Università Degli Studi di Padova
Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione (DEI)
Corsi di laurea in Ingegneria

Studente: Federico Simioni
Email: federico.simioni@studenti.unipd.it
Disciplina: Fisica Generale 1

Lezione 12

1 Una macchina termica irreversibile opera tra due sorgenti, con temperature T_1 = 273 °C e T_2 = 0 °C, producendo in un ciclo un lavoro L e assorbendo dalla sorgente a temperatura superiore una quantità di calore Q'_1. Tra le medesime sorgenti opera anche una macchina frigorifera reversibile (una macchina di Carnot che opera come macchina frigorifera) che, utilizzando il lavoro L prodotto dalla prima macchina, assorbe dalla sorgente a temperatura inferiore una quantità di calore Q_2 = 1000 cal e cede alla sorgente a temperatura superiore una quantità di calore Q_1. Sapendo che $\epsilon = Q'_1/Q_1 = 2$, determinare:

1. il rendimento η' della macchina irreversibile;
2. la variazione ΔS dell'entropia complessiva delle sorgenti in un ciclo di funzionamento delle due macchine.

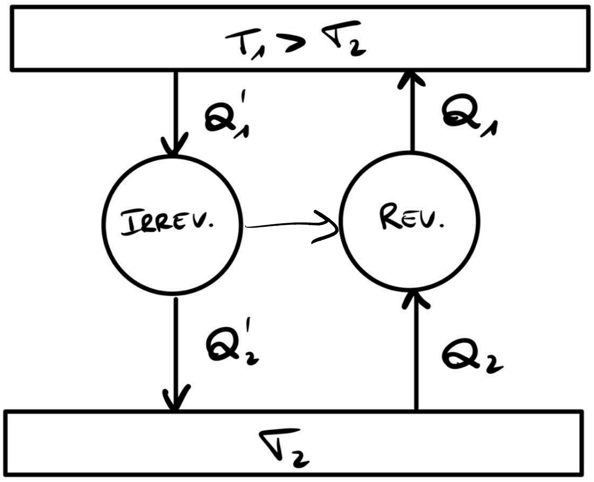


Figura 1: Rappresentazione grafica esercizio 1

2 Una macchina termica che lavora tra due sorgenti a temperatura costante T_1 e T_2 ($T_1 > T_2$) ha un rendimento $\eta_1 = \epsilon\eta$, con $\epsilon = 0.6$, dove η è il rendimento di una macchina di Carnot che opera tra le stesse temperature. La sorgente ad alta temperatura (T_1) dalla quale la macchina riceve calore è costituita da una miscela di acqua e vapore acqueo in equilibrio alla pressione normale. Durante il suo funzionamento la macchina produce una potenza P = 550 W e cede calore alla sorgente a bassa temperatura (T_2) a un ritmo di 1200 kcal/h. Si determini la temperatura T_2 della seconda sorgente.

3 Il motore di un'automobile da 155 CV ha un rendimento pari al 15% e lavora fra le temperature estreme di 95 °C (acqua di raffreddamento) e 495 °C (miscela aria-benzina incendiata). Determinare:

1. il rapporto fra il suo rendimento e quello massimo raggiungibile;
2. la potenza (espressa in W) utilizzata per muovere l'automobile;

3. il calore (espresso in J) dissipato in 1 h.

[*1 kW = 1.36 CV*]

(4) Una macchina ciclica scambia calore con tre sorgenti a temperatura $T_1 = T$, $T_2 = \frac{2}{3}T$ e $T_3 = \frac{1}{3}T$. In ogni ciclo, la macchina assorbe la quantità di calore $Q_1 = Q$ dal primo serbatoio e compie il lavoro $L = \frac{3}{2}Q$. Invece, l'entropia dell'universo aumenta di $\frac{2Q}{T}$ a ogni ciclo. Questo fatto rende la macchina irreversibile. Determinare:

1. le quantità di calore Q_2 e Q_3 scambiate con le altre sorgenti;
2. il rendimento di una macchina reversibile che lavori con le stesse sorgenti, scambiando anch'essa con le prime due sorgenti le medesime quantità di calore Q_1 e Q_2.

(5) Un gas ideale è contenuto in un volume $V_A = 40$ dm^3 alla pressione $p_A = 1 \cdot 10^5$ Pa e alla temperatura $T_A = 300$ K. Con una compressione isoterma reversibile, il gas raggiunge lo stato B con volume $V_B = \frac{1}{3}V_A$; durante tale trasformazione il gas compie un lavoro $L_{AB} = -4.394 \cdot 10^3$ J. Poi, tramite un'isocora reversibile raggiunge lo stato C a temperatura $T_C = 600$ K. Successivamente, in modo adiabatico irreversibile, il gas viene portato nello stato D con volume $V_D = V_A$ e temperatura $T_D > T_A$: in questa espansione il gas compie il lavoro $L_{CD} = 5.894 \cdot 10^3$ J. Infine, con un'isocora reversibile il gas torna allo stato iniziale A. Sapendo che il rendimento del ciclo è $\eta = 0.15$, determinare:

1. i calori Q_{AB}, Q_{BC} e Q_{DA};
2. se il gas è monoatomico o biatomico;
3. il valore di T_D;
4. la variazione di entropia ΔS_{CD}.

(6) In un recipiente cilindrico, dotato di pistone, di volume $V_1 = 50$ dm^3 sono contenute $n = 2.5$ mol di un gas ideale biatomico alla pressione di 1 atm in equilibrio termico con l'ambiente.

1. Determinare la temperatura dell'ambiente circostante.

A partire da questo stato (1) il gas subisce 3 trasformazioni: prima, agendo sul pistone, il gas viene compresso reversibilmente a adiabaticamente fino allo stato 2 con volume $V_2 = V_1/2$; poi, tenendo fisso il pistone, si attende fino a che il gas raggiunge lo stato 3 in cui è di nuovo in quilibrio termico con l'ambiente; infine sempre agendo sul pistone, il gas viene fatto espandere reversibilmente e isotermicamente fino a riportarlo allo stato 1. Determinare nel complesso di trasformazioni:

2. la massima temperatura raggiunta dal gas:
3. il lavoro complessivo fatto dal pistone sul gas;
4. la variazione di entropia dell'ambiente durante la seconda trasformazione.

ES. 1

Il rendimento della macchina termica irreversibile è, per definizione, pari a

$$\eta' = \frac{L}{Q_1'}$$

ma, dato che $Q_1'/Q_1 = \varepsilon$, possiamo anche scrivere

$$\eta' = \frac{L}{\varepsilon Q_1} = \frac{\eta}{\varepsilon}$$

In maniera più intuitiva, consideriamo che il rendimento della macchina frigorifera reversibile sarà

$$\xi = \frac{Q_2}{|L|} = \frac{T_2}{\Delta T} = 1 \Rightarrow Q_2 = |L|$$

$$\Rightarrow Q_1 = 2|L| \Rightarrow Q_1' = 2|L| \cdot 2 = 4|L|$$

Dunque $\eta' = \frac{L}{Q_1'} = \frac{1}{4} = 0.25$

dove η è il rendimento di una macchina termica reversibile che opera tra le stesse sorgenti e che assorbe una quantità di calore Q_1 dalla sorgente a temperatura maggiore e produce un lavoro L. Quest'ultima non è altro che la macchina di Carnot reversibile usata come macchina frigorifera e il cui rendimento (come macchina termica) è pari a

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

Pertanto, il rendimento della macchina irreversibile corrisponde a

$$\eta' = \frac{L}{\varepsilon Q_1} = \frac{1}{\varepsilon}\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = \frac{T_1 - T_2}{\varepsilon T_1} = 0.25$$

D'altra parte, la variazione di entropia complessiva delle due sorgenti in un ciclo di funzionamento delle due macchine sarà pari a

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = -\frac{Q_1'}{T_1} + \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_2'}{T_2}$$

ma, dato che per una macchina reversibile è

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} \quad \text{oppure} \quad Q_1 = \left(\frac{T_1}{T_2}\right) Q_2$$

Allora: $\Delta S = \frac{Q_2'}{T_2} - \frac{Q_1'}{T_1}$

Notando che possiamo anche scrivere le seguenti

$$Q_1 = \left(\frac{T_1}{T_2}\right) Q_2 \Rightarrow Q_1' = \varepsilon Q_1 = \varepsilon \left(\frac{T_1}{T_2}\right) Q_2$$

$$\eta' = \frac{Q_1' - Q_2'}{Q_1'} \Rightarrow Q_2' = Q_1' - \eta' Q_1' = (1 - \eta') Q_1'$$

Per la variazione di entropia delle sorgenti ricaviamo

$$\Delta S = (1-\eta')\,\varepsilon\,\frac{T_1}{T_2}\frac{Q_2}{T_2} - \varepsilon\,\frac{T_1}{T_2}\frac{Q_2}{T_1} = \varepsilon\,\frac{Q_2}{T_2^2}\left[(1-\eta')T_1 - T_2\right] = 15.3\ J/K$$

Si noti che tale risultato è in pieno accordo con la 2ª legge della termodinamica. Infatti, il sistema costituito sia dalle due macchine sia dalle sorgenti è un sistema chiuso che (nel complesso) segue una trasformazione irreversibile e pertanto (come abbiamo ricavato) deve subire una variazione di entropia positiva.

ES. 2

La sorgente ad alta temperatura è costituita da una miscela di acqua e vapore acqueo in equilibrio alla pressione normale. In effetti, l'acqua alla pressione normale (pressione atmosferica) è in equilibrio con il suo vapore alla temperatura di 100 °C (temperatura di ebollizione): quindi $T_1 = 100\ °C = 373\ K$.
Per una macchina termica che lavora tra due sorgenti, il rendimento è dato da

$$\eta_1 = \frac{L}{Q_1} = \frac{L}{L+Q_2}$$

dove $L = Q_1 - Q_2$ è il lavoro prodotto, mentre Q_1 e Q_2 sono i moduli dei calori scambiati con le sorgenti, rispettivamente, ad alta e bassa temperatura. Dai dati del problema ricaviamo che in un'ora la nostra macchina produce un lavoro

$$L = P \cdot 3600\,s = 1.98 \cdot 10^6\ J$$

e cede alla sorgente a bassa temperatura, nello stesso tempo, una quantità di calore

$$Q_2 = 1200\ Kcal = 5.02 \cdot 10^6\ J$$

Corrispondentemente è

$$\eta_1 = \frac{L}{L+Q_2} = 0.283$$

Infine, essendo $\eta_1 = \varepsilon\eta$ dove η è il rendimento di una macchina di Carnot che opera tra le stesse temperature, possiamo scrivere

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{\eta_1}{\varepsilon} \Rightarrow T_2 = \left(1 - \frac{\eta_1}{\varepsilon}\right)T_1 = 197\ K = -76\ °C$$

ES. 3

Pensando alle macchine termiche che lavorano tra due temperature, sappiamo che quella con il rendimento più elevato è quella che realizza il ciclo di Carnot che ha un rendimento esprimibile come

$$\eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

dove T_1 e T_2 sono le temperature (espresse in Kelvin) delle sorgenti calda e fredda, rispettivamente. Perciò, nel nostro caso, ponendo $T_1 = 495\ °C \approx 768\ K$ e $T_2 = 95\ °C \approx 368\ K$, si otterrebbe

$$\eta_c = 0.521$$

Conseguentemente, il rapporto tra il rendimento del nostro motore e quello della corrispondente macchina di Carnot è

$$\frac{\eta}{\eta_c} = \frac{0.150}{0.521} = 0.288$$

La potenza che la macchina utilizza per manovrarsi è quella prodotta dal motore, quindi

$$P = 155\ CV = 114\ KW$$

Ricordando la definizione di rendimento possiamo subito dire che se L è il lavoro prodotto dal motore in un ciclo, il calore assorbito è pari a

$$Q_a = \frac{L}{\eta}$$

che in un'ora sarà pari a

$$Q_a = \frac{P \Delta t}{\eta} = 2.73 \cdot 10^6\ KJ$$

Infine ragionando come in una macchina di Carnot, potremmo dire che $L = Q_a - Q_p$, dove Q_p corrisponde al calore ceduto alla sorgente a bassa temperatura. Dato che tale calore viene proprio perso, può essere visto come il calore dissipato, che quindi risulterà pari a

$$Q_p = Q_a - L = \left(\frac{1}{\eta} - 1\right) P \Delta t = 2.33 \cdot 10^6\ KJ$$

$\boxed{\text{Es. 4}}$

A ogni ciclo della macchina il lavoro è pari alla somma delle quantità di calore scambiate

$$L = Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q + Q_2 + Q_3 = \frac{3}{2} Q$$

D'altra parte la variazione di entropia dell'universo, che nel nostro caso coincide con le sorgenti, è

$$\Delta S = -\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_3}{T_3} = 2\frac{Q}{T} \Rightarrow -\frac{Q_2}{2} - Q_3 = Q$$

Mettendo a sistema queste due relazioni, si ottiene

$$Q_2 = 3Q \qquad e \qquad Q_3 = -\frac{5}{2}Q$$

Quindi la macchina assorbe calore dalle sorgenti 1 e 2 e, perciò, il suo rendimento sarà

$$\eta = \frac{L}{Q_1 + Q_2} = \frac{\frac{3}{2}Q}{4Q} = \frac{3}{8}$$

Invece, per la macchina reversibile il rendimento sarà dato da

$$\eta_{rev} = \frac{L_{rev}}{Q_1 + Q_2}$$

dove, come in precedenza, il lavoro é ancora pari alla somma dei calori scambiati con le tre sorgenti

$$L_{rev} = Q_1 + Q_2 + Q_{3,rev}$$

ma in questo caso $Q_{3,rev}$ deve essere tale da rendere la variazione di entropia nel ciclo nulla!
Con questa condizione si ha

$$\Delta S_{rev} = -\frac{Q_1}{T} - \frac{Q_2}{\frac{2}{3}T} - \frac{Q_{3,rev}}{\frac{1}{3}T} = 0 \Rightarrow Q_{3,rev} = -\frac{11}{6}Q$$

e conseguentemente

$$L_{rev} = \frac{13}{6}Q$$

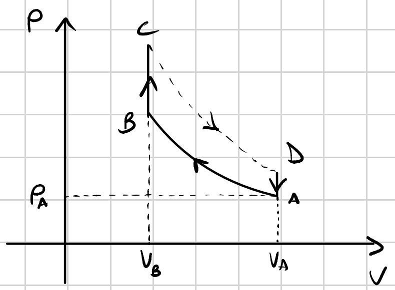
Pertanto, il rendimento della macchina reversibile é

$$\eta_{rev} = \frac{L_{rev}}{Q_1 + Q_2} = \frac{13}{24}$$

maggiore di quello della macchina irreversibile

$\boxed{\text{ES. 5}}$

Il ciclo delineato nel testo del problema ha la forma seguente (la trasformazione $C \to D$ essendo irreversibile é stata delineata con una linea tratteggiata).



Prima di tutto si nota che

$$n = \frac{p_A V_A}{R T_A} = 1.604 \text{ mol}$$

Il lavoro totale e il calore complessivo scambiato nel ciclo sono pari a

$$L = Q = L_{AB} + L_{CD} = 1.5 \cdot 10^3 \text{ J}$$

D'altra parte $Q = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{DA}$. La trasformazione $A \to B$ è un'isoterma reversibile e quindi

$$Q_{AB} = L_{AB} = nRT_A \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = -4.394 \cdot 10^3 \text{ J}$$

Notando poi che, lungo il ciclo, il calore viene assorbito solo nella trasformazione $B \to C$ e ricordando la definizione di rendimento, abbiamo

$$Q_{ass} = Q_{BC} = \frac{L}{\eta} = 10 \cdot 10^3 \text{ J}$$

Infine, il calore scambiato nella trasformazione $D \to A$ è

$$Q_{DA} = L - Q_{AB} - Q_{BC} = -4.105 \cdot 10^3 \text{ J}$$

La trasformazione $B \to C$ è un'isocora reversibile e quindi deve essere

$$Q_{BC} = nc_v(T_C - T_B) \Rightarrow c_v = \frac{Q_{BC}}{n(T_C - T_B)}$$

Per meglio valutare la natura del gas, calcoliamo il rapporto c_v/R che nel nostro caso è pari a

$$\frac{c_v}{R} = \frac{Q_{BC}}{nR(T_C - T_B)} = 2.5 = \frac{5}{2}$$

Si potrebbe ricavare anche considerando il lavoro nella trasformazione $C \to D$ che, essendo comunque un'adiabatica, per la 1ª legge della termodinamica è pari a

$$L_{CD} = -\Delta E_{int,CD} = -nc_v(T_D - T_C)$$

che ci permette di dire immediatamente che il gas è biatomico.
Considerando la trasformazione $D \to A$ possiamo scrivere

$$Q_{DA} = nc_v(T_A - T_D) \Rightarrow T_D = T_A - \frac{Q_{DA}}{nc_v} = 423.1 \text{ K}$$

Infine, la variazione di entropia nella trasformazione $C \to D$ (non nulla perché anche se adiabatica è irreversibile), è data dalla seguente

$$\Delta S_{CD} = nc_v \ln\left(\frac{T_D}{T_C}\right) + nR \ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right) = 3 \text{ J/K}$$

ES. 6

La temperatura del gas nello stato 1 corrisponde anche alla temperatura dell'ambiente circostante ed è

$$T_1 = \frac{P_1 V_1}{nR} = 244 K$$

Il complesso di trasformazioni costituisce un ciclo. Nel ciclo abbiamo una prima compressione adiabatica reversibile ($1 \to 2$), poi una trasformazione isocora irreversibile ($2 \to 3$) e quindi un'espansione isoterma reversibile ($3 \to 1$). Nella trasformazione $1 \to 2$ deve essere $TV^{\gamma - 1} = cost.$ con

$$\gamma = c_P / c_V = 7/5 \quad \text{(dato che il gas è biatomico)}$$

Quindi: $T_2 V_2^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma - 1} \Rightarrow T_2 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \cdot T_1 = 2^{\gamma-1} \cdot T_1 = 322 K$

Questa costituisce anche la massima temperatura raggiunta dal gas.
Dalla prima legge della termodinamica possiamo subito ricavare che il lavoro compiuto in tale trasformazione è

$$L_{12} = -\Delta E_{int,12} = -nc_V (T_2 - T_1) = \frac{5}{2} nR \left(1 - 2^{\gamma-1}\right) T_1 = \frac{5}{2} nR \left(1 - 2^{2/5}\right) T_1$$

Nella trasformazione $2 \to 3$ il pistone è mantenuto fisso e quindi il lavoro compiuto è nullo. Infine, nella trasformazione $3 \to 1$ il lavoro compiuto è pari a

$$L_{3\to1} = \int_3^1 p dV = nRT_1 \int_3^1 \frac{dV}{V} = nRT_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$$

Il lavoro complessivo fatto dal gas è quindi

$$L = L_{1\to2} + L_{3\to1} = nRT_1 \left[\frac{5}{2}\left(1 - 2^{2/5}\right) + \ln 2\right] = -536 J$$

Essendo questo il lavoro compiuto dal gas nel ciclo, il lavoro compiuto dal pistone sarà pari a

$$L_{pistone} = -L = 536 J$$

Nella trasformazione isocora $2 \to 3$ il gas scambia calore irreversibilmente con l'ambiente circostante. Dalla prima legge della termodinamica abbiamo

$$Q_{23} = \Delta E_{int,12} = nc_V (T_3 - T_2) = nc_V (T_1 - T_2) = \frac{5}{2} nR T_1 \left(1 - 2^{2/5}\right)$$

e quindi il calore scambiato dall'ambiente durante tale trasformazione è

$$Q_{amb,23} = -Q_{23} = \frac{5}{2} nRT_1 \left(2^{2/5} - 1\right) > 0$$

Perciò, la corrispondente variazione di entropia (l'ambiente si mantiene a temperatura costante T_1) è

$$\Delta S_{amb,12} = \frac{Q_{amb,23}}{T_1} = \frac{5}{2} nR\left(2^{2/5}-1\right) = 16.6\ J/K$$

Si noti che durante la stessa trasformazione la variazione di entropia subita dal gas è

$$\Delta S_{23} = nc_v \ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right) = n\frac{5}{2}R\ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right) = n\frac{5}{2}R(1-\mu)\ln 2 = -nR\ln 2 = -14.4\ J/K$$

Conseguentemente, durante la seconda trasformazione la variazione di entropia dell'universo (gas + ambiente) è

$$\Delta S_{universo,23} = \Delta S_{23} + \Delta S_{amb,23} = nR\left[-\ln 2 + \frac{5}{2}\left(2^{2/5}-1\right)\right] = 2.19\ J/K > 0$$

in accordo con il fatto che la trasformazione è irreversibile e che l'universo è un sistema chiuso.