

# Meccanica Quantistica - Appunti del Prof. Giovannetti

Enrico Dardanis



## Indice

Lezione 1. Richiami matematici I	5
1. Spazi di Hilbert	5
2. Dimensione finita	5
3. Operatori Lineari	6
4. Classi particolari di operatori	7
5. Teorema spettrale in dimensione finita	8
6. Dimensione Infinita	8
7. Complete Orthonormal Set - C.O.S.	8
8. Operatori Lineari in dimensione infinita	10
Lezione 2. Richiami matematici II	11
1. Operatori chiusi e chiudibili	11
2. Aggiunto in dimensione infinita	12
3. Teoremi sugli aggiunti	12
4. Operatori Hermitiani, Simmetrici, Autoaggiunti	13
5. Teorema Spettrale	13
6. Verso il teorema spettrale nel caso continuo	14
Lezione 3. Fine dei Richiami e Postulati della MQ	16
1. Funzione Spettrale e Teorema Spettrale Generalizzato	16
2. Decomposizioni Generalizzate	17
3. Operatori Unitari e Teorema di Stone	18
4. Formulazione Assiomatica dell MQ	19
5. Commutazione fra misure e Principio di indeterminazione	20
6. Misure in MQ - advertisement for Q. Info	21
7. Stati Misti e Matrici Densità	21
Lezione 4. Sistemi composti, evoluzione temporale	23
1. Sistemi Composti e Entanglement	23
2. Operatori su sistemi composti e matrice densità ridotta	23
3. Evoluzione Temporale di un Sistema Quantistico	24
4. Heisemberg's Representation	25
5. Evoluzione con H time dependent	26
6. Serie di Dyson	27
Lezione 5. Regole di quantizzazione, stati gaussiani e distribuzione di Wigner	29
1. Regole di Quantizzazione	29
2. Regola di quantizzazione canonica (Dirac)	29
3. Quantizzazione basata sul principio di relatività, teoremi di Wigner e Stone	29

4. Particella libera in 1-D, operatori in carne ed ossa	31
5. Stati Gaussiani di particella Libera	32
6. (Quasi)-Distribuzione di Wigner	32
Lezione 6. Conservazione della probabilità, Ehrenfest e Oscillatore Armonico	35
1. Autostati di P e Q	35
2. Particella in 3-D, conservazione della probabilità	35
3. Teorema di Ehrenfest	36
4. Oscillatore Armonico- Introduzione	37
5. Diagonalizzazione di H	39
6. Stati Coerenti	41
Lezione 7. Operatori di Displacement	42
1. Ancora sugli stati coerenti	42
2. Overcompletezza degli stati coerenti	42
3. Displacement Operator	43
4. Evoluzione temporale di un displacement - to be continued	45
5. Funzione Caratteristica	45
Lezione 8. Ancora funzioni caratteristiche, Algebre di Lie	51
1. Connessione fra Wigner e Caratteristica	51
2. Alcuni esempi e applicazioni sulle/delle wigner	52
3. Algebre di Lie - Tools utili	54
4. Algebra di Lie - definizione	55
5. Trasformazione similare su Lie	55
Lezione 9. Algebre di lie II, teoria e applicazioni	57
1. Esponenziale di un elemento	57
2. Algebra di Lie dell'oscillatore armonico	58
3. Algebra di Lie di SU2	59
4. Algebra di SU2 con due oscillatori armonici	61
5. Beam Splitter Algebra	62
Lezione 10. Sistemi 1D	63
1. Proprietà generali dell'equazione di Schrödinger	63
2. Potenziale a scalini	64
3. Gradino di potenziale	65
4. Ortonormalità delle soluzioni	66
Lezione 11. WKB approximation	69
1. Intro	69
2. First Order WKB	69
3. Raccordo sul WKB	71
4. Applicazione - decadimento radioattivo	72
Bibliografia	75

## LEZIONE 1

### Richiami matematici I

La meccanica quantistica è una specie di linguaggio di programmazione che ci dice come scrivere e formalizzare i modelli fisici. Non ci fornisce l'Hamiltoniana del sistema, ma ci dice che per descrivere il sistema quello che ci basta è una Hamiltoniana che descriverà la dinamica del sistema con il formalismo, appunto, della meccanica quantistica. Introduciamo adesso la struttura matematica che costituisce il fondamento del formalismo della meccanica quantistica. Il postulato di base della meccanica quantistica, come vedremo, è che uno stato quantistico del sistema è caratterizzato matematicamente da un vettore in uno spazio di Hilbert. Introduciamo quindi la teoria degli spazi di Hilbert e degli operatori su spazi di Hilbert.

#### 1. Spazi di Hilbert

DEFINIZIONE 1.1 (Spazio degli stati). Lo spazio degli stati  $\mathcal{H}$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{C}$  dotato di prodotto hermitiano  $(\cdot, \cdot)$  def.  $> 0$ , cioè tale che

- $(v, v) \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{H} \quad (= 0 \Leftrightarrow v = 0)$
- $(v, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 (v, v_1) + \alpha_2 (v, v_2) \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}, \quad v, v_1, v_2 \in \mathcal{H}$
- $(v, w) = (w, v)^*$

e tale da essere completo rispetto alla norma  $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$ .

Ricordiamo che la norma rispetta le seguenti proprietà:

- $\|v\| \geq 0$
- $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$
- $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Ricordiamo inoltre la nozione di completezza:

DEFINIZIONE 1.2 (Completezza).  $\mathcal{H}$  è completo se ogni successione di Cauchy  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge in  $\mathcal{H}$

Il requisito di completezza è un'intuizione fisica che voglio incorporare nella teoria: se si pensa all'evoluzione temporale, si vede subito che la mancanza di completezza potrebbe far sì che gli evoluti di stati del sistema potrebbero non essere più stati del sistema, e ciò è inammissibile.

La dimensionalità dello spazio degli stati è un elemento importante della descrizione di un sistema fisico. Distingueremo due importanti sotto-casi: il caso finito dimensionale e quello infinito dimensionale.

#### 2. Dimensione finita

Supponiamo, per ora,  $\dim \mathcal{H} < \infty$ . In questo caso notiamo che non è necessario richiedere la completezza dello spazio, dato che nel caso finito dimensionale segue dalla completezza

di  $\mathbb{C}$ . Comunque, sia  $\{v_1, v_2, \dots, v_d\}$  una base ortonormale di  $\mathcal{H}$ , cioè una base tale che  $(v_i, v_j) = \delta_{ij}$ . È allora facile verificare:

$$\bullet \quad \left. \begin{aligned} v &= \sum_{j=1}^d \alpha_j v_j \Rightarrow \alpha_j = (v_j, v) \\ v &= \sum_{j=1}^d \alpha_j v_j \\ w &= \sum_{j=1}^d \beta_j v_j \end{aligned} \right\} \Rightarrow (v, w) = \sum_{j=1}^d \alpha_j^* \beta_j$$

### 3. Operatori Lineari

DEFINIZIONE 1.3 (Operatore Lineare). Un operatore  $\Theta : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  si dice lineare nel senso che:

$$\Theta \left( \sum_{l=1}^d \alpha_l v_l \right) = \sum_{l=1}^d \alpha_l \Theta(v_l)$$

ESEMPIO 1.1 (Proiettore). L'operatore

$$\Theta_w : \begin{aligned} &\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \\ &v \rightarrow w(w, v) \end{aligned}$$

è un onesto operatore lineare. È in effetti il classico proiettore

Come per le componenti dei vettori possiamo calcolare gli elementi di matrice degli operatori:

$$\Theta(v) = \sum_{j=1}^d \alpha_j \Theta(v_j) = \sum_{j'=1}^d \beta'_{j'} \Theta(v_{j'}) \quad \text{essendo} \quad \beta'_{j'} = (v'_{j'}, \Theta(v))$$

otteniamo

$$\Theta(v) = \sum_{j,j'=1}^d \alpha_j (v'_{j'}, \Theta(v_j)) = \sum_{j,j'=1}^d v'_{j'} M_{j',j} \alpha_j$$

dunque individuiamo  $M_{j',j} = (v'_{j'}, \Theta(v_j)) = \langle v'_{j'} | \Theta | v_j \rangle$

DEFINIZIONE 1.4 (Norma Operatoriale). Si definisce la norma di  $\Theta$  come:

$$\|\Theta\| = \sup_{v \in \mathcal{H}} \frac{\|\Theta(v)\|}{\|v\|}$$

che nel caso finito dimensionale è ben definita.

DEFINIZIONE 1.5 (Operatore Aggiunto). Dato  $\Theta : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  si può definire facilmente, nel caso finito dimensionale  $\Theta^\dagger$  nel modo seguente:

$$(v, \Theta(w)) = (\Theta^\dagger, v) = (v, \Theta^\dagger(w))^*$$

dove l'ultimo modo di scrivere la relazione permette di definire l'aggiunto anche in notazione di dirac senza ambiguità: come (l'operatore agisce sempre a destra) ( $v \rightarrow |\phi\rangle$ )

$$\langle\phi|\Theta|\psi\rangle = \langle\psi|\Theta|\phi\rangle^*$$

É chiaro che, nel caso finito dimensionale, la relazione della definizione 1.5 definisce univocamente l'aggiunto, dato che ne definisce gli elementi di matrice. Il caso infinito dimensionale è leggermente più delicato. Nel caso finito dimensionale valgono le seguenti proprietà per l'operatore aggiunto:

- $(\Theta^\dagger)^\dagger = \Theta$
- $(\Theta\Omega)^\dagger = \Omega^\dagger\Theta^\dagger$
- $(\alpha\Theta + \beta\Omega)^\dagger = \alpha^*\Theta^\dagger + \beta^*\Omega^\dagger$
- $\|\Theta^\dagger\| = \|\Theta\|$  (si dimostra usando Cauchy-Schwarz)

#### 4. Classi particolari di operatori

DEFINIZIONE 1.6 (Operatore Normale). Un'operatore  $\Theta$  si dice normale se commuta con l'aggiunto:  $[\Theta, \Theta^\dagger] = 0$ .

DEFINIZIONE 1.7 (Isometria). Un'operatore  $\Theta$  si dice una isometria se  $\Theta^\dagger\Theta = \mathbb{I}$

DEFINIZIONE 1.8 (Operatore unitario). Un'operatore  $\Theta$  si dice unitario se è normale e isometrico.

OSSERVAZIONE 1.1. Nel caso finito dimensionale si può dimostrare che isometrico implica normale (in effetti segue dall'identificazione  $\Theta^\dagger = \Theta^{-1}$ ). Nel caso infinito dimensionale questa inferenza non è giustificata, dato che l'immagine di  $\Theta$ , e quindi il dominio di  $\Theta^\dagger$ , potrebbe essere un sottospazio proprio di  $\mathcal{H}$ .

PROPOSIZIONE 1.1 (Caratterizzazione degli operatori unitari).  $\Theta$  è unitario  $\Leftrightarrow \exists \{v_j\} \{w_j\}$  due set ortonormali in generale diversi tali che

$$\Theta(v) = \sum_{j=1}^d w_j(v_j, v)$$

ovvero  $\Theta$  è un cambio di base fra basi ortonormali.

DEFINIZIONE 1.9 (Operatore Hermitiano). Un'operatore  $\Theta$  si dice hermitiano se  $\Theta^\dagger = \Theta$ .

DEFINIZIONE 1.10 (Operatore Anti-Hermitiano). Un'operatore  $\Theta$  si dice anti-hermitiano se  $\Theta^\dagger = -\Theta$ .

OSSERVAZIONE 1.2. Un'operatore antihermitiano  $A$  è della forma  $A = iH$ , con  $H$  hermitiano.

Esiste un teorema che collega operatori unitari ad operatori hermitiani:

TEOREMA 1.1 (Stone). Sia  $U$  un operatore hermitiano, ovvero un isometria normale. Allora

$$U = e^{i\Theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\Theta)^n}{n!}$$

dove  $\Theta$  è un'operatore Hermitiano. Il teorema vale anche in dimensione infinita.

OSSERVAZIONE 1.3 (Decomposizione di operatori). Dato un'operatore  $Q$  è possibile realizzare la decomposizione

$$Q = H + A \quad \text{con} \quad H = \frac{Q + Q^\dagger}{2} \quad \text{e} \quad A = \frac{Q - Q^\dagger}{2}$$

$H$  e  $A$  sono rispettivamente la parte hermitiana e la parte antihermitiana di  $Q$ .

Vale inoltre il seguente:

PROPOSIZIONE 1.2 (Criterio di hermitianità).  $\Theta$  hermitiano  $\Leftrightarrow (v, \Theta(v)) \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{H}$

Adesso possiamo caratterizzare le proprietà spettrali degli operatori normali.

## 5. Teorema spettrale in dimensione finita

DEFINIZIONE 1.11 (autovalore). Dato  $\Theta : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  diciamo che  $v \neq 0$  è autovettore di  $\Theta$  se  $\Theta(v) = \lambda v$ .

LEMMA 1.1 (Autovalori dell'aggiunto di un normale). *Verificate che*  $\Theta(v) = \lambda v \Rightarrow \Theta^\dagger(v) = \lambda^* v$ .

HINT 1.1. Usate che  $\|\Theta(v) - \lambda v\| = 0$ .

Usando il lemmine precedente, si può dimostrare il seguente:

TEOREMA 1.2 (Spettrale).  $\Theta$  normale  $\Rightarrow \exists \{v_1, v_2, \dots, v_d\}$  base di  $\mathcal{H}$  t.c.  $\Theta(v_j) = \lambda_j v_j$ , ovvero

$$\Theta(v) = \sum_{j=1}^d \lambda_j v_j (v_j, v) = \sum_{j=1}^d \lambda_j |v_j\rangle \langle v_j| v$$

## 6. Dimensione Infinita

Studiando anche i più semplici sistemi fisici ci si rende conto della necessità di utilizzare uno spazio di hilbert di dimensione infinita. (Vedi per esempio il caso della pèarticella libera). Quello che è certo è che se  $\dim \mathcal{H} = \infty$ , allora è possibile costruire un insieme infinito di vettoei ortonormali far di loro:  $\{v_1, v_2, \dots, v_n, \dots\}$  con  $(v_j, v_{j'}) = \delta_{jj'}$ . Ora quello che vorremmo fare

è scrivere  $v = \sum_{j=1}^{\infty} a_j v_j$ . Il problema è dare un senso preciso a questa scrittura. A questo scopo parliamo di C.O.S.

## 7. Complete Orthonormal Set - C.O.S.

Supponiamo di avere un insieme ortonormale  $\{v_1, v_2, \dots, v_n, \dots\}$ . Allora:

$$\begin{aligned} 0 \leq \left\| v - \sum_{j=1}^n a_j v_j \right\|^2 &= \|v\|^2 + \sum_{j=1}^n \|a_j\|^2 - 2\Re \sum_{j=1}^n a_j (v_j, v) = \\ &= \|v\|^2 - \sum_{j=1}^n |(v, v_j)|^2 + \sum_{j=1}^n |a_j - (v, v_j)|^2 \end{aligned}$$



Dunque prendendo  $a_j = (v, v_j)$  otteniamo la disuguaglianza di Bessel:

$$\|v\|^2 \geq \sum_{j=1}^n |(v, v_j)|^2$$

valida per ogni  $n$ . Questo risultato ci piace perchè ci dice che la serie numerica

$$\sum_{j=1}^{\infty} |(v, v_j)|^2$$

essendo crescente e bounded, è convergente. La cosa interessante è che da questa convergenza, segue la Cauchyità della successione di vettori

$$\psi_n = \sum_{j=1}^{\infty} v_j(v_j, v)$$

Ma allora per completezza di  $\mathcal{H}$ , segue che  $\exists \lim \psi_n = \psi_v \in \mathcal{H}$ . Ora ci chiediamo se  $\psi_v = v$ . Nessuno lo garantisce e in generale non sarà vero. tuttavia esistono sequenze tali per cui  $\psi_v = v$ . Dico che

**DEFINIZIONE 1.12 (C.O.S.).** Si dice che l'insieme ortonormale  $\{v_1, v_2, \dots, v_n, \dots\}$  è un C.O.S. se  $\forall v \in \mathcal{H} \psi_v = v$ .

**OSSERVAZIONE 1.4.** È possibile dimostrare che in uno spazio di hilbert separabile i C.O.S. esistono sempre (e ovviamente vale il viceversa, visto che separabile significa ammettere un denso numerabile).

Adesso elenchiamo alcune proprietà dei C.O.S.:

- Sono contabili
- $(v, v_j) = 0 \Leftrightarrow v = 0$
- Parseval Identity:  $\|v\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(v_j, v)|^2$
- Se  $v, w \in \mathcal{H}$  allora  $(v, w) = \sum_{j=1}^{\infty} (v, v_j)(v_j, w)$

**ESEMPIO 1.2.** Il prototipo di spazio di Hilbert separabile è lo spazio delle successioni a quadrato sommabile:

$$l_2(\infty) = a_1, a_2, a_3, \dots \quad \text{con} \quad a_j \in \mathbb{C}$$

. con la proprietà

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 < \infty$$

e il prodotto hermitiano

$$(a, b) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j^* b_j$$

In effetti un C.O.S. per lo spazio  $l_2$  è dato dai vettori  $\{1, 0, 0, \dots\}, \{0, 1, 0, \dots\}, \{0, 0, 1, \dots\}$  etc. Inoltre è chiaro che tutti gli spazi di hilbert separabili sono isomorfi a  $l_2$ , e l'isomorfismo è mandare C.O.S. in C.O.S..

ESEMPIO 1.3. Un'altro esempio di hilbert separabile è

$$L_2[-\infty, +\infty] = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ con } \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

Infatti un C.O.S. per  $L_2$  sono gli autostati dell'oscillatore armonico:

$$f_n(x) = c_n H_n(x) e^{-x^2/2} \quad n \geq 0$$

con

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \left( \frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2}$$

## 8. Operatori Lineari in dimensione infinita

Alcune osservazioni preliminari:

- Non è detto che una volta definito  $\Theta$  su un COS allora sia definito su tutto  $\mathcal{H}$  per linearità, dato che presa una successione convergente in partenza questa potrebbe essere mandata da  $\Theta$  in una successione non convergente).
- Non è più detto che  $\Theta$  sia sempre continuo (in dimensione finita lineare implicava bounded e quindi continuo).
- Bisognerà ricalibrare il concetto di decomposizione spettrale (in particolare salterà la nozione di spettro discreto).

Facciamo un esempio di queste considerazioni:

ESEMPIO 1.4 (Operatore Numero). Dato  $e_n$  un COS, definiamo  $\Theta(e_n) = n e_n$ . Questa definizione sembra un po' *out of the blue* ma è l'operatore numero. Vediamo che questo operatore è *ill defined* nello spazio di Hilbert. Consideriamo infatti

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{n}$$

allora  $v$  è un buon vettore di  $\mathcal{H}$ . Se però adesso definissi  $\Theta(v)$  per linearità, otterrei

$$\Theta(v) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n$$

che è *unbounded*.

Dall'esempio precedente si capisce come sia necessario introdurre la nozione di dominio dell'operatore  $\Theta$ . Diamo alcune definizioni utili:

DEFINIZIONE 1.13 (Operatore Limitato). si dice che l'operatore  $\Theta$  è limitato se

$$\|\Theta\| < +\infty$$

dove la norma è quella del sup.

DEFINIZIONE 1.14 (Operatore continuo). si dice che l'operatore  $\Theta$  è continuo se data  $v_j \in \mathcal{H}$  che converge a  $v \in \mathcal{H}$  allora  $\Theta(v_j)$  converge a  $\Theta(v)$ .

Vale inoltre la seguente caratterizzazione:

PROPOSIZIONE 1.3. Un operatore  $\Theta$  è continuo  $\Leftrightarrow$  è limitato.

## LEZIONE 2

### Richiami matematici II

La lezione scorsa avevamo parlato di operatori limitati. Questi non esauriscono la fauna degli operatori. Parliamo quindi di

#### 1. Operatori chiusi e chiudibili

**DEFINIZIONE 2.1** (Operatore chiuso). Si dice che l'operatore  $\Theta$  è chiuso se data  $\{v_j\} \subset \mathcal{D}(\Theta)$  che converge a  $v \in \mathcal{D}(\Theta)$  allora se  $\Theta(v_j)$  converge, **deve** convergere a  $\Theta(v)$ .

**DEFINIZIONE 2.2** (Operatore chiudibile). Si dice che l'operatore  $\Theta$  è chiuso se data  $\{v_j\} \subset \mathcal{D}(\Theta)$  che converge a  $v$  punto di accumulazione di  $\mathcal{D}(\Theta)$  allora  $\lim \Theta(v_j)$  è uguale per tutte le successioni  $\{v_j\}$ . (Quindi estendendo opportunamente il dominio lo posso far diventare un operatore chiuso).

Facciamo vedere che relativamente facile uscire dagli schemi di queste definizioni:

**ESEMPIO 2.1** (Operatore unbounded, non chiuso e non chiudibile). Dato il solito COS, definiamo

$$\Theta(e_n) = e_0$$

Allora  $\Theta$  è:

- Unbounded:  $\Theta\left(\sum_{n=1}^N \frac{e_n}{\sqrt{N}}\right) = \sqrt{N}e_0$  e quindi, dato che  $\left\|\sum_{n=1}^N \frac{e_n}{\sqrt{N}}\right\| = 1$ ,  $\|\Theta\|$  diverge.
- Non chiuso ne chiudibile: definite

$$f_0 = \frac{e_0 - e_1}{\sqrt{2}}; f_1 = \frac{e_0 + e_1 - 2e_2}{\sqrt{6}}; \dots; f_n = \frac{e_0 + e_1 + \dots + e_n - (n+1)e_{n+1}}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}$$

e

$$F = \text{Span}\{f_0, f_1, f_2, \dots\}$$

Siccome

$$\Theta(f_n) = 0 \quad \forall n$$

allora si ha che l'intero spazio  $F$  viene mandato in 0. Ma lo spazio  $F$  è denso in  $\mathcal{H}$  (è una specie di Gram Schmidt). Dunque se  $\Theta$  fosse chiudibile sarebbe nullo, ma ciò è assurdo.

**ESERCIZIO 2.1** (Operatore Impulso). Provate che l'operatore impulso  $P$  su  $\mathcal{L}^2[0, 1]$  definito da

$$P[f(x)] = -i \frac{\partial f}{\partial x}$$

(la sua azione è definita su  $\mathcal{D}(P) = C^1[0, 1]$ ), non è chiuso, ma è chiudibile.

HINT 2.1. *Bisogna far vedere che la convergenza funziona per **tutte** le successioni approssimanti.*

## 2. Aggiunto in dimensione infinita

Come in dimensione finita, definiamo l'azione di  $\Theta^\dagger$  come

$$(v, \Theta(w)) = (\Theta^\dagger(v), w) \quad \forall w \in \mathcal{D}(\Theta)$$

Dobbiamo stare attenti alla struttura del dominio. Se  $\mathcal{D}(\Theta) = \mathcal{H}$  oppure è denso in  $\mathcal{H}$  allora non ci son problemi. Pertanto da ora in poi, parlando di aggiunto, il nostro *requirement* sarà

$$\mathcal{D}(\Theta) \text{ denso in } \mathcal{H}$$

Si può dimostrare che il requirement non solo è necessario, ma è anche sufficiente all'esistenza dell'aggiunto.

## 3. Teoremi sugli aggiunti

TEOREMA 2.1 (Aggiunto di un bounded). *Sia  $\Theta$  limitato ( $\Theta \in \mathcal{B}(\Theta)$ ) allora*

- $\mathcal{D}(\Theta) = \mathcal{H}$  (ovvio dalla limitatezza, ma lo scrivo perchè serve ai fini dell'aggiunto)
- $\Theta^\dagger$  esiste e appartiene a  $\mathcal{B}(\Theta)$  (e quindi in particolare è definito su tutto  $\mathcal{H}$ )

*Inoltre l'aggiunto di un bounded gode delle stesse proprietà, anche per quanto riguarda la norma, dell'aggiunto in dimensione finita 3.*

Per la dimostrazione del teorema si fa un pesante uso del seguente

TEOREMA 2.2 (Riesz). *Dato  $\phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  supponiamo  $\phi$  continuo. Allora  $\exists g \in \mathcal{H}$  t.c.  $\phi(v) = (g, v)$*

Per la dimostrazione del teorema, l'interessato può riferirsi a [Pru13]

TEOREMA 2.3 (Generale). *Sia  $\Theta$  anche non limitato, ma con dominio denso. Allora  $\Theta^\dagger$  è chiuso.*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $g_j \in \mathcal{D}(\Theta^\dagger)$ . Supponiamo che  $\{g_j\} \rightarrow g \in \mathcal{H}$ . Dobbiamo dimostrare due cose:

- $g \in \mathcal{D}(\Theta^\dagger)$
- $\Theta^\dagger(g) = h$

Calcoliamo  $(\Theta^\dagger(g_j), v)$ . Allora questo converge ad  $(h, v)$ . Ma per definizione di aggiunto  $(\Theta^\dagger(g_j), v) = (g_j, \Theta(v))$  converge a  $(g, \Theta(v))$ . Dunque abbiamo che

$$(h, v) = (g, \Theta(v)) = (\Theta^\dagger(g), v)$$

dove l'ultima uguaglianza è per definizione di aggiunto. Poichè questo vale per ogni  $v \in \mathcal{H}$ , ne segue la tesi.  $\square$

#### 4. Operatori Hermitiani, Simmetrici, Autoaggiunti

Generalizziamo la nozione di Hermitianità al caso di dimensionalità infinita.

**DEFINIZIONE 2.3** (Operatore Hermitiano). Si dice che  $\Theta$  è hermitiano se  $\forall v, w \in \mathcal{D}(\Theta)$  vale

$$(v, \Theta(w)) = (\Theta(v), w)$$

**NOTA 2.1.** Notare che in generale  $\Theta^\dagger$  potrebbe non esistere.

**DEFINIZIONE 2.4** (Operatore Simmetrico). Si dice che  $\Theta$  è simmetrico se è hermitiano con dominio denso.

**OSSERVAZIONE 2.1.** Un operatore simmetrico ammette automaticamente l'aggiunto per il teorema 2.3.

**OSSERVAZIONE 2.2.**  $\mathcal{D}(\Theta) \subset \mathcal{D}(\Theta^\dagger)$ , infatti almeno i vettori del dominio di  $\Theta$  vanno bene.

**DEFINIZIONE 2.5** (Operatore Autoaggiunto). Si dice che  $\Theta$  è autoaggiunto se è simmetrico e  $\mathcal{D}(\Theta) = \mathcal{D}(\Theta^\dagger)$

Adesso enunciamo alcuni teoremi utili.

**TEOREMA 2.4** (Hellinger-Toeplitz). *Sia  $\mathcal{D}(\Theta) = \mathcal{H}$ . Allora  $\Theta^\dagger$  è bounded. Inoltre se  $\Theta$  è simmetrico allora anche  $\Theta \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ .*

**TEOREMA 2.5** (Utile per l'operatore impulso). *Sia  $\Theta$  chiuso e tale per cui  $\mathcal{D}(\Theta)$  denso in  $\mathcal{H}$ . Allora  $\Theta^\dagger\Theta$  esiste ed ha un dominio anche esso denso in  $\mathcal{H}$ . Inoltre  $\Theta^\dagger\Theta$  è autoaggiunto.*

**ESEMPIO 2.2** (Caso dell'impulso). Nel caso dell'operatore impulso su  $L^2[0, 1]$ ,  $P$  non è autoaggiunto ma  $P^2 = P^\dagger P$  lo è.

**ESEMPIO 2.3.** Supponiamo di avere  $\Theta$  definito su un COS con

$$\Theta(e_n) = \lambda_n e_n$$

allora verificate che  $\Theta$  è chiuso. Trovate poi  $\Omega$  di cui  $\Theta$  è l'aggiunto.

**HINT 2.2.** Usate il fatto che tutti gli aggiunti sono chiusi.

#### 5. Teorema Spettrale

Nell'enunciare il teorema spettrale in dimensione infinita ci occorre una classe di operatori più regolari (i compatti). Cominciamo con alcune definizioni preliminari:

**DEFINIZIONE 2.6** (Successione Limitata). Detta  $v_j \in \mathcal{H}$  è detta limitata o *bounded* se  $\exists k$  t.c.  $\|v_j\| < k \quad \forall j$

Questa definizione ci permette di definire una sottoclasse di operatori:

**DEFINIZIONE 2.7** (Operatore Compatto).  $\Theta \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  è detto compatto se data  $v_j$  limitata generica è possibile definire una sottosuccessione  $\{v_{j_l}\}_l$  tale che  $\Theta(v_{j_l})$  converge.

L'insieme degli operatori compatti o continui si chiama  $\mathcal{B}_\infty(\Theta)$ . Esiste una caratterizzazione alternativa degli operatori compatti che spesso nei libri viene data come definizione:

PROPOSIZIONE 2.1 (Caratterizzazione dei compatti). *Sia  $\{w_j\}$  convergente **debolmente** a  $w$ . Cioè tale che  $(v, w_j) \rightarrow (v, w)$ .  $\forall v \in \mathcal{H}$ . Allora, se  $\Theta$  è compatto, si ha che  $\Theta(w_j)$  converge **in norma** a  $\Theta(w)$ .*

La classe degli operatori compatti è molto ristretta, come mostra la seguente:

OSSERVAZIONE 2.3. L'operatore identico  $I$  su  $\mathcal{H}$  non è compatto. Infatti non forzerà mai una successione *weakly convergente* a convergere forte.

In sostanza gli operatori compatti sono roba che tende a comprimere. Adesso possiamo enunciare il teorema spettrale:

TEOREMA 2.6 (Hilbert). *Sia  $\Theta$  compatto e autoaggiunto. Allora esiste  $\{e_n\}$  un COS e una successione di numeri reali  $\{\lambda_j\}$  tale che*

$$\Theta = \sum_j \lambda_j e_j(e_j, -) = \sum_j \lambda_j |e_j\rangle \langle e_j|$$

Esiste una generalizzazione del teorema spettrale:

TEOREMA 2.7 (Decomposizione Polare). *Sia  $\Theta$  compatto e non necessariamente autoaggiunto. Allora esistono due COS  $\{e_n\}$  e  $\{f_n\}$  e una successione di numeri reali  $\{\lambda_j\}$ , detti autovalori singolari tali che*

$$\Theta = \sum_j \lambda_j e_j(f_j, -) = \sum_j \lambda_j |e_j\rangle \langle f_j|$$

NOTA 2.2. Gli autovalori singolari **non** hanno nulla a che fare con gli autovalori. Inoltre il teorema stabilisce che vale il se e solo se.

NOTA 2.3 (Classe Traccia). Nel caso finito dimensionale la traccia non portava problemi. Nel caso infinito dimensionale non è garantito, neanche per i compatti, che la traccia abbia senso. Si definisce allora di classe traccia un operatore tale per cui la nozione di traccia abbia senso.

## 6. Verso il teorema spettrale nel caso continuo

Vediamo un esempio in cui è chiaro come passando al caso infinito dimensionale non si deve abbandonare l'idea di spettro continuo.

ESEMPIO 2.4 (Operatore Posizione). Considerate  $L^2[0, 1]$  e l'operatore  $Q$  tale che  $Q(f(x)) = x(f(x))$ . Allora  $\mathcal{D}(\Theta)$  è denso in  $\mathcal{H}$  anche se non coincide con  $\mathcal{H}$ . La questione fondamentale è se si può scrivere  $Q(f(x)) = \lambda f(x)$ . Ovvero se si può scrivere  $x\lambda = \lambda f(x)$ . Questa cosa chiaramente non ha nessuna soluzione nello spazio di Hilbert. Possiamo però costruire degli oggetti nello spazio di Hilbert che in qualche modo soddisfano sempre meglio l'equazione agli autovalori. Definiamo

$$f_{x_0}^N(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{N}{2}} & x_0 - \frac{1}{N} < x < x_0 + \frac{1}{N} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora  $\|f_{x_0}^N(x)\| = 1$ . Inoltre si ha

$$\|Qf_{x_0}^N(x) - x_0 f_{x_0}^N(x)\| = \frac{1}{3N^2}$$

Dunque nel limite di  $N \rightarrow \infty$  si otterrebbe la relazione voluta. Questo ci porta a identificare  $x_0$  come elemento dello spazio. Il problema è che  $\{f_{x_0}^N(x)\}$  non converge.

$$\|f_{x_0}^N - f_{x_0}^M\| = 1 - \sqrt{\frac{M}{N}} \quad M > N$$

adesso facciamo una generalizzazione corretta del concetto di autovalore:

**DEFINIZIONE 2.8 (Autovalore).** Si dice che  $\lambda$  è un autovalore generalizzato di  $Q$  se  $Q - \lambda I$  è non invertibile.

**NOTA 2.4.** Dato  $\lambda$  chi è  $v$  non è univocamente determinato dalla definizione precedente.

Vale la seguente caratterizzazione:

**PROPOSIZIONE 2.2 (Criterio di Weyl).**  $\lambda \in Sp \text{ generalizzato} \Leftrightarrow \exists \{v_j\} \in \mathcal{H} \quad \|v_j\| = 1 \quad t.c. \quad \|\Theta(v_j) - \lambda v_j\| \rightarrow 0.$

Ma per gli autovettori allora cosa facciamo? Possiamo *peggiorare* gli oggetti definendo:

$$\delta_{x_0}^N(x) = \sqrt{\frac{N}{2}} f_{x_0}^N(x)$$

Adesso non solo non convergono ma sono addirittura unbounded. Vale ancora, però, che  $\|Q\delta_{x_0}^N(x) - x_0\delta_{x_0}^N(x)\| \rightarrow 0$  Il vantaggio nell'aver peggiorato gli oggetti è che adesso le nostre approssimanti “convergono” ad un qualcosa che ha un significato operativo:

$$\lim(\delta_{x_0}^N, f) = f(x_0)$$

Ovvero

$$\lim \delta_{x_0}^N = \delta(x - x_0)$$

Siamo quindi usciti dallo spazio  $\mathcal{H}$ , ma abbiamo qualcosa che ha senso come prodotto scalare. Si può a questo punto verificare che

$$I = \int dx_0 \delta_{x_0}(\delta_{x_0}, -) = \int dx_0 |x_0\rangle \langle x_0|$$

e anche che

$$Q = \int dx_0 x_0 \delta_{x_0}(\delta_{x_0}, -) = \int dx_0 x_0 |x_0\rangle \langle x_0|$$

dove tutte le precedenti identità sono intese nello stesso senso operativo precedente. Il succo è infatti che  $|x_0\rangle \notin \mathcal{H}$  ma che invece esiste  $\langle v|x_0\rangle$  con  $|v\rangle \in \mathcal{H}$

## LEZIONE 3

### Fine dei Richiami e Postulati della MQ

Per continuare e chiarire il discorso della lezione scorsa, definiamo i tre tipi di convergenza utili nel contesto degli operatori:

**DEFINIZIONE 3.1** (Convergenze di operatori). Si dice che una successione  $\Theta_n$  di operatori converge

- **debolmente** se  $(w, \Theta_n(v)) \rightarrow (w, \Theta(v))$
- **fortemente** se  $\|\Theta_n(v) - \Theta(v)\| \rightarrow 0 \quad \forall v \in \mathcal{H}$
- **uniformemente** se  $\|\Theta_n - \Theta\| \rightarrow 0$

**NOTA 3.1.** Nel teorema spettrale compatto o compatto autoaggiunto c'è da ricordarsi che la convergenza è uniforme.

Per casa fatevi il seguente

**ESERCIZIO 3.1.** Dimostrate che:

- (1) Supponete che  $\{\Theta_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$  debolmente. e supponiamo che  $\|\Theta_n(v)\| \leq \|\Theta(v)\| \quad \forall v \in \mathcal{H}$ . Allora la convergenza degli operatori è forte.
- (2) Stessa cosa, ma supponendo la convergenza debole e il fatto che  $\lim \|\Theta_n(v)\| \leq \|\Theta(v)\| = 0 \quad \forall v \in \mathcal{H}$ .

**HINT 3.1.** Usare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e la disuguaglianza triangolare.

Adesso passiamo alla generalizzazione del teorema spettrale.

### 1. Funzione Spettrale e Teorema Spettrale Generalizzato

**DEFINIZIONE 3.2.** Una funzione spettrale è una funzione  $\Phi$  tale che

$$\Phi : \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}) \\ \lambda \in \mathbb{R} \rightarrow E_\lambda \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \end{array}$$

con  $E_\lambda$  proiettori, che rispettino le seguenti proprietà

- (1)  $E_\lambda \leq E_{\lambda'}$  ovvero  $E_\lambda - E_{\lambda'} \leq 0$  se  $\lambda \leq \lambda'$
- (2)  $E_\lambda = \limsup_{\lambda' \rightarrow \lambda, \lambda' \geq \lambda} E_{\lambda'} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- (3)  $E_{-\infty} = \limsup_{\lambda' \rightarrow -\infty} E_{\lambda'} = 0$
- (4)  $E_{+\infty} = \limsup_{\lambda' \rightarrow +\infty} E_{\lambda'} = \mathbb{I}$

Per chiarire il senso della definizione precedente facciamo un esempio:



ESEMPIO 3.1. Supponiamo di avere un COS. Allora

$$E_\lambda = \sum_{j \leq \lambda} |e_j\rangle \langle e_j|$$

oppure la sua versione continua

$$E_x = \int_{-\infty}^x dy |y\rangle \langle y|$$

sono delle funzioni spettrali nel senso della definizione precedente.

Enunciamo adesso il seguente

TEOREMA 3.1 (Spettrale Generalizzato). *Sia  $\Theta = \Theta^\dagger$  su  $\mathcal{H}$ . Allora esiste unica una funzione spettrale  $E_\lambda$  tale che:*

$$\Theta = \int_{-\infty}^{+\infty} dE_\lambda \lambda$$

dove questo integrale significa

$$\lim_{n \rightarrow +\infty, \epsilon \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \lambda'_k (E_{\lambda_k} - E_{\lambda_{k-1}})$$

con  $\{\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n\} \subset ]-\infty, \lambda]$  e i  $\lambda'_k$  sono punti a caso dentro  $[\lambda_{k-1}, \lambda_k]$ , e  $\epsilon$  è la distanza massima fra due punti consecutivi.

In generale la convergenza del teorema sarà debole, cioè prendendo elementi *off the diagonal* i prodotti scalari convergeranno asintoticamente. Nel caso in cui l'operatore sia anche *bounded* allora la convergenza può essere anche forte. Se poi è anche *compact* ho *uniform convergence*. (Infatti ci si riconduce al caso di prima usando come *Spectral Function* la solita somma di proiettori. L'identificazione fra le due scritture è

$$\begin{aligned} \lambda &\rightarrow x \\ dE_\lambda &= dx |x\rangle \langle x| \end{aligned}$$

La cosa corretta da dire in realtà è

$$\int_{-\infty}^x dx |x\rangle \langle x| = \int_{-\infty}^x dE_\lambda.$$

Nel caso dell'operatore impulso l'operatore precedente è l'operatore di taglio: presa una funzione la lascia stare fino a  $x$  e la taglia, mandandola a zero da  $x$  in poi.

## 2. Decomposizioni Generalizzate

Nel caso di un operatore generico ci aspettiamo una decomposizione che sia in parte a spettro continuo e in parte a spettro discreto, cioè, se  $\Theta = \Theta^\dagger$  allora

$$\Theta = \int d\lambda \lambda |\lambda\rangle \langle \lambda| + \sum_j \lambda_j |\lambda_j\rangle \langle \lambda_j|$$

con questa uguaglianza da intendersi in generale nel senso debole o distribuzionale. Per la decomposizione dell'identità, analogamente:

$$\mathbb{I} = \int d\lambda |\lambda\rangle \langle \lambda| + \sum_j |j\rangle \langle j|$$

Con le regole generali

$$\langle j|j'\rangle = \delta_{jj'} \quad \langle j|\lambda\rangle = 0 \quad \langle \lambda|\lambda'\rangle = \delta_{\lambda-\lambda'}$$

con queste regolette formali potete dunque diagonalizzare un qualsiasi operatore autoaggiunto.

### 3. Operatori Unitari e Teorema di Stone

Per gli operatori unitari esiste una versione analoga del teorema spettrale 3.1:

**TEOREMA 3.2 (Spettrale per Unitari).** *Sia  $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{I}$  su  $\mathcal{H}$ . Allora esiste unica una funzione spettrale  $E_\lambda$  tale che:*

$$U = \int_{2\pi}^0 dE_\lambda e^{i\lambda}$$

nel caso generale, mentre si specializza nel caso finito dimensionale a :

$$U = \sum_{j=1}^N e^{i\lambda_j} |j\rangle \langle j|$$

Esiste una connessione fra operatori unitari e autoaggiunti, stabilita dal

**TEOREMA 3.3 (Stone).** *Supponiamo di avere una famiglia di operatori  $t \rightarrow U(t)$  che rispetta le seguenti proprietà:*

- (1)  $U(t+s) = U(t)U(s) = (U(s)U(t))$
- (2)  $U(t)$  è debolmente continua:  $\lim_{t \rightarrow t_0} U(t) = U(t_0)$  per ogni  $t_0 \in \mathbb{R}$

allora  $\exists \Theta = \Theta^\dagger$  tale che

$$U(t) = e^{i\Theta t}$$

**NOTA 3.2.** (1)  $\Theta$  può essere benissimo *unbounded* e quindi la serie di Taylor non convergere forte (senso debole delle uguaglianze) .

- (2) Essendo  $\|U\| = 1$  ed assumendo la debole continuità, per l'esercizio 3.1, si può dimostrare che in realtà la continuità è forte, quindi uno potrebbe enunciare il teorema di rettamente di cendo che la continuità è forte.

**OSSERVAZIONE 3.1 (Chi è  $\Theta$ ).** Si ha che

$$\Theta(v) = -i \frac{U(t)(v) - v}{t}$$

Ovvero la derivata in  $t = 0$  di  $U(t)$  mi da'  $\Theta$ .

Consideriamo adesso chiusa la parte sui richiami matematici.

#### 4. Formulazione Assiomatica dell MQ

Formuleremo, in disaccordo con Vietri, una teoria assiomatica della MQ, basata sui seguenti **postulati**, il cui fondamento è l'accordo che la teoria che ne consegue mostra con l'esperimento. Sia dunque  $S$  il sistema fisico di interesse, allora valgono:

- (1) Ogni stato di  $S$  è descrivibile matematicamente come un vettore normalizzato in uno spazio di Hilbert complesso  $\mathcal{H}$ :

$$|\psi\rangle \in \mathcal{H}, \quad \text{con} \quad \|\psi\| = 1$$

l'identificazione fra stato fisico e vettore nello spazio  $\mathcal{H}$  non è biunivoca, ma è definita a meno di un fattore di fase. Il significato dello stato non è quello di una quantità osservabile, ma è quello di configurazione del sistema. Lo stato è insomma una nostra costruzione mentale che ci è utile per descrivere il sistema. Lo stato come vettore, all'interno della teoria, prende in realtà il nome di *stato puro*, intendendo che questo tipo di stato è quello più determinato che la teoria può prevedere per un sistema.

- (2) Gli stati del sistema soddisfano, compatibilmente con la descrizione in termini dello spazio vettoriale  $\mathcal{H}$ , il principio di sovrapposizione lineare. Dati cioè  $|\psi_1\rangle$  e  $|\psi_2\rangle$  in  $\mathcal{H}$ , e  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ , allora anche

$$\frac{\alpha_1 |\psi_1\rangle + \alpha_2 |\psi_2\rangle}{\sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2}}$$

è uno stato legittimo del sistema.

- (3) Ogni quantità misurabile è rappresentata da un operatore autoaggiunto. Il significato di questo postulato si concretizza nella regola di Born per il calcolo delle probabilità di una misura. Decomponendo infatti l'operatore  $\Theta$  come

$$\Theta = \sum_j \lambda_j |j\rangle \langle j|$$

la regola di Born dice che gli outcome della misura sono gli autovalori  $\lambda_j$ , e la probabilità di misura è invece data da  $P_j = |\langle \psi | j \rangle|^2$ . (Per ortonormalità si ha  $\sum P_j = 1$ ). Inoltre nel caso di spettro continuo basta generalizzare il concetto di probabilità al concetto di distribuzione di probabilità da integrare sullo spettro del sistema. Nel caso di degenerazione allora la ricetta precedente si modifica:

$$\theta = \sum_{j,k} \lambda_j |j, k\rangle \langle j, k| = \sum_j \lambda_j \Pi_j$$

con  $\Pi_j = \sum_k |j, k\rangle \langle j, k|$ . Si ha dunque

$$P_j(|\psi\rangle) = \sum_k |\langle \psi | j, k \rangle|^2 = \langle \psi | \Pi_j | \psi \rangle$$

. In questo modo la media sullo stato di un osservabile, media che si intende fatta su un numero grande di misure, è data da:

$$\langle \Theta \rangle_\psi = \sum_j P_j |\psi\rangle \lambda_j = \langle \psi | \Theta | \psi \rangle$$

Possiamo calcolare anche lo scarto quadratico medio:

$$\langle \Delta^2 \Theta \rangle|_{\psi} = \sum_j P_j(|\psi\rangle) [\lambda_j - \langle \Theta \rangle] = \langle \Theta^2 \rangle - \langle \Theta \rangle^2 = \langle \psi | \Theta^2 | \psi \rangle - \langle \psi | \Theta | \psi \rangle^2$$

Osserviamo che la varianza su uno stato è nulla se e solo se lo stato è un'autostato. Dunque misurare significa far collassare il sistema in stati a varianza zero.

## 5. Commutazione fra misure e Principio di indeterminazione

Nella descrizione precedente del processo di misura come proiezione dello stato sugli autostati dell'osservabile considerata, ci si rende subito che osservabili non commutanti fra loro rendono le loro misure incompatibili. Il senso di questa incompatibilità è sancita dalla seguente:

**PROPOSIZIONE 3.1** (Robertson's Inequality). *Siano  $\Theta$  e  $\Omega$  due osservabili. Allora vale la disuguaglianza, per qualunque stato  $\psi$  del sistema:*

$$\langle \Delta^2 \Theta \rangle_{\psi} \langle \Delta^2 \Omega \rangle_{\psi} \geq \frac{1}{4} |\langle \psi | [\Theta, \Omega] | \psi \rangle|^2 + \frac{1}{4} |\langle \psi | \{\Theta, \Omega\} | \psi \rangle|^2$$

dove  $\{\Theta, \Omega\} = \Theta\Omega + \Omega\Theta$  è l'anticommutatore fra  $\Omega$  e  $\Theta$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Definendo  $\Delta\Theta = \Theta - \langle \psi | \Theta | \psi \rangle \mathbb{I}$  e  $\Delta\Omega = \Omega - \langle \psi | \Omega | \psi \rangle \mathbb{I}$ . Allora è facile verificare che

$$[\Delta\Theta, \Delta\Omega] = [\Theta, \Omega]$$

Inoltre

$$\Delta\Theta\Delta\Omega = \frac{[\Delta\Theta, \Delta\Omega]}{2} + \frac{\{\Delta\Theta, \Delta\Omega\}}{2}$$

con  $[\Delta\Theta, \Delta\Omega]$  antihermitiano e  $\{\Delta\Theta, \Delta\Omega\}$  hermitiano, dunque

$$\langle \psi | [\Delta\Theta, \Delta\Omega] | \psi \rangle \in i\mathbb{R} \quad \text{e} \quad \langle \psi | \{\Delta\Theta, \Delta\Omega\} | \psi \rangle \in \mathbb{R}$$

Pertanto, abbiamo, prendendo il valor medio della decomposizione precedente

$$\langle \psi | \Delta\Theta\Delta\Omega | \psi \rangle = \frac{\langle \psi | [\Delta\Theta, \Delta\Omega] | \psi \rangle}{2} + \frac{\langle \psi | \{\Delta\Theta, \Delta\Omega\} | \psi \rangle}{2}$$

Prendendo il modulo quadro, e ricordando che abbiamo separato in parte reale e immaginaria, otteniamo:

$$|\langle \psi | \Delta\Theta\Delta\Omega | \psi \rangle|^2 = \frac{|\langle \psi | [\Delta\Theta, \Delta\Omega] | \psi \rangle|^2}{4} + \frac{|\langle \psi | \{\Delta\Theta, \Delta\Omega\} | \psi \rangle|^2}{4}$$

da cui, usando Cauchy-Schwarz su LHS, abbiamo la tesi.  $\square$

La Robertson's Inequality è più precisa di quella di Heisemberg:

$$\langle \Delta^2 \Theta \rangle_{\psi} \langle \Delta^2 \Omega \rangle_{\psi} \geq \frac{1}{4} |\langle \psi | [\Theta, \Omega] | \psi \rangle|^2$$

ma ci sono esempi in cui queste sono equivalenti, perchè quella di Heisemberg viene saturata, come ne caso di  $P$  e  $Q$ :

ESEMPIO 3.2 (Indeterminazione di Heisemberg). Siano  $\Theta = Q$  e  $\Omega = P$ . Allora dalla nota relazione di commutazione

$$[Q, P] = i\hbar\mathbb{I}$$

ne segue la disuguaglianza di Heisemberg

$$\langle \Delta^2 X \rangle \langle \Delta^2 P \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

## 6. Misure in MQ - advertisement for Q. Info

In meccanica quantistica le misure che definiamo sono, come visto nei postulati, misure proiettive. Nella forma più generale possibile una misura in MQ è di tipo POVM (*Positive Operator Valued Measure*), e viene fatta attraverso un probe che si interfaccia col sistema. Noi non parleremo di POVM: per saperne di più seguite Q. Info!

## 7. Stati Misti e Matrici Densità

Supponiamo di avere un'apparato sperimentale, che prepara lo stato del sistema in  $|\psi\rangle$ . Questa situazione è troppo ideale. Ancor prima di fare l'esperimento ho casini: non creo uno stato ma me ne sto creando tanti:  $|\psi_j\rangle$  con probabilità  $P_j$ . Una ossevabile

$$\langle \Theta \rangle = \sum_l P_l \langle \psi_l | \Theta | \psi_l \rangle = Tr \left[ \sum_l P_l |\psi_l\rangle \langle \psi_l| \Theta \right] = Tr[\rho \Theta]$$

dove

$$\rho = \sum_l P_l |\psi_l\rangle \langle \psi_l|$$

è la matrice densità. La dimostrazione che  $Tr[|\psi_{l_0}\rangle \langle \psi_{l_0}| \Theta] = \langle \psi_{l_0} | \Theta | \psi_{l_0} \rangle$  si fa completando il solo vettore  $\psi_{l_0}$  a set ortonormale e prendendo la traccia usando tale set.

NOTA 3.3 (Ortogonalità degli  $\psi_l$ ). NON è detto che gli  $\psi_l$  siano ortogonali. La matrice densità che ne risulta nel caso generale, una volta ortonormalizzata la base, NON risulterà quindi in generale diagonale

Il più generale stato del sistema lo descriveremo con il formalismo delle matrici densità. Nella matrice densità c'è scritto tutto quello che vogliamo sapere del sistema.

**7.1. Proprietà della matrice densità.** La matrice densità di un sistema quantistico soddisfa le seguenti proprietà:

- (1)  $\rho = \rho^\dagger$
- (2)  $\rho$  è def.  $> 0$
- (3)  $Tr[\rho] = 1$

In realtà dire che  $\rho$  è def.  $> 0$  basta a dimostrare che è autoaggiunto. viceversa un operatore che soddisfa le tre proprietà precedenti è una buona matrice densità. Notiamo inoltre che l'indeterminazione classica è un fatto che in principio è risolvibile, mentre quella quantistica no. Ecco che il significato di stato puro come stato a minima indeterminazione possibile compatibilmente con la teoria è giustificata. Il formalismo della matrice densità si estende facilmente agli stati puri definendo:

$$\rho_\psi = |\psi\rangle \langle \psi|$$

É allora facile verificare che

$$\rho^2 = \rho \Leftrightarrow \psi \text{ è puro}$$

La dimostrazione si fa diagonalizzando la matrice densità generica. Un criterio equivalente è:

$$Tr[\rho^2] = Tr[\rho] \Leftrightarrow \psi \text{ è puro}$$

che si dimostra allo stesso modo. Per finire, osserviamo che a due ensemble diversi possono essere associate due matrici densità uguali, e quindi, nell'ambito della MQ, non è possibile distinguerli.

## LEZIONE 4

### Sistemi composti, evoluzione temporale

Continuiamo la rassegna dei postulati con quelli riguardanti i sistemi composti e l'evoluzione temporale.

#### 1. Sistemi Composti e Entanglement

Dati due sistemi  $A$  e  $B$  con spazi di Hilbert associati  $\mathcal{H}_A$  e  $\mathcal{H}_B$  allora lo spazio che descrive il sistema composto  $AB$  è dato da

$$\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$

ovvero un generico stato del sistema composito si scriverà come somma di prodotti tensori:

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_j |\psi_j\rangle_A \otimes |\phi_j\rangle_B$$

lo stato complessivo in generale non è detto che sia semplicemente il prodotto tensore di due stati: il risultato della somma infatti può essere benissimo un tensore non riducibile. Dati due set completi, uno per ogni spazio:  $\{|v_j\rangle_A\}$  e  $\{|w_j\rangle_B\}$ , allora un set completo per  $\mathcal{H}_{AB}$  è dato semplicemente da  $\{|v_j\rangle_A \otimes |w_j\rangle_B\}$ . Quando uno stato composto non può essere ridotto a prodotto tensore di stati dei due sottosistemi, si parla di *entanglement* e di stati entanglati.

**ESERCIZIO 4.1** (Entanglement su Spin  $\frac{1}{2}$ ). Consideriamo due sistemi a Spin  $1/2$ . Consideriamo lo stato

$$\phi = \frac{|\uparrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B}{\sqrt{2}}$$

Verificate allora che  $\phi$  è entangolato, e cioè non esistono  $\phi_A$  e  $\phi_B$  tali che  $\phi = \phi_A \otimes \phi_B$ .

**HINT 4.1.** *Procedete per assurdo e fate prodotti scalari.*

#### 2. Operatori su sistemi composti e matrice densità ridotta

In generale un operatore  $\Theta_{AB}$  sul sistema composito  $AB$  può fare schifo a piacere. Se però abbiamo un operatore che agisce su uno solo dei due sistemi, i.e. un'osservabile  $\Theta_A$  del solo sistema  $A$  allora per calcolarne il valor medio su  $|\psi\rangle_{AB}$  si calcola, essendo

$$|\psi\rangle = \sum_{jj'} \alpha_{jj'} |v_j\rangle_A |w_{j'}\rangle_B$$

$$\begin{aligned} \langle \Theta_A \rangle_{\psi_{AB}} &= \langle \psi_{AB} | \Theta_A \otimes \mathbb{I}_B | \psi_{AB} \rangle = \sum_{jj'} \sum_{ll'} \alpha_{ll'}^* \alpha_{jj'} \langle v_l | \otimes \langle w_{l'} | \Theta_A \otimes \mathbb{I}_B | v_j \rangle_A \otimes | w_{j'} \rangle_B = \\ &= \sum_{jj' ll'} \alpha_{lj'}^* \alpha_{jj'} \langle v_l | \Theta_A | v_j \rangle_A \end{aligned}$$

Questo stesso oggetto si può riscrivere come:

$$\langle \Theta_A \rangle |_{\psi_{AB}} = \text{Tr}_A [\Theta_A \rho_A]$$

dove la  $\rho_A$  è la matrice densità ridotta del sistema  $A$ , definita come

$$\rho_A = \sum_l \sum_{jj'} \alpha_{lj'}^* \alpha_{jj'} |v_j\rangle \langle v_l|$$

La  $\rho_A$  è un'ottima matrice densità come quelle introdotte precedentemente per tenere conto di una indeterminazione *classica* nel determinare lo stato del sistema. (Verificate per esercizio). Un modo più sintetico di scrivere la matrice densità ridotta è:

$$\rho_A = \text{Tr}_B (|\psi_{AB}\rangle \langle \psi_{AB}|)$$

cioè la traccia parziale sul sottosistema  $B$  della matrice densità associata al sistema complessivo. Vediamo dunque che il formalismo della matrice densità emerge in modo naturale dalla teoria dei sistemi composti, e non un qualcosa che dobbiamo introdurre per forza per tenere conto di un'incertezza nella determinazione sperimentale dello stato del sistema.

### 3. Evoluzione Temporale di un Sistema Quantistico

**3.1. Stato Puro.** Il postulato riguardante l'evoluzione temporale afferma che la dinamica del sistema quantistico è descritta da una trasformazione unitaria parametrizzata dal tempo:

$$|\psi\rangle \rightarrow U(t) |\psi\rangle$$

Questo è vero per un sistema isolato. Se interagisco con l'esterno l'unitarietà non è più garantita: includendo l'ambiente esterno (laddove possibile) avrò comunque l'unitarietà. È fisicamente sensato che la  $U(t)$  soddisfi le ipotesi del teorema di Stone, quindi possiamo scrivere:

$$U(t) = \exp \left[ -\frac{iHt}{\hbar} \right]$$

con  $H = H^\dagger$ . L'operatore  $H$ , il generatore delle traslazioni temporali, si chiama Hamiltoniana del sistema. La meccanica quantistica non ci dice come è fatta l'Hamiltoniana, ma ci dice che, se il nostro sistema si descrive con il formalismo della MQ, allora ci deve essere una Hamiltoniana che ne descrive la dinamica. Se  $H$  è *time independent*, è facile derivare una equazione differenziale per  $|\psi(t)\rangle$ . Da  $\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{iH}{\hbar} U(t)$  segue infatti l'equazione di Schroedinger:

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(t) = -\frac{iH}{\hbar} \psi(t)$$

che in realtà vale anche per  $H$  time dependent, come avremo modo di approfondire nel seguito.

**3.2. Ensemble di Stati.** Per vedere come evolve un ensemble di stati ci basta vedere come evolve  $\rho(t)$ . Sfruttando la corrispondenza

$$\rho \leftarrow \{P_j, |\psi_j\rangle\}$$

dove la freccia unidirezionale ricorda che la corrispondenza non è biunivoca), sapendo, da quanto detto prima, come evolvono gli stati puri, possiamo calcolarci l'ensemble al tempo  $t$ :

$$\{P_j, U(t) |\psi_j\rangle\}$$



e quindi la matrice densità al tempo  $t$ . data da:

$$\rho(t) = \sum_j P_j U(t) |\psi_j\rangle \langle \psi_j| U^\dagger(t) = U(t) \rho U^\dagger(t)$$

possiamo dunque scrivere, derivando e commutando le  $H$  che escono al più solo con gli  $U$  l'equazione differenziale soddisfatta da  $\rho(t)$

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho(t)]$$

Attenzione che questa è la matrice densità in *Schroedinger Representation*: infatti la  $\rho$  cambia mentre le osservabili no, per cui le medie delle osservabili al tempo  $t$  si calcola

$$\langle \psi(t) | \Theta | \psi(t) \rangle = Tr [\Theta \rho(t)]$$

dove  $\Theta$  NON viene evoluta.

#### 4. Heisemberg's Representation

La stessa media precedente si può vedere in un'altro modo.

$$= Tr [\Theta U(t) \rho U^\dagger(t)] = Tr [U^\dagger \Theta U(t) \rho] = Tr [\Theta_H(t)]$$

dove  $\Theta_H(t) = U^\dagger \Theta U(t)$  è l'operatore  $\Theta$  in *Heisemberg Representation*, dove evolviamo le osservabili e non gli stati. La legge di evoluzione è simile a quella dello starto in rapp. di Schroedinger, la differenza è nella posizione del croce ed è fondamentale. Infatti l'equazione di evoluzione delle osservabili *Time Independent* in rappresentazione di Heisemberg diventa

$$\frac{\partial \Theta_H(t)}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} [H, \Theta_H(t)]$$

che differisce per un segno, che è fondamentale ai fini dell'interpretazione, dall'equazione soddisfatta dalla matrice densità in rapp. di Schroedinger. Alcune proprietà degli operatori in rappresentazione di Heisemberg:

(1)

$$H_H(t) = U^\dagger(t) H U(t) = H$$

cioè l'hamiltoniana di heisemberg è quella normale;

(2)

$$(AB)_H(t) = U^\dagger(t) A B U(t) = U^\dagger(t) A U(t) U^\dagger(t) B U(t) = A_H(t) B_H(t)$$

cioè l'evoluzione del prodotto è il prodotto degli evoluti;

(3)

$$\begin{aligned} (\exp [i\Theta])_H(t) &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\Theta)^n}{n!} \right)_H(t) = \sum_{n=0}^{\infty} U^\dagger(t) \frac{(i\Theta)^n}{n!} U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\Theta_H(t))^n}{n!} = \\ &= \exp [i\Theta_H(t)] \end{aligned}$$

cioè posso portare l'esponenziale dentro.

Prima di passare oltre ricordiamo che gli autostati dell'hamiltoniana *time independent*, data la forma dell'operatore  $U(t)$  nel caso *time independent*, evolvono solo beccandosi delle fasi.

## 5. Evoluzione con H time dependent

Abbiamo visto che nel caso di indipendenza temporale dell'Hamiltoniana potevamo scrivere

$$U(t) = \exp \left[ -\frac{iHt}{\hbar} \right]$$

forti del fatto che

$$U(t, 0) = \exp \left[ -\frac{iHt}{\hbar} \right] = U(t + t_1, t_1) \quad \forall t_1$$

dove  $U(t_f, t_i)$  è l'evoluzione dal tempo  $t_i$  al tempo  $t_f$ . Se in generale  $H = H(t)$  quanto detto prima è in generale FALSO. In generale l'evoluzione dipenderà dall'istante iniziale, cosa che non accade nel caso *time independent*. Occorrerà dunque sempre specificare i due istanti nell'espressione di  $U$ . Vale ancora che

$$U(t + s, 0) = U(t + s, s)U(s, 0)$$

e

$$U(t + dt, t) \rightarrow \mathbb{I}$$

ma ATTENZIONE:

$$U(t + s, s) \neq U(t)$$

Fissiamo l'istante iniziale  $t_0 = 0$ . Allora si può verificare che l'equazione che risolve  $U(t, 0)$  è

PROPOSIZIONE 4.1 (L'equazione per  $U$  è la stessa).

$$\dot{U}(t, 0) = -\frac{iH(t)}{\hbar}U(t, 0)$$

DIMOSTRAZIONE. Il fatto che l'equazione sia la stessa sta nel fatto che l'hamiltoniana come generatore delle traslazioni temporali, nel caso time-dependent, è ancora vero, con una relazione che diventa più precisa perchè vale istante per istante, usando per traslare l'hamiltoniana a quel dato istante:

$$U(t + dt, t) = \mathbb{I} - i\frac{H(t)}{\hbar}dt$$

Abbiamo allora:

$$\begin{aligned} \dot{U}(t, 0) &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{U(t + dt, 0) - U(t, 0)}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{U(t + dt, t)U(t, 0) - U(t, 0)}{dt} = \\ &= \lim_{dt \rightarrow 0} \left( \frac{U(t + dt, t) - \mathbb{I}}{dt} \right) U(t, 0) = -i\frac{H(t)}{\hbar}U(t, 0) \end{aligned}$$

□

## 6. Serie di Dyson

La soluzione esplicita dell'equazione per  $U$  è data dalla serie di Dyson:

$$\dot{U}(t, 0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \dots \int_0^{t^{(n-1)}} dt^{(n)} \frac{(-i)^n}{\hbar^n} H(t') H(t'') \dots H(t^{(n)})$$

in questa soluzione formale è L'ORDINE delle  $H$  È IMPORTANTE dato che Hamiltoniane a tempi diversi potrebbero non commutare fra loro. Un modo compatto di scrivere la serie di Dyson è usare la nozione di esponenziale t-ordinato:

$$U(t, 0) = \overleftarrow{\exp} \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' H(t') \right]$$

NOTA 4.1 (Errore Terribile). L'esponenziale t-ordinato è solo una abbreviazione della formula di Dyson. Notate che in generale

$$\overleftarrow{\exp} \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' H(t') \right] \neq \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' H(t') \right]$$

Alcuni casi in cui la serie di Dyson si semplifica:

- (1) Se  $H$  è time independent, allora si può verificare che

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \dots \int_0^{t^{(n-1)}} dt^{(n)} \frac{(-i)^n}{\hbar^n} H(t') H(t'') \dots H(t^{(n)}) = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-iH)^n}{\hbar^n} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \dots \int_0^{t^{(n-1)}} dt^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iH)^n}{(\hbar)^n} \frac{t^n}{n!} = \exp \left[ -\frac{iHt}{\hbar} \right] \end{aligned}$$

- (2) Se  $[H(t), H(t')] = 0$  per ogni  $t, t'$  allora si possono trattare gli operatori come delle funzioni. In questo caso gli integrali nella formula di Dyson possono essere riarrangiati spostando le  $H$  ottenendo un prodotto di  $n$  integrali tutti uguali:

$$\begin{aligned} \overleftarrow{\exp} \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' H(t') \right] &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \dots \int_0^{t^{(n-1)}} dt^{(n)} \frac{(-i)^n}{\hbar^n} H(t') H(t'') \dots H(t^{(n)}) = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^t dt' H(t') \int_0^{t'} dt'' H(t'') \dots \int_0^{t^{(n-1)}} dt^{(n)} \frac{(-i)^n}{\hbar^n} H(t^{(n)}) = \sum_0^{\infty} \frac{(-i)^n}{(\hbar)^n} \left( \int_0^t dt' H(t') \right)^n = \\ &= \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' H(t') \right] \end{aligned}$$

dunque se commutano fra loro posso dimenticarmi di avere il t-ordinato. Un esempio tipico è  $H(t) = Hf(t)$ .

Notare che

$$\begin{aligned}
 U^\dagger(t, 0) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \dots \int_0^{t^{(n-1)}} dt^{(n)} \frac{(+i)^n}{\hbar^n} H(t^{(n)}) H(t^{(n-1)}) \dots H(t') = \\
 &= \overrightarrow{\exp} \left[ +\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' H(t') \right]
 \end{aligned}$$

cioè l'esponenziale anti t-ordinato del dagger. Fatevi il seguente:

ESERCIZIO 4.2. Mostrate che

$$\dot{U}^\dagger(t) = \frac{i}{\hbar} U^\dagger(t) H(t)$$

con  $H$  a destra e non a sinistra: infatti dato che non è detto che ci siano commutazioni è importante dove la metto. Mostrate inoltre che

$$U^\dagger(t, 0)U(t, 0) = \mathbb{I}$$

## Regole di quantizzazione, stati gaussiani e distribuzione di Wigner

### 1. Regole di Quantizzazione

Adesso devo costruire un modello quantistico del mio sistema, come faccio? Devo:

- (1) Identificare le osservabili del sistema
- (2) Identificare un'algebra di tali osservabili

Ci sono delle 'regole' più o meno formali per attuare questa procedura di riscrittura del sistema in termini quantistici, o di quantizzazione, a partire solitamente dalla meccanica classica.

### 2. Regola di quantizzazione canonica (Dirac)

Questa regola di quantizzazione si basa sulla sostituzione formale

$$Q \rightarrow \hat{Q} \quad P \rightarrow \hat{P}$$

fra variabili canoniche classiche e operatori quantistici, sulla sostituzione

$$\{\dots, \dots\} \rightarrow [\dots, \dots] \frac{1}{i\hbar}$$

fra parentesi di poisson classiche e commutatori quantistici, e sulla trasformazione delle osservabili classiche del sistema in osservabili quantistiche come funzioni degli operatori  $\hat{Q}$  e  $\hat{P}$ :

$$A(Q, P) \rightarrow \hat{A}(\hat{Q}, \hat{P})$$

Questa procedura di quantizzazione può essere giustificata solo a posteriori e non può produrre certamente quelle osservabili e quelle Hamiltoniane del sistema che siano prettamente quantistiche, come lo Spin e le Hamiltoniane che riguardano accoppiamenti in cui è coinvolto lo spin. La sua giustificazione formale sta nel fatto che l'algebra delle parentesi di Poisson e l'algebra dei commutatori godono delle stesse proprietà.

### 3. Quantizzazione basata sul principio di relatività, teoremi di Wigner e Stone

Un modo di quantizzare un sistema classico è appellarsi al principio di relatività (*by the way*: si rimane comunque nell'ambito della meccanica quantistica non relativistica). Una trattazione completa di questo secondo approccio si trova in [Bal98], noi qui ne daremo soltanto un *outline*. Supponiamo di avere due osservatori in moto relativo uniforme fra loro, in sistemi di riferimento inerziali  $S$  e  $S'$ . Fissato un sistema quantistico di interesse, la descrizione dei due osservatori sarà fatta sullo stesso spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ , dato che la dimensionalità dello spazio deve essere un invariante per trasformazioni inerziali. Supponiamo che  $S$  consideri due stati del sistema fisico, siano questi

$$|\psi\rangle \in \mathcal{H} \quad \text{e} \quad |\phi\rangle \in \mathcal{H}$$

e siano

$$|\psi'\rangle \in \mathcal{H} \quad \text{e} \quad |\phi'\rangle \in \mathcal{H}$$

i corrispondenti vettori in  $\mathcal{H}$  dal punto di vista dell'osservatore  $S'$ . Se entrambi si chiedono qual'è la probabilità di trovare lo stato che per  $S$  è rappresentato da  $|\psi\rangle$  nello stato che per  $S'$  è rappresentato da  $|\phi\rangle$ , entrambi devono ottenere lo stesso risultato. Deve dunque verificarsi che

$$|\langle\phi|\psi\rangle|^2 = |\langle\phi'|\psi'\rangle|^2$$

Trasformare un riferimento in un'altro è una trasformazione passiva dei vettori dello spazio di Hilbert del sistema. Nel senso che i vettori, cioè gli stati, restano quelli, ma io, cambiando riferimento, li vedo cambiare nel senso che ne vedo cambiare le componenti. Ma allora, invece di fare trasformazioni passive, decido equivalentemente di fare trasformazioni attive, sugli stati, di segno opposto. In quest'ottica il *requirement* per soddisfare al principio di relatività è che le trasformazioni del gruppo di galileo lascino invariati i moduli quadri dei prodotti scalari fra stati del sistema. A questo punto ci è utile il seguente:

**TEOREMA 5.1 (Wigner).** *Se  $T$  è una trasformazione one to one del sistema*

$$T : |\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle$$

*che verifica la proprietà*

$$|\langle\phi|\psi\rangle|^2 = |\langle\phi'|\psi'\rangle|^2 \quad \forall |\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{H}$$

*allora esiste un operatore  $U$  tale che, a meno di una fase globale*

$$|\psi'\rangle = U |\psi\rangle$$

*con  $U$  unitario o antiunitario (antiunitario è un unitario  $\mathbb{C}$  antilineare, cioè che butta fuori dei coniugati sui numerelli)*

Aluni remarks:

- (1) Se la trasformazione non è lineare, questo lo potrei vedere nella fase globale;
- (2) che sia unitario o antiunitario non lo decido io, ma è deciso a priori dal tipo di trasformazione, come vedremo dagli esempi seguenti.

**ESEMPIO 5.1.** Consideriamo la quantità

$$\Delta(\psi_1, \psi_2, \psi_3) = \langle\psi_1|\psi_2\rangle \langle\psi_2|\psi_3\rangle \langle\psi_3|\psi_1\rangle$$

Questa quantità è invariante per ridefinizioni delle fasi globali. Supponiamo di avere una trasformazione  $T$ , vediamo come questa agisce sulla nostra quantità:

$$\Delta' = \langle\psi'_1|\psi'_2\rangle \langle\psi'_2|\psi'_3\rangle \langle\psi'_3|\psi'_1\rangle$$

Siccome sappiamo la trasformazione,  $\Delta'$  lo sappiamo calcolare. D'altra parte, per il teorema di Wigner questa *mapping* la posso ottenere come

$$\Delta = \langle U\psi_1|U\psi_2\rangle \langle U\psi_2|U\psi_3\rangle \langle U\psi_3|U\psi_1\rangle$$

adesso abbiamo due casi

- (1) Se  $U$  è unitaria, viene la stessa cosa:  $\Delta = \Delta'$ .
- (2) Se  $U$  è antiunitaria, viene diverso:  $\Delta' = \Delta^*$

Dunque con questo semplice giochino, possiamo dire subito se la  $U$  che ci dà Wigner sarà unitaria o antiunitaria. Pertanto non lo decido io, ma lo decide  $T$  come ha fatta la  $U$ .

ritornando alle trasformazioni di Galileo, si vede che l'unica  $U$  sensata è una trasformazione unitaria. Le voglio infatti unitarie perchè voglio una proprietà di chiusura gruppale: mentre la composizione di due trasformazioni di galileo è di galileo, la composizione di due trasformazioni antiunitarie non sarebbe antiunitaria ma unitaria.

*Anyway*, ricordiamo anche il teorema di Stone 3.3:

$$U_T U_{T'} = U_{T+T'} \quad , \quad U_{T \rightarrow 0} = \mathbb{I} \quad \Rightarrow \quad U_T = \exp[-iKT]$$

con  $K = K^\dagger$  il generatore infinitesimo della trasformazione. Usando questi due teoremi abbiamo immediatamente introdotto 10 osservabili sul nostro sistema: sono i generatori delle trasformazioni del gruppo di Galileo. I 10 operatori che si ottengono sono:  $H$ , generatore dello shift temporale, i tre impulsi  $P_x, P_y, P_z$  **definiti come** i generatori delle traslazioni lungo le rispettive direzioni, i tre operatori posizione  $X, Y, Z$  generatori degli shift di Galileo (i corrispettivi galileiani dei boost relativistici), i tre 'momenti angolari'  $J_x, J_y, J_z$ , generatori delle rotazioni. Ancora una volta per maggiori dettagli su questa costruzione si rimanda a [Bal98]. L'unica cosa che manca in questa costruzione è l'introduzione di  $\hbar$  per aggiustare le dimensioni. Il valore di  $\hbar$  e il fatto che vada bene sempre lei, in una qualche combinazione, per aggiustare le dimensioni, è un fatto sperimentale.

Il *take on message* di questo discorso è che possiamo costruire un'algebra delle osservabili del sistema basandoci solamente sul principio di relatività. Adesso vediamo un esempio esplicito di queste osservabili.

#### 4. Particella libera in 1-D, operatori in carne ed ossa

Gli stati fisici della particella libera vivranno in uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ . L'azione dell'operatore  $Q$  la possiamo definire a partire dal modo in cui calcoliamo il valor medio:

$$\langle Q \rangle|_\psi = \int dx \, x |\psi(x)|^2 = \int dx \, \psi^*(x) x \psi(x)$$

Dunque  $Q(\psi(x)) = x\psi(x)$ . In realtà il dominio di  $Q$  non è tutto  $\mathcal{H}$ , ma non importa perchè è un denso. Per trovare l'espressione in rappresentazione delle  $x$  dell'operatore impulso  $P$ , definiamo l'operatore traslazione:

$$T_\Delta |\psi\rangle = |\psi_1\rangle \quad \text{con} \quad \psi_1(x) = \langle x | \psi_1 \rangle = \langle x | T_\Delta | \psi \rangle = \psi(x - \Delta)$$

Si verifica facilmente che l'inverso di  $T_\Delta$  è  $T_{-\Delta}$  e che questo è anche l'aggiunto, per cui l'operatore traslazione è unitario. Il fatto che  $T_\Delta$  trasli di  $\Delta$  lo si vede dalla sua azione su  $Q$ . Infatti  $T_\Delta^\dagger Q T_\Delta = Q + \Delta \mathbb{I}$ , la verifica è semplice:

$$\begin{aligned} \langle \psi' | Q | \psi' \rangle &= \left\langle \psi \left| T_\Delta^\dagger Q T_\Delta \right| \psi \right\rangle = \int dx \, x |\psi'(x)|^2 = \\ &= \int dx \, x |\psi(x - \Delta)|^2 = \int dx \, (x + \Delta) |\psi(x)|^2 = \langle \psi | Q | \psi \rangle + \Delta \end{aligned}$$

Riprendendo il discorso, si ha, per il teorema di Stone,

$$T_\Delta = \exp[-iK\Delta]$$

l'algebra degli operatori  $K$  e  $Q$  deve seguire dalle espressioni che abbiamo trovato sopra:

$$T_\Delta^\dagger Q T_\Delta = Q + \Delta \mathbb{I}$$

da, espansa fino all'ordine lineare in  $\Delta$ :

$$(\mathbb{I} + iK\Delta) Q (\mathbb{I} - iK\Delta) = Q + \Delta \Leftrightarrow Q + i[K, Q] \Delta = Q + \Delta \Leftrightarrow [Q, K] = i$$

che, una volta riscritto opportunamente  $K$  con  $\hbar$  è la relazione di commutazione canonica. L'espressione invece dell'operatore  $P$  in coordinate si scrive come

$$\langle x | P | \psi \rangle = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi(x)$$

la dimostrazione si fa sviluppando al primo ordine in  $\Delta$  l'azione su  $\psi$  dell'operatore di traslazione.

## 5. Stati Gaussiani di particella Libera

Per una particella libera possiamo considerare l'autostato di  $H = \frac{p^2}{2m}$  dato da

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{d}} \exp \left[ ikx - \frac{x^2}{2d^2} \right]$$

con  $k$  l'impulso in unità di  $\hbar$  del pacchetto, e  $d > 0$  è la larghezza del pacchetto. In generale uno potrebbe anche inserire il parametro di posizione media  $\mu$  che qui è preso nullo per comodità. Si può verificare, per i valori medi di  $Q$  e  $P$  del pacchetto, che

$$\langle Q \rangle = 0 \quad \langle P \rangle = \hbar k$$

mentre

$$\langle \Delta^2 Q \rangle = \frac{d^2}{2} \quad \langle \Delta^2 P \rangle = \frac{\hbar^2}{2d^2}$$

dunque gli stati gaussiani saturano la disuguaglianza di Heisenberg, essendo

$$\langle \Delta^2 Q \rangle \langle \Delta^2 P \rangle = \frac{\hbar^2}{4}$$

sono cioè stati a minima indeterminazione. Non dipende da dove sono centrati né da  $k$ . Inoltre questa disuguaglianza è verificata per ogni valore di  $d$ .

Adesso il nostro scopo è definire, dopo questi esempi introduttivi sulle distribuzioni di probabilità nello spazio delle  $x$ , vogliamo studiare se è possibile definire una distribuzione di probabilità nello spazio delle fasi.

## 6. (Quasi)-Distribuzione di Wigner

siccome abbiamo imparato che la meccanica statistica descrive lo stato fisico del sistema in termini probabilistici, come distribuzione di probabilità per esempio nelle  $x$  o nelle  $p$ , quello che ci piacerebbe fare sarebbe descrivere questo approccio probabilistico mediante una distribuzione di probabilità nello spazio  $x, p$ . A un certo stato quantistico  $|\psi\rangle$  del nostro sistema, quindi, vorremmo associare una distribuzione di probabilità

$$W(x, p)|_{\psi}$$

che vorremmo soddisfacesse questi requisiti:

- (1) Sia possibilmente reale (vedremo che però non sarà in generale per forza  $> 0$ )
- (2) In qualche senso  $W(x, p) dx dp$  dovrebbe essere la probabilità di trovare il sistema a  $x$  e a  $p$  entro  $dx$  ed  $dp$  (in realtà già ci aspettiamo che un requirement del genere non abbia in generale senso, data l'incompatibilità delle misure di  $x$  e  $p$ )



- (3) Una volta integrata negli impulsi ci dia la distribuzione di probabilità in rappresentazione delle  $x$ :

$$\int dp W(x, p) = |\langle x, \psi \rangle|^2$$

- (4) Una volta integrata nelle  $x$  ci dia la distribuzione di probabilità in rappresentazione delle  $p$ :

$$\int dx W(x, p) = |\langle p, \psi \rangle|^2$$

É possibile definire una distribuzione, detta di Wigner, che soddisfa i tutti i requisiti di cui sopra eccetto la positività;

$$\begin{aligned} W(x, p)|_\psi &= \int \frac{dy}{2\pi\hbar} \left\langle x + \frac{y}{2} \middle| \psi \right\rangle \left\langle \psi \middle| x - \frac{y}{2} \right\rangle \exp \left[ -\frac{ipy}{\hbar} \right] \\ &= \int \frac{dy}{2\pi\hbar} \psi \left( x + \frac{y}{2} \right) \psi^* \left( x - \frac{y}{2} \right) \exp \left[ -\frac{ipy}{\hbar} \right] \end{aligned}$$

La proprietà (1) è rispettata, ma non è garantita la positività. La (2), come anticipato, in generale non ha davvero senso. La (3) si verifica facilmente, dato che integrando in  $p$  si ha:

$$\begin{aligned} \int dp W(x, p) &= \int \frac{dy}{2\pi\hbar} \psi \left( x + \frac{y}{2} \right) \psi^* \left( x - \frac{y}{2} \right) \int dp \exp \left[ -\frac{ipy}{\hbar} \right] \\ &= \int \frac{dy}{2\pi\hbar} \psi \left( x + \frac{y}{2} \right) \psi^* \left( x - \frac{y}{2} \right) 2\pi\hbar \delta(y) \\ &= |\psi(x)|^2 \end{aligned}$$

che prova la (3). Per verificare la (4) il conto è più brutto, dato che la Wigner è scritta in modo da 'favorire' le  $x$ . Il conto è comunque fattibile. Ricordandosi dell'operatore traslazione, si ha:

$$\int dx W(x, p) = \int \frac{dy}{2\pi\hbar} \int dx \exp \left[ -\frac{ipy}{\hbar} \right] \left\langle x \middle| \exp \left[ \frac{ipy}{2\hbar} \right] \middle| \psi \right\rangle \left\langle \psi \middle| \exp \left[ \frac{ipy}{2\hbar} \right] \middle| x \right\rangle =$$

commutando le due parentesi finali (sono numeri) abbiamo:

$$= \int \frac{dy}{2\pi\hbar} \int dx \exp \left[ -\frac{ipy}{\hbar} \right] \left\langle \psi \middle| \exp \left[ \frac{ipy}{2\hbar} \right] \middle| x \right\rangle \left\langle x \middle| \exp \left[ \frac{ipy}{2\hbar} \right] \middle| \psi \right\rangle =$$

e, riconoscendo la decomposizione dell'identità, abbiamo:

$$= \int \frac{dy}{2\pi\hbar} \exp \left[ -\frac{ipy}{\hbar} \right] \left\langle \psi \middle| \exp \left[ \frac{ipy}{\hbar} \right] \middle| \psi \right\rangle =$$

ricordandosi che  $\int dp' |p'\rangle \langle p'| = \mathbb{I}$  abbiamo che:

$$= \int dp' |p'\rangle \langle p'| \int \frac{dy}{2\pi\hbar} \exp \left[ -\frac{ipy}{\hbar} \right] \left\langle \psi \middle| \exp \left[ \frac{ipy}{\hbar} \right] \middle| \psi \right\rangle =$$

da cui, portando i  $p'$  dentro e riconoscendo che  $\langle \psi | p' \rangle = \tilde{\psi}(p')$  e che  $\langle \psi | \exp \left[ \frac{ipy}{\hbar} \right] | p' \rangle = \tilde{\psi}(p') \exp \left[ \frac{ip'y}{\hbar} \right]$  dove  $\tilde{\psi}(p')$  è la funzione d'onda nello spazio delle  $p$ , otteniamo:

$$= \int dp' \int \frac{dy}{2\pi\hbar} \exp \left[ \frac{-ipy}{\hbar} \right] |\tilde{\psi}(p')|^2 \exp \left[ \frac{ip'y}{\hbar} \right] = \int dp' \delta(p - p') |\tilde{\psi}(p')|^2 = |\tilde{\psi}(p)|^2$$

che prova la (4).

## LEZIONE 6

### Conservazione della probabilità, Ehrenfest e Oscillatore Armonico

#### 1. Autostati di P e Q

Per finire il discorso dell'altra volta sugli operatori  $P$  e  $Q$ , calcoliamo la funzione d'onda  $\langle x|p\rangle$  dell'autostato di  $|p\rangle$  di  $P$ . Si ha:

$$P|p\rangle = p|p\rangle \Rightarrow \langle x|P|p\rangle = p\langle x|p\rangle$$

ovvero, usando la versione di  $P$  in rappresentazione delle  $x$ , e detta  $\psi(x) = \langle x|p\rangle$ :

$$-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x} = p\psi(x)$$

da cui

$$\psi(x) = C e^{\frac{ipx}{\hbar}}$$

con  $C$  imposta dalla condizione di completezza:

$$\langle x'|\mathbb{I}|x\rangle = \delta(x - x') = \int dp \langle x'|p\rangle \langle p|x\rangle = \int dp e^{-\frac{ip(x-x')}{\hbar}} |C|^2 = 2\pi\hbar |C|^2 \delta(x - x')$$

ne segue pertanto che è possibile scegliere  $C$ , a meno di una fase globale su tutti gli autostati dell'impulso, come  $C = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$  dunque gli autostati di  $P$  saranno

$$\psi_p(x) = \langle x|p\rangle = \frac{e^{-\frac{ipx}{\hbar}}}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

con questa normalizzazione siete garantiti che tutto ciò sia consistente.

#### 2. Particella in 3-D, conservazione della probabilità

Consideriamo

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$$

dove  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  e  $\frac{\vec{p}^2}{2m} = \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m}$  e dove gli operatori  $p_i, x_j$  soddisfano le seguenti regole di commutazione:

$$[p_i, p_j] = [x_i, x_j] = 0 \quad \forall \quad i, j = 1, 2, 3$$

e

$$[x_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij}$$

Una base completa per una particella in 3 dimensioni è quella data dal prodotto tensore delle tre basi date dagli autostati delle tre coordinate:

$$|\vec{x}\rangle = |x_1\rangle \otimes |x_2\rangle \otimes |x_3\rangle = |x_1, x_2, x_3\rangle$$

L'azione dell'Hamiltoniana in questa base si scrive

$$\langle \vec{x} | H | \psi \rangle = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{x}) \right) \psi(\vec{x})$$

la dinamica sarà quindi

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(\vec{x}, t) = -\frac{i}{\hbar} \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{x}) \right] \psi(\vec{x})$$

La densità di probabilità al tempo  $t$  è data da

$$P(\vec{x}, t) = |\psi(\vec{x})|^2$$

e deve valere,  $\forall t$

$$\int d^3x P(\vec{x}, t) = 1$$

Possiamo chiederci come evolve  $P(\vec{x}, t)$ :

$$\dot{P}(\vec{x}, t) = \dot{\psi}^*(\vec{x}, t)\psi(\vec{x}, t) + \psi^*(\vec{x}, t)\dot{\psi}(\vec{x}, t) =$$

sostituendo alle derivate di  $\psi$  l'equazione di Schroedinger, abbiamo:

$$\begin{aligned} &= -\frac{i}{\hbar} \psi^*(\vec{x}, t) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{x}) \right] \psi(\vec{x}, t) + c.c. = \\ &= \frac{i\hbar}{2m} [\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*] \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \vec{\nabla} \cdot [\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*] = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J} \end{aligned}$$

con

$$\vec{J}(\vec{x}, t) = -\frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*)$$

dunque

$$\dot{P}(\vec{x}, t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}, t) = 0$$

che è l'equazione di continuità che stabilisce la conservazione locale della probabilità.

### 3. Teorema di Ehrenfest

Per introdurre il teorema di Ehrenfest facciamo prima il caso più semplice della particella libera. sia dunque  $H = \frac{p^2}{2m}$ . In rappresentazione di Heisenberg l'equazione di evoluzione per  $p_j$  è (in questa sezione sottointendiamo il pedice  $H$  che indica che stiamo parlando di operatori in rappresentazione di Heisenberg):

$$\frac{\partial q_j}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} [H, q_j] = -\frac{i}{2m\hbar} 2p_j [q_j, p_j] = \frac{p_j(t)}{m}$$

inoltre, dato che  $p_j$  commuta con  $H$ ,

$$\frac{\partial p_j(t)}{\partial t} = 0 \Rightarrow p_j(t) = p_j(0)$$

Dunque la soluzione per  $q_j(t)$  è

$$q_j(t) = \frac{p_j(t)}{m} + q_j(0)$$

Dunque gli operatori di Heisenberg sembrano evolvere come le corrispondenti variabili classiche. Notare però che il significato della visione classica e di quella quantistica sono profondamente diversi. Per esempio c'è una indeterminazione che ci si porta dietro anche nell'evoluzione temporale, che anzi cresce al passare del tempo. Dalla Robertson's inequality, nella visione ridotta di Heisenberg, essendo  $[q_j(0), q_j(t)] = \frac{t}{m} [q_j(0), p_j(0)] = \frac{t}{m} i\hbar$  abbiamo

$$\langle \Delta^2 q_j(0) \rangle \langle \Delta^2 q_j(t) \rangle \geq \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2}$$

cioè

$$\langle \Delta^2 q_j(t) \rangle \geq \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2} \frac{1}{\langle \Delta^2 q_j(0) \rangle}$$

Siamo quindi in presenza di un processo di diffusione in cui la larghezza dello spread in coordinata della particella aumenta col tempo in modo almeno quadratico. La ragione di questo fatto (*to be clarified*) è che siamo di fronte ad una legge di dispersione fra momento ed energia che è quadratica. Fatte queste precisazioni nell'esempio della particella libera, Possiamo enunciare il teorema di Herenfest:

**TEOREMA 6.1 (Herenfest).** *Sia  $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{q})$  allora valgono le seguenti equazioni di Heisenberg:*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} q_j(t) = \frac{p_j(t)}{m} \\ \frac{\partial}{\partial p_j}(t) = -\frac{\partial}{\partial q_j} V(q_j(t)) \end{cases}$$

Formalmente: prendo  $V(\vec{q})$  come funzione delle coordinate, derivo, e POI valuto nell'operatore. Un caveat per il significato del teorema:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \langle q_j(t) \rangle = \frac{\langle p_j(t) \rangle}{m} \\ \frac{\partial}{\partial \langle p_j \rangle}(t) \neq -\frac{\partial}{\partial \langle q_j \rangle} V(\langle q_j(t) \rangle) \end{cases}$$

cioè non è possibile passare il risultato del teorema ai valori medi. In presenza di potenziali con dipendenza più che armonica l'identificazione fra operatori di Heisenberg e variabili classiche fallisce già a livello di momenti primi. L'idea è che una volta che lo spread della funzione d'onda diventa apprezzabile rispetto al range di variazione del potenziale non puoi più trascurarlo, e non vale più l'identificazione perchè non puoi sostituire più valori medi con valori puntuali. Il fatto è che come abbiamo visto lo spread della funzione d'onda prima o poi diventerà grande, e quindi in generale l'identificazione fallisce.

#### 4. Oscillatore Armonico- Introduzione

Per il momento 1-D. L'hamiltoniana è

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2$$

Vogliamo studiare lo spettro di tale Hamiltoniana introducendo *tools* matematici utili. Potrei andare in rappresentazione delle coordinate e fare i conti. Ma è meglio prescindere dalla rappresentazione. L'equazione agli autovalori è

$$H |\psi\rangle = E |\psi\rangle$$

con  $E \geq 0$  data la positività dell'operatore Hamiltoniano. È utile introdurre gli operatori  $a, a^\dagger$  definiti come:

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left[ q + i \frac{p}{m\omega} \right] \quad \text{e} \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left[ q - i \frac{p}{m\omega} \right]$$

in questa definizione  $a, a^\dagger$  sono adimensionati. Si ha, ovviamente, che

$$[a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0$$

e, effettuando il calcolo

$$[a, a^\dagger] = \mathbb{I}$$

Le relazioni fra  $a, a^\dagger$  e  $q, p$  possono essere invertite e danno:

$$q = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger) \quad \text{e} \quad p = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} (a^\dagger - a)$$

passando a variabili adimensionate  $(q, p) \rightarrow (x, y)$  le relazioni di sopra diventano:

$$x = \frac{(a + a^\dagger)}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad y = \frac{(a^\dagger - a)}{\sqrt{2}}$$

In termini di  $a, a^\dagger$  l'operatore  $H$  diventa:

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}(x^2 + y^2) = \frac{\hbar\omega}{2} = [aa^\dagger + a^\dagger a] = \frac{\hbar\omega}{2} (2a^\dagger a + 1) = \hbar\omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right)$$

Siccome  $a^\dagger a$  è def  $> 0$ , è chiaro allora che  $H \geq \frac{\hbar\omega}{2}$ . Come possibile primo livello di  $H$  quindi non avrò zero, ma avrò  $\frac{\hbar\omega}{2}$  al minimo. Questa energia di livello zero nasce in generale dal principio di Heisenberg. Infatti un livello con energia zero non ci può essere per l'oscillatore armonico, perchè implicherebbe che  $x$  e  $p$  fossero esattamente nulle e determinate esattamente, ma ciò è incompatibile col principio di indeterminazione. Verifichiamo più esplicitamente quanto osservato: Abbiamo

$$\Delta q \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad \leftrightarrow \quad \Delta x \Delta y \geq \frac{1}{2}$$

essendo  $H = \frac{\hbar\omega}{2}(x^2 + y^2)$  da cui

$$\begin{aligned} \langle H \rangle|_\psi &= \frac{\hbar\omega}{2} (\langle \Delta^2 x \rangle + \langle \Delta^2 y \rangle) \\ &\geq \frac{\hbar\omega}{2} \left( \frac{1}{4 \langle \Delta^2 y \rangle} + \langle \Delta^2 y \rangle \right) \\ &\geq \frac{\hbar\omega}{2} \end{aligned}$$

## 5. Diagonalizzazione di H

Intanto noto che basta diagonalizzare  $a^\dagger a = N$ , l'operatore numero. Dico che

$$E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad \text{con } n \in \mathbb{N}$$

Proviamo questo fatto. Chiamiamo  $|n\rangle$  gli autostati dell'operatore  $N$  rispetto all'autovalore  $n$ , che per ora non sappiamo essere intero. *By the way* sappiamo che  $n > 0$ , dato che l'operatore numero è  $\text{def} > 0$ . Consideriamo:

$$|\psi\rangle = a^\dagger |n\rangle$$

allora si ha

$$\hat{n} |\psi\rangle = a^\dagger a a^\dagger |n\rangle = a^\dagger (a^\dagger a + 1) |n\rangle = a^\dagger (n + 1) |n\rangle = (n + 1) |\psi\rangle$$

-dunque  $|\psi\rangle$  è autovettore dell'operatore numero con autovalore  $n + 1$ . Procedendo iterativamente ci aspettiamo di ottenere, a partire dallo stato  $|n\rangle$  la successione:

$$|n\rangle \xrightarrow{a^\dagger} |n+1\rangle \xrightarrow{a^\dagger} |n+2\rangle \dots \xrightarrow{a^\dagger} |n+m\rangle \dots$$

in realtà per verificare che applicando  $a^\dagger$  ottengo autovettori buoni dovrei verificare che sono normalizzabili. Ma questo è agile:

$$\langle\psi|\psi\rangle = \langle n|a a^\dagger|n\rangle = \langle n|a^\dagger a + 1|n\rangle = (n + 1) \langle n|n\rangle = n + 1$$

dunque  $|\psi\rangle$  è normalizzabile. Normalizzando, dunque, possiamo scrivere:

$$|n+m\rangle = \frac{a^{\dagger m}}{\sqrt{(n+1)(n+2)\dots(n+m)}}|n\rangle$$

dove  $m$  è intero positivo e  $n$  NON è ancora detto che sia intero (ma è positivo). Lo stesso giochino lo si può fare applicando  $a$ :

$$|\phi\rangle = a |n\rangle$$

allora si ha

$$\hat{n} |\phi\rangle = a^\dagger a a |n\rangle = (a a^\dagger - 1) a |n\rangle = (n - 1) |\phi\rangle$$

analogamente a prima abbiamo una successione decrescente di stati. Queste considerazioni giustificano i nomi di operatore di creazione e di distruzione. Notiamo che  $H$  è sicuramente *unbounded from above*, per cui posso applicare  $a^\dagger$  *ad libitum*. Ma  $H$  è *Bounded* al di sotto. Più di tanto non potrò scendere con  $a$ . Quindi deve succedere qualcosa che interrompe la catena discendente di stati prodotta dalle applicaione successive di  $a$ . (Potrebbe essere che il vettore si annulla ad un certo punto, oppure non è più normalizzabile). Si vede che l'unico modo è che prima o poi il vettore si annulli, quindi

$$n \in \mathbb{N}$$

così prima o poi tocco il vettore nullo e da lì, in poi non scenda più. questo mi dice che se esiste una soluzione è così, cioè ad autovalori interi. Per far vedere che la soluzione esiste basta far vedere, con l'equazione differenziale una soluzione del problema di sturm liouville associato, cioè il problema differenziale associato nello spazio delle  $x$ . In realtà

basta trovare la soluzione per uno solo degli autostati, per esempio il fondamentale  $|0\rangle$ . Questo si fa facilmente, e dunque resta verificato che ESISTONO  $|n\rangle$  con  $n \in \mathbb{N}$  tali che:

$$H = \sum \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) |n\rangle \langle n|$$

Adesso possiamo studiare facilmente la dinamica. Infatti se

$$|\psi\rangle = \sum_0^\infty a_n |n\rangle$$

allora

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left[-\frac{iHt}{\hbar}\right] |\psi\rangle = \sum_0^\infty a_n \exp\left[i\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right] |n\rangle$$

Possiamo anche calcolarci come evolve  $a(t)$ :

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) &= \frac{i}{\hbar} [H, a(t)] = \frac{i}{\hbar} \exp\left[\frac{iHt}{\hbar}\right] [H, a] \exp\left[-\frac{iHt}{\hbar}\right] \\ &= \frac{i}{\hbar} \exp\left[\frac{iHt}{\hbar}\right] (\hbar\omega [a^\dagger a, a]) \exp\left[-\frac{iHt}{\hbar}\right] \end{aligned}$$

che, essendo  $[a^\dagger a, a] = a^\dagger [a, a] + [a^\dagger, a] a = -a$ , diventa:

$$= -i \exp\left[\frac{iHt}{\hbar}\right] (\omega a(0)) \exp\left[-\frac{iHt}{\hbar}\right]$$

da cui l'equazione differenziale per  $a$ :

$$\dot{a}(t) = -i\omega a(t) \Rightarrow a(t) = e^{-i\omega t} a(0)$$

Per calcolare l'evoluzione di  $a^\dagger$  basta fare l'aggiunto dell'espressione precedente, come si può verificare scrivendo esplicitamente gli operatori di evoluzione temporale. Dunque si ha:

$$a^\dagger(t) = e^{i\omega t} a^\dagger(0)$$

A questo punto, ricordando il cambio canonico  $(x, y) \rightarrow (a, a^\dagger)$ , possiamo scrivere

$$\begin{cases} x(t) = \frac{a(t) + a^\dagger(t)}{\sqrt{2}} \\ y(t) = \frac{a^\dagger(t) - a(t)}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x(t) = \cos(\omega t)x(0) + \sin(\omega t)y(0) \\ y(t) = \cos(\omega t)y(0) - \sin(\omega t)x(0) \end{cases}$$

Dunque abbiamo una conferma esplicita del Teorema di Ehrenfest.

NOTA 6.1. Vedremo con Wigner che la distribuzione evolverà senza diffusione sotto l'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico: infatti la tendenza deconfinante del termine cinetico dell'Hamiltoniana viene contrastata dal termine di confinamento quadratico dovuto al potenziale.



La soluzione esplicita al problema di Sturm Liouville dell'oscillatore armonico porta all'introduzione dei polinomi di Hermite:

$$\psi_n(x) = c_n H_n \left[ \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right] \exp \left[ -\frac{m\omega}{2\hbar} x^2 \right]$$

## 6. Stati Coerenti

Uno stato coerente  $|\alpha\rangle$  di parametro complesso  $\alpha$  è definito, sulla base di Fock, da:

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle e^{-|\alpha|^2/2}$$

per esercizio verificate che sono ben normalizzati. Questi stati sono tantissimi (sono un continuo di stati) e giocano un ruolo molto importante nella teoria. Possiamo calcolare la probabilità che l'energia di  $\alpha$  sia quella del livello  $n$ -esimo:

$$P_n(|\alpha\rangle) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n} e^{-|\alpha|^2}}{n!}$$

cioè un poissoniana di media  $|\alpha|^2$ . L'azione di  $a$  sugli stati coerenti è diagonale:

$$\begin{aligned} a|\alpha\rangle &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n \sqrt{n} |n-1\rangle}{\sqrt{n!}} e^{-|\alpha|^2/2} \\ &= \alpha |\alpha\rangle \end{aligned}$$

Dunque abbiamo trovato un continuo di autovettori per l'operatore  $a$ !. Questo fatto non è scontato, dato che, poichè  $a$  non è autoaggiunto ed è unbounded, nessun teorema ci garantisce l'esistenza di autovettori, che in questo caso sono addirittura autovettori nel senso classico, e non generalizzato, del termine. Per casa:

ESERCIZIO 6.1 (Media e scarto delle eccitazioni). Verificate che

- (1)  $\langle \alpha | \hat{n} | \alpha \rangle = |\alpha|^2$
- (2)  $\langle \Delta^2 \hat{n} \rangle = |\alpha|^2$

fatti che confermano che siamo in presenza di una poissoniana.

## Operatori di Displacement

### 1. Ancora sugli stati coerenti

Continuando con gli stati coerenti, calcoliamo alcuni valori medi. Dato  $|\alpha\rangle$  coerente, si ha, ricordando la relazione fra  $x, y$  e  $a^\dagger, a$ , e ricordando che  $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \Rightarrow \langle\alpha|a^\dagger = \langle\alpha|\alpha^*$ , si ha:

$$\langle x \rangle = \left\langle \alpha \left| \frac{a^\dagger + a}{\sqrt{2}} \right| \right\rangle = \frac{2\Re(\alpha)}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Re(\alpha)$$

e

$$\langle y \rangle = \left\langle \alpha \left| \frac{a^\dagger - a}{\sqrt{2}} \right| \right\rangle i = \frac{\alpha^* - \alpha}{\sqrt{2}} i = \sqrt{2} \Im(\alpha)$$

Dunque la distribuzione di Wigner (nel piano rinormalizzato  $(x, y)$ ) di un coerente avrà centro in  $\sqrt{2}(\Re\alpha, \Im\alpha)$ . Al variare di  $\alpha$ , dunque, possiamo spostare la Wigner *everywhere*. Per fare valori medi più generali, per esempio potenze di  $x$  e  $y$ , si usa a macchinetta la relazione di commutazione fra  $a$  e  $a^\dagger$ . Per esempio è facile ottenere:

$$\langle \Delta^2 x \rangle = \langle \Delta^2 y \rangle = \frac{1}{2}$$

dunque gli stati coerenti saturano la disuguaglianza di Heisenberg, e dunque sono stati a minima indeterminazione. Mi aspetto allora che in rappresentazione delle  $x$  o. equivalentemente, in rappresentazione delle  $y$ , questi siano dei pacchetti d'onda con inviluppo gaussiano (in generale con momento non per forza determinato, dato che sono una sovrapposizione). In effetti:

$$\langle x | \alpha \rangle = \psi_\alpha(x)$$

è (verificare) un pacchetto gaussiano.

### 2. Overcompletezza degli stati coerenti

Gli stati coerenti soddisfano una importante proprietà di completezza. Si a infatti che:

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle \langle\alpha| = \mathbb{I}$$

dove da ora in poi il significato di tale integrale è

$$\int d^2\alpha = \int dx \int dy$$

dove  $\alpha = x + iy$ .

Stiamo quindi dicendo che i proiettori sugli stati coerenti verificano la stessa relazione che verificherebbero gli stati di un COS. Questo comporta che

$$|\psi\rangle = \mathbb{I}|\psi\rangle = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle \langle\alpha|\psi\rangle$$

Come nel caso di un COS. L'unica differenza notevole fra il caso di un COS e il nostro caso è che non è detto, causa la overcompleteness, che la decomposizione scritta sopra sia unica. In altre parole l'operatore identico non si scompone per forza nella maniera di cui sopra. Verifichiamo adesso che vale la decomposizione:

DIMOSTRAZIONE. Si ha

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle \langle\alpha| = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \sum_{n,m}^{+\infty} |n\rangle \langle m| \alpha^n \alpha^{*m} e^{-|\alpha|^2} = \sum_{n,m} \frac{g_{nm}}{\sqrt{n!m!}} |n\rangle \langle m|$$

dove gli integrali  $g_{m,n}$  sono calcolabili facilmente in coordinate polari:

$$\begin{aligned} g_{n,m} &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \alpha^n \alpha^{*m} e^{-|\alpha|^2} \\ &= \int_0^\infty dr r^{n+m+1} e^{-r^2} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{e^{i\theta(n-m)}}{\pi} \\ &= \delta_{nm} \cdot 2 \cdot \int_0^\infty dr r^{2n+1} e^{-r^2} \\ &= \delta_{nm} n! \end{aligned}$$

e questo, ricordando la completezza degli stati di fock, prova la tesi.  $\square$

Quello che sicuramente NON ci aspettiamo dagli stati coerenti è che  $\langle\alpha|\beta\rangle = 0$  se  $\alpha \neq \beta$ . In effetti si verifica che

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \exp\left[-\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2} + i\alpha^*\beta\right] \neq 0$$

quindi

$$|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = \exp[-|\alpha - \beta|^2]$$

dunque due stati coerenti diventano ortogonali se sono molto differenti, ovvero lontani.

### 3. Displacement Operator

Definiamo il displacement operator di parametro  $\alpha$ :

$$D(\alpha) = \exp[\alpha a^\dagger - \alpha^* a] = \exp[iy_0 \hat{x} - ix_0 \hat{y}]$$

dove  $x_0 = \sqrt{2} \Re\alpha$  e  $y_0 = \sqrt{2} \Im\alpha$ . Quindi il displacement operator è una specie di operatore di traslazione generalizzato. Ci aspettiamo dunque che applicandolo ad uno stato  $|\psi\rangle$  questo ne risulti in qualche modo shiftato. Inoltre, essendo esponenziale di un operatore antihermitiano,  $D(\alpha)$  è unitario. Possiamo anche verificare questo fatto esplicitamente. Risulta che:

$$D^\dagger(\alpha) = \exp[(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)^\dagger] = \exp[\alpha^* a - \alpha a^\dagger] = D(-\alpha)$$

Si verifica facilmente, quindi, usando ad esempio la formula CBH, che

$$D(\alpha)D(\alpha)^\dagger = D(\alpha)D(-\alpha) = \mathbb{I}$$

**3.1. Stati Coerenti come shiftati del fondamentale.** Ai nostri scopi è utile richiamare la formula CBH:

**PROPOSIZIONE 7.1 (CBH).** *Siano  $A, B$  operatori con  $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$ . Allora vale la seguente relazione:*

$$\exp [A + B] = \exp [A] \exp [B] \exp [-[A, B]/2]$$

Usando la formula CBH si può verificare che

$$D(\alpha) = \exp [\alpha a^\dagger] \exp [-\alpha^* a] \exp [-|\alpha|^2/2]$$

Adesso siamo pronti a caratterizzare gli stati coerenti:

**PROPOSIZIONE 7.2.** *Sia  $|\alpha\rangle$  uno stato coerente, e sia  $|0\rangle$  lo stato fondamentale dell'oscillatore armonico (anch'esso è coerente). Allora vale:*

$$|\alpha\rangle = D(\alpha) |0\rangle$$

**DIMOSTRAZIONE.** Si ha, sfruttando che l'espansione di Taylor dell'esponenziale (anche se non sarebbe molto lecita dato che si tratta di operatori unbounded) e ricordando che  $a|0\rangle = 0$ , che

$$\begin{aligned} D(\alpha) |0\rangle &= \exp [\alpha a^\dagger] \exp [-\alpha^* a] \exp [-|\alpha|^2/2] |0\rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2/2} \exp [\alpha a^\dagger] |0\rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\alpha^m a^{\dagger m}}{\sqrt{m!}} |0\rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle \\ &= |\alpha\rangle \end{aligned}$$

□

**3.2. Composizione di Displacements.** Componendo de displacement si ottiene (sempre usando CBH):

$$D(\beta)D(\alpha) = D(\beta + \alpha) \exp [i\Im(\beta\alpha^*)]$$

L'interpretazione geometrica di questa relazione nel piano  $x, y$  è che i displacement si sommano a meno di un fattore di fase che, detto  $\phi$  l'angolo compreso fra i due vettori  $\vec{\alpha}$  e  $\vec{\beta}$ , è dato da:

$$\Im(\beta\alpha^*) = |\beta\alpha| \sin \phi$$

ovvero dall'area del parallelogramma individuato dai due vettori. L'area va presa positiva se i vettori si sommano in un percorso antiorario e negativa viceversa. Più in generale, componend più displacements, si può verificare che:

$$\begin{aligned} & D(\alpha_n)D(\alpha_{n-1})D(\alpha_{n-2}) \dots D(\alpha_2)D(\alpha_1) \\ &= D(\alpha_n + \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2} + \dots + \alpha_2 + \alpha_1) \exp[i\theta] \end{aligned}$$

dove  $\theta$  è l'area, orientata con la stessa convezione di prima, della poligonale individuata dai vettori (chiudendo il primo con l'ultimo e facendo attenzione ad eventuali cancellazioni).

#### 4. Evoluzione temporale di un displacement - to be continued

Intanto si ottiene facilmente l'evoluzione temporale di uno stato coerente. Si ha

$$\begin{aligned} |\alpha(t)\rangle &= U(t) |\alpha\rangle \\ &= \exp\left[-\frac{iHt}{\hbar}\right] \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-|\alpha|^2/2} |\alpha\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n e^{-i(n+1/2)\omega t}}{\sqrt{n!}} e^{-|\alpha|^2/2} |\alpha\rangle \\ &= e^{-i\omega t/2} |\alpha e^{-i\omega t}\rangle \end{aligned}$$

si nota dunque come uno stato coerente evolve semplicemente (a meno di una fase che è la stessa per tutti gli stati coerenti) ruotando rigidamente nel piano complesso  $\alpha$  (questa nozione di rotazione rigida è appropriata, più che per lo stato, per la distribuzione di wigner. Lo vedremo meglio più avanti). Per questa caratteristica di rotazione rigida nel piano delle fasi gli stati coerenti hanno una dinamica che ricalca fedelmente il concetto di orbita circolare classica che l'oscillatore armonico classico percorre nel piano delle fasi durante il suo moto. Conservando la loro forma, gli stati coerenti rimangono durante l'evoluzione stati a minima indeterminazione.

L'evoluzione di un displacement si scrive:

*boh?*

#### 5. Funzione Caratteristica

In questa sezione vogliamo interfacciare  $D(\alpha)$ ,  $\alpha$  e la distribuzione di Wigner. Per far questo introduciamo il concetto di funzione caratteristica. L'idea che ci viene in mente è che, data l'overcompleteness sullo spazio  $\mathcal{H}$  degli stati coerenti, allora i  $D(\alpha)$  dovranno essere overcompleti per gli operatori. Ai fini di quello che segue useremo i seguenti lemmi:

LEMMA 7.1. (*Alcuni integrali utili*)

(1) Sia  $\mu \in \mathbb{C}$

$$\int d^2\alpha \exp[\alpha^* \mu - \mu^* \alpha] = \pi^2 \delta^{(2)}(\mu)$$

(2) Sia  $A > 0$  e siano  $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ . Allora

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi} \exp[-A|\beta|^2 + \beta C_1 + \beta^* C_2] = \frac{\exp\left[\frac{C_1 C_2}{A}\right]}{A}$$

La dimostrazione è lasciata per esercizio. Dal lemma (1) seguono due risultati sulla traccia. Possiamo innanzitutto calcolare la traccia di  $D(\mu)$ :

$$\begin{aligned} \text{Tr}[D(\mu)] &= \text{Tr}(\mathbb{I}D(\mu)) \\ &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \text{Tr}(|\alpha\rangle \langle \alpha| D(\mu)) \\ &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \langle \alpha | D(\mu) | \alpha \rangle \\ &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \exp(i\Im(\mu\alpha^*)) \langle \alpha | \mu + \alpha \rangle \\ &= \dots \\ &= \pi^2 \delta^2(\mu) \end{aligned}$$

Analogamente, usando il risultato appena calcolato, si trova, usando la composizione dei displacement:

$$\text{Tr}[D(\alpha)D(-\beta)] = \text{Tr}[D(\alpha - \beta)] \exp(i\Im(\beta\alpha^*)) = \pi^2 \delta^{(2)}(\beta - \alpha)$$

dunque gli operatori di displacement sembrerebbero comportarsi come una specie di base del continuo, usando come prodotto scalare la traccia. Enunciamo il seguente teorema, che definisce anche la funzione caratteristica di un operatore  $\Theta$

**TEOREMA 7.1** (Decomposizione in displacements). *Supponiamo che  $\Theta$  sia un operatore di classe traccia. Allora vale la decomposizione:*

$$\hat{\Theta} = \int \frac{d^2\mu}{\pi} D(-\mu) X(\hat{\Theta}, \mu)$$

dove  $X(\hat{\Theta}, \mu)$  è una funzione complessa dell'operatore  $\hat{\Theta}$  detta funzione caratteristica dell'operatore tale che

$$X(\hat{\Theta}, \mu) = \text{Tr}[\hat{\Theta}D(\mu)]$$

**DIMOSTRAZIONE.** Introduciamo il funzionale

$$I(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \int \frac{d^2\xi}{\pi} \langle \beta | D(\xi) | \alpha \rangle \cdot \langle \gamma | D(-\xi) | \delta \rangle$$

dove tutti i ket con una lettera greca al loro interno indicano uno stato coerente. Intanto dico che:

$$I(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \langle \gamma | \alpha \rangle \langle \beta | \delta \rangle$$

la verirfica è semplice usando il lemma precedente:

$$\begin{aligned}
I(\alpha, \beta, \gamma, \delta) &= \int \frac{d^2\xi}{\pi} \langle \beta | D(\xi) | \alpha \rangle \cdot \langle \gamma | D(-\xi) | \delta \rangle \\
&= \int \frac{d^2\xi}{\pi} \exp [i\Im(\xi\alpha^*) - i\Im(\xi\delta^*)] \langle \beta | \alpha + \xi \rangle \cdot \langle \gamma | \delta - \xi \rangle \\
&= \int \frac{d^2\xi}{\pi} \exp [i\Im(\xi\alpha^*) - i\Im(\xi\delta^*)] \exp \left[ -\frac{|\beta|^2 + |\alpha + \xi|^2}{2} + \beta^*(\alpha + \xi) \right] \times \\
&\quad \times \exp \left[ -\frac{|\gamma|^2 + |\delta - \xi|^2}{2} + \gamma^*(\delta - \xi) \right] \\
&= \int \frac{d^2\xi}{\pi} \exp [-\xi^*\alpha + \xi^*\delta] \exp \left[ -\frac{|\beta|^2 + |\alpha|^2}{2} + \beta^*\alpha \right] \times \\
&\quad \times \exp [\beta^*\xi] \exp \left[ -\frac{|\gamma|^2 + |\delta|^2}{2} + \gamma^*\delta \right] \exp [-\gamma^*\xi] \exp [-|\xi|^2/2] \\
&= \left( \int \frac{d^2\xi}{\pi} \exp [\xi^*(-\alpha + \delta) + \xi(\beta^* - \gamma^*) - |\xi|^2] \right) \times \exp \left[ -\frac{|\beta|^2 + |\alpha|^2}{2} + \beta^*\alpha \right] \times \\
&\quad \times \exp \left[ -\frac{|\gamma|^2 + |\delta|^2}{2} + \gamma^*\delta \right] \\
&= \exp \left[ -\frac{|\beta|^2 + |\alpha|^2}{2} + \beta^*\alpha \right] \exp \left[ -\frac{|\gamma|^2 + |\delta|^2}{2} + \gamma^*\delta \right] \times \\
&\quad \times \exp [-\beta^*\alpha + \beta^*\delta + \gamma^*\alpha - \gamma^*\delta] \\
&= \exp \left[ -\frac{|\beta|^2 + |\delta|^2}{2} + \beta^*\delta \right] \exp \left[ -\frac{|\gamma|^2 + |\alpha|^2}{2} + \gamma^*\alpha \right] \\
&= \langle \beta | \delta \rangle \langle \gamma | \alpha \rangle
\end{aligned}$$

Ora che abbiamo dimostrato questo, dimostriamo tutto il resto. Dimostriamo innanzitutto che la tesi vale per un operatore del tipo  $|\alpha\rangle\langle\beta|$ . Consideriamo allo scopo

$$M = \int \frac{d^2\delta}{\pi} \int \frac{d^2\gamma}{\pi} I(\alpha, \beta, \gamma, \delta) |\gamma\rangle\langle\delta|$$

allora, per l'identità appena dimostrata, si ha:

$$M = \int \frac{d^2\delta}{\pi} \int \frac{d^2\gamma}{\pi} \langle \gamma | \alpha \rangle \langle \beta | \delta \rangle |\gamma\rangle\langle\delta| = \int \frac{d^2\delta}{\pi} \int \frac{d^2\gamma}{\pi} |\gamma\rangle\langle\gamma| \alpha \rangle \langle \beta | \delta \rangle \langle \delta|$$

da cui, ricordando la relazione di overcompletezza  $\int \frac{d^2\delta}{\pi} |\delta\rangle\langle\delta| = \mathbb{I}$  (e la relazione analoga per  $\gamma$ ), otteniamo

$$M = \int \frac{d^2\delta}{\pi} \int \frac{d^2\gamma}{\pi} \langle \gamma | \alpha \rangle \langle \beta | \delta \rangle |\gamma\rangle\langle\delta| = |\alpha\rangle\langle\beta|$$

dunque  $M$ , una volta sostituito  $I(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ , ci da la riscrittura di  $|\alpha\rangle\langle\beta|$  cercata:

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle\langle\beta| &= \int \frac{d^2\delta}{\pi} \int \frac{d^2\gamma}{\pi} I(\alpha, \beta, \gamma, \delta) |\gamma\rangle\langle\delta| \\ &= \int \frac{d^2\delta}{\pi} \int \frac{d^2\gamma}{\pi} \int \frac{d^2\xi}{\pi} \langle\beta|D(\xi)|\alpha\rangle \cdot \langle\gamma|D(-\xi)|\delta\rangle |\gamma\rangle\langle\delta| \\ &= \int \frac{d^2\xi}{\pi} \langle\beta|D(\xi)|\alpha\rangle \int \frac{d^2\gamma}{\pi} \int \frac{d^2\delta}{\pi} \langle\gamma|D(-\xi)|\delta\rangle |\gamma\rangle\langle\delta| \end{aligned}$$

da cui, usando di nuovo l'erelazione di overcompletezza per far sparire gli integrali in  $\delta$  e  $\gamma$ , si ha:

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle\langle\beta| &= \int \frac{d^2\xi}{\pi} D(-\xi) \langle\alpha|D(\xi)|\beta\rangle \\ &= \int \frac{d^2\xi}{\pi} D(-\xi) \text{Tr} [|\alpha\rangle\langle\beta|D(\xi)] \end{aligned}$$

che prova la tesi per operatori del tipo  $|\alpha\rangle\langle\beta|$ . D'altra parte, preso un'operatore generico  $\hat{\Theta}$ , possiamo scrivere, usando l'overcompletezza e la decomposizione di  $|\alpha\rangle\langle\beta|$  in termini di displacement:

$$\begin{aligned} \hat{\Theta} &= \mathbb{I}\hat{\Theta}\mathbb{I} = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \int \frac{d^2\beta}{\pi} |\alpha\rangle\langle\alpha| \hat{\Theta} |\beta\rangle\langle\beta| \\ &= \int \frac{d^2\alpha d^2\beta}{\pi^2} \langle\alpha|\hat{\Theta}|\beta\rangle \int \frac{d^2\xi}{\pi} D(-\xi) \langle\alpha|D(\xi)|\beta\rangle \\ &= \int \frac{d^2\xi}{\pi} D(-\xi) \int \frac{d^2\alpha d^2\beta}{\pi^2} \langle\alpha|\hat{\Theta}|\beta\rangle \langle\alpha|D(\xi)|\beta\rangle \\ &= \int \frac{d^2\xi}{\pi} D(-\xi) \int \frac{d^2\alpha d^2\beta}{\pi^2} \langle\alpha|\hat{\Theta}|\beta\rangle \text{Tr} [|\alpha\rangle\langle\beta|D(\xi)] \\ &= \int \frac{d^2\xi}{\pi} D(-\xi) \int \frac{d^2\alpha d^2\beta}{\pi^2} \text{Tr} [\langle\alpha|\hat{\Theta}|\beta\rangle |\alpha\rangle\langle\beta|D(\xi)] \\ &= \int \frac{d^2\xi}{\pi} D(-\xi) \int \frac{d^2\alpha d^2\beta}{\pi^2} \text{Tr} [|\alpha\rangle\langle\alpha|\hat{\Theta}|\beta\rangle\langle\beta|D(\xi)] \\ &= \int \frac{d^2\xi}{\pi} D(-\xi) \text{Tr} [\hat{\Theta}D(\xi)] \end{aligned}$$

che prova la tesi anche per operatori generici. □

ESEMPIO 7.1. Dimostrate che

$$\mathbb{I}\text{Tr}[\hat{\Theta}] = \int \frac{d^2\mu}{\pi} D(\mu) \hat{\Theta} D(-\mu)$$

NOTA 7.1. Questa è un'istanza del lemma di Schur.

ESEMPIO 7.2. Data un operatore  $\rho$ , legare la funzione caratteristica di  $\rho$  a quella di  $\rho^2$ . Nel caso in cui  $\rho$  sia una matrice densità, trovare un modo, in termini della funzione caratteristica  $X(\rho, \mu)$ , di esprimere la purezza del sistema.



HINT 7.1. *Ricordare che  $\text{Tr}(D(\alpha)D(\beta)) = \delta^{(2)}(\alpha - \beta)$*



## Ancora funzioni caratteristiche, Algebre di Lie

### 1. Connessione fra Wigner e Caratteristica

Riprendendo il discorso dell'altra volta, dimostriamo una connessione fra la funzione caratteristica di uno stato e la funzione di Wigner associata. Vale la seguente caratterizzazione:

PROPOSIZIONE 8.1.

$$W^{OPT}(\alpha)|_{\psi} = \int \frac{d^2\mu}{\pi^2} X(|\psi\rangle\langle\psi|, \mu) \exp[\mu^* \alpha - \mu \alpha^*]$$

dunque la funzione di Wigner di uno stato è la trasformata di Fourier della funzione caratteristica del proiettore sullo stato, o più in generale, della matrice densità associata allo stato. (L'apice OPT indica il fatto che c'è un rescaling fra questa e la wigner definita in 6) In effetti vale che, se  $\alpha = \frac{x_0 + iy_0}{\sqrt{2}}$ , allora

$$W^{OPT}(\alpha)|_{\rho} = \int \frac{dy}{\pi^2} \left\langle x_0 + \frac{y}{2} \left| \rho \right| x_0 - \frac{y}{2} \right\rangle e^{-iy y_0} = 2W(x_0, y_0)$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha ( $\alpha = \frac{x+iy}{\sqrt{2}}$ )

$$\begin{aligned} W^{OPT}(\alpha) &= \int \frac{d^2\mu}{\pi^2} X(|\psi\rangle\langle\psi|, \mu) \exp[\mu^* \alpha - \mu \alpha^*] \\ &= \int \frac{d^2\mu}{\pi^2} \text{Tr}[\rho D(\mu)] \exp[\mu^* \alpha - \mu \alpha^*] \\ &= \int \frac{d^2\mu}{\pi^2} \text{Tr}[\rho \exp[\mu a^\dagger - \mu^* a]] \exp[\mu^* \alpha - \mu \alpha^*] \\ &= \int dx \int dy \frac{1}{2\pi^2} \text{Tr}[\rho \exp(i\hat{x}x + i\hat{y}y)] \exp\left[\alpha \left(\frac{-x - iy}{\sqrt{2}}\right) - \alpha^* \left(\frac{-x + iy}{\sqrt{2}}\right)\right] \\ &= \int dx \int dy \frac{1}{2\pi^2} \exp[ixx_0 + iyy_0] \text{Tr}[\rho \exp(-ix\hat{x} - iy\hat{y})] \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è anche usato un cambio di variabile. Usando CBH a la ciclicità della traccia si ha:

$$= \int dx \int dy \frac{1}{2\pi^2} \exp[ixx_0 + iyy_0] \exp[-ixy/2] \text{Tr}[e^{-i\hat{y}y/2} e^{-i\hat{x}x} e^{-i\hat{y}y/2}]$$

tracciando sulla base  $|q\rangle$  della posizione, e ricordandosi della definizione dell'operatore di traslazione, si ha:

$$= \int dx \int dy \frac{1}{2\pi^2} \exp[ixx_0 + iyy_0] \exp[-ixy/2] \times \\ \times \int dq \exp[-i(q - y/2)x] \left\langle q - \frac{y}{2} \left| \rho \right| q + \frac{y}{2} \right\rangle$$

da cui, integrando prima in  $x$  e poi in  $q$ :

$$= \int \frac{dy}{2\pi^2} \int dq \left\langle q - \frac{y}{2} \left| \rho \right| q + \frac{y}{2} \right\rangle 2\pi \delta(x_0 - q) e^{iyy_0} \\ = \int \frac{dy}{\pi} \left\langle x_0 - \frac{y}{2} \left| \rho \right| x_0 + \frac{y}{2} \right\rangle e^{iyy_0}$$

che è il risultato cercato cambiando variabile  $y \rightarrow -y$ . □

## 2. Alcuni esempi e applicazioni sulle/delle wigner

In questa sezione applichiamo quanto visto fin ora in un paio di esempi.

**2.1. Distribuzione di Wigner di un coerente.** Prendiamo uno stato coerente  $|\beta\rangle$ . Per calcolare la funzione di Wigner calcoliamo innanzitutto la funzione caratteristica:

$$\begin{aligned} X(|\beta\rangle, \mu) &= \langle \beta | D(\mu) | \beta \rangle \\ &= \langle 0 | D^\dagger(\beta) D(\mu) D(\beta) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | D(\mu) | 0 \rangle \exp[\mu\beta^* - \mu^*\beta] \\ &= \langle 0 | \mu \rangle \exp[\mu\beta^* - \mu^*\beta] \\ &= e^{-|\mu|^2/2} \exp[\mu\beta^* - \mu^*\beta] \end{aligned}$$

Per calcolare la funzione di wigner basta effettuare la doppia trasformata di fourier. Omettiamo i dettagli del calcolo. Il risultato è:

$$W^{OPT}(\alpha)|_{|\beta\rangle} = \frac{2}{\pi} \exp[-2|\beta - \alpha|^2]$$

Pertanto la funzione di Wigner di uno stato coerente è non negativa, e ha quindi senso anche classicamente. Per avere esempi di stati con distribuzione di Wigner che può diventare negativa, basta considerare gli stati di Fock  $|n\rangle$  con  $n \neq 0$ . Per esercizio, verificate che:

$$(1) \quad X(|n\rangle, \mu) = \langle n | D(\mu) | n \rangle = \exp[-|\mu|^2/2] L_n(|\mu|^2)$$

$$(2) \quad W^{OPT}|_{|n\rangle}(\alpha) = \frac{2(-1)^n}{\pi} \exp[-2|\alpha|^2] L_n(4|\alpha|^2)$$

dove  $L_n(x)$  è l'ennesimo polinomio di Laguerre.

La funzione di Wigner di uno stato di Fock è quindi a simmetria sferica nello spazio  $\alpha$ . Questo ci piace perchè, come abbiamo visto la scorsa lezione, l'hamiltoniana deve far ruotare la distribuzione di Wigner nell'evoluzione temporale; ma gli stati di Fock, essendo stati

stazionari, non evolvono sotto l'azione dell'hamiltoniana, per cui la Wigner deve restare invariata, e quindi deve avere simmetria sferica.

Già per  $n = 1$ , però, a causa della forma del polinomio di Laguerre, la funzione di Wigner diventa negativa nell'intorno dell'origine.

**2.2. Distribuzione di Wigner Termica.** Consideriamo un oscillatore armonico in equilibrio termico alla temperatura  $T$ . La matrice densità per questo ensamble è data da

$$\rho_{GIBBS} = \frac{e^{-\beta H}}{Z(\beta)}$$

dove  $Z(\beta) = \text{Tr} [e^{-\beta H}]$ , con  $H$  l'hamiltoniana dell'oscillatore armonico. Dando per buoni i risultati di cui sopra, possiamo calcolare  $X$  e  $W^{OPT}(\alpha)$ . Quello che si ottiene è una funzione di Wigner gaussiana con larghezza data da  $k_B T$ , che quindi nel limite  $T \rightarrow +\infty$  è una distribuzione piatta, come ci si aspetta, dato che l'agitazione termica prevale sul confinamento armonico e la particella armonica, ente confinata diventa asintoticamente libera.

**2.3. Wigner di uno stato shiftato.** Supponiamo di avere uno stato generico  $|\psi\rangle$ , e supponiamo di sapere  $X(|\psi\rangle, \mu)$ . Se adesso shiftiamo lo stato con un'operatore di displacement  $D(\beta)$  otteniamo  $|\psi'\rangle = D(\beta)|\psi\rangle$ . Calcoliamo la nuova funzione caratteristica:

$$\begin{aligned} X(|\psi'\rangle, \mu) &= \langle \psi' | D(\mu) | \psi' \rangle \\ &= \langle \psi | D^\dagger(\beta) D(\mu) D(\beta) | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | D(\mu) | \psi \rangle \exp [\mu \beta^* - \mu^* \beta] \\ &= X(|\psi\rangle, \mu) \exp [\mu \beta^* - \mu^* \beta] \end{aligned}$$

Adesso, calcolando la funzione di Wigner, è facile verificare che il fattore di fase del carattere comporta che:

$$W^{OPT}(|\psi'\rangle, \alpha) = W^{OPT}(|\psi\rangle, \alpha - \beta)$$

cioè la Wigner viene traslata di  $+\vec{\beta}$  nel piano complesso. La conclusione vale anche per uno stato misto, per linearità.

**2.4. Wigner di un evoluto temporale.** Sia, al solito,  $|\psi\rangle$  un generico stato. Consideriamo:

$$|\psi'\rangle = e^{-i\theta a^\dagger a} |\psi\rangle$$

che, a meno della fase  $\exp[-i\omega t/2]$  e di chiamare  $\theta$  il tempo, è lo stato

$$\exp \left[ \frac{-iHt}{\hbar} \right] |\psi\rangle$$

Possiamo calcolare quindi (si ricorda che le evoluzioni possono essere portate dentro gli esponenziali):

$$\begin{aligned}
X(|\psi'\rangle, \mu) &= \langle \psi | \exp[i\theta a^\dagger a] D(\mu) \exp[-i\theta a^\dagger a] | \psi \rangle \\
&= \langle \psi | \exp\left[e^{i\theta a^\dagger a} (\mu a^\dagger - \mu^* a) e^{-i\theta a^\dagger a}\right] | \psi \rangle \\
&= \langle \psi | \exp[\mu e^{i\theta} a^\dagger - \mu^* e^{-i\theta} a] | \psi \rangle \\
&= \langle \psi | D(\mu e^{i\theta}) | \psi \rangle \\
&= X(|\psi\rangle, e^{i\theta} \mu)
\end{aligned}$$

Da cui possiamo ricavare la funzione di Wigner per lo stato  $|\psi'\rangle$

$$\begin{aligned}
W^{\text{OPT}}(|\psi'\rangle, \alpha) &= \int \frac{d^2\mu}{\pi^2} X(|\psi\rangle, \mu e^{i\theta}) \exp[-\mu\alpha^* + \mu^*\alpha] \\
&= \int \frac{d^2\mu}{\pi^2} X(|\psi\rangle, \mu) \exp[-\mu\alpha^* e^{-i\theta} + \mu^*\alpha e^{i\theta}] \\
&= W^{\text{OPT}}(|\psi\rangle, \alpha e^{i\theta})
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è effettuato un cambio di variabile nell'integrale. Dunque ne segue, come abbiamo già detto, che la funzione di Wigner di uno stato qualsiasi dell'oscillatore armonico ruota nel piano delle fasi a causa dell'evoluzione temporale.

### 3. Algebre di Lie - Tools utili

Da ora in poi in questa sezione supporremo di lavorare con oggetti sufficientemente regolari da consentire tutte le manipolazioni che faremo. Cominciamo con alcune definizioni.

**DEFINIZIONE 8.1** (Trasformazione Similare). Siano  $A, B$  operatori. La trasformazione tale che

$$B \rightarrow e^A B e^{-A}$$

si chiama trasformazione simile. Se  $A$  fosse antihermitiano sarebbe semplicemente una trasformazione di evoluzione.

**DEFINIZIONE 8.2** (Funzione di un operatore). Sia  $f(x)$  una funzione che ammette lo sviluppo in serie:

$$f(x) = \sum_0^{+\infty} g_n x^n$$

è allora possibile definire, dato un operatore  $B$ :

$$f(B) = \sum_0^{+\infty} g_n B^n$$

sotto trasformazione simile, si verifica facilmente (come già visto più volte nel caso di  $f(x) = e^x$ ) che:

$$e^A f(B) e^{-A} = f(e^A B e^{-A})$$

Introduciamo adesso una utile formula di espansione. Definiamo

$$C(x) = \exp[xA] B \exp[-xA] \quad x \in \mathbb{R}$$

allora si ha:

- (1)  $C(0) = 0$
- (2)  $\left. \frac{\partial}{\partial x} C(x) \right|_{x=0} = \exp[xA] [A, B] \exp[-xA]|_{x=0} = [A, B]$
- (3)  $\left. \frac{\partial^2}{\partial x^2} C(x) \right|_{x=0} = \exp[xA] [A, [A, B]] \exp[-xA]|_{x=0} = [A, [A, B]]$

Procedendo in maniera analoga è possibile scrivere la serie di Taylor della funzione  $C(x)$ :

$$C(x) = B + x[A, B] + \frac{x^2}{2} [A, [A, B]] + \frac{x^3}{3!} [A, [A, [A, B]]] \dots$$

La formula si semplifica notevolmente se si suppone:  $[A, [A, B]] = 0$ . Allora

$$C(x) = B + x[A, B]$$

che specializzata nel caso di  $x = 1$ , diviene:

$$\exp[A] B \exp[-A] = B + [A, B]$$

- (1) Specializzando questa formula nel caso  $A = \alpha a^\dagger - \alpha^* a$  e  $B = a$  otteniamo

$$D(\alpha) a D^\dagger(\alpha) = a - \alpha$$

- (2) Ponendo  $B = \hat{x}$  e  $A = i\hat{y}$  ottengo la traslazioni.

#### 4. Algebra di Lie - definizione

Supponiamo di avere un sottospazio lineare finito  $\mathcal{L} \subset B(\mathcal{H})$  di operatori del sistema. Diciamo che  $\mathcal{L}$  è un'algebra di Lie se è chiusa sotto l'operazione di commutazione, ovvero:

$$\forall A, B \in \mathcal{L} \quad [A, B] \in \mathcal{L}$$

Siccome  $\mathcal{L}$  è uno spazio vettoriale, allora ammetterà una base. Supponiamo che

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

sia una base di  $\mathcal{L}$ . Una volta specificata la base, i commutatori fra elementi della base potranno essere scritti in funzione degli elementi della base. Si avrà quindi

$$[x_j, x_k] = \sum_l c_{jkl} x_l$$

questi coefficienti si chiamano costanti di struttura dell'algebra.

#### 5. Trasformazione simile su Lie

Consideriamo  $z \in \mathcal{L}$ . Allora possiamo scrivere

$$Z = \sum_j \alpha_j x_j$$

Vogliamo caratterizzare, dato  $x \in \mathcal{L}$  e  $\theta$  un parametro reale:

$$x(\theta) = \exp[\theta z] x \exp[-\theta z]$$

Per linearità della simile mi basta caratterizzare la trasformazione simile della base, cioè calcolare

$$x_j(\theta) = \exp[\theta z] x_j \exp[-\theta z]$$

Deriviamo:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} x_j(\theta) = \exp [\theta z] [z, x_j] \exp [-\theta z]$$

Introducendo la scrittura in base di  $z$  e le costanti di struttura dell'algebra. otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} x_j(\theta) &= \sum_{j'k} \alpha_{j'} c_{j'jk} x_k(\theta) \\ &= \sum_k \gamma_{jk} x_k(\theta) \end{aligned}$$

con  $\gamma_{jk} = \sum_{j'} \alpha_{j'} c_{j'jk}$ . Otteniamo dunque un sistema lineare che potremmo risolvere normalmente se potessimo trattare gli operatori  $x_k(\theta)$  come dei numeri. Intanto dico che gli evoluti  $x_j(\theta)$  sono ancora in  $\mathcal{L}$ . Questo segue facilmente per la formula di espansione dell'esponenziale in termini di serie nei commutatori e dal fatto che in una algebra di lie i commutatori degli elementi sono elementi dell'algebra. Duque devono esistere dei coefficienti  $f_{jk}(\theta)$  tali che

$$x_j(\theta) = \sum_k f_{jk}(\theta) x_k$$

Sostituendo questa relazione nelle precedenti ne segue una equazione differenziale per gli  $f_j(\theta)$ :

$$\sum_{k'} \dot{f}_{jk'}(\theta) x_{k'} = \sum_{kk'} \gamma_{jk} f_{kk'}(\theta) x_{k'}$$

che comporta il set di equazioni, componente per componente:

$$\dot{f}_{jk'}(\theta) x_{k'} = \sum_k \gamma_{jk} f_{kk'}(\theta) x_{k'}$$

definendo la matrice  $F(\theta)$  con componenti  $(F(\theta))_{jk} = f_{jk}(\theta)$  e la matrice di costanti  $\Gamma$  con componenti  $(\Gamma)_{jk} = \gamma_{jk}$  allora il sistema di cui sopra si scrive nella forma compatta:

$$\dot{F}(\theta) = \Gamma F(\theta)$$

che ha soluzione

$$F(\theta) = \Gamma \exp [\Gamma \theta]$$

e questo risolve, in linea di principio, il problema.



## Algebre di lie II, teoria e applicazioni

Continuiamo con le algebre di Lie, di cui vedremo in questa lezione degli esempi concreti.

### 1. Esponenziale di un elemento

Consideriamo l'algebra di Lie  $\mathcal{L} = \{\hat{x}_j\}_{j=1\dots n}$ , con costanti di struttura  $c_{jkl}$  definite da  $[x_j, x_l] = \sum_l c_{jkl} x_l$ . Vogliamo, dato  $z \in \mathcal{L}$ , con

$$z = \sum_j a_j x_j$$

scrivere, dato  $\theta \in \mathbb{R}$ :

$$\exp[\theta z] = \exp[f_1(\theta)x_1] \cdot \exp[f_2(\theta)x_2] \cdot \dots \cdot \exp[f_n(\theta)x_n]$$

vogliamo quindi vedere se è possibile trovare delle opportune funzioni  $f_j(\theta)$  tali che sia possibile spezzare in questo modo l'esponenziale di  $z$ . L'introduzione del parametro reale  $\theta$  è fatta per convenienza, perchè ci permette, derivando, di poter scrivere un sistema differenziale, che è ciò che ci apprestiamo a fare. Calcoliamo la derivata:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} (\exp[\theta z]) &= z \exp[\theta z] \\ &= \dot{f}_1(\theta)x_1 \exp[\theta z] + \exp[f_1(\theta)x_1] \dot{f}_2(\theta)x_2 \dots \exp[f_n(\theta)x_n] \\ &= \dot{f}_1(\theta)x_1 \exp[\theta z] + \exp[f_1(\theta)x_1] \dot{f}_2(\theta)x_2 \exp[-f_1(\theta)x_1] \exp[\theta z] + \dots \\ &\quad + \exp[f_1(\theta)x_1] \exp[f_2(\theta)x_2] \dot{f}_3(\theta)x_3 \exp[-f_2(\theta)x_2] \exp[-f_1(\theta)x_1] \exp[\theta z] + \\ &\quad + \dots + \dots \end{aligned}$$

da cui, introducendo:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1(\theta) &= x_1 \\ \tilde{x}_2(\theta) &= \exp[f_1(\theta)x_1] x_2 \exp[-f_1(\theta)x_1] \\ \tilde{x}_3(\theta) &= \exp[f_1(\theta)x_1] \exp[f_2(\theta)x_2] x_3 \exp[-f_2(\theta)x_2] \exp[-f_1(\theta)x_1] \\ &\dots \end{aligned}$$

si ottiene, semplificando  $\exp[\theta z]$ , l'equazione differenziale:

$$z = \sum_j \dot{f}_j(\theta) \tilde{x}_j(\theta)$$

scrivendo le coordinate di entrambi i membri nella base  $\{x_k\}$ , ovvero:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_j(\theta) &= \sum_{k=1}^N g_{jk}(\theta)x_k \\ z &= \sum_{j=1}^N a_j x_j\end{aligned}$$

e sostituendo nell'equazione differenziale, abbiamo:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^N a_k x_k &= \sum_{j=1}^N \dot{f}_j(\theta) \sum_{k=1}^N g_{jk}(\theta)x_k \\ &= \sum_{k=1}^N \left( \sum_{j=1}^N \dot{f}_j(\theta) g_{jk}(\theta) \right) x_k\end{aligned}$$

da cui il sistema differenziale NON lineare

$$a_k = \sum_{j=1}^N \dot{f}_j(\theta) g_{jk}(\theta) \quad k = 1 \dots N$$

che è un sistema differenziale del prim'ordine nella variabile  $\theta$ , dove le incognite sono le funzioni  $f_j(\theta)$ . Come si è detto tale sistema in generale è non lineare. Infatti, dato che le  $g_{jk}(\theta)$  sono funzioni lineari delle  $f_j(\theta)$  e che appaiono i prodotti  $\dot{f}_j(\theta)g_{jk}(\theta)$ , appariranno i prodotti fra le  $f$  e le derivate delle  $f$ , e quindi il sistema non sarà lineare. Associato al sistema che abbiamo derivato ci dovrà essere un set di condizioni iniziali per le  $f_j(\theta)$ , che saranno banalmente tali che la trasformazione  $\exp[\theta z]$  sia la trasformazione identica per  $\theta = 0$ , ovvero

$$f_j(\theta = 0) = 0 \quad j = 1 \dots N$$

Facciamo adesso alcuni esempi di quanto discusso fino ad ora.

## 2. Algebra di Lie dell'oscillatore armonico

Consideriamo

$$\mathcal{L} = \{a, a^\dagger, \hat{a}^\dagger a, \mathbb{I}\}$$

con le relazioni di commutazione note:

$$[a, a^\dagger] = \mathbb{I} \quad [a^\dagger a, a] = -a \quad [a^\dagger a, a^\dagger] = a^\dagger$$

Consideriamo un generale elemento  $z$  di  $\mathcal{L}$ , cioè

$$z = a_1 a + a_2 a^\dagger + a_3 a^\dagger a + a_4$$

si può studiare facilmente l'azione della trasformazione similare indotta da  $z$  sull'operatore  $a$ . Verificate per esercizio che definito

$$a(\theta) = \exp[\theta z] a \exp[-\theta z]$$

si ha

$$\dot{a}(\theta) = -a_2 - a_3 a(\theta)$$

da cui, integrando

$$a(\theta) = \exp[-a_3\theta] a - \frac{a_2}{a_3} (1 - \exp[-a_3\theta])$$

Da questo risultato è facile mostrare un risultato noto. Si ha infatti, se  $\mu \in \mathbb{C}$ , abbiamo per la formula precedente

$$\exp[\mu a^\dagger] a \exp[-\mu a^\dagger] = a - \mu$$

cioè

$$[a, \exp[-\mu a^\dagger]] = -\mu \exp[-\mu a^\dagger]$$

che implica, ricordando lo sviluppo in serie dell'esponenziale:

$$[a, (a^\dagger)^n] = n(a^\dagger)^{n-1}$$

Proponiamoci adesso di effettuare il *disentangling* dell'esponenziale  $\exp[\theta z]$ . Dato cioè  $z \in \mathcal{L}$  come sopra, vogliamo scrivere

$$\exp[\theta z] = \exp[f_1(\theta)a^\dagger] \exp[f_2(\theta)a^\dagger a] \exp[f_3(\theta)a] \exp[f_4(\theta)]$$

procedendo come sopra, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \dot{f}_1(\theta) - f_1(\theta)\dot{f}_2(\theta) = a_3 \\ \dot{f}_2(\theta) = a_2 \\ \dot{f}_3(\theta) = a_1 \exp[f_2(\theta)] \\ \dot{f}_4(\theta) - f_1(\theta)\dot{f}_3(\theta) \exp[-f_2(\theta)a^\dagger] = a_4 \end{cases}$$

questo sistema sembra brutto e non lineare, ma si risolve facilmente, partendo dalla seconda equazione, che integrata dà

$$f_2(\theta) = a_2\theta$$

e quindi, sostituita nella prima equazione, ci consente di ricavare  $f_1$ :

$$\dot{f}_1(\theta) = f_1(\theta)a_2\theta + a_3$$

che integrata dà  $f_1(\theta)$ . A questo punto la terza equazione si risolve con un integrale, e anche la quarta diventa risolvibile.

### 3. Algebra di Lie di SU2

Consideriamo

$$\mathcal{L} = \{ S_x, \hat{S}_y, S_z \}$$

con le regole di commutazione

$$[S_i, S_j] = i \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} S_k$$

Un'altra base che si utilizza per l'algebra di  $SU2$  è quella degli operatori di salita e di discesa, definendo:

$$\mathcal{L} = \{ S_+, \hat{S}_-, S_z \}$$

dove

$$S_\pm = S_x \pm iS_y$$

e con le regole di commutazione

$$[S_+, S_-] = 2S_z \quad \text{e} \quad [S_z, S_{\pm}] = \pm S_{\pm}$$

Prendiamo adesso  $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ . Costruiamo l'operatore

$$S_a = \vec{a} \cdot \vec{S} \stackrel{def}{=} \sum_{j=1}^3 a_j S_j$$

Siccome ci sarà utile nel seguito, dati due vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , calcoliamo il commutatore

$$[S_a, S_b] = i \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} a_i b_j S_k = i(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{S}$$

Vogliamo adesso calcolare chi è

$$S_a(\theta) = \exp \left[ -i\vec{n} \cdot \vec{S}\theta \right] S_a \exp \left[ i\vec{n} \cdot \vec{S} \right]$$

dove  $\theta$  mi parametrizza la trasformazione, che in questo caso è, *by the way*, unitaria. (In effetti è una rotazione sullo stato). Il versore  $\vec{n}$ , invece, è un normale versore in  $\mathbb{R}^3$ , che indica l'asse di rotazione. (Questa interpretazione la vedremo quando parleremo di momento angolare in MQ). Per trovare l'evoluto  $S_a(\theta)$ , scriviamo l'equazione differenziale che  $S_a(\theta)$  risolve ( $S_n \stackrel{def}{=} \vec{n} \cdot \vec{S}$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} S_a(\theta) &= \exp \left[ -iS_n\theta \right] [S_a, iS_n] \exp \left[ iS_n\theta \right] \\ &= i \exp \left[ -iS_n\theta \right] i(\vec{a} \times \vec{n}) \cdot \vec{S} \exp \left[ iS_n\theta \right] \\ &= (\vec{n} \times \vec{a}) \cdot \vec{S}(\theta) \\ &= S_{\vec{n} \times \vec{a}}(\theta) \end{aligned}$$

dunque abbiamo, chiamando  $\vec{b} = \vec{n} \times \vec{a}$ , che

$$\frac{\partial}{\partial \theta} S_a(\theta) = S_b(\theta)$$

a questo punto, avendo introdotto  $S_b(\theta)$  come ulteriore incognita, ci serve un'altra equazione, che otteniamo derivando  $S_b(\theta)$ , ottenendo, analogamente a prima:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} S_b(\theta) = (\vec{n} \times \vec{b}) \cdot \vec{S}(\theta)$$

che essendo  $\hat{n} \times \vec{b} = \hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{a}) = (\hat{n} \cdot \vec{a}) - \vec{a}$  può essere riscritta come: Dunque abbiamo ottenuto fin'ora il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \dot{S}_a(\theta) = S_b(\theta) \\ \dot{S}_b(\theta) = (\hat{n} \cdot \vec{a}) S_n(\theta) - S_a(\theta) \end{cases}$$

Abbiamo introdotto anche l'incognita  $S_n(\theta)$ . D'altra parte l'equazione per  $S_n(\theta)$  è banale:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} S_n(\theta) = 0$$

infatti  $[S_n, iS_n] = 0$ , e quindi  $S_n$  non evolve. Questo è giusto, perchè in una rotazione (scopriremo a breve che la trasformazione che stiamo considerando è effettivamente una

rotazione) sull'asse  $\hat{n}$  le componenti dei vettori lungo  $\hat{n}$  non evolvono. Dobbiamo quindi risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \dot{S}_a(\theta) = S_b(\theta) \\ \dot{S}_b(\theta) = (\hat{n} \cdot \vec{a}) S_n(\theta) - S_a(\theta) \\ \dot{S}_n(\theta) = 0 \end{cases}$$

La soluzione per  $S_a(\theta)$  si trova facilmente ed è:

$$S_a(\theta) = \cos \theta S_a + \sin \theta (\hat{n} \times \vec{a}) \cdot \vec{S} + (1 - \cos \theta) (\hat{n} \cdot \vec{a}) \hat{n} \cdot \vec{S}$$

L'interpretazione geometrica segue scrivendo  $\vec{b} = (\vec{a} \cdot \hat{n}) \hat{n} + \vec{b}$  con  $\vec{b} \perp \vec{a}$  e spezzando

$$S_a(\theta) = S_b(\theta) + (\hat{n} \cdot \vec{a}) S_n(\theta).$$

usando la formula precedente sull'operatore  $S_b(\theta)$ , si ottiene, essendo

$$\vec{b} \perp \hat{n} \Rightarrow \hat{n} \cdot \vec{b} = 0$$

$$S_b(\theta) = \cos \theta S_b + \sin \theta (\hat{n} \times \vec{b}) \cdot \vec{S} = \cos \theta S_b + \sin \theta S_{\hat{n} \times \vec{b}}$$

cioè una rotazione di  $S_b$  di angolo  $\theta$  nel piano ortogonale a  $\hat{n}$ . Per la parte di  $S_a$  parallela a  $\hat{n}$ , ovvero  $(\hat{n} \cdot \vec{a}) S_{\hat{n}}$ , usando ancora la soluzione generale, si ottiene, essendo

$$\hat{n} \times \hat{n} = 0 \quad \text{e} \quad \hat{n} \cdot \hat{n} = \|\hat{n}\| = 1$$

che  $(\hat{n} \cdot \vec{a}) S_{\hat{n}}$  non evolve. Mettendo assieme le cose l'interpretazione della formula di evoluzione ottenuta per  $S_a$  è effettivamente quella di una rotazione di angolo  $\theta$  attorno all'asse  $\hat{n}$ .

#### 4. Algebra di SU2 con due oscillatori armonici

Consideriamo due oscillatori armonici con i rispettivi operatori di annichilazione e creazione

$$a_1, a_2, a_1^\dagger, a_2^\dagger$$

con le regole di commutazione

$$[a_i, a_j] = 0$$

e

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}$$

Definiamo adesso

$$S_+ = a_1^\dagger a_2 \quad S_- = a_2^\dagger a_1 = S_+^\dagger \quad S_z = \frac{a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2}{2}$$

Allora si può verificare che le regole di commutazione fra questi operatori sono le stesse di quelle di SU2 definito nella base dell'operatore di salita e di discesa. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} [S_+, S_-] &= [a_1^\dagger a_2, a_2^\dagger a_1] \\ &= a_1^\dagger [a_2, a_2^\dagger a_1] + [a_1^\dagger, a_2^\dagger a_1] a_2 \\ &= a_1^\dagger [a_2, a_2^\dagger] a_1 + a_2^\dagger [a_1^\dagger, a_1] a_2 \\ &= a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2 \\ &= 2S_z \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
[S_z, S_+] &= \left[ \frac{a_1^\dagger a_1 - a_2 a_2^\dagger}{2}, a_1^\dagger a_2 \right] \\
&= \frac{1}{2} \left( \left[ a_1^\dagger a_1, a_1^\dagger \right] a_2 - a_1^\dagger \left[ a_2 a_2^\dagger, a_2 \right] \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( a_1^\dagger a_2 + a_1^\dagger a_2 \right) \\
&= S_+
\end{aligned}$$

e analogamente per  $S_-$ .

## 5. Beam Splitter Algebra

Consideriamo

$$\mathcal{L} = \{ a_1 a_1^\dagger, a_2 a_2^\dagger, a_2^\dagger a_1, a_1^\dagger a_2, a_1, a_2, a_1^\dagger, a_2^\dagger, \mathbb{I} \}$$

## LEZIONE 10

### Sistemi 1D

#### 1. Proprietà generali dell'equazione di Schrödinger

Consideriamo un sistema 1D, con hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

La funzione d'onda degli autostati dell'hamiltoniana soddisfa l'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

Per  $V(x) = 0$  abbiamo le soluzioni

$$\psi_E^\pm(x) = \frac{e^{\pm ikx}}{\sqrt{2\pi}} \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

Andiamo ora a studiare le proprietà generali dell'equazione.

**Proprietà 1.** L'equazione è lineare.

**Proprietà 2.** L'equazione è del second'ordine, quindi ha al massimo 2 soluzioni linearmente indipendenti.

**Proprietà 3.** L'equazione ha coefficienti reali, quindi è sempre possibile trovare soluzioni reali.

**Proprietà 4.** In meccanica classica, le zone accessibili sono quelle per cui  $V(x) \leq E$ , mentre quelle inaccessibili sono tali che  $V(x) \geq E$ . Manteniamo questa denominazione in meccanica quantistica, anche se la funzione d'onda può essere non nulla anche nelle zone inaccessibili. Dall'equazione

$$\psi''(x) = [V(x) - E] \frac{2m}{\hbar^2} \psi(x)$$

segue che nelle zone accessibili

$$\psi(x) > 0 \implies \psi''(x) < 0$$

$$\psi(x) < 0 \implies \psi''(x) > 0$$

e quindi l'andamento della funzione d'onda è oscillante. Invece, nelle zone inaccessibili si ha

$$\psi(x) > 0 \implies \psi''(x) > 0$$

$$\psi(x) < 0 \implies \psi''(x) < 0$$

e quindi l'andamento della funzione d'onda depressa verso lo 0 (oppure divergente, ma non è accettabile).

**Proprietà 5.** Per  $E$  fissato, siano  $\psi_1$  e  $\psi_2$  due soluzioni. Definiamo il Wronskiano

$$\mathcal{W}(\psi_1, \psi_2) = \psi_1(x)\psi_2'(x) - \psi_2(x)\psi_1'(x)$$

Notiamo che si ha

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{W}}{dx} &= \psi_1(x)\psi_2''(x) - \psi_2(x)\psi_1''(x) = \\ &= \psi_1(x) \left[ [V(x) - E] \frac{2m}{\hbar^2} \psi_2(x) \right] - \psi_2(x) \left[ [V(x) - E] \frac{2m}{\hbar^2} \psi_1(x) \right] = \\ &= 0\end{aligned}$$

Dunque  $\mathcal{W}$  è una costante. Nel caso in cui  $\psi_1(x) \rightarrow 0$  all'infinito,  $\mathcal{W}$  deve essere 0 everywhere. Ne segue che

$$\frac{\psi_1'(x)}{\psi_1(x)} = \frac{\psi_2'(x)}{\psi_2(x)} \implies \frac{d}{dx} \ln \psi_1(x) = \frac{d}{dx} \ln \psi_2(x) \implies \psi_1(x) = C\psi_2(x)$$

Abbiamo cioè dimostrato che in questo caso c'è una sola soluzione linearmente indipendente.

**Proprietà 6.** Se  $V(x)$  è una funzione pari, allora

$$\psi(x) \text{ soluzione} \implies \psi(-x) \text{ soluzione}$$

Quindi sono soluzioni anche le funzioni

$$\psi_p(x) = \frac{\psi(x) + \psi(-x)}{2} \quad \psi_d(x) = \frac{\psi(x) - \psi(-x)}{2}$$

che sono rispettivamente pari e dispari. L'equazione ammette in questo caso soluzioni con parità definita (dunque conviene cercare quelle).

## 2. Potenziale a scalini

Consideriamo un potenziale a scalini, definito da

$$V(x) = V_j \quad \forall x \in I_j$$

con  $I_j$  intervallo. Supponiamo di avere due intervalli  $I_{-\infty}$  e  $I_{\infty}$  infinitamente estesi, a sinistra e a destra rispettivamente, e chiamiamo  $n$  il numero totale di intervalli. Infine, prendiamo ad esempio  $V_{-\infty} < V_{\infty}$ . Le soluzioni nei vari intervalli sono

$$\psi_j(x) = \begin{cases} e^{\pm i k_j x} & E > V_j \quad (1) \\ \sqrt{2\pi} & \\ e^{\pm k_j x} & E < V_j \quad (2) \end{cases} \quad k_j \equiv \frac{\sqrt{2m|E - V_j|}}{\hbar}$$

Dobbiamo raccordare queste soluzioni.

Se  $E > \max(V_{\infty}, V_{-\infty})$ , allora tutte le soluzioni sono del tipo (2). Abbiamo quindi  $2n$  coefficienti da determinare, con  $2(n-1)$  condizioni di raccordo (la continuità di  $\psi$  e di  $\psi'$ ). Un'altra condizione da imporre è la normalizzazione, che porta via un altro coefficiente. Rimane quindi ancora un grado di libertà (per qualsiasi valore di  $E$ ).

Se  $V_{-\infty} < E < V_{\infty}$ , allora abbiamo alcune soluzioni del tipo (1) e alcune del tipo (2). Abbiamo quindi  $2n-1$  coefficiente da determinare (infatti il coefficiente di  $e^{k_{\infty}x}$  deve essere posto a 0, sennò la funzione d'onda diverge). Le condizioni di raccordo sono ancora  $2(n-1)$ , più la condizione di normalizzazione. In conclusione non mi rimangono gradi di libertà, ma ho comunque una soluzione per ogni valore di  $E$ .

Se  $E < \min(V_{\infty}, V_{-\infty})$ , allora tutte le soluzioni sono del tipo (1). Stavolta ho solo  $2n-2$  coefficienti da determinare, e  $2(n-1)$  condizioni di raccordo, più la normalizzazione. Non è quindi detto che abbia una soluzione. Poteri tuttavia avere delle soluzioni 'accidentali' per



qualche valore particolare di  $E$ . Questi valori devono essere discreti, perché non è possibile che  $E$  e  $E + \delta E$  rendano entrambi soddisfatte le condizioni di raccordo.

Riassumiamo quanto scoperto:

$E > \max(V_\infty, V_{-\infty})$	spettro continuo	degenerazione 2
$V_{-\infty} < E < V_\infty$	spettro continuo	no degenerazione
$E < \min(V_\infty, V_{-\infty})$	spettro discreto	no degenerazione

### 3. Gradino di potenziale

Consideriamo il potenziale definito da

$$U(x) = \frac{2m}{\hbar} V(x) = \begin{cases} U_1 & x < 0 \\ U_2 & x > 0 \end{cases} \quad U_2 < U_1$$

Definiamo poi

$$\varepsilon = \frac{2m}{\hbar^2} E$$

Caso  $U_2 < \varepsilon < U_1$ . La soluzione è

$$\psi(x) = \begin{cases} A_1 e^{k_1 x} & x < 0 \\ A_2 \sin(k_2 x + \varphi) & x > 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} k_1 = \sqrt{U_1 - \varepsilon} \\ k_2 = \sqrt{\varepsilon - U_2} \end{matrix}$$

Le condizioni di raccordo in  $x = 0$  sono

$$\begin{cases} \psi(0) = A_1 = A_2 \sin \varphi \\ \psi'(0) = A_1 k_1 = A_2 k_2 \cos \varphi \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{A_1}{A_2} = \sin \varphi = \sqrt{\frac{\varepsilon - U_2}{U_1 - \varepsilon}} \\ k_1 = k_2 \cot \varphi \end{cases}$$

Notiamo che per  $U_1 \rightarrow \infty$ , si ha  $\frac{A_1}{A_2} \rightarrow 0$ , cioè non c'è penetrazione nella barriera  $U_1$ .

Caso  $\varepsilon > U_1$ . Cerchiamo una soluzione della forma di onda di probabilità incidente da destra, che viene in parte riflessa e in parte trasmessa:

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-ik_2 x} + R e^{ik_2 x} & x < 0 \\ S e^{-ik_1 x} & x > 0 \end{cases} \quad k_j = \sqrt{\varepsilon - U_j}$$

Le condizioni di raccordo in  $x = 0$  sono

$$\begin{cases} \psi(0) = 1 + R = S \\ \psi'(0) = -ik_2(1 - R) = -ik_1 S \end{cases} \implies \begin{cases} S = \frac{2k_2}{1 + k_1} \\ R = S - 1 \end{cases}$$

Definendo

$$T^2 = \frac{k_1}{k_2} S^2$$

le correnti di probabilità prima e dopo la barriera sono

$$J_{x>0} = -\frac{\hbar k_2}{m} + \frac{\hbar k_2}{m} |R|^2$$

$$J_{x<0} = -\frac{\hbar k_1}{m} |S|^2$$

Date che stiamo considerando stati stazionari, la distribuzione di probabilità non varia del tempo, e dall'equazione di continuità segue quindi che  $J(x)$  è costante. Dunque

$$J_{x>0} = J_{x<0} \implies -\frac{\hbar k_2}{m} + \frac{\hbar k_2}{m} |R|^2 = -\frac{\hbar k_1}{m} |S|^2 \implies R^2 + T^2 = 1$$

Possiamo quindi interpretare  $T^2$  e  $R^2$  come probabilità di trasmissione e riflessione dell'onda di probabilità.

Infine, per  $\varepsilon > U_1$ , sappiamo che ci sono due soluzioni linearmente indipendenti. Possiamo quindi trovare un'altra soluzione, ad esempio coniugata quella già trovata.

#### 4. Ortonormalità delle soluzioni

Consideriamo l'esercizio nella sezione precedente, nel caso  $U_2 < \varepsilon < U_1$  in cui lo spettro è continuo ma non degenerare. In tal caso avevamo trovato le soluzioni a meno di una costante:

$$\psi(x) = \begin{cases} A_2 \sqrt{\frac{\varepsilon - U_2}{U_1 - \varepsilon}} e^{k_1 x} & x < 0 \\ A_2 \sin(k_2 x + \varphi) & x > 0 \end{cases}$$

Per determinare  $A_2$  imponiamo l'ortonormalità delle soluzioni:

$$\langle \psi_E | \psi_{E'} \rangle = \delta(E - E') = \frac{\delta(k_2 - k'_2)}{\hbar \sqrt{\frac{2(E - V_2)}{m}}} = \frac{\delta(k_2 - k'_2)}{\hbar v(E)}$$

dove  $v(E)$  è la velocità classica della particella. Andiamo a calcolare esplicitamente il prodotto scalare:

$$\langle \psi_E | \psi_{E'} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_E(x) \psi_{E'}^*(x) \simeq \int_0^{\infty} dx \psi_E(x) \psi_{E'}^*(x) =$$

buttando via un pezzo finito (l'integrale di un esponenziale), dato che il pezzo che rimane non è finito (deve venire una  $\delta$ ):

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\infty} dx A_2(E) A_2^*(E') \sin(k_2 x + \varphi) \sin(k'_2 x + \varphi') = \\ &= \frac{A_2(E) A_2^*(E')}{4i^2} \int_0^{\infty} dx (e^{ik_2 x + \varphi} - e^{-(ik_2 x + \varphi)}) (e^{ik'_2 x + \varphi'} - e^{-(ik'_2 x + \varphi')}) = \end{aligned}$$

A questo punto, usiamo l'approssimazione  $RWA$  (rotated wave approximation): trascuriamo i termini che oscillano con  $(k_2 + k'_2)$  rispetto a quelli che oscillano con  $(k_2 - k'_2)$ , visto che più un termine oscilla velocemente, più esso tende a mediarsi a 0:

$$= -\frac{A_2(E) A_2^*(E')}{4} \int_0^{\infty} dx \left[ e^{i(k_2 - k'_2)x + i(\varphi - \varphi')} + e^{i(k_2 - k'_2)x - i(\varphi - \varphi')} \right] =$$

Infine, buttiamo via anche la differenza di fase [PERCHÈ??], e otteniamo

$$\begin{aligned} &= -\frac{A_2(E) A_2^*(E')}{4} \int_0^{\infty} dx \left[ e^{i(k_2 - k'_2)x} + e^{i(k_2 - k'_2)x} \right] = \\ &= \frac{A_2(E) A_2^*(E')}{4} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i(k_2 - k'_2)x} = \frac{2\pi}{4} |A_2(E)|^2 \delta(k_2 - k'_2) \end{aligned}$$

da cui

$$|A_2(E)|^2 = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\hbar v(E)}$$

e possiamo prendere ad esempio

$$A_2(E) = \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{1}{\hbar v(E)}}$$

ESERCIZIO 10.1. Determinare una costante imponendo l'ortonormalità delle soluzioni nel caso  $\varepsilon > U_1$ .

ESERCIZIO 10.2. Calcolare i coefficienti di riflessione e rifrazione per il problema della buca di potenziale

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & |x| > a/2 \\ 0 & |x| < a/2 \end{cases}$$

Si dovrebbe trovare

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4(E - V_0)E} \sin^2 \left( 4 \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \right)}$$

Si noti che per alcuni valori di  $E$ , si ha  $T = 1$ . Si tratta di una sorta di risonanza tra onda incidente e buca.



## LEZIONE 11

### WKB approximation

#### 1. Intro

La WKB è una tecnica di risoluzione approssimata dell'equazione di schrodinger che viene utilizzata in situazioni semiclassiche, cioè situazioni che hanno valenza quantistica ma che si avvicinano a situazioni classiche, nel senso che il tutto acquista significato se si immagina di fare uno sviluppo in potenze di  $\hbar$  in cui, nella WKB, si tengono solo i primi termini. Nella risoluzione approssimata di

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$$

si parte con l'osservazione che nel caso in cui il potenziale  $V(x)$  sia nullo, le onde piane  $e^{ipx/\hbar}$ , con  $p$  il momento meccanico della particella, sono soluzioni esatte dell'equazione di schrodinger, e si cerca di generalizzare questo tipo di soluzioni al caso  $v(x) \neq 0$ . Dato quindi  $V(x) \neq 0$ , possiamo definire, in analogia con il caso classico, il momento

$$p(x) = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$$

e quindi la lunghezza d'onda associata:

$$\lambda(x) = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}$$

L'idea della WKB è che, se siamo nella condizione

$$\left| \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x} \right| \ll 1$$

allora la soluzione di onda piana con impulso dipendente dalla posizione secondo l'equazione precedente, può essere presa come soluzione approssimata del problema. La condizione di validità della WKB può essere scritta equivalentemente nella forma

$$\frac{\lambda(x) \left| \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right|}{2|E - V(x)|} \ll 1$$

che si interpreta come *smoothness* del potenziale, nel senso che le variazioni spaziali del potenziale su una lunghezza d'onda del sistema deve essere molto minore dell'energia in gioco. questo ci fa capire come la WKB NON possa essere applicata in regioni dove il potenziale ha derivata divergente, o comunque varia molto rapidamente.

#### 2. First Order WKB

Forti dei ragionamenti precedenti, cerchiamo una soluzione al problema della forma

$$\psi(x) = \exp[iS(x)/\hbar]$$

(e fin qui in realtà non abbiamo detto nulla di nuovo) scrivendo però uno sviluppo in serie della fase  $S(x)$  del tipo

$$S(x) = S_0(x) + \hbar S_1(x) + \hbar^2 S_2(x) + \dots$$

dove  $S_0(x)$  è la soluzione all'ordine zero,  $S_0(x) = p(x)x$ . Se sostituiamo la serie e l'ansatz per  $\psi$  nell'equazione di Schroedinger possiamo calcolare le correzioni successive alla fase  $S(x)$ :

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (V - E)\psi(x) = \\ &= \left\{ \frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 - i\hbar \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right] + V - E \right\} \exp [iS(x)/\hbar] \end{aligned}$$

da cui l'equazione per la fase  $S$ :

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 - i\hbar \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right] + V(x) - E = 0$$

che fino ad ora è un'equazione esatta. Introducendo adesso lo sviluppo di  $S$  in potenze, ed eguagliando termini dello stesso ordine, otteniamo:

- Termine di ordine zero:

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^2 + V(x) - E = 0$$

ovvero:

$$S_0(x) = \pm \int_{x_0}^x dx' \sqrt{2m(E - V(x'))}$$

- Termine di ordine 1:

$$\frac{\partial S_0}{\partial x} \frac{\partial S_1}{\partial x} = \frac{i}{2} \frac{\partial^2 S_0}{\partial x^2}$$

ovvero

$$\frac{\partial S_1}{\partial x} = \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{\partial S_0}{\partial x}$$

da cui

$$S_1(x) = \frac{i}{2} \ln \frac{\partial S_0}{\partial x} + C$$

Abbiamo quindi, usando la solita definizione dell'impulso semiclassico  $p(x)$ , la seguente soluzione approssimata:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \exp [iS_0(x)/\hbar] \exp [iS_1(x)/\hbar] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{\partial S_0(x)}{\partial x}}} \exp \left[ \pm i \int_{x_0}^x dx' p(x')/\hbar \right] \end{aligned}$$

Il nostro claim è che questa correzione, nell'ipotesi in cui ci siamo messi, cioè  $\frac{\lambda(x) \left| \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right|}{2|E - V(x)|} \ll 1$  è buona. A questo scopo faccio vedere che la correzione in  $S_2$  è trascurabile. Per farlo vedere

calcolo  $S_2$ , tramite l'equazione:

$$\frac{\partial S_2}{\partial x} \frac{\partial S_0}{\partial x} + \left( \frac{\partial S_1}{\partial x} \right)^2 - i\hbar \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2}$$

da cui ne segue

$$S_2(x) = \frac{1}{2} \frac{m \frac{\partial V}{\partial x}}{[2m(E - V(x))]^{3/2}} - \frac{1}{4} \int_{x_0}^x dx' \frac{m^2 \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2}{[2m(E - V(x))]^{3/2}}$$

VA RIFATTO IL CONTO PERCHÉ NON TORNA DIMENSIONALLY

### 3. Raccordo sul WKB

Quando siamo alle prese con un generico potenziale possiamo usare WKB solo dove valgono le ipotesi di applicabilità. In particolare potrebbero esserci solo certi intervalli dell'asse in cui non sono verificate le ipotesi del WKB. Dobbiamo occuparci quindi di come raccordare le soluzioni approssimate di queste zone fra loro. Sicuramente nei così detti punti di inversione classici, cioè quelli in cui

$$V(x) = E$$

l'approssimazione

$$\frac{\left| \lambda(x) \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right|}{2 |E - V(x)|} \ll 1$$

non potrà valere sicuramente. Osserviamo inoltre che la first order WKB può essere benissimo fatta nelle regioni classicamente inaccessibili, rispetto alla trattazione precedente cambia solo una  $i$ , cioè

$$\frac{1}{\sqrt{2m(V(x) - E)}} \exp \left[ \pm \int_{x_0}^x dx' \sqrt{2m(V(x') - E)} \right]$$

è la WKB buona per le zone inaccessibili. Il termine in radice, che è positivo nelle zone classicamente inaccessibili, sarebbe la quantità analoga all'impulso nel caso delle regioni classicamente accessibili (in effetti le due quantità differiscono solo per il segno). Ci proponiamo adesso di matchare le funzioni d'onda rispetto ai punti di inversione, dove WKB non funziona. Un caso semplice è un potenziale del tipo in figura:

METTERE LA FIGURA

allora molto distante dal punto di inversione  $b$  varrà l'approssimazione WKB. Possiamo dunque identificare le due regioni I:  $x \ll b$  e II:  $x \gg b$ . Definendo  $Q(x) = \sqrt{2m|E - V|/\hbar}$ , possiamo allora scrivere

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{Q(x)}} \left\{ \alpha \exp \left[ i \int^b dx' Q(x') \right] + \beta \exp \left[ -i \int^b dx' Q(x') \right] \right\} & x \ll b \\ \frac{1}{\sqrt{Q(x)}} \left\{ \gamma \exp \left[ \int_0^x dx' Q(x') \right] + \delta \exp \left[ - \int_b^x dx' Q(x') \right] \right\} & x \gg b \end{cases}$$

il termine esponenziale crescente ( $Q(x) > 0$ ) non può sussistere, dunque in realtà  $\gamma = 0$ . Il coefficiente  $\delta$  lo possiamo riassorbire nella normalizzazione, dunque possiamo scrivere, per le soluzioni approssimate nelle regioni asintotiche:

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{Q(x)}} \left\{ \alpha \exp \left[ i \int_x^b Q(x') \right] + \beta \exp \left[ -i \int_x^b Q(x') \right] \right\} & x \ll b \\ \frac{1}{\sqrt{Q(x)}} \exp \left[ - \int_b^x Q(x') \right] & x \gg b \end{cases}$$

Per raccordare fra di loro le due soluzioni asintotiche, e quindi trovare i due coefficienti  $\alpha$  e  $\beta$ , dobbiamo studiare che cosa succede nell'intorno del punto di inversione. Se assumiamo che in tale intorno  $V(x)$  ammetta uno sviluppo lineare del tipo  $V(x) \sim V_0(x - b)$ , allora possiamo risolvere l'equazione di Schrodinger in questa approssimazione nella regione  $x \sim b$  e raccordare questa con le soluzioni asintotiche. Quello che si trova con questi raccordi macchinosi è:

$$\psi(x) \simeq \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{Q(x)}} \cos \left[ \left| \int_b^x Q(x') \right| - \frac{\pi}{4} \right] & x \ll b \\ \frac{1}{\sqrt{Q(x)}} \exp \left[ - \left| \int_b^x Q(x') \right| \right] & x \gg b \end{cases}$$

Mettendo il modulo questa formula è valida anche nel caso di provenienza da una zona proibita verso una zona permessa. Cioè in via del tutto generale abbiamo, per una transizione che coinvolge un solo punto di inversione:

$$\psi(x) \simeq \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{Q(x)}} \cos \left[ \left| \int_b^x Q(x') \right| - \frac{\pi}{4} \right] & \text{zona classic. permessa} \\ \frac{1}{\sqrt{Q(x)}} \exp \left[ - \left| \int_b^x Q(x') \right| \right] & \text{zona classic. proibita} \end{cases}$$

In altre situazioni, vedi la figura (3), METTERE FIGURA La zona proibita può essere limitata nello spazio, e non estendersi su un semiasse. In tal caso per fare WKB nella zona proibita mi servono entrambi gli esponenziali, e questo determina un parametro libero aggiuntivo da determinarsi con ulteriori condizioni al contorno (raccordo). Seguendo la strada di prima, si può fare questo conto, trovando:

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{Q(x)}} \left\{ 2 \sin \eta \exp \left[ i \int_x^b Q(x') \right] + \cos \eta \exp \left[ -i \int_x^b Q(x') \right] \right\} & \text{zona permessa} \\ \frac{2}{\sqrt{Q(x)}} \exp \left[ - \left| \int_b^x Q(x') \right| \right] & \text{zona proibita} \end{cases}$$

#### 4. Applicazione - decadimento radioattivo

Consideriamo un potenziale del tipo in figura (3). INSERIRE LA FIGURA. Abbiamo allora tre zone:

- Nella prima regione posso risolvere esattamente il problema (buca di potenziale). Abbiamo dunque in questa regione

$$\psi_I(x) = A \sin [k(x - a) + \delta]$$



- Nella zona III, abbiamo la soluzione asintoticamente

$$\psi_{III}(x) = \frac{1}{\sqrt{Q(x)}} \exp \left[ +i \int_b^x dx' Q(x') - i \frac{\pi}{4} \right]$$

dove il fattore di fase è messo solo per comodità. In realtà ai fini del conto conviene scomporre la  $\psi_{III}$ :

$$\psi_{III}(x) = \frac{1}{\sqrt{Q(x)}} \left( \cos \left[ \int_b^x dx' Q(x') - \frac{\pi}{4} \right] + i \sin \left[ \int_b^x dx' Q(x') - \frac{\pi}{4} \right] \right)$$

- Nella zona II adesso è aavrrò due contributi, uno dovuto al matching col cos e uno dovuto al matching col della  $\psi_{III}$ . Raccordando con la regione III, otteniamo:

$$\psi_{II}(x) = \frac{1}{\sqrt{Q(x)}} \left( \frac{1}{2} \exp \left[ - \left| \int_b^x dx' Q(x') \right| \right] - i \exp \left[ + \left| \int_b^x dx' Q(x') \right| \right] \right)$$

dove il primo pezzo si ottiene per  $\eta = 0$  e il secondo per  $\eta = -\frac{\pi}{2}$ .

- Adesso per la zona I basta raccordare con la zona II e determino  $A$  e  $\delta$  esattamente.

In realtà, per semplificarci la vita nel calcolare l'ultimo raccordo, supponiamo che

$$\psi_{II}(x \sim a) \simeq -\frac{i}{\sqrt{Q(x)}} \exp \left[ \left| \int_b^x dx' Q(x') \right| \right]$$

che può essere scritto nella forma

$$\psi_{II}(x) = -\frac{i}{\sqrt{Q(x)}} e^{\tau} \exp \left[ - \left| \int_a^x dx' Q(x') \right| \right]$$

dove

$$\tau = \int_a^b dx' Q(x')$$

se fate il conto del raccordo e del raccordo della derivata, ottenete

$$\begin{cases} A \sin \delta = -\frac{ie^{\tau}}{|V(a)-E|} \\ k \cot \delta = -|Q(a)| \end{cases}$$

Adesso posso calcolare i coefficienti di trasmissione e di riflessione dalle correnti di probabilità. Si ha

$$J_{inc}(x) = \frac{|A|^2 \hbar k}{4m}$$

$$J_{tr} = \sqrt{\frac{2}{m}}$$

Da cui, si ha

$$\begin{aligned} |T|^2 &= \frac{2m}{\hbar k} \frac{4}{|A|^2} \\ &= \frac{4\sqrt{E(V_a - E)}}{V_a} e^{-2\tau} \end{aligned}$$

## Bibliografia

- [Bal98] L.E. Ballentine. *Quantum Mechanics: A Modern Development*. World Scientific, 1998.
- [Pru13] E. Prugovecki. *Quantum Mechanics in Hilbert Space: Second Edition*. Dover Books on Physics. Dover Publications, 2013.