

## Lezione 5

I seguenti problemi sono stati presi dalle prove parziali del 2014 e del 2011

- ① Un punto materiale P è attaccato per mezzo di un adesivo alla circonferenza di una ruota di raggio  $R = 0.4$  m che può ruotare liberamente attorno al suo asse orizzontale fisso passante per O. Inizialmente il punto è fermo in A nel punto più basso della circonferenza. Ad un certo istante la ruota si mette in moto di rotazione attorno al suo asse, soggetta ad una accelerazione angolare costante, e P inizia a muoversi. La forza di adesione dell'adesivo con cui P è attaccato alla circonferenza della ruota ha un valore massimo, che viene raggiunto quando P ha una accelerazione centripeta istantanea di modulo  $a_N = 16$  m/s<sup>2</sup> ed ha compiuto una rotazione complessiva pari a  $\Delta\theta = 2\pi/3$  rad; in quell'istante il punto P si stacca dalla ruota. Determinare:
1. il modulo a dell'accelerazione del corpo un istante prima del distacco;
  2. il vettore accelerazione  $\vec{a}'$  del corpo un istante dopo il distacco;
  3. il tempo t, dall'istante del distacco, impiegato da P a raggiungere il punto H di massima altezza;
  4. la massima altezza h rispetto all'asse O della ruota raggiunta da P.

*[Il motore che agisce sull'asse della ruota è in grado di compensare la forza di gravità che agisce sul punto materiale, che quindi si muove effettivamente sulla circonferenza con un moto circolare uniformemente accelerato.]*

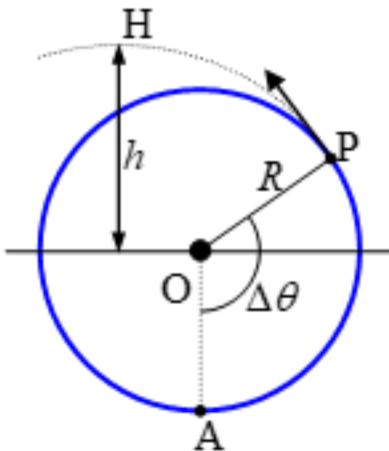


Figura 1: Rappresentazione grafica problema 1

- ② Un corpo A di dimensioni trascurabili e massa  $m_A$  si trova ad altezza  $h = 0.4$  m rispetto al suolo su un piano liscio inclinato di un angolo  $\theta = 33^\circ$  rispetto all'orizzontale. Il corpo è collegato verso l'alto ad una fune inestensibile ideale tesa parallela al piano inclinato, il cui altro estremo è fissato al suolo passando attraverso il sistema di carrucole ideali mostrato nella Figura 2. Una delle carrucole del sistema è libera di muoversi nella direzione verticale, e ad essa è fissato tramite un'altra fune ideale un corpo di dimensioni trascurabili e massa  $m_B$  inizialmente appoggiato al suolo. Determinare:

- il minimo valore del rapporto  $m_A/m_B$  tale per cui B rimanga appoggiato al suolo.

Nell'ipotesi che il rapporto  $m_A/m_B = 2$  calcolare:

- il modulo  $a_A$  dell'accelerazione del corpo A;
- il modulo  $v_{B,max}$  della massima velocità raggiunta da B.
- il minimo valore  $T_{s,min}$  della tensione di rottura che deve avere la fune che collega la carrucola al soffitto in figura affinché la stessa carrucola non cada nell'ipotesi che  $m_A = 2 \text{ kg}$ .

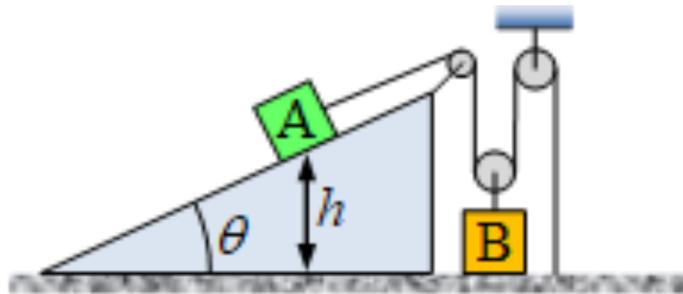


Figura 2: Rappresentazione grafica problema 2

- (3)** Una molla orizzontale di costante elastica  $k = 400 \text{ N/m}$  è vincolata ad un estremo; all'altro estremo è attaccato un corpo A di dimensioni trascurabili e massa  $m_A = 2 \text{ kg}$  che mantiene la molla compressa di  $\Delta x = 0.12 \text{ m}$ . Un corpo B di massa  $m_B = 1.5 \text{ kg}$  è appoggiato ad A dal lato opposto della molla, e i due corpi sono inizialmente in quiete su un piano orizzontale liscio. Ad un certo istante, si sblocca il sistema e i due corpi si mettono in movimento a seguito dell'azione della molla. Dopo che la molla ha superato la posizione corrispondente alla sua lunghezza a riposo, B prosegue lungo il piano mentre A rimane attaccato alla molla. Determinare:

- la massima ampiezza  $\Delta x_A$  del moto oscillatorio di A dopo il distacco di B.

Nel suo moto, B dapprima supera un tratto di piano orizzontale scabro di lunghezza  $l = 0.35 \text{ m}$  e coefficiente di attrito dinamico  $\mu = 0.08$ , poi sale lungo una rampa liscia posta nel piano verticale; dopo l'arresto istantaneo nel punto di massima altezza, B ripercorre il percorso al contrario fino ad urtare A. Determinare

- la massima altezza  $h$  raggiunta da B lungo la rampa;
- la velocità  $v_B$  di B un istante prima di urtare A (assumere che B abbia già attraversato tutto il tratto scabro prima di incontrare A).



Figura 3: Rappresentazione grafica problema 3

- (4)** Una rampa di massa M è costituita da un tratto inclinato liscio AB seguito da un tratto orizzontale scabro BC di lunghezza  $l = 0.5 \text{ m}$  e coefficiente di attrito dinamico  $\mu = 0.15$ , e da un altro tratto orizzontale liscio CD; nel tratto CD c'è una molla ideale con costante elastica  $k = 80 \text{ N/m}$  parallela

al piano e vincolata all'estremità D della rampa. La rampa è libera di scorrere senza attrito su un piano orizzontale. Inizialmente un corpo di massa  $m = 0.4 \text{ kg}$  è vincolato all'estremo superiore A della rampa ad una altezza  $h = 0.8 \text{ m}$  da B e tutto il sistema è in quiete. Ad un certo istante il corpo è lasciato libero di muoversi. Determinare:

1. il modulo  $v_M$  della velocità della rampa nell'istante di massima compressione della molla a seguito dell'urto con il corpo;
2. la massima compressione  $\Delta x_{max}$  della molla;
3. il numero N di volte in cui il corpo attraversa completamente il tratto BC (indipendentemente dal verso del moto);
4. la variazione  $\Delta x_{CM}$  della posizione del centro di massa del sistema tra l'istante in cui il corpo si ferma e l'istante iniziale del moto.

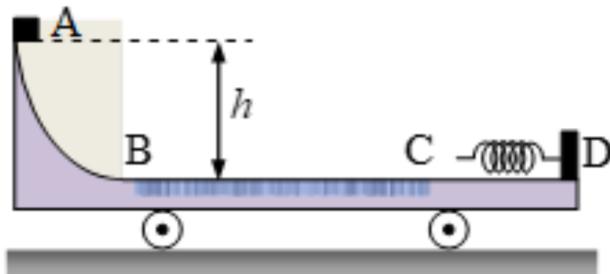
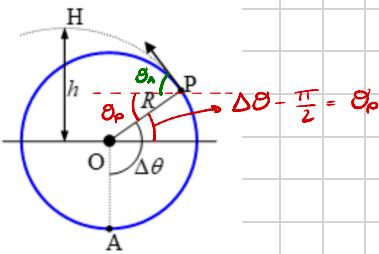


Figura 4: Rappresentazione grafica problema 4

ES. 1



- b) Per calcolare il modulo dell'accelerazione bisogna considerare quali sono le componenti che vi contribuiscono.  
Pronando spunto dalle coordinate polari, avremo una componente radiale (corrispondente all'accelerazione centrifuga che già conosciamo) e una tangenziale (da determinare).  
Per quanto riguarda quest'ultima, non conosciamo lo studio del moto, ma sappiamo che nel tratto curvilineo percorso  $\Delta\theta = 2\pi/3$  prima di raggiungere  $\omega = 16 \text{ m/s}^2$ , ovvero

$$\omega_N = \omega^2 R \rightarrow \omega^2 = \frac{\omega_N}{R}$$

Trovando dal punto di vista angolare di un moto uniformemente accelerato

$$\overset{\circ}{\Delta\theta} = \overset{\circ}{\theta_0} + \overset{\circ}{\omega_0 t} + \frac{1}{2} \overset{\circ}{\alpha} t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2\Delta\theta}{\overset{\circ}{\alpha}}}$$

$$\omega = \overset{\circ}{\alpha} t = \overset{\circ}{\alpha} \sqrt{\frac{2\Delta\theta}{\overset{\circ}{\alpha}}} = \sqrt{2\overset{\circ}{\alpha} \Delta\theta}$$

E quindi, sottralendo la relazione al primo (per  $\omega^2$ )

$$\omega^2 = 2\overset{\circ}{\alpha} \Delta\theta = \frac{\omega_N}{R} \rightarrow \overset{\circ}{\alpha} = \frac{\omega_N}{2\overset{\circ}{\alpha} \Delta\theta} = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{\omega_N}{R}$$

$$\text{Dove } \omega_N = \overset{\circ}{\alpha} R = \frac{3}{4\pi} \cdot \omega_N$$

$$\rightarrow \omega = \sqrt{\frac{9}{16\pi^2} \cdot \omega_N^2 + \omega_N^2} = \omega_N \sqrt{\frac{9}{16\pi^2} + 1} = 16.4 \text{ m/s}^2$$

(Nelle soluzioni affiorano il simbolo  $\omega^2 = \overset{\circ}{\alpha} 2\Delta\theta$ )

- c) Dopo il distacco, P non è più vincolato alla ruota ed è quindi soggetto solo al forza peso

$$\rightarrow \vec{F} = \vec{m} \vec{g} = \vec{m} \vec{g} \rightarrow \vec{g} = \vec{g}$$

- d) Per quanto riguarda le velocità lineari di disegno, queste saranno  $v_0 = \omega R$

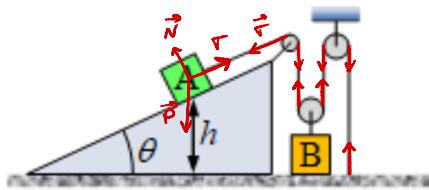
$$\text{Consideriamo } \theta_p = \Delta\theta - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} \rightarrow \theta_A = \frac{\pi}{2} - (\Delta\theta - \frac{\pi}{2}) = \pi - \Delta\theta \rightarrow v_{0y} = v_0 \sin(\pi - \Delta\theta) = v_0 \sin(\Delta\theta)$$

$$\rightarrow v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) - gt = \omega R \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) - gt$$

$$\text{Ad } y_{\max} \text{ abbiamo che } v_{y\max} = 0 \rightarrow t_{\max} = \frac{\omega R \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{g} = 0.224 \text{ s}$$

$$d) h = R \sin \theta_p + v_{0y} \sin \theta_A \cdot t_{\max} - \frac{1}{2} g t_{\max}^2 = R \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \omega R \sin\left(\pi - \Delta\theta\right) \cdot t_{\max} - \frac{1}{2} g t_{\max}^2 = 0.445 \text{ m}$$

ES. 2



- a) Per ognun masso il sistema di riferimento rotabile sullo direttore descritto dalla linea in quel punto.  
Se l'oggetto B rimane appoggiato al suolo, è garantito che la reazione vincolare  $N_B \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} -T + m_A g \sin \theta = 0 \rightarrow T = m_A g \sin \theta \\ 2T + N_B - m_B g = 0 \rightarrow 2m_A g \sin \theta + N_B - m_B g = 0 \\ N_B = m_B g - 2m_A g \sin \theta \geq 0 \Rightarrow \frac{m_A}{m_B} \leq \frac{1}{2 \sin \theta} = 0.918 \end{cases}$$

- b) Consideriamo equazioni del tutto simili a quelle riportate in precedenza

$$\begin{cases} m_A g \sin \theta - T = m_A \alpha_A \rightarrow T = m_A g \sin \theta - m_A \alpha_A \\ 2T - m_B g = m_B \alpha_B = m_B \frac{\alpha_A}{2} \rightarrow 2m_A g \sin \theta - 2m_A \alpha_A - m_B g = m_B \frac{\alpha_A}{2} \\ \alpha_A \left( \frac{m_A}{2} + 2m_A \right) = 2m_A g \sin \theta - m_B g \rightarrow \alpha_A = \frac{2m_A g \sin \theta - m_B g}{\frac{m_A}{2} + 2m_A} \\ = \frac{2 \frac{m_A}{m_B} g \sin \theta - g}{\frac{1}{2} + 2 \frac{m_A}{m_B}} \\ = \frac{2}{9} (4 \sin \theta - 1) g = 2.37 \text{ m/s}^2 \end{cases}$$

- c) I corpi A e B raggiungono le loro velocità massime allo fine del moto accelerato positivamente, ovvero allo fine del piano inclinato. Possiamo sfruttare la conservazione dell'energia meccanica

$$E_{in} = E_{fin} \rightarrow \underline{\underline{m_A g h}} = \frac{m_B}{m_B} g \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{\sin \theta} + \frac{1}{2} \frac{m_A v_{A,\max}^2}{m_A} + \frac{1}{2} \frac{m_B v_{B,\max}^2}{m_B}$$

$$2gh = g \frac{h}{2 \sin \theta} + v_{A,\max}^2 + \frac{1}{2} v_{B,\max}^2$$

$$2gh \left( 1 - \frac{1}{4 \sin \theta} \right) = 4v_{B,\max}^2 + \frac{1}{2} v_{B,\max}^2$$

$$\rightarrow v_{B,\max} = \sqrt{\frac{gh}{9} \left( 4 - \frac{1}{\sin \theta} \right)}$$

$$\rightarrow T_{s,max} = 2T = 2m_A (g \sin \theta - \alpha_A) = 11.1 \text{ N}$$

ES. 3

3) Si prima punto possiamo risolverlo completamente considerando la conservazione dell'energia

$$E_{in} = E_{fin} \rightarrow \frac{1}{2} K \Delta x^2 = \frac{1}{2} (m_A + m_B) v_0^2 \Rightarrow v_0^2 = \frac{K \Delta x^2}{m_A + m_B}$$

$\downarrow$   
E<sub>i</sub>      UN ISCRIZIONE PIANA  
CHE I DUE CORPI  
SI SEMPRE

Dopo che i due corpi si sono separati, c'è come se B si fosse portato via con po' di energia, lasciando A con l'energia totale  $\frac{1}{2} m_A v_0^2$

$$\frac{1}{2} m_A v_0^2 = \frac{K}{2} \Delta x_A^2 \Rightarrow \Delta x_A = \sqrt{\frac{m_A v_0^2}{K}} = \Delta x \sqrt{\frac{m_A}{m_A + m_B}} = 0.091 \text{ m}$$

b) La forza di attrito desiderata sarà dell'energia totale di B, e appena ora calcolata

$$W_{nc} = \Delta E_m \Rightarrow -\mu m_B g l = m_B g h - \underbrace{\frac{1}{2} m_B v_0^2}_{\substack{\text{Energia totale di B} \\ \text{dopo aver attraversato} \\ \text{il tratto con attrito} \\ \text{la prima volta}}}$$

$$\Rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g} - \mu l = \frac{K \Delta x^2}{2g(m_A + m_B)} - \mu l = 0.086 \text{ m}$$

c) Princípio omogeneità quello appena sfruttato

$$W_{nc} = \Delta E_m \Rightarrow -2\mu m_B g l = \frac{1}{2} m_B v_0^2 - \underbrace{\frac{1}{2} m_B v_0^2}_{\substack{\text{Energia totale} \\ \text{di B dopo aver attraversato} \\ \text{2 volte il tratto con attrito}}}$$

$$\Rightarrow v_B = \sqrt{v_0^2 - 4\mu g l} = 0.74 \text{ m/s}$$

ES. 4

Il sistema è costituito da due corpi interagenti, e la risultante delle forze esterne applicate al sistema è nulla

3) Per il teorema delle velocità relative applicato all'istante di massima compressione della molla

$$v_r = v_m' + v_M$$

Dato che  $v_r' = 0$  (nella massima compressione l'oggetto è fermo rispetto allo spazio)

$$\rightarrow v_m = v_M$$

Quindi:  $P = \text{cost} = 0$ , e nel momento di massima compressione

$$P_{max} = m v_m + M v_M = (m+M) v_M = 0 \Rightarrow v_m = 0$$

b) Per questo punto occorre considerare l'energia dissipata dalle forze di attrito

$$W_{nc} = \Delta E_m \rightarrow -\mu m g l = \frac{1}{2} K \Delta x^2 - \underbrace{mgh}_{\substack{\text{Energia tot. iniziale}}}$$

dopo aver attraversato il tratto con attrito

$$\Delta x = \sqrt{\frac{2mg}{\kappa} (h - \mu c)} = 0.267 \text{ m}$$

c) Supondo che l'energia iniziale è  $mgh$ , troviamo:

$$mgh = n \cdot \mu mgh \Rightarrow n = \frac{h}{\mu c} = 10.7 \Rightarrow N = 10$$

d) Basta considerare che

$$P = (m + M)v_{cm} = 0 = \text{costante} \Rightarrow v_{cm} = 0 \Rightarrow x_{cm} = \text{costante} \Rightarrow \Delta x_{cm} = 0$$