Università Degli Studi di Padova
Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione (DEI)
Corsi di laurea in Ingegneria

Studente: Federico Simioni
Email: federico.simioni@studenti.unipd.it
Disciplina: Fisica Generale 1

Lezione 8

(1) Due sfere omogenee identiche, di raggio R = 1 cm e massa m = 100 g, scendono lungo un piano inclinato, con inclinazione $\theta = \pi/10$ rispetto all'orizzontale. La prima sfera scivola senza rotolare in assenza di ogni forma di attrito; invece la seconda scende rotolando senza strisciare, in assenza di attrito volvente. Determinare le accelerazioni con le quali scendono i centri di massa delle due sfere.

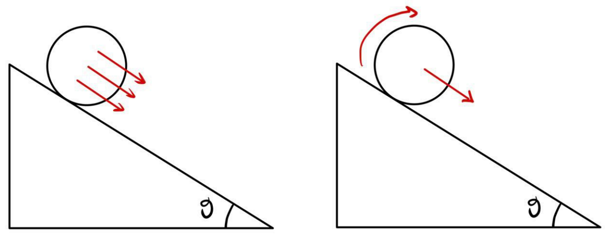

Figura 1: Rappresentazione grafica esercizio 1

(2) Una ruota di massa M = 5 kg e raggio R (assimilabile ad un cilindro omogeneo) è poggiata su un piano inclinato di un angolo $\theta = 45°$ rispetto all'orizzontale. Intorno alla ruota, vincolata a rotolare senza strisciare sul piano inclinato, è avvolta una funicella ideale al cui altro estremo, dopo essere passata per una puleggia ideale, è appeso un blocchetto di massa m.

1. Determinare il valore m* della massa del blocchetto per cui il sistema si trova in equilibrio meccanico.

Supponendo poi che la massa del blocchetto sia pari al doppio del valore m* precedentemente trovato, si lascia andare il sistema dalla sua situazione di equilibrio. Determinare:

2. l'accelerazione del centro di massa della ruota nel moto che viene a svilupparsi.

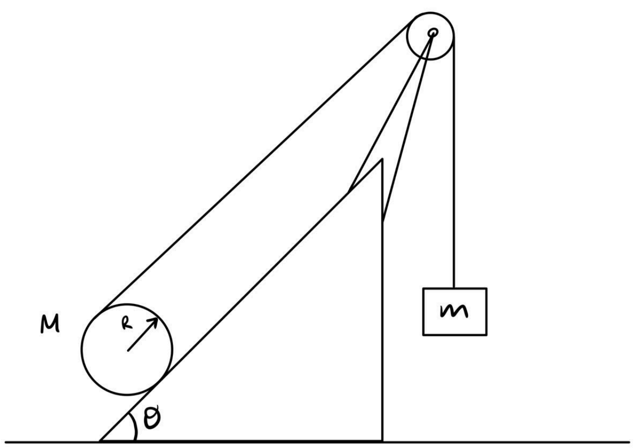

Figura 2: Rappresentazione grafica esercizio 2

(3) Una lastra di massa M = 20 kg è appoggiata sul pavimento e può scivolare su di esso con attrito trascurabile. Sulla lastra è posto un cilindro omogeneo di raggio R = 15 cm e massa m = 10 kg (vedi Figura 3). Lastra e cilindro sono inizialmente in quiete. A un certo istante alla lastra viene applicata una forza costante, parallela al pavimento, di modulo F = 100 N. Supponendo che il cilindro non scivoli rispetto alla lastra, determinare:

1. l'accelerazione a_l della lastra;
2. l'accelerazione angolare α_c del cilindro;
3. il minimo valore di μ_s, $\mu_{s,min}$, affinchè il cilindro effettivamente non scivoli.

[*Supporre che l'asse del cilindro sia perpendicolare alla direzione di moto della lastra.*]

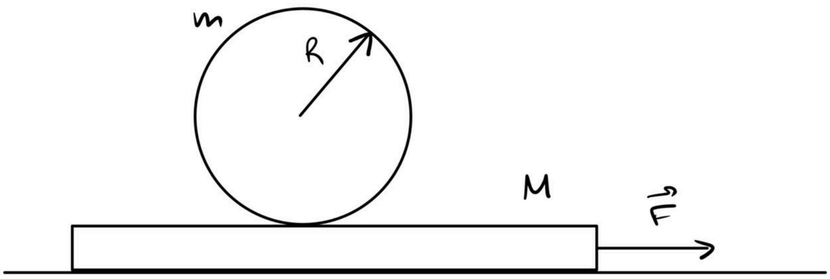

Figura 3: Rappresentazione grafica esercizio 3

(4) Una sbarra omogenea di lunghezza 6a e massa 8m si trova su di un piano liscio orizzontale. Due corpi puntiformi, di massa m e 2m, si muovono sullo stesso piano orizzontale con velocità rispettivamente 2v e v in direzione ortogonale alla sbarra e versi opposti (vedi Figura 4). I due corpi colpiscono in contemporanea la sbarra rispettivamente alle distanze 2a e a dal suo centro e vi rimangono attaccati. Subito dopo il sistema sbarra+corpi inizia a ruotare. Si determinino:

1. la velocità del centro di massa;
2. il momento angolare del sistema;
3. la velocità angolare di rotazione;
4. l'energia cinetica rotazionale.

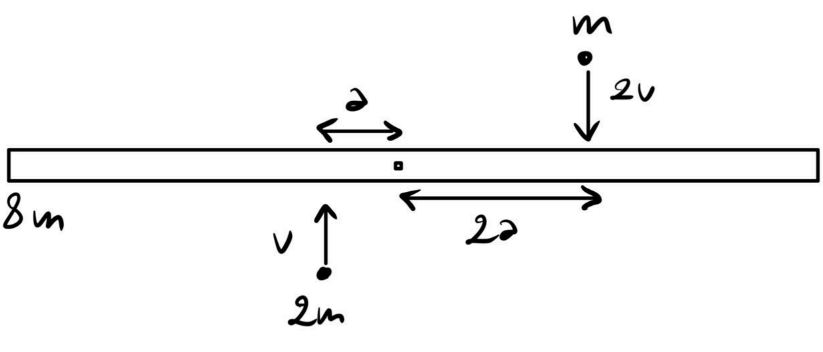

Figura 4: Rappresentazione grafica esercizio 4

(5) Un corpo puntiforme di massa m = 300g viene lanciato lungo un piano orizzontale con una velocità v_0 verso l'estremo inferiore di un'asta sottile (di massa M = 1.5 kg e lunghezza l = 60 cm) appesa per il suo estremo superiore e disposta verticalmente (vedi Figura 5). Sapendo che il corpo parte da una distanza d = 3 m dall'asta, che il piano presenta un coefficiente d'attrito dinamico μ_d =

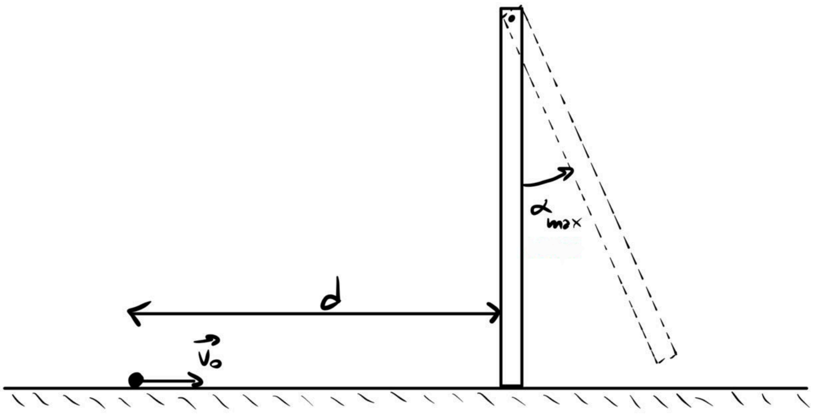

Figura 5: Rappresentazione grafica esercizio 5

0.5 e che l'urto tra corpo e asta è completamente anelastico, determinare v_0 affinchè l'asta dopo l'urto raggiunga un angolo massimo $\alpha_{max} = \pi/4$.

6 Mentre corre a una velocità $v_0 = 5$ m/s, un ragazzino di massa m = 45 kg salta sul bordo di una giostra inizialmente in quiete. La giostra è assimilabile a un disco omogeneo orizzontale di massa M = 25 kg e raggio r = 100 cm libero di ruotare senza attriti attorno a un asse verticale passante per il suo centro; al termine del salto il ragazzino, che può essere considerato come un punto materiale, è solidale con essa. Successivamente il ragazzino si muove sulla giostra fino a raggiungere il centro. Nell'ipotesi che $\vec{v_0}$ sia tangente alla giostra, determinare:

1. la velocità angolare della giostra dopo il salto;
2. la variazione di energia cinetica del sistema giostra+ragazzino durante il salto;
3. la velocità angolare della giostra quando il ragazzino ne raggiunge il centro;
4. il lavoro compiuto dal ragazzino durante lo spostamento sulla superficie della giostra.

ES. 1

La prima sfera è soggetta soltanto alla forza di gravità $m\vec{g}$ e alla reazione normale $\vec{N}$ del piano. Data l'assenza di attriti, essa scenderà con moto puramente traslatorio e quindi possiamo trattarla alla stregua di un punto materiale. Dalla 2ª legge della dinamica possiamo scrivere

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$$

Prendendo le componenti parallela e perpendicolare al piano inclinato, si ha:

$$\begin{cases} ma = mg\sin\theta \\ 0 = N - mg\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = g\sin\theta \\ N = mg\cos\theta \end{cases}$$

Quindi si ha: $a_1 = g\sin\theta = 3.03\ m/s^2$

E questa, ovviamente, è anche l'accelerazione del suo centro di massa.
La seconda sfera è soggetta alla forza di gravità $m\vec{g}$, alla reazione normale del piano $\vec{N}$ e alla forza di attrito statico $\vec{F}_a$. Poiché la seconda sfera rotola senza strisciare, essa non può essere considerata un punto materiale. Per la seconda sfera (calcolando i momenti rispetto all'asse orizzontale, passante per il centro della sfera e parallelo al piano inclinato) le equazioni della dinamica si scrivono

$$\begin{cases} m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_a \\ I\alpha = RF_a \end{cases}$$

Dove I e α sono il momento d'inerzia della sfera rispetto all'asse passante per il suo centro e l'accelerazione angolare. Considerando le componenti parallela e perpendicolare al piano inclinato si possono scrivere le seguenti

$$\begin{cases} ma = mg\sin\theta - F_a \\ 0 = N - mg\cos\theta \\ I\frac{a}{R} = RF_a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = mg\cos\theta \\ F_a = I\frac{a}{R^2} \\ ma = mg\sin\theta - I\frac{a}{R^2} \end{cases}$$

Dove (essendo un moto di puro rotolamento) si è fatta la sostituzione $\alpha = \frac{a}{R}$.
Ricordando che il momento di inerzia di una sfera omogenea rispetto ad un asse passante per il suo centro è $I = \frac{2}{5}mR^2$, si ricava

$$ma + I\frac{a}{R^2} = mg\sin\theta \Rightarrow ma + \frac{2}{5}mR^2\frac{a}{R^2} = mg\sin\theta \Rightarrow \frac{7}{5}ma = mg\sin\theta$$

Perciò, l'accelerazione del centro di massa della sfera che scende rotolando è

$$a_2 = \frac{5}{7}g\sin\theta = 2.17\ m/s^2$$

Es. 2

Considerando le forze che agiscono sul blocchetto e la seconda legge della dinamica, il suo equilibrio comporta la validità della seguente relazione

$$m^* g - T = 0$$

dove T corrisponde alla tensione della corda.
D'altra parte, tenendo presente la 2ª legge della dinamica in forma angolare, l'equilibrio della ruota è determinato dalla seguente

$$2RT - RMg \sin\theta = 0$$

dove i due termini corrispondono ai momenti delle forze agenti sulla ruota calcolati rispetto al suo punto di contatto con il piano inclinato. Combinando le due relazioni si ottiene

$$T = m^* g \Rightarrow 2Rm^* g = RMg \sin\theta \Rightarrow m^* = \frac{1}{2} M \sin\theta = 1.77\,Kg$$

Quando la massa del blocchetto è pari a $m = 2m^* = M \sin\theta$ e il sistema viene lasciato libero, il blocchetto prenderà a scendere, mentre la ruota, rotolando, prenderà a salire lungo il piano inclinato.
Ora i moti dei due corpi saranno regolati dalle seguenti relazioni

$$ma = mg - T; \qquad I_p \cdot \alpha = 2RT - RMg \sin\theta$$

Dove $I_p = \frac{1}{2} MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2} MR^2$ è il momento d'inerzia della ruota rispetto all'asse passante per il punto di contatto con il piano inclinato, mentre a e $\alpha = d\omega/dt$ sono l'accelerazione del blocchetto e l'accelerazione angolare della ruota (ω è la sua velocità angolare istantanea), rispettivamente.
Sappiamo poi che in un moto di puro rotolamento la velocità del vertice della ruota (il punto più lontano dal piano di appoggio) è doppia rispetto a quella del suo centro di massa. Pertanto, tenendo anche conto dell'usuale relazione tra la velocità di rotazione e la velocità del centro di massa, possiamo scrivere $a = 2a_{cm}$. Inoltre, essendo $a_{cm} = R\alpha$, abbiamo

$$a = 2a_{cm} \qquad e \qquad \alpha = \frac{a_{cm}}{R}$$

Utilizzando tali relazioni, esplicitando l'espressione del momento d'inerzia e semplificando, le precedenti equazioni assumono la seguente forma

$$2m a_{cm} = mg - T; \qquad \frac{3}{2} M a_{cm} = 2T - Mg \sin\theta$$

Da queste, eliminando T, si ricava

$$a_{cm} = \frac{(2m - M\sin\theta)\, g}{4m + \frac{3}{2} M}$$

che, nel caso in cui $m = 2m^* = M \sin\theta$, diventa

$$a_{cm} = \frac{Mg\sin\theta}{4M\sin\theta + \frac{3}{2}M} = \frac{2g\sin\theta}{8\sin\theta + 3} = 0.163 \cdot g = 1.60\ m/s^2$$

ES. 3

Dall'istante in cui la lastra è soggetta alla forza $\vec{F}$ il cilindro risentirà di una forza di attrito diretta nella stessa direzione di $\vec{F}$. In assenza di slittamento si parlerà di forza di attrito statico $\vec{F}_s$; al contrario, con scivolamento parleremo di forza di attrito dinamico $\vec{F}_d$. Si noti che in entrambi i casi, per il principio di azione e reazione, sulla lastra, oltre a $\vec{F}$, agirà una forza uguale e opposta alla forza di attrito agente sul cilindro. Durante l'avanzamento della lastra anche il C.D.M. del cilindro avanzerà, ma il cilindro ruoterà in verso antiorario. In assenza di scivolamento l'applicazione della 2ª legge della dinamica in forma lineare a lastra e cilindro ci permette di scrivere le seguenti

$$\begin{cases} M a_\ell = F - F_s \\ m a_c = F_s \end{cases} \Rightarrow a_\ell = \frac{F - F_s}{M}; \quad a_c = \frac{F_s}{m}$$

Dove a_c è l'accelerazione del CDM del cilindro rispetto al suolo.
D'altra parte, la 2ª legge della dinamica in forma angolare applicata alla rotazione del cilindro ci porta alla seguente

$$I \alpha_c = -R F_s \Rightarrow \alpha_c = -\frac{2F_s}{mR}$$

dove $I = \frac{1}{2} m R^2$ è il momento d'inerzia del cilindro rispetto all'asse passante per il suo CDM. In assenza di scivolamento il cilindro segue un moto di puro rotolamento rispetto alla lastra e quindi, se indichiamo con a'_c l'accelerazione del CDM del cilindro rispetto alla lastra, dovrà essere

$$\alpha_c = \frac{a'_c}{R}$$

Pensando al moto relativo tra cilindro e lastra, è facile notare che tra le accelerazioni vale la seguente:

$$a_c = a_\ell + a'_c \Rightarrow a'_c = a_c - a_\ell$$

e che quindi è: $\alpha_c = \frac{a'_c}{R} = \frac{a_c - a_\ell}{R}$

Sostituendo quest'ultima nell'espressione trovata prima per α_c e introducendo nella stessa le espressioni di a_ℓ e a_c ottenute all'inizio, si ricava la seguente

$$a_c - a_\ell = -\frac{2F_s}{m} \Rightarrow \frac{F_s}{m} - \frac{F - F_s}{M} = -\frac{2F_s}{m}$$

dalla quale si ottiene (con qualche passaggio)

$$\left(\frac{m+M}{mM} + \frac{2}{m}\right) F_s = \frac{F}{M} \Rightarrow F_s = \frac{mF}{m+3M}$$

Pertanto per le accelerazioni si ricava

$$a_\ell = \frac{F - F_s}{M} = \frac{3F}{m+3M} = 4.29\ m/s^2; \quad a_c = \frac{F_s}{m} = \frac{F}{m+3M} = \frac{a_\ell}{3}$$

$$\alpha_c = \frac{a_c - a_\ell}{R} = -\frac{2F}{(m+3M)R} = -\frac{2a_\ell}{3R} = -19.0\ rad/s^2 \quad \circledast$$

(*) Quest' ultima relazione poteva essere ricavata anche in un altro modo. Mettiamoci nel sistema di riferimento (non inerziale) solidale con la lastra e applichiamo la 2ª legge della dinamica in forma angolare all'asse passante per il punto di istantaneo contatto tra lastra e cilindro. La non inerzialità del sistema introduce anche le forze apparenti; in effetti, rispetto all'asse considerato, solo la forza apparente $-m\vec{a}_e$ ha momento e possiamo scrivere la seguente equazione

$$I_P \alpha_c = -m a_e R$$

dove $I_P = \frac{3}{2} m R^2$ è il momento d'inerzia del cilindro rispetto all'asse per il punto di istantaneo contatto. Esplicitando I_P si ricava immediatamente la relazione $\alpha_c = -\frac{2 a_e}{3R}$, identica a prima.

Se il cilindro effettivamente non scivola sulla lastra, allora

$$F_s \le F_{s,max} = \mu_s N = \mu_s m g$$

Da tale relazione, tenendo presente l'espressione che abbiamo ottenuto per F_s, si ricava

$$\mu_s \ge \mu_{s,min} = \frac{F_s}{mg} = \frac{F}{(m+3M)\,g} = 0.146$$

$\boxed{\text{ES. 4}}$

Essendo nulla la risultante delle forze esterne, nell'urto la quantità di moto del sistema si conserva. Inoltre, prima dell'urto la velocità del centro di massa del sistema è nulla, come si vede dalla seguente

$$M_{cm} V_{cm} = m(2v) - (2m)v = 0$$

Di conseguenza, anche dopo l'urto sarà nulla: questo significa che dopo l'urto il sistema ruoterà attorno al suo centro di massa, la cui posizione coincide con il centro dell'asticella. Infatti, subito prima dell'urto possiamo scrivere

$$x_{cm} = \frac{m \cdot 2a + 2m \cdot (-a) + (8m)\cdot 0}{m + 2m + 8m} = 0$$

Ma nell'urto si conserva anche il momento angolare. La sua ampiezza prima dell'urto è

$$L = m \cdot 2v \cdot 2a + 2m \cdot v \cdot a = 6 m v a$$

ed è diretto lungo l'asse ortogonale al foglio, con verso entrante nel foglio.
Dopo l'urto il valore del momento angolare del sistema deve rimanere invariato. In tal caso, dato che i due corpi formano un tutt'uno con la sbarra, il momento angolare del sistema rispetto al centro di massa sarà pari a $I\omega$, dove I, che è dato da

$$I = \frac{1}{12}(8m)(6a)^2 + m(2a)^2 + 2ma^2 = (24+4+2)\,ma^2 = 30\,ma^2$$

è il momento d'inerzia del sistema rispetto al centro di massa stesso. Perciò abbiamo

$$I\omega = L = 6mva \Rightarrow \omega = \frac{6mva}{I} = \frac{6mva}{30ma^2} = \frac{v}{5a}$$

Infine, l'energia cinetica rotazionale è data da

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2}\frac{30 m a^2 v^2}{25 a^2} = \frac{3}{5} m v^2$$

ES. 5

Applicando la conservazione dell'energia al moto uniformemente decelerato del corpo puntiforme, otteniamo

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -\mu_d m g d \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{v_1^2 + 2\mu_d g d}$$

dove v_1 è la velocità del corpo all'impatto con l'asta.
Nell'urto con l'asta si conserva solo il momento angolare del sistema rispetto al punto in cui l'asta è appesa. Quindi,

$$m v_1 \ell = I_{tot}\, \omega_f = [m\ell^2 + I]\omega_f \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{[m\ell^2 + I]}{m\ell}\omega_f = \frac{[3m\ell^2 + M\ell^2]}{3m\ell}\omega_f$$

dove $I = \frac{1}{3} M \ell^2$ è il momento d'inerzia dell'asta rispetto al punto di sospensione e ω_f è la velocità angolare del sistema asta+corpo subito dopo l'urto.
In tale rotazione si conserva l'energia meccanica e quando il sistema asta+corpo ruotando raggiungerà il massimo angolo α_{max} si fermerà (momentaneamente). Perciò

$$\frac{1}{2} I_{tot}\, \omega_f^2 = \left[m g \ell + M g \frac{\ell}{2}\right](1 - \cos\alpha_{max})$$

e ancora: $\omega_f = \sqrt{\frac{2}{I_{tot}}\left[m g \ell + M g \frac{\ell}{2}\right](1 - \cos\alpha_{max})} = \sqrt{\frac{3[2m + M]g}{2(3m + M)\ell}(2 - \sqrt{2})} = 3.54$ rad/s

Quindi, sfruttando le relazioni precedentemente ricavate, otteniamo

$$v_1 = \frac{(3m + M)\ell}{3m}\omega_f = 5.67 \text{ m/s}; \quad v_0 = \sqrt{v_1^2 + 2\mu_d g d} = 7.85 \text{ m/s}$$

ES. 6

L'interazione del ragazzino con la giostra è di fatto una collisione completamente anelastica, dal momento che al termine del salto il ragazzino è solidale con la giostra. I supporti dell'asse della giostra devono generare le reazioni vincolari necessarie a sorreggere il sistema (e dunque a contrastare l'azione della gravità) e a impedire che l'asse di rotazione cambi direzione durante la collisione; affinché ciò possa succedere, per il teorema del momento angolare, i supporti dell'asse devono essere capaci di contrastare l'azione di forze in grado di esercitare un momento normale all'asse di rotazione. Per questo motivo, in situazioni in cui è garantita una rotazione attorno ad un asse fisso, è sufficiente un'analisi delle componenti assiali della risultante dei momenti delle forze e della corrispondente variazione del momento angolare; indicata con z la direzione dell'asse di rotazione, il teorema del momento angolare assume la forma

La scelta del polo Ω (convenientemente posto sull'asse di rotazione) è ininfluente nel momento in cui si considerano solo le componenti assiali dei momenti

$$\tau_z = (\vec{\tau}_e)_z = \left(\frac{d\vec{L}_e}{dt}\right)_z = \frac{dL_z}{dt}$$

Nel caso specifico, inoltre, sono esclusi per ipotesi attriti di qualunque tipo, per cui risulta $\tau_z = 0$; questo porta a concludere che per il sistema in esame la componente assiale del momento angolare si conserva durante l'urto. Pertanto si potrà scrivere:

$$mv_0 r = (I_z + mr^2)\,\omega_1$$

in cui $I_z = \frac{1}{2}Mr^2$ è il momento d'inerzia della giostra per rotazioni attorno al proprio asse e ω_1 è la velocità angolare del sistema al termine del salto. Da questo è immediato determinare

$$\omega_1 = \frac{2mv_0}{(M+2m)\,r} = 3.9\ rad/s$$

Che il salto del ragazzino possa effettivamente considerarsi una collisione perfettamente anelastica è testimoniato dalla variazione di energia cinetica, che ammonta a

$$\Delta K_{01} = K_1 - K_0 = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -1.2\cdot 10^2\ J$$

in cui è posto $I_1 = I_z + mr^2$. Il segno di ΔK_{01} indica che si tratta di energia cinetica che viene persa durante l'interazione giostra-ragazzino: essa è riconducibile all'attrito che si sviluppa fra i due corpi, il cui lavoro viene dissipato sotto forma di calore.
Durante lo spostamento del ragazzino sulla superficie della giostra la situazione non cambia rispetto a quanto osservato precedentemente: non ci sono forze esterne (al sistema giostra + ragazzino) in grado di esercitare un momento parallelo all'asse di rotazione, per cui si conserva la componente assiale del momento angolare del sistema. Pertanto:

$$I_1\omega_1 = I_z\,\omega_2$$

Visto che nella posizione finale il momento d'inerzia del ragazzino è nullo. Questo permette di determinare la velocità angolare finale del sistema, ovvero

$$\omega_2 = \frac{I_1}{I_z}\omega_1 = \frac{M+2m}{M}\,\omega_1 = \frac{2mv_0}{Mr} = 18\ rad/s$$

Si noti che il risultato non dipende dal percorso seguito, che quindi non deve essere necessariamente radiale: è sufficiente che il punto di partenza e di arrivo coincidano.
Quest'ultima osservazione - seppure corretta - rende di fatto impossibile un calcolo esplicito del lavoro compiuto dal ragazzino in termini di integrale di linea $W_r = \int_\ell \vec{F}\cdot d\vec{s}$

Con ciò intendendo il lavoro della forza $\vec{F}$ esercitata dal ragazzino sulla giostra

Infatti, dal momento che il percorso di integrazione ℓ non è noto, non è ovvio come determinare il vettore $\vec{F}$. In casi come questi, però, viene in soccorso il teorema delle forze vive (o teorema dell' energia cinetica): non essendoci altre forze in grado di compiere lavoro al di fuori di $\vec{F}$, è chiaro che la risultante dei lavori delle forze (non solo esterne) agenti sul sistema coincide con W_r e pertanto

$$W_r = \Delta K_{12} = K_2 - K_1 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 - \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[I_2 \left(\frac{2mv_0}{Mr}\right)^2 - \left(I_2 + mr^2\right)\left(\frac{2mv_0}{(M+2m)r}\right)^2 \right] =$$

$$= m^2 v_0^2 \left[\frac{1}{M} - \frac{1}{M+2m} \right] = m v_0^2 \left[\frac{2m^2}{M(M+2m)} \right]$$

$$= 1.6 \text{ kJ}$$