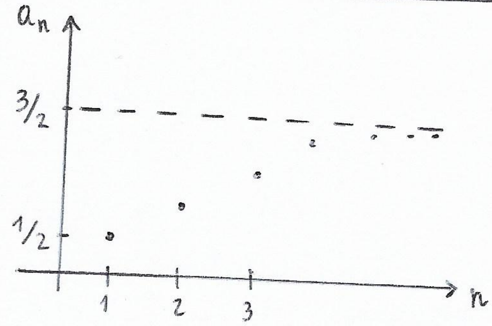
$\cancel{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2n^2} > \cancel{\frac{3}{2}} - \varepsilon \rightarrow \varepsilon > \frac{1}{2n^2} \longrightarrow 2n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \rightarrow n^2 > \frac{1}{2\varepsilon} \longrightarrow n_0 > \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}$ ✓

$\sup A = \frac{3}{2}$, $\nexists \max A$

$$A = \left\{ \frac{3n-2}{2n} \,,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

Trovare, se existono, maxA, minA, supA, infA.

Denoto : $a_n = \frac{3n-2}{2n} \longrightarrow A = \{ a_n \,,\ n \in \mathbb{N} \}$



Dimostro che a_n e' crescente :

$a_{n+1} \geq a_n \Leftrightarrow \frac{3(n+1)-2}{2(n+1)} \geq \frac{3n-2}{2n} \Leftrightarrow \cancel{\frac{3}{2}} - \frac{1}{n+1} \geq \cancel{\frac{3}{2}} - \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1}$

$\Leftrightarrow \frac{n+1}{n} \geq 1 \Leftrightarrow \cancel{1} + \frac{1}{n} \geq \cancel{1} \Leftrightarrow \frac{1}{n} \geq 0$ ✓

$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \Rightarrow a_1$ e' il minimo : $a_1 = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$

Voglio dimostrare che $\sup A = 3/2$

1) $\frac{3}{2} \geq a_n \iff \cancel{\frac{3}{2}} \geq \cancel{\frac{3}{2}} - \frac{1}{n} \iff -\frac{1}{n} \leq 0$

$\Rightarrow 3/2$ e' un maggiorante.

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_{n_0} \geq \frac{3}{2} - \varepsilon$

Ovvero devo dimostrare che la disequazione $a_n > \frac{3}{2} - \varepsilon$ ha almeno una soluzione.

$$\frac{3n-2}{2n} > \frac{3}{2} - \varepsilon \iff \cancel{\frac{3}{2}} - \frac{1}{n} > \cancel{\frac{3}{2}} - \varepsilon \iff \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon} \quad \checkmark$$

$\Rightarrow \frac{3}{2}$ e' il piu' piccolo dei maggioranti.

$\sup A = \frac{3}{2}$, $\nexists \max A$