Università Degli Studi di Padova
Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione (DEI)
Corsi di laurea in Ingegneria

Studente: Federico Simioni
Email: federico.simioni@studenti.unipd.it
Disciplina: Fisica Generale 1

Lezione 3

(1) Si consideri il sistema rappresentato in figura in cui $m_1 = 8$ kg, $m_2 = 6$ kg, e i coefficienti di attrito dinamico fra le masse e il tavolo sono $\mu_1 = 0.5$ e $\mu_2 = 0.3$ per i corpi 1 e 2, rispettivamente. Le masse sono collegate da cavi inestensibili e di massa nulla. Si supponga che la puleggia abbia massa nulla e sia senza attrito.

1. Trovare il valore della massa m affinchè il sistema si muova di moto uniforme.
2. In tali condizioni si determini il valore della tensione T_2.

Sempre nelle condizioni di cui al punto 1, si supponga che quando la massa m raggiunge il pavimento la velocità istantanea del sistema sia in modulo pari a $v_0 = 1$ m/s. In quell'istante T_1 diventa nulla e l'attrito arresta il moto delle due masse sul tavolo.

3. Quando i corpi si sono arrestati, la loro distanza è diminuita? Se sì, di quanto?

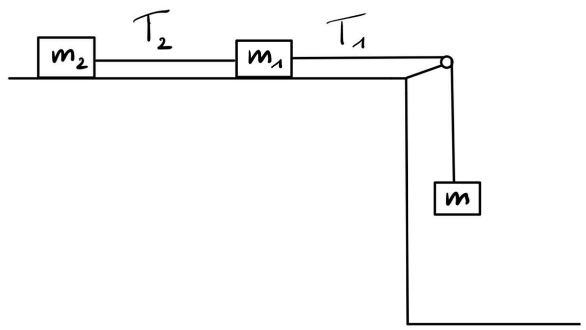


Figura 1: Rappresentazione grafica Esercizio 1

(2) Un corpo puntiforme viene lanciato lungo un piano inclinato, dal basso verso l'alto, con velocità iniziale $v_0 = 5$ m/s. L'angolo di inclinazione del piano inclinato rispetto all'orizzonte è pari a $\theta = 30°$, mentre il coefficiente di attrito dinamico fra corpo e piano è $\mu_d = 0.3$. Sapendo che il corpo parte dal punto più basso del piano inclinato e che il piano inclinato ha una lunghezza $l = 1.10$ m, determinare:

1. La quota massima raggiunta dal corpo;
2. La velocità con la quale il corpo torna al suolo.

[*Qualora il corpo si fermi lungo il piano inclinato, l'attrito statico non è sufficiente a tenere il corpo fermo nel punto di inversione del moto*]

(3) Tre palline aventi massa $m_1 = m_2 = m = 500$ g e $m_3 = 2m$ sono appese al soffitto come mostrato in figura tramite cordicelle ideali (inestensibili, flessibili e di massa trascurabile) e una molla anch'essa ideale di costante elastica $k = 250$ N/m e lunghezza a riposo $l_0 = 20$ cm.

1. Determinare di quanto è allungata la molla quando il sistema si trova in equilibrio statico.

A un certo istante la cordicella tra le palline 2 e 3 viene tagliata.

2. Determinare se durante il moto della pallina 2 la pallina 1 si sposterà dalla sua posizione originaria o rimarrà in quiete.

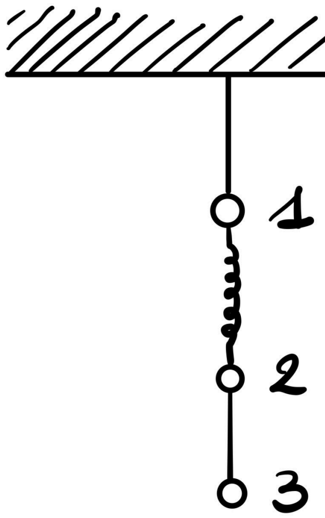


Figura 2: Rappresentazione grafica Esercizio 3

(4) La superficie piana superiore di un cuneo è inclinata di un angolo $\theta = 25°$ rispetto all'orizzontale; su di essa è appoggiato un corpo di massa m = 2 kg. Come mostra la figura, al corpo sono agganciati gli estremi di due molle ideali che hanno la stessa lunghezza a riposo e costanti elastiche $k_1 = 20$ N/cm e $k_2 = 10$ N/cm; gli altri estremi delle molle sono ancorati, tramite supporti, alla superficie del cuneo. Si supponga che quando il corpo è equidistante dai supporti di ancoraggio (come nella disposizione di figura) entrambe le molle siano a riposo. Trascurando ogni attrito, determinare:

1. La compressione/allungamento delle molle (specificare lo stato di ognuna) nel caso di cuneo e corpo entrambi in quiete;
2. Con quale accelerazione a (costante) il cuneo deve muoversi verso sinistra affinchè il corpo si mantenga in quiete rispetto al cuneo in posizione equidistante dai supporti.

Supponendo poi che il contatto tra corpo e cuneo presenti attrito con un coefficiente di attrito statico μ_s, calcolare:

3. Il minimo valore di μ_s, $\mu_{s,min}$, affinchè il corpo possa rimanere in quiete nella posizione di figura quando il cuneo accelera verso sinistra con accelerazione 2a, con a identica a quella calcolata al punto 2.

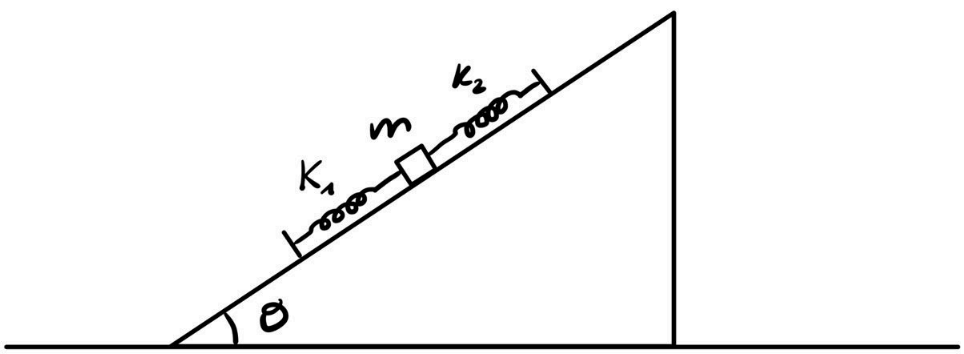
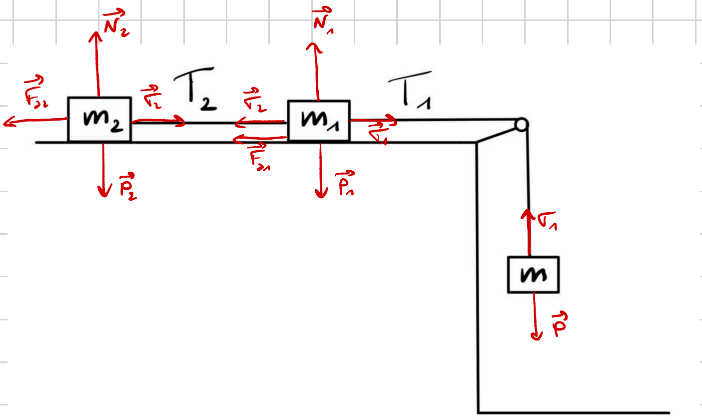


Figura 3: Rappresentazione grafica Esercizio 5

ES. 1



Le equazioni del moto per le tre masse sono

$$\begin{cases} m_2 a_2 = T_2 - \mu_2 N_2 \\ m_1 a_1 = T_1 - T_2 - \mu_1 N_1 \\ m a = mg - T_1 \end{cases}$$

Dove $\begin{cases} N_1 = m_1 g \\ N_2 = m_2 g \end{cases}$ sono reazioni normali agenti sui corpi 1 e 2

→ Dal momento che le tre accelerazioni sono uguali (dato che le corde sono inestensibili): $a_1 = a_2 = a$

Sommiamo le tre equazioni membro a membro, ottenendo

$$(m_1 + m_2 + m_3)a = mg - \mu_2 m_2 g - \mu_1 m_1 g$$

E ponendo $a=0$ (moto uniforme), ricaviamo

$$m = \mu_2 m_2 + \mu_1 m_1 = 5.8 \text{ Kg}$$

In queste condizioni la tensione T_2 sarà

$$T_2 = \mu_2 N_2 = \mu_2 m_2 g = 17.7 \text{ N} \quad (\text{ricavato considerando che } a_2 = 0)$$

Quando m toccherà terra, avremo che $T_1 \to 0$, quindi i corpi 1 e 2 proseguiranno decelerando per via delle forze di attrito.
A seconda che la corda che collega i due corpi rimanga tesa o no, i moduli delle loro decelerazioni saranno uguali o diversi (rispettivamente)
→ Partiamo considerando l'ipotesi che $T_2 \neq 0$. Riprendiamo le equazioni di prima (con $T_1 = 0$ ora), le accelerazioni rimangono identiche, e otteniamo quindi

$$\begin{cases} m_2 a = T_2 - \mu_2 m_2 g \\ m_1 a = -T_2 - \mu_1 m_1 g \end{cases}$$

Proseguiamo a risolvere il sistema, ottenendo ottenuto sommando le due equazioni membro a membro

$$a = -\frac{(\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)g}{m_1+m_2} \qquad T_2 = (\mu_2-\mu_1)\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}g$$

Quello che si ottiene è un'accelerazione negativa (in linea con quello che ci si aspetta) e $T_2 < 0$, ma questo non ha senso fisico (basta ripensare alla rappresentazione grafica, e a cosa comporterebbe ciò sul verso di T_2)

Di conseguenza la corda tra 1 e 2 non esercita forza e ogni corpo decelera con accelerazione determinata unicamente dalla forza di attrito di cui risente. Le equazioni diventano:

$$\begin{cases} m_1 a_1 = -\mu_1 m_1 g \\ m_2 a_2 = -\mu_2 m_2 g \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a_1 = -\mu_1 g \\ a_2 = -\mu_2 g \end{cases}$$

→ Il fatto che $T_2 = 0$ poteva essere intuito già a partire dall'osservazione che $\mu_1 > \mu_2$, ovvero il corpo 1 rallenta di più rispetto a 2 (considerando solo la forza di attrito agente lungo la direzione orizzontale)

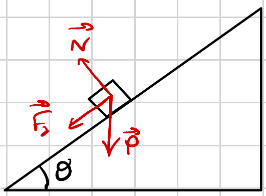
Di conseguenza, i corpi si fermeranno nei tempi $t_1 = \frac{v_0}{\mu_1 g}$ e $t_2 = \frac{v_0}{\mu_2 g}$, percorrendo gli spazi

$$s_1 = v_0 t_1 - \frac{1}{2}\mu_1 g t_1^2 = \frac{v_0^2}{2\mu_1 g} = 10.2\,cm \qquad s_2 = v_0 t_2 - \frac{1}{2}\mu_2 g t_2^2 = \frac{v_0^2}{2\mu_2 g} = 17.0\,cm$$

Il corpo 2 percorre uno spazio maggiore rispetto al corpo 1, prima di fermarsi: di conseguenza, si avvicinerà di una distanza

$$\Delta s = s_2 - s_1 = 6.79\ cm$$

$\boxed{\text{ES. 2}}$



Durante la salita lungo il piano inclinato il corpo, a causa della forza gravitazionale $M\vec{g}$ e della forza di attrito $\vec{F_a}$ ($|\vec{F_a}| = \mu_d N = \mu_d M g \cos\theta$) opposta al moto, segue un moto uniformemente decelerato.
Le leggi orarie di velocità e spazio saranno:

$$v(t) = v_0 + at \ ; \qquad x(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Prendiamo un asse x parallelo al piano inclinato e orientato nel verso del moto, applicando la 2ª legge della dinamica possiamo ricavare che

$$a = -g\sin\theta - \frac{F_a}{M} = -g\sin\theta - \frac{\mu_d N}{M} = -g(\sin\theta + \mu_d\cos\theta) = -7.45\ m/s^2$$

Di conseguenza, all'istante $t^* = -\frac{v_0}{a}$ il corpo si ferma ($v(t^*) = 0$) dopo aver percorso un tratto di lunghezza

$$x^* = x(t^*) = v_0 t^* + \frac{1}{2}a(t^*)^2 =$$

$$= -\frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2g(\sin\theta + \mu_d \cos\theta)} = 1.68\,m$$

che risulta maggiore della lunghezza del piano inclinato stesso

→ Il corpo raggiunge la sommità del piano inclinato con velocità non nulla

→ Proseguirà cadendo con un moto parabolico

Dalle leggi orarie otteniamo che l'istante t_1 in cui il corpo raggiunge la sommità del piano inclinato e la corrispondente velocità v_1 sono:

$$v_0 t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2 = \ell \rightarrow a t_1^2 + 2 v_0 t_1 - 2\ell = 0$$

$$\rightarrow t_1 = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2a\ell}}{a} = 0.277\,s$$

E da questo $v_1 = v(t_1) = v_0 + a t_1 = 2.93\,m/s$

Negli istanti successivi il moto è parabolico; azzerando il tempo all'istante di distacco possiamo scrivere le nuove leggi orarie seguite dal corpo nel moto parabolico

$$\begin{cases} v_x(t) = v_1 \cos\theta \\ x(t) = \ell\cos\theta + (v_1\cos\theta)\, t \end{cases} \qquad \begin{cases} v_y(t) = v_1 \sin\theta - g t \\ y(t) = \ell \sin\theta + (v_1 \sin\theta)\, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

VELOCITÀ COSTANTE MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

Dalle seconde otteniamo che l'istante t_2, in cui il corpo raggiunge la massima quota, e la corrispondente quota y_{max} sono:

$$\begin{cases} v_y(t_2) = 0 \rightarrow t_2 = \frac{v_1 \sin\theta}{g} = 0.15\,s \\ y_{max} = y(t_2) = \ell \sin\theta + (v_1 \sin\theta)\, t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 = 0.66\,m \end{cases}$$

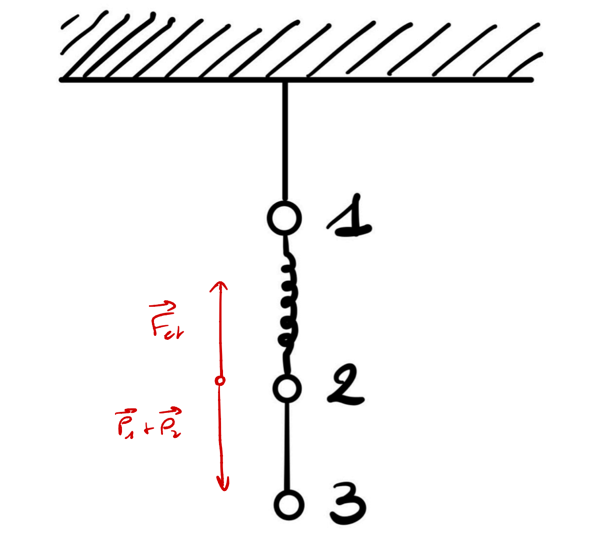
Per quanto riguarda invece l'istante t_3 nel quale il corpo torna al suolo e la corrispondente velocità finale, si ha

$$y(t_3) = 0 \rightarrow g t_3^2 - 2(v_1 \sin\theta)\, t_3 - 2\ell\sin\theta = 0$$

$$\rightarrow t_3 = \frac{v_1 \sin\theta + \sqrt{v_1^2 \sin^2\theta + 2g\ell\sin\theta}}{g} = 0.516\,s$$

Da cui $v_y(t_3) = v_1 \sin\theta - g t_3 = -3.60\,m/s \rightarrow v_f = v(t_3) = \sqrt{v_x^2(t_3) + v_y^2(t_3)} = 4.40\,m/s$

ES. 3



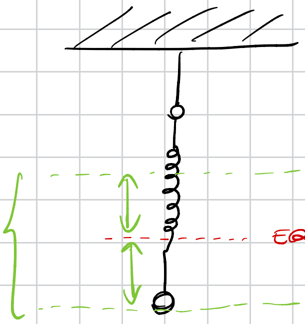
Nella situazione in figura, la forza elastica bilancia il peso complessivo di 2 e 3

$$k\Delta\ell = (m_2+m_3)g = 3mg \longrightarrow \Delta\ell = \frac{3mg}{k} = 5.89\ \text{cm}$$

Quando viene tagliata la cordicella tra 2 e 3, avremo che la pallina 2 non sarà più in equilibrio.

(Con la sola pallina 2, l'allungamento di equilibrio sarebbe infatti $\Delta\ell_1 = \frac{m_2 g}{k} = \frac{mg}{k} = 1.96$ cm)

$\frac{\Delta\ell}{3}$



→ l'ampiezza di oscillazione è

$$\underbrace{\Delta\ell - \Delta\ell_1} = \frac{2mg}{k} = A$$

Ovvero la differenza tra quanto è allungata la molla quando la corda viene tagliata e quanto è allungata la molla nel caso di equilibrio statico con la sola pallina 2

L'oscillazione è simmetrica rispetto al punto di equilibrio (fisso se 1 rimane in quiete), e quindi, quando la pallina 2 viene a trovarsi nell'altro estremo dell'oscillazione, la molla risulta compressa di una lunghezza

→ La molla compie delle oscillazioni di ampiezza "A" attorno al punto di equilibrio $\Delta\ell_1$ → di conseguenza, nel punto più alto dell'oscillazione, l'allungamento della molla sarà $\Delta\ell_1 - A = -\frac{mg}{k}$

$$\Delta\ell' = \frac{mg}{k}$$

Essendo un allungamento negativo, significa che la molla è compressa di mg/k

→ In tali condizioni, la forza netta sulla pallina 1 è nulla (questa compressione della molla genera sulla pallina 1 una forza elastica verso l'alto identica al suo peso)

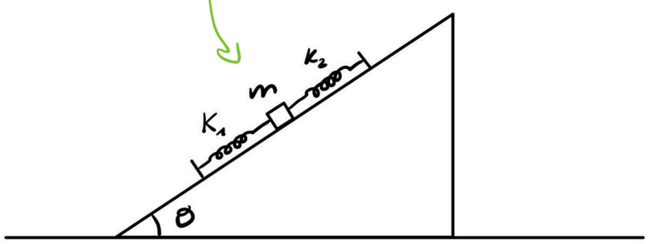
→ La pallina 1 rimane sempre ferma

↳ La condizione affinché la pallina 1 rimanga in quiete dopo il taglio della cordicella è che $m_3 \le 2m$

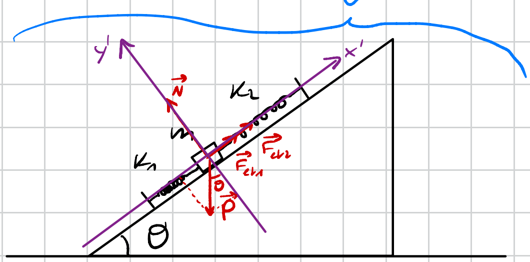
ES. 4

Poiché abbiamo assunto che le due molle hanno la stessa lunghezza a riposo, e che, di conseguenza, quando il corpo è equidistante dai due punti di ancoraggio le due molle sono entrambe a riposo

In questo caso assumiamo che entrambe le molle siano a riposo



In questa situazione assumiamo che il carrello sia fermo



Se il corpo è in equilibrio statico sul carrello in quiete allora, nel sistema di riferimento del laboratorio la risultante delle forze che agiscono su di esso deve essere nulla

→ Il corpo, come mostrato in figura, risulterà spostato verso il basso rispetto all'immagine proposta nel testo del problema

↳ Sarà spostato di un Δx tale che la somma delle forze elastiche delle molle 1 e 2 è uguale alla componente della forza di gravità $m\vec{g}$ parallela alla superficie del carrello

Consideriamo quindi un sistema di riferimento con un asse parallelo a tale superficie (disegnato in viola)

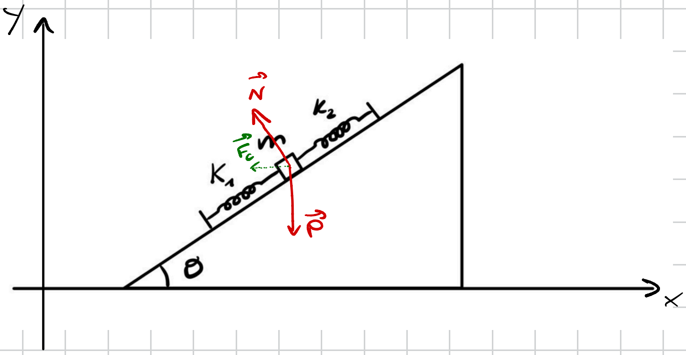
Compressione e allungamento avranno lo stesso valore in modulo

$$K_1 \Delta x + K_2 \Delta x - mg \sin\theta = 0$$

$$\Delta x = \frac{mg\sin\theta}{K_1 + K_2} = 0.276 \text{ cm}$$

Consideriamo ora che il carrello sia accelerato verso sinistra con accelerazione costante $\vec{a}$ e supponiamo che il corpo sia in quiete rispetto al carrello nella posizione descritta nella figura riportata insieme al testo del problema.

Nel sistema di riferimento del laboratorio (sistema inerziale) il corpo si muoverà quindi di moto accelerato con accelerazione $\vec{a}$ diretta verso sinistra e quindi la risultante delle forze che agiscono su di esso dovrà essere pari a $m\vec{a}$



$\vec{F}_c$ rappresenta la risultante delle forze agenti sul corpo

Quindi è la SOMMA delle forze che agiscono sul corpo (questo è il motivo per cui è stato tratteggiato e colorato di verde, per distinguerla dalle forze che effettivamente l'oggetto in esame sente)

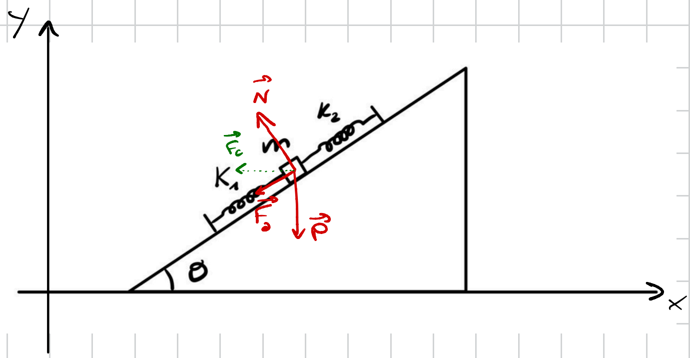
$$\vec{F}_c = \vec{P} + \vec{N} \longrightarrow m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} \longrightarrow \begin{cases} -ma = -N\sin\theta \\ 0 = N\cos\theta - mg \end{cases}$$

Le relazioni scritte in quest'ultimo sistema sono ottenute proiettando le forze rispettivamente su un asse x orizzontale verso destra e un asse y verticale verso l'alto.

Di conseguenza otteniamo che:

$$N = \frac{mg}{\cos\theta} \longrightarrow a = \frac{N}{m}\sin\theta = \frac{1}{\cancel{m}}\cdot\frac{\cancel{m}g}{\cos\theta}\sin\theta = g\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = g\tan(\theta)$$

Nell' ultimo punto del problema il carro accelera verso sinistra con accelerazione $2a$, e a causa dell' attrito statico il corpo rimane in quiete rispetto al carro nella stessa posizione descritta dalla figura dell' ultimo punto



Possiamo affrontare tale situazione allo stesso maniera che nel punto precedente.
Nel sistema di riferimento del laboratorio il corpo ha accelerazione $2\vec{a}$ (la stessa del carro) e quindi la risultante delle forze agenti su di esso dovrà essere pari a $2m\vec{a}$. Pertanto

$$\vec{F_c} = 2m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F_a}$$

Dove $\vec{F_a}$ é la forza di attrito statico tangente alla superficie del carro e diretta verso il basso (essendo l' accelerazione del carro maggiore di a). Proiettando tale equazione sugli assi x e y precedentemente individuati si ottiene

$$\begin{cases} -2ma = -N\sin\theta - F_a\cos\theta \\ 0 = N\cos\theta - mg - F_a\sin\theta \end{cases}$$

Da cui si ricava quanto segue

$$\rightarrow F_a = \frac{-mg + N\cos\theta}{\sin\theta} \longrightarrow 2ma = N\sin\theta + \frac{N\cos\theta - mg}{\sin\theta}\cos\theta$$

$$2ma\sin\theta = N\sin^2\theta - mg\cos\theta + N\cos^2\theta$$

Andando a sostituire al posto di N l' espressione appena ricavata

$$N = 2ma\sin\theta + mg\cos\theta$$

$$\downarrow$$

$$F_a = 2ma\cos\theta - mg\sin\theta$$

Quest' ultima relazione sarà valida a patto che

$$F_a \le \mu_s N \longrightarrow \mu_s \ge \frac{F_a}{N} = \frac{2ma\cos\theta - mg\sin\theta}{2ma\sin\theta + mg\cos\theta}$$

⚠ RICORDARE CHE $\mu_s \cdot N$ É UN LIMITE SUPERIORE PER LA FORZA DI ATTRITO (OVVERO NON PUÓ SUPERARLO), MA QUESTO NON SIGNIFICA CHE LA FORZA DI ATTRITO STATICO ASSUMA <u>SEMPRE</u> QUEL VALORE!

E sostituendo il valore di a ottenuto in precedenza otteniamo

$$\mu_s \geq \mu_{s,min} = \frac{2mg\sin\theta - mg\sin\theta}{2mg\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + mg\cos\theta} = \frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin^2\theta} = 0.325$$