
Lezione 4

(1) Un oggetto di massa $m = 1 \text{ kg}$ viene scagliato verso l'alto con velocità $v_0 = 2 \text{ m/s}$ da un'altezza $h = 100 \text{ cm}$ dal suolo. L'oggetto, ricadendo al suolo, rimbalza verso l'alto e in ogni urto con il pavimento perde $1/4$ della sua energia cinetica. Determinare:

1. la velocità dell'oggetto subito prima del contatto con il pavimento;
2. la massima quota che l'oggetto raggiunge dopo il primo urto con il pavimento;
3. dopo quanti rimbalzi la massima quota raggiunta dall'oggetto diventa inferiore a $h/4$

(2) Un corpo di massa $m = 2.5 \text{ kg}$ viene lanciato su per un piano inclinato di un angolo $\theta_0 = 30^\circ$ rispetto all'orizzontale con una velocità iniziale pari a $v_0 = 5 \text{ m/s}$. Nel primo tratto, di lunghezza $l_0 = 100 \text{ cm}$, il corpo scivola senza attrito; la parte rimanente del piano inclinato presenta un coefficiente di attrito dinamico pari a $\mu_d = 0.5$ e uno di attrito statico pari a $\mu_s = 0.6$. Determinare:

1. di quanto si sposta il corpo lungo il piano inclinato prima di fermarsi;
2. l'espressione e il valore numerico dell'energia dissipata durante il moto.

Infine, dire se:

3. il corpo dopo essersi fermato (all'apice della traiettoria) ridiscende nuovamente lungo il piano inclinato

(3) Due cunei identici, di altezza $h = 1 \text{ m}$ e angolo d'inclinazione $\theta = 35^\circ$, sono disposti specularmente come schematizzato in figura ad una distanza $L = 2 \text{ m}$ l'uno dall'altro e sono ancorati al piano su cui poggiano. Un corpo puntiforme di massa $m = 1.5 \text{ kg}$ viene lanciato lungo la parte inclinata del cuneo di destra per mezzo di una molla ideale, di lunghezza a riposo $l_0 = 40 \text{ cm}$ e costante elastica $k = 1.26 \cdot 10^3 \text{ N/m}$, il cui estremo inferiore è fissato al cuneo stesso. In seguito al lancio, dopo aver raggiunto la sommità del cuneo di destra, il corpo prosegue di moto parabolico raggiungendo il punto più in alto del cuneo di sinistra tangenzialmente alla sua superficie e quindi scivola fino in fondo a esso. Sapendo che la superficie del cuneo di destra è perfettamente liscia (assenza di attriti), mentre quella del cuneo di sinistra presenta un coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.35$, determinare:

1. la lunghezza della molla al momento del lancio del corpo;
2. la massima altezza h_{max} raggiunta dal corpo durante il suo moto;
3. la velocità dello stesso quando raggiunge il punto più basso del cuneo di sinistra

(4) Un oggetto di massa $m = 2 \text{ kg}$ poggia su un piano orizzontale e tramite una molla, inizialmente compressa di $\Delta x = 4 \text{ cm}$ rispetto alla sua lunghezza di riposo, viene spinto verso destra. Sapendo che l'altro estremo della molla, di costante elastica $k = 58.9 \text{ N/cm}$, è fissato a un fermo ancorato al piano orizzontale e che il coefficiente di attrito dinamico tra tavolo e oggetto è pari a $\mu_d = 0.6$, determinare lo spazio percorso dall'oggetto una volta lasciato libero.

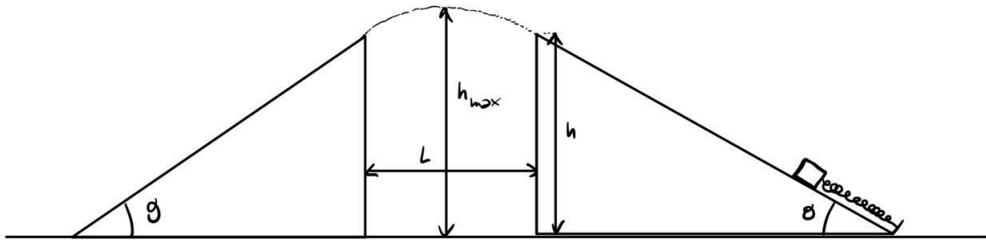


Figura 1: Rappresentazione grafica esercizio 3

- ⑤ Un punto materiale di massa m sospeso al soffitto per mezzo di un filo ideale verticale è collegato al suolo per mezzo di una molla ideale, anch'essa verticale, di costante elastica $k = 70 \text{ N/m}$; in tale situazione la molla si trova in condizione di riposo e nel filo si registra una tensione $T = 4.9 \text{ N}$. Quindi si taglia il filo; ipotizzando che il sistema si mantenga verticale in ogni istante di tempo, determinare:

1. la massa del punto materiale;
2. la massima distanza percorsa dalla posizione iniziale dal punto materiale;
3. la posizione in cui la velocità del punto materiale è massima;
4. il valore massimo della velocità del punto materiale.

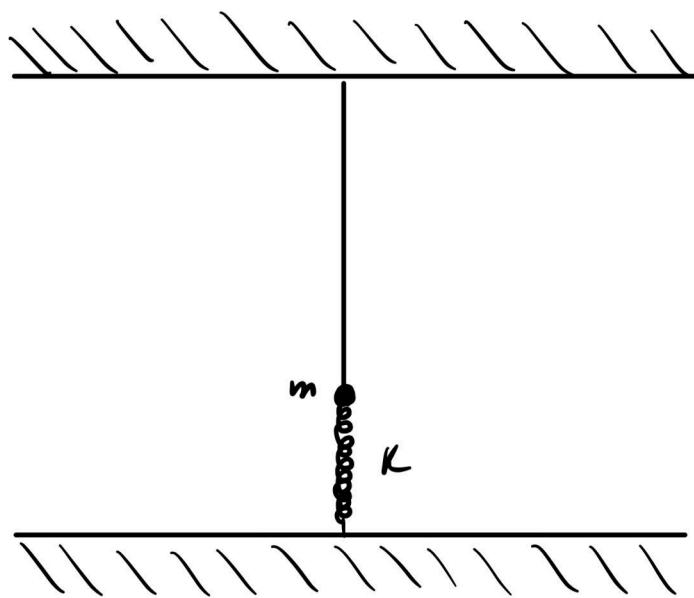


Figura 2: Rappresentazione grafica esercizio 5

- ⑥ Si abbia la guida rigida mostrata in figura. La guida, che è formata da due tratti rettilinei e da due semicirconferenze di raggio $R = 25 \text{ cm}$, è disposta su un piano verticale, poggia sul pavimento ed è mantenuta in quiete. Un punto materiale, di massa $m = 1.5 \text{ kg}$, viene lasciato libero (con velocità iniziale nulla) da una quota $h_0 = 3 \cdot R$. Sapendo che il punto materiale scorre lungo la guida con attrito trascurabile senza mai staccarsi da essa,

1. determinare modulo, direzione e verso della reazione normale \vec{N} che la guida esercita sul punto materiale negli istanti in cui esso passa per i punti A, B, C e D

Si supponga poi che la quota iniziale h_0 possa essere variata. Nell'ipotesi che il punto materiale raggiunga comunque il punto D,

2. determinare per quale valore di h_0 la reazione normale della guida in C è nulla.

[Come si vede dalla figura, il punto B è posizionato in modo che il raggio passante per esso formi un angolo di 30° con l'orizzontale.]

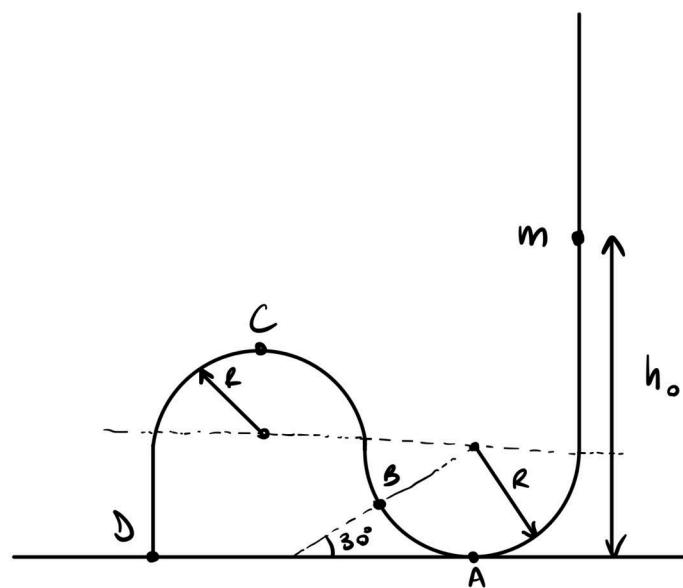
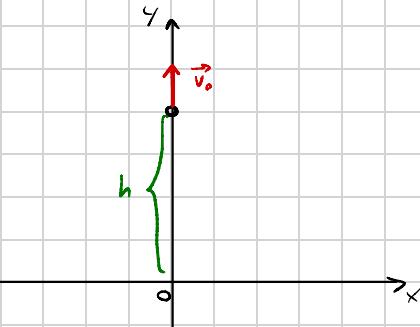


Figura 3: Rappresentazione grafica esercizio 6

ES. 1



Durante il moto dell'oggetto si conserva l'energia meccanica (quindi cinetica + potenziale). Confrontando l'istante iniziale con quello in cui raggiunge il suolo avremo

$$mgh + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2$$

Energia iniziale sarà data dalla energia gravitazionale sommata alla energia cinetica. La prima è dovuta al fatto che l'oggetto parte da una certa altezza iniziale rispetto al suolo, mentre la seconda è dovuta al fatto che nell'istante iniziale il nostro oggetto ha velocità non nulla

L'energia finisce, ovvero quando raggiunge il suolo (per la prima volta), sarà data dalla sola energia cinetica, poiché al suolo il nostro oggetto si trova ad una altezza pari a 0

Da cui, isolando v_1 al primo membro:

$$v_1 = \sqrt{2gh + v_0^2} = 6.86 \text{ m/s} \rightarrow \text{Velocità con cui raggiunge il suolo} \rightarrow \begin{matrix} \text{Ma non} \\ \text{raggiunge il suolo} \\ \text{subito dopo il primo} \\ \text{cuto (dato da perdere energie)} \end{matrix}$$

Dopo il primo cuto con il suolo l'oggetto si ritrova con un'energia cinetica diminuita del 25% rispetto a quella con cui era partito. Già

$$K_1 = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{2}mv_1^2 = 0.75 \cdot \frac{m}{2} (2gh + v_0^2) = \frac{3}{4}(mgh + \frac{1}{2}mv_0^2)$$

Applicando nuovamente la conservazione dell'energia meccanica, otteniamo

$$K_2 = mgh_1 \rightarrow \frac{3}{4}(mgh + \frac{1}{2}mv_0^2) = mgh_1 \rightarrow h_1 = \frac{3}{4} \left(h + \frac{v_0^2}{2g} \right) = 30.3 \text{ cm}$$

→ Nel punto più alto l'oggetto si ferma e smette di salire. Di conseguenza le velocità qui saranno nulli e l'energia sarà solamente potenziale (gravitazionale in questo caso)

Dalla conservazione dell'energia meccanica segue che l'energia potenziale posseduta dal corpo nel punto di massima quota dopo ogni rimbalzo è uguale all'energia cinetica con cui arriva dallo stesso rimbalzo

→ Se tra le energie cinetiche precedente e successiva a un dato rimbalzo vale la relazione $K_n = \frac{3}{4}K_{n-1}$, un analogo relatore deve valere tra le energie potenziali del corpo relativi alle massime quote raggiunte prima e dopo lo stesso rimbalzo

→ Se indichiamo con h_{n-1} e h_n tali quote, si avrà

$$mgh_n = \frac{3}{4}mgh_{n-1} \rightarrow h_n = \frac{3}{4}h_{n-1}$$

Se indichiamo con h_0 la massima quota raggiunta dal corpo prima del primo rimbalzo, iterando la precedente relazione, si capisce facilmente che le quote massime dopo n rimbalzi può essere espressa come segue

$$h_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot h_0$$

In conseguenza ricaviamo h_0 come segue

$$mgh_0 = mgh + \frac{1}{2}mv_0^2 \rightarrow h_0 = h + \frac{v_0^2}{2g} = 1.204 \text{ m}$$

Il numero di rimbolzi cercato si ottiene impostando e risolvendo la seguente diseguaglianza:

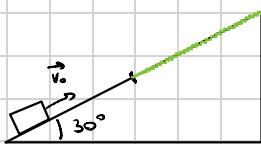
$$\left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot h_0 < \frac{h}{4}$$

Possendo il logaritmo naturale dei due membri, otteniamo

$$n \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ln(h_0) < \ln\left(\frac{h}{4}\right) \rightarrow n > \frac{\ln(h/h_0)}{\ln(3/4)} = 5.46$$

Che significa che dovremo aspettare il 6° rimbolzo per stancare quanto richiesto.

ES. 2



A causa dell'attrito presente nella seconda parte del piano inclinato, la variazione di energia meccanica del corpo dovrà essere pari al lavoro compiuto da tali forze.
→ Dunque, se con h indichiamo la quota massima raggiunta dal corpo dopo il bacio, potremo scrivere

$$mgh - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\mu_s N(l-h)$$

Dove $N = mg \cos \theta_0$ è la normale normale del piano. Perciò, essendo $h = l \sin \theta_0$, segue che

$$2gl \sin \theta_0 - v_0^2 = -2\mu_s g(l-h) \cos \theta \rightarrow 2gl(\sin \theta_0 + \mu_s \cos \theta_0) = v_0^2 + 2\mu_s g l \cos \theta_0$$

$$\rightarrow l = \frac{v_0^2 + 2\mu_s g l \cos \theta_0}{2g(\sin \theta_0 + \mu_s \cos \theta_0)} = 183 \text{ cm}$$

L'energia dissipata nel moto è più al valore compiuto dal lavoro fatto dalle forze di attrito, che è

$$W_d = \mu_s N(l-h) = \frac{(v_0^2 - 2gl_0 \sin \theta_0) \mu_s m \cos \theta_0}{2(\sin \theta_0 + \mu_s \cos \theta_0)} = 8.81 \text{ J}$$

Inoltre, una volta raggiunta la massima quota, il corpo non riprende a scendere.

→ Si può vedere che il modello delle massime forze di attrito

$$F_{s,\max} = \mu_s mg \cos \theta_0$$

è maggiore della componente della forza gravitazionale (poco del corpo) lungo il piano (ovvero $mg \sin \theta_0$)

$$\mu_s mg \cos \theta_0 > mg \sin \theta_0 \rightarrow \mu_s > \tan \theta_0 = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.577$$

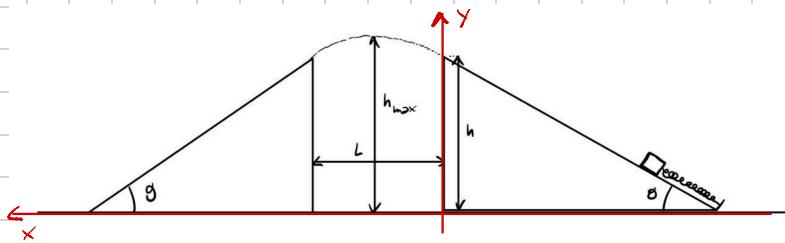
ES. 3

Rifacendosi alle figure riportate nel testo del problema, si noti che le sommità dei due cerchi e le loro inclinazioni sono le stesse.

→ Il corpo lascia il cerchio di destra e arriva su quello di sinistra seguendo una parabola perfettamente simmetrica e tangente alle superfici dei cerchi

→ Il modello delle velocità di uscita (dal cerchio di destra) e di quella di entrata (dal cerchio di sinistra) devono essere uguali (denominiamolo v_h)

Le equazioni orarie delle coordinate del corpo durante il moto parabolico (asse x orizzontale verso sinistra e asse y verticale e verso l'alto con origine alla base del cannone) sono le seguenti:



$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos(\theta) \cdot t \\ y(t) = h + v_0 \sin(\theta) \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Imponendo $x(t^*) = L$ e $y(t^*) = h$ si ricava

$$t^* = \frac{L}{v_0 \cos \theta} \rightarrow L t \sin \theta - \frac{1}{2} g \frac{L^2}{v_0^2 \cos^2 \theta} = 0 \rightarrow v_0^2 = \frac{g L}{2 \sin \theta \cos \theta} \rightarrow v_0 = 4.57 \text{ m/s}$$

Ora che conosciamo v_0 , per determinare la lunghezza della molla iniziale, possiamo utilizzare la conservazione dell'energia meccanica

→ tenendo conto con Δl la compressione della molla, confrontando il momento del braccio del corpo con quello in cui lo stesso raggiunge la sommità del canone di salto, possiamo scrivere

$$U_i + K_i = U_f + K_f \rightarrow mg(l_0 - \Delta l) \sin \theta + \frac{1}{2} k \Delta l^2 = mgh + \frac{1}{2} mv_0^2$$

dalla quale si ricava la seguente equazione di 2° grado in Δl (sostituendo al posto di v_0 l'espressione di prima)

$$k \Delta l^2 - 2mg \sin \theta \cdot \Delta l - 2mg \left(h + \frac{L}{4 \cos \theta \sin \theta} - l_0 \sin \theta \right) = 0$$

Risolvendo (e considerando la soluzione con il "+", l'altra con senso falso) si ottiene

Il determinante sarà: $4m^2 g^2 \sin^2 \theta + 4k \cdot 2mg \left(h + \frac{L}{4 \cos \theta \sin \theta} - l_0 \sin \theta \right)$



$$\Delta l = \frac{mg \sin \theta + \sqrt{m^2 g^2 \sin^2 \theta + 2Kmg \left(h + \frac{L}{4 \cos \theta \sin \theta} - l_0 \sin \theta \right)}}{k} = 0.214 \text{ m}$$

E quindi la lunghezza iniziale della molla è

$$l_0 = l_0 - \Delta l = 0.186 \text{ m}$$

La quota massima raggiunta dal corpo corrisponde a $y(t^*/2)$, perciò

$$y_{\max} = y\left(\frac{t^*}{2}\right) = h + v_0 \sin \theta \cdot \left(\frac{t^*}{2}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{t^*}{2}\right)^2 = h + \frac{L}{2} t \sin \theta - \frac{1}{2} g \frac{L^2}{4v_0^2 \cos^2 \theta}$$

E sostituendo h e semplificando si ricava

$$y_{\max} = h + \frac{L}{4} t \sin \theta = 1.35 \text{ m}$$

Inoltre, dato che lungo la discesa c'è un'accelerazione gravitazionale costante, la forza di attrito dinamico della molla

$$F_d = \mu_s N = \mu_s m g \cos \theta$$

La variazione di energia meccanica sarà pari al lavoro di tale forza

$$\Delta K + \Delta U = L_{n.c}$$

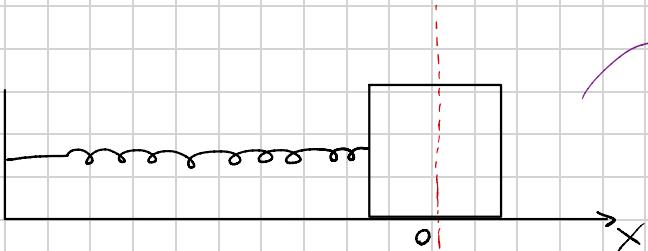
$$\frac{1}{2}mv_F^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 - mgh = -\mu_s mg \cos \theta \cdot \frac{h}{\sin \theta}$$

Questo è equivalente a considerare la differenza tra l'energia dell'oggetto quando raggiunge il fondo del carosello sinistro e quella all'apice. Nonostante la regola generale sulla conservazione dell'energia meccanica, la differenza sarà $\neq 0$ per via del lavoro delle forze non conservative (ovvero attrito).

Dove v_F è la velocità del corpo in fondo al carosello di sinistra. Ricavando v_F si ha

$$v_F = \sqrt{v_0^2 + 2gh \left(1 - \mu_s \frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right)} = 5.56 \text{ m/s}$$

ES. 4



Assumiamo che questo sia l'istante iniziale (con lo molla compresso di Δx), con l'asse X orientato nel verso del moto e avere origine nel punto di partenza (ovvero quello in cui si trova l'oggetto quando lo molla è al massimo della compressione).

Risolviamo il problema considerando la conservazione dell'energia. In questo caso, oltre alle forze elastiche (che è conservativa), è presente costantemente anche la forza di attrito dinamico.

Quando l'energia meccanica
non è conservata

$$\Delta E_{mecc} = L_d \rightarrow -\frac{1}{2}K\Delta x^2 = -\mu_s mg d$$

Dove $\frac{1}{2}K\Delta x^2$ è l'energia potenziale elastica inizialmente immagazzinata dello molla e, se d è la lunghezza del tratto percorsa complessivamente dal corpo, $L_d = -\mu_s mg d$ è il conseguente lavoro compiuto dalle forze di attrito. Quindi

$$d = \frac{K\Delta x^2}{2\mu_s mg} = 40.0 \text{ cm}$$

VEDIAMO OLA UN METODO ALTERNATIVO PER RISOLVERE SU PROBLEMA

Se il corpo è soggetto alle forze di attrito dinamico durante tutto il suo moto. Invece, la forza esercitata dallo molla agisce solo per il primo tratto di lunghezza Δx .

→ Applicando la seconda legge della dinamica, nei due tratti valgono le seguenti equazioni del moto

$$m\ddot{x} = F_{el} - F_d \quad \text{nel tratto con la forza elastica}$$

Nel tratto con la forza elastica

Nel tratto senza forza elastica

$$m\ddot{x} = -F_d = -\mu_s mg$$

Dove $F_d = \mu_s N = \mu_s mg$ è la forza di attrito dinamico.

La prima equazione vale nell'intervento $[0, \Delta x]$ e possiamo scrivere

Questo è la derivata
della energia cinetica. Quando stiamo calcolando la velocità con cui
varia l'angolo x

Applicando la regola della catena per le derivate

$$\frac{dt}{dx} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^{-1} = v^{-1} = \frac{1}{v}$$

$$\frac{m}{2} \frac{d(v^2)}{dx} = m v \frac{dv}{dx} = m v \cdot \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = m \frac{dv}{dt} = -K(x - \Delta x) - \mu_s mg \quad \rightarrow \text{(VEDI PAGINA SUCCESSIVA)}$$

$$\Rightarrow d(v^2) = \frac{2}{m} [-\kappa(x - \Delta x) - \mu_s mg] dx$$

Di conseguenza, integrando entro i membri possiamo scrivere

$$v^2(\Delta x) = \frac{2}{m} \int_0^{\Delta x} [-\kappa(x - \Delta x) - \mu_s mg] dx = \frac{\kappa}{m} \Delta x^2 - 2\mu_s g \Delta x$$

Come mostrato dalla corrispondente equazione del moto, la seconda parte del moto è uniformemente decelerata con accelerazione in modulo pari a $\mu_s g$. Tenendo conto delle condizioni iniziali $x_0 = \Delta x$ e $v_0 = v(\Delta x)$, posizione e velocità istantanee del corpo sono determinate dalle seguenti equazioni:

$$x(t) = \Delta x + v(\Delta x)t - \frac{1}{2}\mu_s g t^2; \quad v(t) = v(\Delta x) - \mu_s g t$$

Il corpo si fermerà all'annullarsi della sua velocità e quindi

$$v(t_1) = 0 \longrightarrow t_1 = \frac{v(\Delta x)}{\mu_s g}$$

corrispondente alla posizione

$$x(t_1) = \Delta x + v(\Delta x)t_1 - \frac{1}{2}\mu_s g t_1^2 = \Delta x + \frac{v^2(\Delta x)}{2\mu_s g} = \frac{\kappa \Delta x^2}{2\mu_s m g} = 40.0 \text{ cm}$$

Il moto è avviato nella sola direzione verticale, per cui è ragionevole utilizzare un sistema di riferimento con l'asse y verticale diretto verso l'alto; sia y_0 la quota iniziale del punto materiale.

Nella situazione iniziale di equilibrio, il filo (che per ipotesi si trova in condizione di riposo) non impone alcuna forza; il punto materiale si trova quindi soggetto solo alla forza di gravità e alla tensione esercitata dal filo.

→ Il secondo principio della dinamica si scrive dunque così

$$T - mg = ma_y = 0 \rightarrow \text{di conseguenza forze e accelerazioni lungo l'asse } y$$

$$\Rightarrow m = \frac{T}{g} = 0.50 \text{ Kg}$$

Una volta tagliato il filo, il sistema si comporta come un molla-molla sotto l'effetto della gravità.

→ Questo sistema può essere convenientemente assimilato a un sistema molla-molla in assenza di gravità perché si re-idefinisce il punto di equilibrio, la cui posizione y_1 può essere determinata dall'equilibrio delle forze:

$$mg = K(y_0 - y_1)$$

$$\Rightarrow y_0 - y_1 = \frac{mg}{K}$$

Nota che il sistema entra sotto l'azione di forze conservative, si conserva l'energia meccanica del punto materiale; confrontando il valore di tale quantità nell'istante iniziale (in cui il punto è fermo) e in quello successivo in cui il punto materiale si trova nuovamente in quiete, si trova

$$\frac{1}{2}K(y_0 - y_1)^2 = \frac{1}{2}K(y_{\min} - y_1)^2$$



l'energia potenziale elastica ora è ridotta al nuovo punto di equilibrio y_1 . Questo è un motivo che permette di convolare in tale termine anche il contributo dell'energia potenziale gravitazionale

$$y_1 - y_{\min} = y_0 - y_1$$

Scelta del segno della delta del filo che
 $y_{\min} < y_1 < y_0$

E da ciò si determina la massima distanza dalla posizione iniziale raggiunta dal punto materiale

$$y_0 - y_{\min} = y_0 - y_1 + y_1 - y_{\min} = 2(y_0 - y_1) = 2 \frac{mg}{K} = 16 \text{ cm}$$

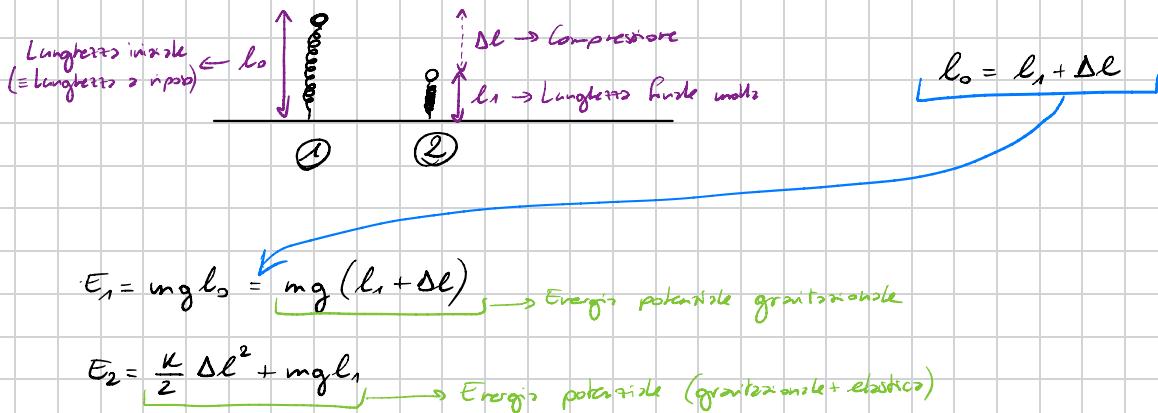
In questo tipo di moto il punto materiale raggiunge la velocità massima in corrispondenza al nuovo punto di equilibrio (posizionato a distanza $y_0 - y_1 = \frac{mg}{K} = 7.0 \text{ cm}$ dal punto iniziale)

La velocità massima può essere determinata dalla conservazione dell'energia meccanica, confrontando tale quantità nell'istante di moto in cui l'energia potenziale è nulla (ovvero quando il punto si trova in corrispondenza del nuovo punto di equilibrio y_1) con quella in cui il punto raggiunge la massima elongazione (in cui si zero la componenti oraria dell'energia meccanica)

$$\frac{1}{2}m v_{\max}^2 = \frac{1}{2}K(y_{\min} - y_1)^2 = \frac{1}{2}K\left(\frac{mg}{K}\right)^2 \rightarrow v_{\max} = g\sqrt{\frac{m}{K}} = 0.83 \text{ m/s}$$

VEDIAMO ORA UN MODO ALTERNATIVO DI PROCEDERE

Un altro modo di procedere nella risoluzione del problema è il seguente: consideriamo le seguenti situazioni, e le relative energie meccaniche (santi analogismi o "conto di sistema")



Per la conservazione dell'energia meccanica: $E_1 = E_2$

$$mgl_1 + mg\Delta l = \frac{K}{2} \Delta l^2 + mgl_1$$

$$mg = \frac{K}{2} \Delta l \rightarrow \Delta l = \frac{2mg}{K} = 16 \text{ cm}$$

Il punto di massima velocità dell'oggetto, nel suo moto armonico, sarà nel punto di equilibrio rappresentato dal sistema m₀₀₀+m₀₀₀, ovvero il punto in cui $F_{el} = P$, ovvero il centro delle oscillazioni, posto a metà tra l₁ e l₀.



Di conseguenza, per trovare anche la velocità massima dobbiamo sempre fare il conservazione dell'energia

$$E_{\Delta l/2} = mg \left(l_0 - \frac{\Delta l}{2} \right) + \frac{1}{2} mv_2^2 + \frac{K}{2} \left(\frac{\Delta l}{2} \right)^2 = mg l_0 = E_{l_0}$$

$$\frac{1}{2} mv_2^2 = mg \frac{\Delta l}{2} - \frac{K}{2} \frac{\Delta l^2}{4}$$

$$mv_2^2 = mg \cdot \frac{2mg}{K} - \frac{K}{4} \cdot \frac{4m^2 g^2}{K^2}$$

$$mv_2^2 = 2 \frac{m^2 g^2}{K} - \frac{m^2 g^2}{K}$$

$$v_2^2 = \frac{mg^2}{K} \rightarrow v_2 = g \sqrt{\frac{m}{K}}$$

Dato l'assetto di slinchi, l'energia meccanica del corpo si deve conservare. Pertanto, per una quota h generica (misurata dal suolo) possiamo scrivere:

$$\frac{1}{2}mv^2(h) + mgh = mgh_0 \rightarrow v^2(h) = 2g(h_0 - h)$$

$v(h)$ è il modulo della velocità del punto materiale alla quota h

Osservando che le quote dei punti A, B, C e D sono rispettivamente pari a

$$h_A = 0; \quad h_B = R - R \sin(30^\circ) = \frac{1}{2}R; \quad h_C = 2R; \quad h_D = 0$$

Ottieniamo

$$v_A^2 = v^2(h_A) = 6gR; \quad v_B^2 = v^2(h_B) = 5gR$$

$$v_C^2 = v^2(h_C) = 2gR; \quad v_D^2 = v^2(h_D) = 6gR$$

Durante il moto del punto materiale il prodotto tra la sua massa e il vettore accelerazione deve ugualizzare (2^a legge della dinamica) la risultante delle forze che agiscono su di esso. Le forze agenti sul corpo sono la forza di gravità \vec{mg} e la reazione normale della guida \vec{N} .

Nel tratto verticale il corpo non grava in nessun modo sulla guida e quindi la reazione normale sarà nulla; quindi, in D la reazione normale è nulla.

Stiamo considerando per ogni punto la direzione del punto verso il centro della circonferenza

Invece, nei due tratti arcuati della guida la somma delle componenti radiale di \vec{mg} e della reazione normale \vec{N} dovrà essere pari al prodotto tra m e l'accelerazione centripeta. Prendendo come radiale diretta verso il centro di curvatura dell'arco di guida considerata, le componenti radiali dei punti A, B e C possiamo scrivere le seguenti:

Punto un oggetto che si muove di moto circolare rispetto, nel complesso, di questo accelerazione

$$m \frac{v_A^2}{R} = N_A - mg \rightarrow N_A = m \frac{v_A^2}{R} + mg = 7mg = 103N$$

$$m \frac{v_B^2}{R} = N_B - mg \sin(30^\circ) \rightarrow N_B = m \frac{v_B^2}{R} + \frac{1}{2}mg = \frac{11}{2}mg = 80.9N$$

$$m \frac{v_C^2}{R} = N_C + mg \rightarrow N_C = m \frac{v_C^2}{R} - mg = mg = 14.7N$$

→ In questo caso abbiamo assunto un verso concorde tra N_C e la forza peso (altrimenti avremmo avuto $N_C - mg$). Se avessimo fatto l'assunzione opposta (ovvero $N_C - mg$) non sarebbe comunque stato un problema dato che avremmo trovato semplicemente lo stesso valore in modulo, ma di segno opposto (o indicare che il vero è l'opposto rispetto a quello che avevamo supposto)

Dove N_A , N_B e N_C corrispondono ai moduli delle rispettive reazioni normali. Ora invece, i vettori \vec{N}_A , \vec{N}_B e \vec{N}_C sono diretti verso i rispettivi centri di curvatura dei tratti arcuati di guida.

Se vogliamo che al passaggio in C la reazione normale sia nulla, l'ultima delle equazioni sopra scritte impone che

$$m \frac{v_C^2}{R} = mg \rightarrow v_C^2 = gR$$

E quindi utilizzando la conservazione dell'energia meccanica, stiamo:

$$\frac{1}{2}mv_C^2 + mgh_C = mgh_0 \rightarrow h_0' = \frac{1}{g} \left[\frac{1}{2}v_C^2 + 2gR \right] = \frac{5}{2}R = 62.5\text{ cm}$$