Università Degli Studi di Padova
Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione (DEI)
Corsi di laurea in Ingegneria

Studente: Federico Simioni
Email: federico.simioni@studenti.unipd.it
Disciplina: Fisica Generale 1

Lezione 7

(1) Un corpo rigido è costituito da un'asta, di massa m = 8 kg e lunghezza d = 50 cm, e da un disco, di massa M = 3m e raggio R = d/4, saldati nel punto O (vedi Figura 1) e può ruotare liberamente intorno ad un'asse, perpendicolare al disegno, passante per tale punto. Per mantenere il sistema in equilibrio statico, con l'asta orizzontale, viene applicata una forza $\vec{\boldsymbol{F}}$ (vedi Figura 1) sull'estremo libero dell'asta. Determinare:

1. i moduli di $\vec{\boldsymbol{F}}$ e della reazione $\vec{\boldsymbol{N}}$ prodotta dal perno che sostiene il corpo in O.

Viene poi eliminata la forza $\vec{\boldsymbol{F}}$ e il corpo prende a ruotare sotto l'azione delle forze gravitazionali. Determinare:

2. l'accelerazione angolare del sistema nell'istante iniziale del moto;
3. la velocità angolare del sistema nell'istante in cui l'asta è verticale.

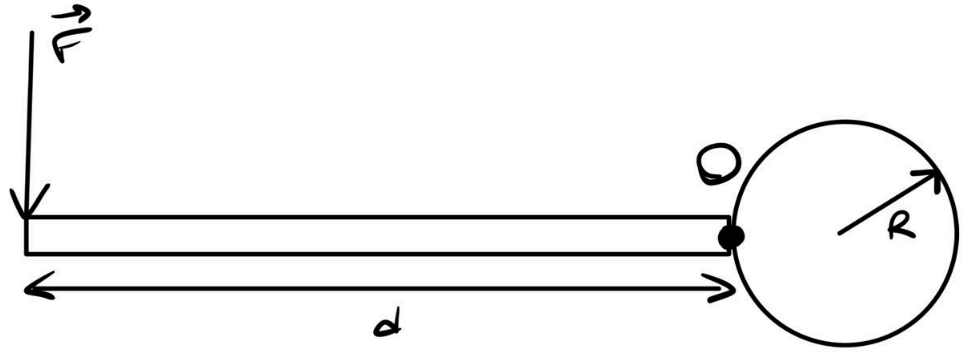

Figura 1: Rappresentazione grafica esercizio 1

(2) Una piattaforma circolare uniforme (di massa M = 200 kg e raggio R = 3 m) può ruotare senza attrito intorno al suo asse verticale. Sulla piattaforma, in quiete, vi è un uomo (massa m = 70 kg), fermo a distanza r = 2 m dall'asse. A un certo istante l'uomo inizia a correre lungo un percorso circolare concentrico con la piattaforma con una velocità (rispetto alla piattaforma) pari a v = 4 m/s. Determinare la velocità angolare con la quale la piattaforma ruota intorno al suo asse. [*Trattare l'uomo come un corpo puntiforme.*]

(3) Un'asta sottile rigida, di massa M = 2 kg e lunghezza l = 40 cm, è agganciata per un estremo a un punto fisso, posto ad una quota h = 300 cm dal suolo, intorno al quale può ruotare liberamente. L'asta, inizialmente ferma e disposta orizzontalmente, viene abbandonata al suo peso e, esattamente quando raggiunge la posizione verticale, il suo estremo libero si stacca dal punto a cui l'asta era agganciata. Si determini:

1. a quale distanza orizzontale (dalla verticale del punto di aggancio) l'asta (o meglio il suo centro di massa) raggiunge il suolo;
2. il numero di giri (approssimativo) che l'asta compie (intorno al suo centro di massa) durante il volo.

④ Una scatola cilindrica aperta è costituita da un sottile guscio cilindrico verticale, di raggio $R = 5 \cdot 10^{-2}$ m e massa $m_1 = 0.5$ kg, e da una base orizzontale equiparabile a un sottile disco, di raggio R e massa $m_2 = 0.1$ kg, e può ruotare senza attrito attorno all'asse verticale del guscio cilindrico (vedi Figura 2). La scatola, inizialmente ferma, viene portata ad una velocità angolare $\omega_1 = 10$ rad/s mediante l'applicazione temporanea di un momento costante $\tau = 4 \cdot 10^{-3}$ N·m. Successivamente, la scatola viene riempita versandovi della sabbia di massa complessiva $m_3 = 1.5$ kg. Determinare:

1. quanti giri compie la scatola durante l'applicazione del momento $\vec{\boldsymbol{\tau}}$;
2. la velocità angolare finale della scatola dopo il suo riempimento.

[*Supporre che la sabbia venga versata nella scatola facendola cadere lungo la verticale.*]

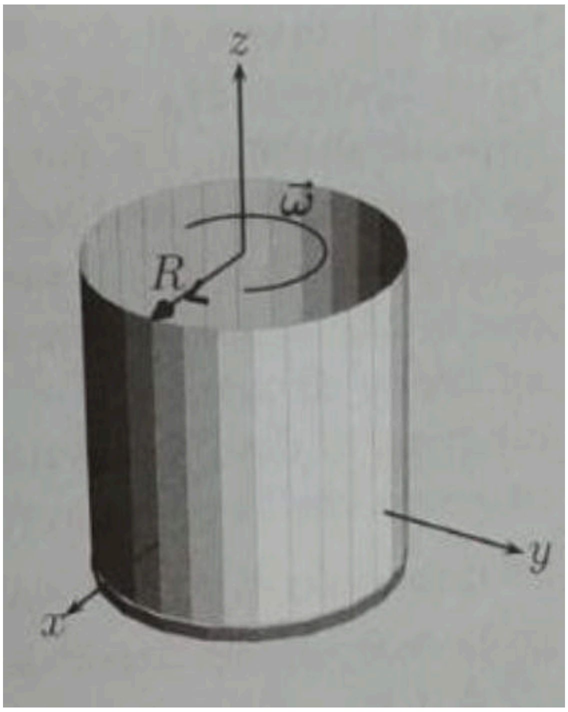

Figura 2: Rappresentazione grafica esercizio 4

(5) Due cilindri, il primo di raggio $R_1 = 20$ cm e massa $M_1 = 10$ kg e il secondo di raggio $R_2 = 12$ cm e massa $M_2 = 5$ kg, sono uniti (saldati) coassialmente in modo da formare la puleggia doppia mostrata in Figura 3. Nel cilindro 1 la massa è distribuita omogeneamente; invece l'altro è un cilindro cavo. Intorno ai due cilindri sono avvolte delle corde ideali di massa trascurabile, ai cui estremi liberi sono appesi i due corpi di Figura 3, aventi masse m_1 e $m_2 = 5$ kg. Nell'ipotesi che le corde non scivolino mai rispetto alla puleggia e che questa possa ruotare liberamente (con attrito trascurabile) intorno al proprio asse, determinare:

1. il valore di m_1, $m_{1,eq}$, in corrispondenza del quale il sistema è in equilibrio statico;
2. l'accelerazione angolare con cui ruota la puleggia nel caso in cui sia $m_1 = 2 \cdot m_{1,eq}$;
3. le tensioni delle due corde nel caso di cui al punto 2);
4. la forza con cui deve essere sostenuto il perno su cui ruota la puleggia, sempre nel caso di cui al punto 2).

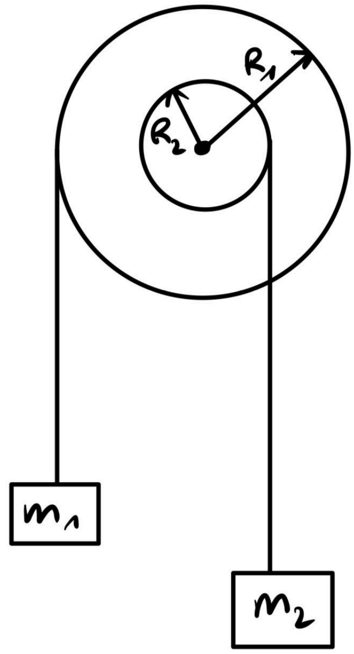

Figura 3: Rappresentazione grafica esercizio 5

ES. 1

L'equilibrio statico impone che siano nulle le risultanti delle forze e dei momenti che agiscono sul sistema. Quindi, scegliendo un asse verticale diretto verso il basso (dato che tutte le forze presenti sono verticali) e considerando positivi i momenti rispetto al punto O uscenti dal foglio, possiamo scrivere le seguenti

$$\begin{cases} 0 = F + mg + Mg - N = 0 \\ 0 = Fd + mg\frac{d}{2} - MgR \end{cases}$$

Si noti che la posizione del centro di massa del sistema lungo un asse x orizzontale verso destra con centro in O, poteva essere ricavato anche nel modo usuale

$$x_{cm} = \frac{M \cdot R + m\left(-d/2\right)}{M+m} = \frac{3 \cdot d/4 - m \cdot d/2}{4m} = \frac{d}{16}$$

in pieno accordo con d_{cm} trovato qui

Dalla seconda relazione ricaviamo

$$Fd = -mg\frac{d}{2} + MgR = -mg\frac{d}{2} + 3mg\frac{d}{4} = \frac{1}{4}mgd$$

$$= (4m)\,g\frac{d}{16} = M_{tot}\, g\, d_{cm}$$

dove $M_{tot} = 4m$ è la massa totale del corpo e $d_{cm} = d/16$ è la distanza del centro di massa da O. Pertanto

$$F = \frac{1}{4}mg = 19.6\,N \qquad e \qquad N = F + 4mg = \frac{17}{4}mg = 333\,N$$

Quando $\vec{F}$ viene rimossa, essendo il momento della forza non più bilanciato, il corpo prende a ruotare e il moto sarà determinato dalla 2ª legge della dinamica in forma angolare

$$I_0\,\alpha = \tau$$

dove I_0 è il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse passante per O. Sfruttando anche il teorema degli assi paralleli si vede che

oppure Huygens-Steiner

$$I_0 = \frac{1}{3}md^2 + \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{1}{3}md^2 + \frac{3}{2}MR^2 = \frac{59}{96}md^2$$

e quindi l'accelerazione angolare nell'istante iniziale è

$$\alpha_i = \frac{\tau_i}{I_0} = \frac{24g}{59d} = 7.98\ rad/s^2$$

D'altra parte, durante il moto rotazionale si conserva l'energia meccanica e quindi, confrontando la posizione iniziale con quella in cui il disco è nel punto più basso, ricaviamo

$$\frac{1}{2}I_0\,\omega^2 = 4mg\,d_{cm} \implies \omega = \sqrt{\frac{48g}{59d}} = 3.99\ rad/s$$

ES. 2

Prima di tutto notiamo che sul sistema piattaforma+uomo non agiscono momenti esterni diretti verticalmente. Questo significa che la componente verticale (lungo l'asse di rotazione della piattaforma) deve conservarsi! Se indichiamo con $I_p = \frac{1}{2}MR^2$ e $I_u = mr^2$ i momenti d'inerzia della piattaforma e dell'uomo rispetto all'asse di rotazione, e con ω_p e ω_u le rispettive velocità angolari (sempre rispetto allo stesso asse), dovremo avere

$$I_p\omega_p + I_u\omega_u = 0 \implies \omega_u = -\left(\frac{I_p}{I_u}\right)\omega_p = -\left(\frac{MR^2}{2mr^2}\right)\omega_p$$

dalla quale capiamo anche che la piattaforma ruota in senso inverso all'uomo.
La velocità angolare assoluta dell'uomo ω_u potrà essere scritta come la somma di quella della piattaforma ω_p e di quella di lui relativa alla piattaforma stessa anche pari a $\omega_r = v/r$. Cioè

$$\omega_u = \omega_p + \omega_r = \omega_p + \frac{v}{r} \Rightarrow -\left(\frac{MR^2}{2mr^2}\right)\omega_p = \omega_p + \frac{v}{r}$$

$$\Rightarrow \omega_p = -\frac{2mvr}{2mr^2 + MR^2}$$

Pertanto, si ricava $\omega_p = \dfrac{2mvr}{2mr^2 + MR^2} = 0.474 \text{ rad/s} = 4.53 \text{ giri/min}$

$\boxed{\text{ES. 3}}$

Mentre l'asta scende, ruotando intorno al suo estremo, la sua energia meccanica si conserva. Confrontando la situazione iniziale con quella in cui l'asta è verticale, possiamo scrivere le seguenti

$$\frac{1}{2} I\omega^2 = Mg\frac{\ell}{2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{Mg\ell}{I}}$$

Si può considerare l'energia legata alla velocità di traslazione? Sì, purché si consideri il centro di massa e non ci si dimentichi che ora l'oggetto ruota!

$$Mg\frac{\ell}{2} = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{M\ell^2}{12}\underbrace{\omega^2}_{\omega = \frac{v_{cm}}{\ell/2}}$$

dove ω è la velocità angolare dell'asta nel momento in cui raggiunge la disposizione verticale. Essendo il momento d'inerzia dell'asta pari a $I = \frac{1}{3}M\ell^2$, ricaviamo

$$\omega = \sqrt{\frac{Mg\ell}{I}} = \sqrt{\frac{3g}{\ell}} = 8.58 \text{ rad/s}$$

Una volta che l'asta si sgancia dal punto fisso intorno a cui stava ruotando, su di essa agisce un'unica forza esterna: la forza di gravità. Quindi, il suo centro di massa dovrà seguire un moto analogo a quello di un proiettile di massa M lanciato orizzontalmente con una velocità $v_0 = \frac{1}{2}\omega\ell$ da un'altezza $y = h - \ell/2$. Il tempo di caduta dell'asta t_0 è pari a

$$t_0 : \frac{1}{2}gt_0^2 = y \Rightarrow t_0 = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2(h-\ell/2)}{g}}$$

Conseguentemente, lo spostamento orizzontale è

$$d = v_0 t_0 = \omega\frac{\ell}{2}\cdot\sqrt{\frac{2(h-\ell/2)}{g}} = \sqrt{\frac{3}{2}(h-\ell/2)\ell} = 1.30\text{m}$$

Subito prima dell'inizio del suo volo l'asta stava ruotando con una velocità angolare ω intorno all'estremo agganciato al punto fisso. Durante il volo, data la mancanza di attriti, l'asta continua a ruotare con la stessa velocità angolare, ma intorno al suo centro di massa. Quindi, essendo $T = 2\pi/\omega$ il periodo di rotazione, il numero di giri che l'asta compie prima di raggiungere il suolo è

$$N_g = \frac{t_0}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{6(h-\ell/2)}{\ell}} = 1.03 \approx 1 \text{ giro}$$

ES. 4

Il momento d'inerzia della scatola vuota è pari alla somma dei momenti d'inerzia del guscio cilindrico e della base discoidale. Cioè

$$I_1 = m_1 R^2 + \frac{1}{2} m_2 R^2 = \left(m_1 + \frac{1}{2} m_2\right) R^2 = 1.37 \cdot 10^{-3} \; Kg \cdot m^2$$

Durante l'applicazione del momento $\vec{\tau}$ costante, dalla seconda legge della dinamica in forma angolare, otteniamo

$$I_1 \cdot \frac{d\omega}{dt} = \tau \Rightarrow \omega(t) = \left(\frac{\tau}{I_1}\right) t \Rightarrow \theta(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{I_1}\right) t^2$$

→ Moto uniformemente accelerato con velocità e posizione iniziale nulle

$$\rightarrow I_1 \cdot \alpha = \tau \rightarrow \boxed{\omega = \alpha \cdot t}$$

e, nel tempo t_1 in cui la scatola raggiunge la velocità angolare ω_1, per l'angolo di cui ruota la scatola si ricava:

$$\omega(t_1) = \omega_1 \Rightarrow t_1 = \frac{\omega_1 I_1}{\tau} \Rightarrow \theta(t_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{I_1}\right) t_1^2 = \frac{1}{2} \frac{I_1 \omega_1^2}{\tau}$$

Il numero di giri effettuato dalla scatola è quindi

$$n_{giri} = \frac{\theta(t_1)}{2\pi} = \frac{1}{4\pi} \frac{I_1 \omega_1^2}{\tau} = 2.73$$

Quando la scatola viene riempita di sabbia il suo momento d'inerzia diventa

$$I_2 = I_1 + \frac{1}{2} m_3 R^2 = \left(m_1 + \frac{1}{2} m_2 + \frac{1}{2} m_3\right) R^2$$

Mentre la sabbia viene versata la scatola rallenta a causa delle forze di attrito con la sabbia stessa, ma poiché tali forze sono interne al sistema scatola + sabbia e la sabbia si suppone scendere in verticale (i granelli di sabbia non hanno momento angolare lungo l'asse della scatola), il momento angolare del sistema deve conservarsi. Perciò

$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{I_1}{I_2} \omega_1 = \frac{2m_1 + m_2}{2m_1 + m_2 + m_3} \omega_1 = 4.23 \; rad/s$$

ES. 5

Se il sistema è in equilibrio statico, l'applicazione della 2ª legge della dinamica (nelle forme lineare e angolare) permette di scrivere le seguenti

$$\begin{cases} 0 = m_1 g - T_1 \\ 0 = T_2 - m_2 g \\ 0 = R_1 T_1 - R_2 T_2 \end{cases}$$

Dove T_1 e T_2 corrispondono alle tensioni delle corde (nonché alle intensità delle forze che gli estremi di tali corde esercitano sui corpi e sulle superfici della puleggia). Si noti anche che nello scrivere le equazioni si sono utilizzati degli assi verso il basso e verso l'alto, per le prime due, mentre per la terza abbiamo preso positivi i momenti uscenti dal foglio. Ricavando T_1 e T_2 dalle prime due e sostituendo nella terza, si ottiene

$$0 = R_1 m_1 g - R_2 m_2 g \Rightarrow R_1 m_1 = R_2 m_2 \Rightarrow m_1 = m_{1,eq} = \frac{R_2}{R_1} m_2 = 3\ \mathrm{Kg}$$

Ponendo $m_1 = 2 \cdot m_{1,eq} = 6\ \mathrm{Kg}$, il sistema non è più in equilibrio e le equazioni del moto diventano

$$\begin{cases} m_1 a_1 = m_1 g - T_1 \\ m_2 a_2 = T_2 - m_2 g \\ I\alpha = R_1 T_1 - R_2 T_2 \end{cases}$$

dove $I = \frac{1}{2} M_1 R_1^2 + M_2 R_2^2 = 0.272\ \mathrm{Kg \cdot m^2}$ e α sono il momento d'inerzia e l'accelerazione angolare della puleggia, mentre a_1 e a_2 sono le accelerazioni (lineari) dei due corpi.
Notando che è $a_1 = R_1\alpha$ e $a_2 = R_2\alpha$ (dato che le due parti della puleggia formano un tutt'uno e le corde non scivolano), dalle prime due equazioni ricaviamo le seguenti

$$T_1 = m_1 g - m_1 R_1 \alpha; \quad T_2 = m_2 R_2 \alpha + m_2 g$$

che inserite nella terza ci danno

$$\alpha = \frac{(m_1 R_1 - m_2 R_2) g}{I + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2} = 10.1\ \mathrm{rad/s^2}$$

Conseguentemente, le tensioni delle due corde sono pari a

$$T_1 = m_1 g - m_1 R_1 \alpha = \frac{(I + m_2 R_2^2 + m_2 R_1 R_2) m_1 g}{I + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2} = 46.8\ \mathrm{N}$$

$$T_2 = m_2 R_2 \alpha + m_2 g = \frac{(I + m_1 R_1^2 + m_1 R_1 R_2) m_2 g}{I + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2} = 55.1\ \mathrm{N}$$

Infine, l'asse della puleggia è in quiete: la risultante delle forze che agisce sulla puleggia deve essere nulla! Pertanto, la forza che il perno esercita sulla puleggia dovrà bilanciare la risultante delle altre forze che agiscono sulla puleggia stessa. Tale forza, e anche la forza che sostiene il perno (si suppone che esso abbia massa trascurabile), sarà diretta verso l'alto e avrà modulo

$$R = (M_1 + M_2) g + T_1 + T_2 = 249\ \mathrm{N}$$