

UNIVERSITÀ DI PISA

DIPARTIMENTO DI FISICA “E. FERMI”

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN FISICA

ANNO ACCADEMICO 2013/2014

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

**Quench quantistici in sistemi integrabili
e Bethe ansatz**

CANDIDATO:

Lorenzo Piroli

RELATORE:

Prof. Pasquale Calabrese

Prefazione

Negli ultimi anni alcuni esperimenti fondamentali nel campo degli atomi freddi hanno dimostrato la possibilità di realizzare in laboratorio sistemi quantistici a molti corpi quasi perfettamente isolati e di osservarne l'evoluzione temporale coerente. Questi lavori sperimentali hanno rinnovato l'interesse teorico nello studio dei problemi aperti inerenti alla dinamica del non equilibrio in sistemi isolati, riportando all'attenzione, in particolare, le domande riguardanti la caratterizzazione del raggiungimento dello stato d'equilibrio e della sua descrizione. In questo quadro, il protocollo di *quench*, cioè la procedura di portare un sistema lontano dall'equilibrio attraverso una variazione improvvisa di un parametro nella sua hamiltoniana, ha ricevuto molta attenzione: da una parte per la sua relativa semplicità, dall'altra perché permette diverse realizzazioni sperimentali.

Un filone di ricerca che negli ultimi anni ha raccolto sforzi significativi si è concentrato sullo studio di quench nei *sistemi integrabili*, cioè sistemi esattamente risolubili; sia per la necessità di chiarire il loro carattere speciale, sia per la possibilità di studiarli utilizzando tecniche analitiche esatte fornendo un controllo teorico impossibile in casi generici. La presente tesi si inserisce in questo discorso, focalizzando in particolare l'attenzione sullo studio di quench in sistemi integrabili risolubili tramite il cosiddetto *Bethe ansatz*, una tecnica introdotta da Bethe nel 1931 per risolvere il modello isotropo di Heisenberg (o catena di spin XXX); questi sistemi rappresentano modelli a molti corpi completamente risolubili genuinamente interagenti (non mappabili cioè in sistemi di particelle libere).

Nello specifico, l'oggetto di studio di questa tesi sono il modello di Lieb-Liniger e quello anisotropo di Heisenberg (conosciuto anche come catena XXZ); il primo è un modello continuo unidimensionale di bosoni con interazione di contatto repulsiva introdotto negli anni Sessanta, mentre il secondo consiste in un reticolo discreto di spin unidimensionale con accoppiamento a primi vicini. Questi sistemi sono introdotti nel capitolo 2, e le hamiltoniane corrispondenti vengono diagonalizzate attraverso Bethe ansatz.

Nello studio dell'evoluzione temporale del valore di aspettazione sullo stato di un sistema di un'osservabile d'interesse a seguito di un quench, un approccio utilizzato è quello dell'espansione in fattori di forma; i building blocks necessari per usare questo

metodo sono gli autostati normalizzati del sistema, gli elementi di matrice dell'osservabile che si sta analizzando e i prodotti scalari (overlap) tra autostati di hamiltoniane corrispondenti a due diversi valori del parametro di quench. Nei sistemi integrabili è possibile calcolare la norma degli autostati e gli elementi di matrice attraverso il cosiddetto algebraic Bethe ansatz, un formalismo potente introdotto negli anni Settanta, presentato nel capitolo 3. Grazie a questa tecnica, si possono ottenere formule compatte per queste quantità in termini del determinante di matrici le cui dimensioni scalano linearmente con quelle del sistema, e questo consente di effettuare calcoli esatti anche nel limite termodinamico. Per contro, in generale il calcolo degli overlap è tipicamente molto difficile; il problema rimane aperto per sistemi integrabili generici ed è stato preso in considerazione nella presente tesi per i modelli di Lieb-Liniger e XXZ.

Il lavoro originale di questa tesi costituisce i capitoli 4 e 5, e la breve sezione 2.1.6.

Nel capitolo 4, proponiamo un metodo per calcolare gli overlap nel modello XXZ tra autostati dell'hamiltoniana e stati fattorizzati, attraverso la derivazione di formule ricorsive. Le formule ricorsive per gli overlap sono ottenute utilizzando in modo sistematico tecniche di algebraic Bethe ansatz. Questo approccio è generalizzato per un caso particolare al modello di Lieb-Liniger, ed è naturalmente generalizzabile a modelli integrabili su reticolo. Partendo da una formula ricorsiva dimostrata, otteniamo una formula compatta per gli overlap tra autostati del modello XXZ e il cosiddetto stato di Néel, ritrovando in modo più semplice un risultato recentemente dimostrato in letteratura.

Nel capitolo 5, studiamo un quench nel modello di Lieb-Liniger. Il problema generico corrispondente ad una variazione arbitraria della costante d'interazione c che compare nell'hamiltoniana rimane aperto e difficile da attaccare, per l'assenza di una formula di overlap tra autostati di hamiltoniane con parametri d'interazione diversi. Noi abbiamo considerato il problema più semplice (ma ancora non studiato) di variazione al prim'ordine $c \rightarrow c + \delta c$, con c arbitrario, ottenendo una formula per l'overlap in questo caso, sempre attraverso l'uso dell'algebraic Bethe ansatz. Questa formula ha permesso uno studio numerico dell'evoluzione temporale di alcune quantità del sistema; abbiamo in particolare considerato il Loschmidt echo, il valore di aspettazione dell'osservabile $\psi^\dagger(x)\psi^\dagger(x)\psi(x)\psi(x)$ e la funzione di correlazione a due punti a tempi uguali, confrontando i risultati con uno studio numerico precedente sul modello di Lieb-Liniger in cui l'hamiltoniana dopo il quench è quella libera (in cui cioè la costante d'interazione viene improvvisamente posta uguale a zero). Nella sezione 2.1.6 riportiamo invece un breve studio sulle cariche conservate sempre nel modello di Lieb-Liniger.

Nel primo capitolo viene introdotto in maggiore dettaglio il quadro generale; in particolare nella sezione [1.5](#) viene presentata l'organizzazione della tesi, riassumendo brevemente il contenuto di ogni capitolo.

Indice

Prefazione	i
Indice	iv
1 Introduzione	1
1.1 Sistemi quantistici isolati	2
1.1.1 Raggiungimento dello stato stazionario in sistemi quantistici isolati	4
1.1.2 Termalizzazione in sistemi isolati: Eigenstate Thermalization Hypothesis	5
1.2 Il ruolo dei sistemi quantistici integrabili	7
1.2.1 Dinamica del non equilibrio nei sistemi integrabili	9
1.3 Preparazione di un sistema quantistico fuori dall'equilibrio: il protocollo di quench	10
1.4 Progressi sperimentali nello studio del non equilibrio in sistemi quantistici	11
1.5 Riassunto e organizzazione della tesi	14
2 Coordinate Bethe Ansatz	15
2.1 Il modello di Lieb-Liniger	15
2.1.1 Il problema a due particelle	17
2.1.2 Coordinate Bethe Ansatz	19
2.1.3 Studio delle equazioni di Bethe	21
2.1.4 Proprietà degli autostati	22
2.1.5 Limite termodinamico: lo stato fondamentale	23
2.1.6 Studio delle cariche conservate	25
2.2 La catena di Heisenberg	27
2.2.1 Il modello	27
2.2.2 Proprietà delle soluzioni	30
2.3 Conclusioni	31
3 Algebraic Bethe Ansatz	32
3.1 Impostazione generale	33
3.2 Algebraic Bethe ansatz per il modello XXZ	34
3.3 Algebraic Bethe ansatz astratto	37
3.3.1 Invertire la logica	41
3.3.2 Cariche conservate	42

3.4	Algebraic Bethe ansatz per il modello di Lieb-Liniger	43
3.5	Calcolo dei prodotti scalari e dei fattori di forma	44
3.5.1	La formula di Slavnov	45
3.5.2	Fattori di forma	47
4	Formule ricorsive e alcuni risultati analitici	49
4.1	Formule ricorsive per il modello XXZ	50
4.1.1	Formula ricorsiva per stati completamente fattorizzati	52
4.1.2	Formula ricorsiva per stati di tipo Néel	56
4.2	Formula determinante per l'overlap con lo stato di Néel	58
4.3	Formule Ricorsive per il modello di Lieb-Liniger	62
4.3.1	Verifiche e commenti	67
5	Quench d'interazione nel modello di Lieb-Liniger	68
5.1	Definizione del problema	69
5.2	Regole di selezione e proprietà degli overlap	70
5.3	Calcolo dell'overlap al prim'ordine	72
5.3.1	Una formula ricorsiva	76
5.4	Risultati numerici	78
5.5	Conclusioni e commenti	87
6	Conclusioni	89
	 Bibliografia	 91
	 Ringraziamenti	 96

Capitolo 1

Introduzione

La meccanica statistica rappresenta una parte fondamentale della fisica teorica moderna. Il suo intento, in termini molto generali, è quello di descrivere e prevedere le caratteristiche di un sistema di un numero molto grande di costituenti elementari a partire dalla conoscenza delle leggi d'interazione tra questi ultimi.

Nonostante la sua lunga storia e i suoi numerosi successi, un aspetto legato ai fondamenti della meccanica statistica quantistica rimane ancora oggi poco chiaro: il problema dell'applicabilità dei suoi postulati ad un sistema quantistico isolato (cioè, quello di capire quando e come sussiste la possibilità di descrivere il sistema all'equilibrio tramite un *ensemble* statistico). Inoltre, lo studio dei sistemi quantistici isolati fuori dall'equilibrio, che si presenta come lo strumento naturale per sviluppare la nostra comprensione di questo argomento, aveva fino a pochi anni fa ricevuto poca attenzione teorica. Solo in tempi recenti ha preso piede uno studio sistematico di questi argomenti, soprattutto grazie agli enormi progressi sperimentali che hanno permesso di realizzare in laboratorio sistemi con un elevato grado di isolamento e controllo, rendendo concrete domande che fino a poco tempo fa potevano sembrare solamente accademiche.

La difficoltà di risolvere in termini generali e definitivi i problemi complessi della caratterizzazione del raggiungimento dell'equilibrio per un sistema quantistico isolato e della conseguente possibilità di descriverlo tramite un ensemble statistico, ha fatto sì che lo studio di queste tematiche si strutturasse in più direzioni. Una parte del lavoro teorico, in particolare, si è concentrata nell'analisi di sistemi relativamente semplici in cui un controllo analitico è possibile. Lo scopo di questi studi è quello di aiutare una comprensione dei processi generali fornendo degli esempi specifici che possano servire come guida per la formulazione di risposte definitive. Questa logica è condivisa dal presente lavoro di tesi, il cui obiettivo è quello di contribuire a fornire alcuni elementi

quantitativi che ci avvicinino ad una maggiore comprensione dei problemi accennati finora e che verranno discussi in questa introduzione.

In questo capitolo introdurremo i sistemi quantistici isolati e discuteremo i problemi che sorgono nello studio del raggiungimento e della caratterizzazione del loro stato stazionario. Vedremo come in questo studio sarà necessario identificare una classe speciale di sistemi, i sistemi integrabili, ed evidenzieremo il loro ruolo nel discorso generale. Arrivando poi ai contenuti specifici della tesi, introdurremo il protocollo di quench per sistemi quantistici, e in particolare per sistemi integrabili; questi temi saranno centrali in tutto il presente lavoro.

Torneremo inoltre più in dettaglio sull'importanza degli argomenti presentati in questa introduzione e di un loro studio sistematico, motivando il discorso facendo riferimento ad alcuni recenti esperimenti fondamentali. Infine, illustreremo schematicamente l'organizzazione della tesi, presentando in breve il contenuto di ogni capitolo.

1.1 Sistemi quantistici isolati

Consideriamo un sistema d'interesse accoppiato con un secondo molto più grande (sistema universo o bagno termico) nel limite in cui quest'ultimo abbia un numero infinito di gradi di libertà. Prepariamo il primo sistema in un certo stato iniziale e lasciamolo evolvere liberamente. L'intuizione fisica ci suggerisce che dopo un tempo sufficientemente lungo il primo sistema raggiungerà uno stato d'equilibrio; le prescrizioni standard della meccanica statistica descrivono questo stato d'equilibrio in termini di un ensemble canonico. In questo quadro il raggiungimento dell'equilibrio da parte del sistema d'interesse è da ascrivere all'accoppiamento con il sistema universo.

Cosa accade quando invece il sistema d'interesse è isolato (cioè in cui non c'è nessuna interazione con l'ambiente esterno)? Se prepariamo il sistema iniziale in uno stato puro, rappresentato cioè da un vettore $|\psi\rangle$ nell'opportuno spazio di Hilbert (in generale $|\psi\rangle$ non sarà un autostato dell'hamiltoniana del sistema), data l'unitarietà dell'evoluzione temporale questo rimarrà anche a grandi tempi in uno stato puro, e non sarà descritto in termini di una matrice densità. A meno di ammettere quindi la necessità di un qualche accoppiamento, per quanto piccolo, con l'ambiente esterno, questo sembra contraddire la prescrizione della meccanica statistica standard secondo cui un sistema isolato può essere descritto in termini di un ensemble microcanonico.

Si noti che chiarire i meccanismi con cui un sistema isolato può essere descritto in termini di un ensemble microcanonico è importante anche da un punto di vista di principio,

perché l'insieme del sistema di interesse e del bagno termico può sempre essere visto come un sistema globale isolato, e in effetti la trattazione standard in meccanica statistica si basa su questa assunzione per la derivazione della validità dell'ensemble canonico per sistemi accoppiati con un bagno termico.

Il modo corretto per vedere il problema dell'equilibrio nei sistemi isolati consiste nello spostare l'attenzione sulle osservabili; in effetti, la cosa importante ai fini di una trattazione statistica è che per le osservabili d'interesse il sistema si comporti come se fosse in uno stato misto descritto da un ensemble microcanonico. In particolare, le osservabili che prendiamo in considerazione sono le *osservabili locali*, che sono quelli che possiamo indagare sperimentalmente. Una definizione di osservabile locale è la seguente: l'operatore corrispondente ad un'osservabile locale non accoppia stati localizzati in punti arbitrariamente distanti. In questo modo, è in linea di principio ancora possibile recuperare le prescrizioni della meccanica statistica standard anche per sistemi isolati.

Per rendere concreta fin dall'inizio la nostra discussione, presentiamo qui le domande centrali nello studio dei sistemi isolati.

- In quali situazioni e in che termini un sistema isolato preparato in un certo stato iniziale raggiungerà uno stato stazionario dopo un tempo sufficientemente lungo?
- È possibile caratterizzare lo stato stazionario in termini di qualche ensemble statistico?
- Quando la caratterizzazione del punto precedente coincide con quella data dalle prescrizioni standard della meccanica statistica standard, cioè quando si ha *termalizzazione*?

Sebbene abbia senso porsi queste domande anche dal punto di vista classico, in questa tesi ci concentreremo sulla meccanica quantistica. Ricordiamo soltanto che in meccanica classica la situazione è molto più chiara e *l'ergodicità* è considerata come il meccanismo alla base della possibilità di una trattazione statistica, sebbene anche nel caso classico la discussione sui fondamenti della meccanica statistica non sia ancora definitivamente conclusa. Per una discussione rimandiamo per esempio a [1], [2] .

Nelle prossime sezioni discutiamo in dettaglio i problemi che nascono nel cercare di rispondere a queste domande nel caso quantistico.

1.1.1 Raggiungimento dello stato stazionario in sistemi quantistici isolati

Entriamo nello specifico, e consideriamo un sistema isolato la cui evoluzione temporale è descritta dall'hamiltoniana H . Prepariamo ora il sistema in uno stato iniziale $|\psi\rangle$; in generale $|\psi\rangle$ non sarà uno degli autostati (che indichiamo con $|\psi_\alpha\rangle$) dell'hamiltoniana H e si potrà quindi espandere come:

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha} |\psi_{\alpha}\rangle , \quad (1.1)$$

con $c_{\alpha} = \langle \psi_{\alpha} | \psi \rangle$. Indichiamo con E_{α} gli autovalori dell'hamiltoniana che per semplicità supporremo non degeneri, e con $\omega_{\alpha} = E_{\alpha}/\hbar$. Considerando l'osservabile \mathcal{O} , possiamo scrivere formalmente l'evoluzione temporale del suo valore di aspettazione:

$$\langle \psi(t) | \mathcal{O} | \psi(t) \rangle = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} c_{\alpha}^* c_{\beta} \langle \psi_{\alpha} | \mathcal{O} | \psi_{\beta} \rangle e^{-i(\omega_{\beta} - \omega_{\alpha})t} . \quad (1.2)$$

Dire che il sistema raggiunge uno stato stazionario, significa affermare che l'espressione in (1.2) raggiunge un valore indipendente dal tempo per tempi “grandi”. Osserviamo per prima cosa che se il sistema è finito strettamente parlando questo non è mai possibile, e la quantità in (1.2) esibirà un comportamento (quasi) periodico. Si parla dell'effetto di *finite size*, che è responsabile del cosiddetto *revival quantistico*, cioè del comportamento quasi periodico delle osservabili. Ci aspettiamo che al crescere delle dimensioni del sistema il tempo di revival cresca di conseguenza e diventi infinito nel limite termodinamico, rendendo così possibile parlare di stato stazionario.

Rimane però il problema di capire se e come effettivamente da un'espressione come la (1.2) si possa dedurre rigorosamente l'esistenza di un valore stazionario a grandi tempi nel limite termodinamico per un'osservabile d'interesse. Negli ultimi anni alcuni progressi sono stati fatti, per esempio è stato dimostrato che per sistemi macroscopici sotto condizioni sperimentali realistiche la (1.2) implica che la media $\langle \psi(t) | \mathcal{O} | \psi(t) \rangle$ osservata rimanga effettivamente per la maggior parte del tempo vicino ad un valore stazionario con fluttuazioni molto piccole [3],[4]. Quello che manca è però ancora descrivere in generale il modo in cui un'osservabile raggiunge lo stato stazionario partendo da uno stato iniziale arbitrario. Un altro risultato degli ultimi anni riguarda lo stato di un sistema A debolmente accoppiato con un sistema B sufficientemente grande; in particolare è stato dimostrato che preparando il sistema A+B in un autostato *tipico* dell'hamiltoniana globale, sotto certe ipotesi la matrice densità ridotta del sottosistema A è per ogni tempo uguale alla matrice canonica standard [5], [6]. Questo risultato, che va sotto il nome di *quantum typicality*, è generale ma difficilmente applicabile a sistemi specifici; inoltre la sua validità è limitata: ad esempio, nel protocollo di quench che vedremo in

questo capitolo, lo stato iniziale non corrisponde ad un autostato dell'hamiltoniana del sistema globale.

Nella prossima sezione, considereremo la questione della caratterizzazione dell'equilibrio, una volta assunto che questo venga effettivamente raggiunto dopo un tempo sufficientemente lungo.

1.1.2 Termalizzazione in sistemi isolati: Eigenstate Thermalization Hypothesis

Se un valore stazionario per un'osservabile esiste, questo dovrà coincidere con la media temporale eseguita sulla quantità dipendente dal tempo (1.2); se assumiamo per semplicità un sistema con autovalori non degeneri, abbiamo:

$$\begin{aligned} \overline{\langle \psi(t) | \mathcal{O} | \psi(t) \rangle} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \langle \psi(t) | \mathcal{O} | \psi(t) \rangle = \\ &= \sum_{\alpha} |c_{\alpha}|^2 \langle \psi_{\alpha} | \mathcal{O} | \psi_{\alpha} \rangle = \text{tr} \left[\left(\sum_{\alpha} |c_{\alpha}|^2 |\psi_{\alpha}\rangle \langle \psi_{\alpha}| \right) \mathcal{O} \right]. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Vediamo quindi che per quanto riguarda le osservabili del sistema, lo stato stazionario si comporta come se fosse in quello che in letteratura è chiamato *ensemble diagonale*, cioè dato dalla seguente matrice densità :

$$\rho_{\text{diag}} = \sum_{\alpha} |c_{\alpha}|^2 |\psi_{\alpha}\rangle \langle \psi_{\alpha}|. \quad (1.4)$$

Osserviamo che questa rappresentazione dipende in modo cruciale dallo stato iniziale. Questo diventa problematico perché per descrivere lo stato stazionario servirebbe la conoscenza dell'insieme infinito di coefficienti $\{|c_{\alpha}|^2\}_{\alpha}$ e inoltre questo approccio è in conflitto con la logica della meccanica statistica in cui si tenta di caratterizzare l'equilibrio in termini del numero minore di parametri possibile (nel caso dell'ensemble microcanonico, solo la conoscenza dell'energia media del sistema è necessaria).

La prima cosa da osservare è che non ci aspettiamo che le previsioni dell'ensemble diagonale, valido tutte le volte che uno stato stazionario è raggiunto, coincidano sempre con quelle dell'ensemble microcanonico per sistemi quantistici isolati. L'analogo classico di questo discorso è quello che definisce i sistemi integrabili, per cui le normali regole della statistica non sono applicabili. In meccanica classica, un sistema di N gradi di libertà si dice integrabile se possiede N integrali del moto (indipendenti). In meccanica quantistica una definizione generale di integrabilità è invece più difficile [7]; tuttavia è ancora possibile parlare di integrabilità dal punto di vista operativo e nei sistemi

integrabili, come ci aspettiamo, una descrizione in termini di ensemble microcanonico fallisce; torneremo su questo punto nella sezione (1.2.1) di questo capitolo.

Nel seguito di questa discussione, consideriamo un sistema per cui una descrizione in termini di ensemble microcanonico sia effettivamente applicabile, per cui cioè le previsioni dell'ensemble diagonale coincidano con quelle ottenute con la seguente matrice densità microcanonica:

$$\rho_{\text{micro}}(E_\alpha) = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{\beta \in I_\alpha} |\psi_\beta\rangle \langle \psi_\beta| , \quad (1.5)$$

dove $I_\alpha = \{\beta | E_\beta \in (E_\alpha - \Delta E, E_\alpha + \Delta E)\}$ e \mathcal{N} è un'opportuna costante che normalizza ρ_{micro} a 1. Un'assunzione spesso tacita nella possibilità di questa descrizione è che le previsioni ottenute con questa ρ_{micro} siano indipendenti dalla scelta di ΔE , fintanto che questo valore è sufficientemente piccolo. Von Neumann fu il primo ad attaccare il problema dell'equivalenza dei due ensemble per un sistema generico [8] (si veda [9] per la traduzione in inglese). Sotto alcune assunzioni, fu in grado di dimostrare che per alcune famiglie di osservabili macroscopiche questa equivalenza vale. Il risultato di von Neumann è generale, ma non risponde alla domanda del perché, preso un sistema d'interesse si osservi termalizzazione per un'osservabile specifico. Più importante, è stato recentemente dimostrato [10] che una delle assunzioni di Von Neumann per un sistema generico è in effetti non banale, ed anzi equivale precisamente all'assunzione della validità della cosiddetta Eigenstate Thermalization Hypothesis, che è stata proposta recentemente come meccanismo alla base della termalizzazione [11], e che verrà discussa in questa sezione.

Guardiamo più da vicino l'uguaglianza che codifica il fatto che per un'osservabile d'interesse avviene termalizzazione; se l'ensemble microcanonico è applicabile dev'essere:

$$\sum_{\alpha} |c_\alpha|^2 \mathcal{O}_{\alpha,\alpha} = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{\alpha \in I_\alpha} \mathcal{O}_{\alpha,\alpha} , \quad (1.6)$$

dove abbiamo indicato $\mathcal{O}_{\alpha,\alpha} = \langle \psi_\alpha | \mathcal{O} | \psi_\alpha \rangle$. Tre scenari sono stati proposti in letteratura [11] che corrispondono a tre diversi meccanismi per cui l'uguaglianza (1.6) sia effettivamente verificata.

Per prima cosa si potrebbe pensare che le fluttuazioni autostato per autostato dei coefficienti $\mathcal{O}_{\alpha,\alpha}$ e $|c_\alpha|^2$ non siano necessariamente piccole; tuttavia, per le osservabili d'interesse fisico si può ipotizzare che le fluttuazioni di queste due quantità non siano correlate, in modo che per un dato stato iniziale sommare i coefficienti $\mathcal{O}_{\alpha,\alpha}$ con i pesi $|c_\alpha|^2$ abbia l'effetto complessivo di una somma con pesi omogenei, e valga quindi la (1.6). Il secondo punto di vista è quello in cui si assume che per gli stati d'interesse

fisico i pesi $|c_\alpha|^2$ non fluttuino in modo apprezzabile in modo che l'uguaglianza (1.6) segua banalmente. Infine, il terzo meccanismo che è possibile proporre è quello per cui i coefficienti $\mathcal{O}_{\alpha,\alpha}$ non fluttuino in modo apprezzabile al variare di $|\psi_\alpha\rangle$ tra autostati che corrispondono ad energie vicine. In altre parole, si assume che $\langle\psi_\alpha|\mathcal{O}|\psi_\alpha\rangle$ sia una funzione continua e lentamente variabile dell'energia E_α .

L'ultimo scenario prende il nome di *Eigenstate Thermalization Hypothesis* (ETH), e sulla base degli studi degli ultimi anni sembra emergere come il meccanismo effettivo alla base della termalizzazione. L'ipotesi ETH (introdotta in [12], rivista e riportata all'attenzione dei recenti studi teorici in [11]) è stata verificata numericamente in diversi sistemi specifici [10], [11], [13], [14] e dimostrata sotto alcune ipotesi per alcuni casi particolari [12], [15]. Manca tuttavia una giustificazione generale del fatto che sia effettivamente alla base della termalizzazione nei sistemi in cui questa si verifica.

1.2 Il ruolo dei sistemi quantistici integrabili

Nelle sezioni precedenti abbiamo illustrato i problemi legati allo studio dei sistemi quantistici isolati, e abbiamo visto come negli ultimi anni alcuni passi avanti siano stati fatti verso la loro soluzione, sebbene manchino ancora risposte definitive. In particolare, dalla nostra discussione emerge come studi esatti di sistemi specifici potrebbero essere molto utili per guidarci nella formulazione di teorie generali.

Disporre di un modello a molti corpi in cui riuscire a risolvere in modo esatto il problema dell'evoluzione temporale anche nel limite termodinamico, significa avere un “laboratorio teorico” in cui testare analiticamente, per fare un esempio, la validità dell'ipotesi ETH, o in cui studiare le caratteristiche del raggiungimento dell'equilibrio, partendo solo dai principi primi della meccanica quantistica.

Naturalmente, trattare in modo esatto l'evoluzione temporale sarà in generale impossibile per un modello arbitrario. Tuttavia, un completo controllo analitico diventa possibile nel caso dei *sistemi integrabili*. Come già accennato, in meccanica quantistica è difficile dare una definizione generale di integrabilità; la maggior parte delle definizioni usate in letteratura ha infatti solo una validità in termini operativi. Consideriamo qui a titolo d'esempio la definizione apparentemente intuitiva ma non corretta secondo cui un modello in uno spazio di Hilbert \mathcal{H} di dimensione finita n si dice integrabile se possiede n operatori commutanti tra loro e con l'hamiltoniana H : il problema di questa definizione è che applicandola alla lettera, ogni modello in meccanica quantistica sarebbe integrabile prendendo come insieme di osservabili commutanti i proiettori sugli autostati dell'hamiltoniana. In [7] queste problematiche sono discusse in dettaglio e vengono proposti alcuni criteri per definire delle classi di integrabilità.

Per quanto riguarda i nostri scopi sarà sufficiente assumere una definizione operativa d'integrabilità. Assumiamo qui quella per cui un modello si dice integrabile se la corrispondente hamiltoniana può essere diagonalizzata esattamente. Questa definizione comprende per esempio i modelli che possono essere mappati in sistemi di particelle libere o oscillatori armonici; comprende anche quelli risolubili tramite la tecnica del Bethe ansatz, che prenderemo in considerazione in questa tesi e che rappresentano esempi di sistemi genuinamente interagenti in cui è possibile un completo controllo analitico.

La possibilità di ottenere soluzioni esatte rappresenta una risorsa davvero non banale per avvicinarci alla soluzione dei problemi illustrati in questo capitolo. È tuttavia importante comprendere quali domande possiamo porre nello studio dei sistemi integrabili; è chiaro infatti che, per propria natura, questi ultimi sono in qualche modo speciali. In particolare non possiamo aspettarci, per analogia con il caso classico, che nello studio di situazioni di non equilibrio in modelli isolati integrabili, lo stato stazionario eventualmente raggiunto sia descritto da un ensemble microcanonico: non possiamo quindi evidentemente pretendere di ottenere, dallo studio dei sistemi integrabili, una risposta diretta circa la validità dell'ipotesi ETH come meccanismo alla base della termalizzazione. Cionondimeno, una cosa che invece possiamo aspettarci è che sia possibile caratterizzare lo stato stazionario di questi sistemi, raggiunto dopo un transiente dovuto a condizioni iniziali di non equilibrio, in termini di un opportuno ensemble che non sarà più microcanonico: la speranza è allora che il controllo analitico di questi modelli permetta di arrivare ad una completa comprensione dei meccanismi che permettono questa descrizione statistica e che le idee sviluppate in questo contesto possano essere generalizzate poi per sistemi generici. In ogni caso, la comprensione dell'integrabilità è evidentemente essenziale per avere un quadro completo dei sistemi quantistici isolati.

Nella prossima sezione discutiamo in dettaglio in che modo ci aspettiamo che il comportamento di un sistema integrabile sia speciale in situazioni di non equilibrio. Introduciamo il cosiddetto ensemble di Gibbs generalizzato, che è stato proposto per la descrizione dello stato d'equilibrio per i sistemi integrabili. Per completare poi la contestualizzazione del nostro lavoro, discutiamo nella sezione successiva il protocollo di quench quantistico, che è stato usato negli ultimi anni come strumento privilegiato per lo studio del non equilibrio. Prima di presentare gli argomenti e l'organizzazione della tesi, discutiamo inoltre dei progressi sperimentali degli ultimi anni che hanno motivato gran parte dei recenti studi teorici.

1.2.1 Dinamica del non equilibrio nei sistemi integrabili

Anche nello studio dei sistemi integrabili possiamo chiederci se un sistema preparato in un generico stato iniziale raggiungerà, dopo un certo tempo, uno stato descrivibile (in termini di valori di aspettazione delle osservabili) tramite un opportuno ensemble statistico, ed eventualmente com'è fatto questo ensemble. Per quanto riguarda la questione del raggiungimento dell'equilibrio nei sistemi integrabili, ci aspettiamo che il valore di aspettazione delle osservabili del sistema raggiunga effettivamente un valore stazionario (descritto dall'ensemble diagonale), e in questo senso la situazione non differisce da quella di un sistema non integrabile [3], [16]. D'altra parte, la caratterizzazione dello stato d'equilibrio per un sistema integrabile è speciale e la meccanica statistica standard per un sistema quantistico isolato non è applicabile. Consideriamo un sistema integrabile quantistico isolato che prepariamo in un certo stato $|\psi_0\rangle$ (che non sia un autostato dell'hamiltoniana dell'evoluzione temporale). Supponiamo di far evolvere il sistema; intuitivamente, ci aspettiamo che l'ensemble microcanonico fallisca nella descrizione del sistema a grandi tempi e questo per la presenza di quantità (*cariche*) conservate non banali. Sempre intuitivamente, infatti, ci aspettiamo che anche il valore di queste ultime, e non solo quello dell'energia, diventi necessario per la caratterizzazione dello stato stazionario. Rigol et al. [17] proposero quindi che lo stato d'equilibrio di un sistema quantistico integrabile sia descrivibile dalla seguente matrice densità:

$$\rho_{\text{GGE}} = \frac{1}{Z_{\text{GGE}}} e^{-\sum_n \beta_n \hat{Q}_n}, \quad (1.7)$$

dove abbiamo indicato con $\{\hat{Q}_n\}_n$ l'insieme delle cariche conservate e dove $Z_{\text{GGE}} = \text{tr} \left[e^{-\sum_n \beta_n \hat{Q}_n} \right]$, in modo che ρ_{GGE} sia correttamente normalizzata. I numeri β_n sono moltiplicatori di Lagrange che sono definiti (in analogia all'inverso della temperatura nell'ensemble canonico), imponendo che valga:

$$\langle \psi_0 | \hat{Q}_j | \psi_0 \rangle = \text{tr} \left[\hat{Q}_j \rho_{\text{GGE}} \right]. \quad (1.8)$$

La (1.7) sostituisce la matrice microcanonica prevista dalla meccanica statistica standard per sistemi isolati, e definisce quello che in letteratura è chiamato *generalized Gibbs ensemble* (GGE). In [17] la proposta del GGE è motivata con un argomento di massima entropia, adottando un punto di vista vicino a quello di Jaynes nel contesto della “meccanica statistica soggettiva” [18].

Si apre a questo punto una discussione non banale sulla natura delle cariche conservate \hat{Q}_n che dobbiamo scegliere nella costruzione (1.7). É chiaro infatti che, dato un sistema generico, possiamo sempre identificare nei proiettori sugli autostati dell'energia un insieme di operatori commutanti tra loro e con l'hamiltoniana; tuttavia, una descrizione

del GGE in termini di queste osservabili sarebbe evidentemente tautologica e priva di utilità. Poiché siamo interessati a recuperare una descrizione statistica per osservabili locali, è naturale imporre che l'ensemble (1.7) sia costruito a partire dalle cariche locali del sistema. Questa richiesta completa la congettura del generalized Gibbs ensemble per descrivere lo stato stazionario in sistemi integrabili.

Il generalized Gibbs Ensemble è stato verificato in diversi modelli, sia numericamente che analiticamente [19], [20], [21], [22], [23]. Nonostante i suoi successi esistono anche esempi in cui il generalized Gibbs ensemble non è applicabile [24], [25]. Chiarire in modo preciso le ipotesi sotto le quali questo ensemble è applicabile è uno degli importanti problemi attualmente aperti.

1.3 Preparazione di un sistema quantistico fuori dall'equilibrio: il protocollo di quench

Consideriamo un sistema quantistico con hamiltoniana:

$$H(g_0) = H_0 + g_0 H_1 , \quad (1.9)$$

dove g_0 è un parametro che può essere ad esempio l'intensità di un campo magnetico o il valore di una costante di accoppiamento. Supponiamo di preparare il sistema nello stato fondamentale di $H(g_0)$; naturalmente il valore di aspettazione delle osservabili del sistema non evolverà nel tempo. Immaginiamo ora, all'istante $t = 0$ di effettuare sul sistema la trasformazione (quasi) istantanea:

$$g_0 \rightarrow g_1 . \quad (1.10)$$

All'istante $t = 0^+$ il sistema non si troverà più in uno stato di equilibrio; in particolare, se indichiamo con $|\psi_0(g_0)\rangle$, $|\psi_\alpha(g_1)\rangle$ rispettivamente lo stato fondamentale dell'hamiltoniana $H(g_0)$ e un autostato generico dell'hamiltoniana $H(g_1)$ con energia $E_\alpha(g_1)$ avremo in generale una decomposizione:

$$|\psi_0(g_0)\rangle = \sum_{\alpha} |\psi_\alpha(g_1)\rangle \langle \psi_\alpha(g_1) | \psi_0(g_0) \rangle . \quad (1.11)$$

L'evoluzione temporale sarà ora non banale:

$$e^{-iH(g_1)t} |\psi_0(g_0)\rangle = \sum_{\alpha} |\psi_\alpha(g_1)\rangle \langle \psi_\alpha(g_1) | \psi_0(g_0) \rangle e^{-iE_\alpha(g_1)t/\hbar} . \quad (1.12)$$

Questa procedura per la preparazione di un sistema in uno stato di non equilibrio costituisce il cosiddetto *protocollo di quench*, e negli ultimi anni è stata quella che ha ricevuto la maggiore attenzione teorica per la sua semplicità e per le possibilità delle realizzazioni sperimentali che offre.

In questa tesi verrà affrontato in dettaglio un problema di quench e in particolare, saremo interessati all'evoluzione temporale del valore di aspettazione di alcune osservabili. Un possibile approccio per questo tipo di studio è quello dell'espansione in fattori di forma, che illustriamo ora e che utilizzeremo nel capitolo 5. Dato un'osservabile \mathcal{O} , possiamo calcolarne l'evoluzione temporale a seguito del quench in (1.10) come:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(t) &= \langle \psi_0(g_0) | e^{iH(g_1)t} \mathcal{O} e^{-iH(g_1)t} | \psi_0(g_0) \rangle = \\ &= \sum_{\alpha, \beta} \langle \psi_0(g_0) | \psi_\alpha(g_1) \rangle \langle \psi_\alpha(g_1) | \mathcal{O} | \psi_\beta(g_1) \rangle \langle \psi_\beta(g_1) | \psi_0(g_0) \rangle e^{i(E_\alpha(g_1) - E_\beta(g_1))t/\hbar}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Come vedremo, nei modelli integrabili alcune tecniche come l'algebraic Bethe ansatz rendono possibile il calcolo dei *fattori di forma* $\langle \psi_\alpha(g_1) | \mathcal{O} | \psi_\beta(g_1) \rangle$, mentre in generale quello dei prodotti scalari $\langle \psi_0(g_0) | \psi_\alpha(g_1) \rangle$ risulta molto difficile a causa della struttura complessa degli autostati.

1.4 Progressi sperimentali nello studio del non equilibrio in sistemi quantistici

Lo studio della dinamica del non equilibrio in sistemi quantistici a molti corpi, come abbiamo già accennato, ha trovato recentemente una motivazione crescente in una serie di notevoli lavori sperimentali; in particolare, gli ultimi anni sono stati testimoni di grandi progressi nel campo dei gas di atomi freddi [1], [26], [27], [28], [29], [30]. Questi sistemi mesoscopici possono essere visti come sistemi quasi ideali. Per prima cosa questo è dovuto all'elevato grado di isolamento dall'ambiente esterno, che rende eccellente l'approssimazione di sistema chiuso per il tempo di durata tipica degli esperimenti. Inoltre, sono state sviluppate diverse tecniche per modulare i parametri dell'hamiltoniana che governa l'evoluzione temporale. Infine, è possibile raggiungere un controllo sperimentale sulla dimensionalità effettiva, in modo che siano realizzabili sistemi che costituiscano un'ottima approssimazione di modelli in una dimensione spaziale (questo è reso possibile dalla natura quantistica della materia, che permette di congelare le eccitazioni in due dimensioni spaziali, confinando la dinamica nella terza).

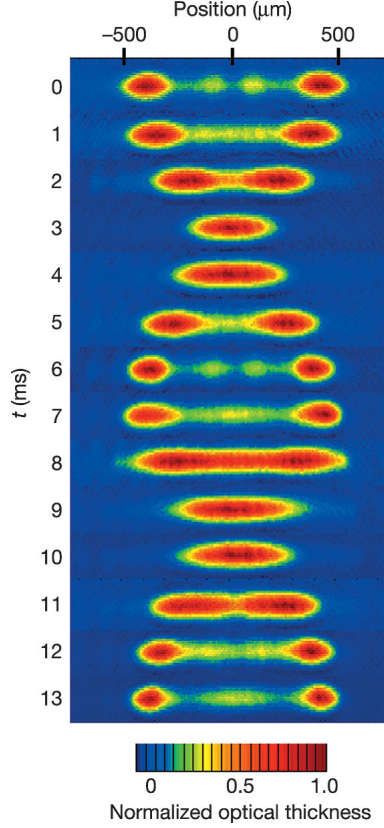


FIGURA 1.1: Immagine di assorbimento per il primo ciclo del moto quasi periodico dopo aver lasciato il sistema di bosoni libero di evolvere. Integrando le immagini di assorbimento è stato possibile ottenere la distribuzione degli impulsi. Immagine presa da [27].

Tra gli esperimenti che negli ultimi anni hanno rivoluzionato lo studio dei sistemi quantistici isolati, motivando gran parte dell'interesse nella relazione tra termalizzazione e integrabilità, uno dei più importanti è stato quello di Kinoshita et al. [27]. Quest'ultimo, rappresenta la prima realizzazione sperimentale di un sistema con un numero elevato di gradi di libertà che non raggiunge l'equilibrio termico. Nell'esperimento venivano usati atomi di ^{87}Rb , confinati in trappole armoniche unidimensionali, ciascuna delle quali conteneva dai 40 ai 250 atomi. I sistemi unidimensionali venivano preparati in una sovrapposizione di stati di impulso $\pm p_0$, usando un impulso elettromagnetico; l'impulso trasferito agli atomi era piccolo rispetto alla scala di energia per eccitare gli atomi a stati con energia trasversale maggiore, e il moto rimaneva unidimensionale. Il sistema era quindi lasciato evolvere; tramite immagini di assorbimento era quindi possibile ottenere la distribuzione degli impulsi (figura 1.1). L'esperimento mostrava che la distribuzione dei momenti rimaneva non gaussiana anche dopo migliaia di collisioni, e lo stato non raggiungeva l'equilibrio termico.

Un altro esperimento notevole è quello di Trotzky et al. [28] in cui viene osservata la

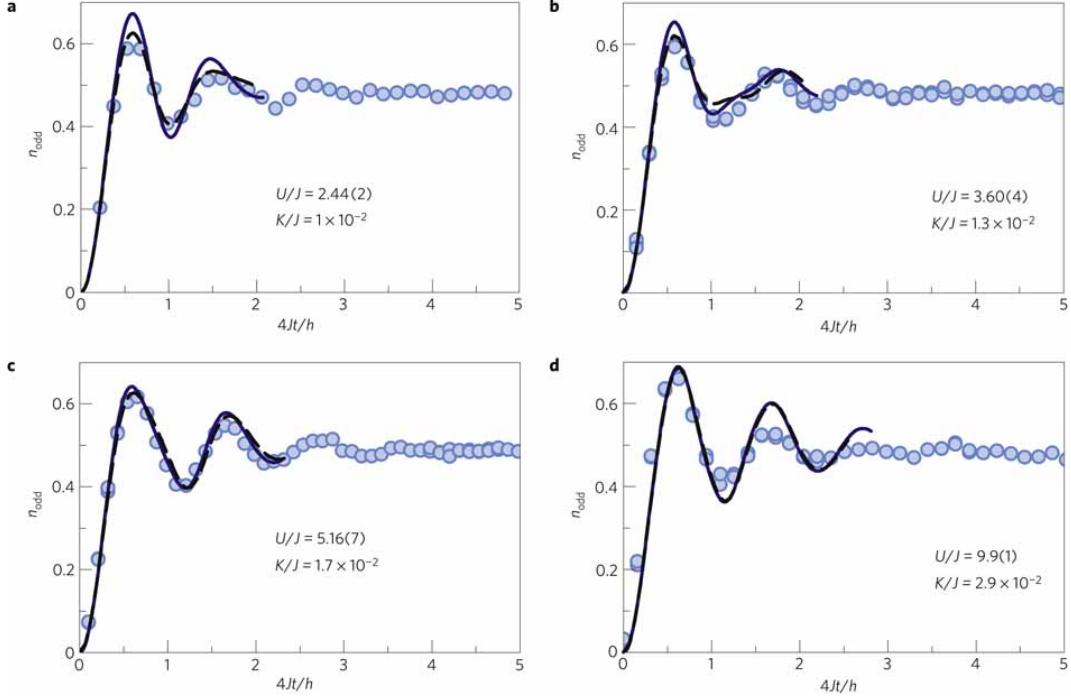


FIGURA 1.2: Evoluzione temporale della densità di occupazione n_{odd} per quattro diversi valori dei rapporti U/J , K/J delle costanti dell'hamiltoniana di evoluzione temporale. I punti rappresentano le misure, mentre la linea solida è ottenuta dal calcolo numerico utilizzando t -DMRG senza parametri liberi. La linea tratteggiata, che è in migliore accordo con i risultati sperimentali, è ottenuta ammettendo un piccolo accoppiamento a secondi vicini, J_S , diverso nei quattro casi: $J_S/J \simeq 0.12$ (a), 0.08 (b), 0.05 (c), 0.03 (d). Immagine presa da [28].

dinamica di non equilibrio della densità di atomi bosonici freddi in un reticolo ottico. Si considera una catena in una dimensione di siti con accoppiamento a primi vicini; i siti sono riempiti da atomi con interazione repulsiva. L'hamiltoniana è ben descritta da quella del modello di Bose-Hubbard in una dimensione:

$$H = \sum_j \left[-J \left(a_j^\dagger a_{j+1} + h.c. \right) + \frac{U}{2} n_j (n_j - 1) + \frac{K}{2} n_j j^2 \right], \quad (1.14)$$

dove a_j^\dagger , a_j sono operatori di creazione e distruzione, $n_j = a_j^\dagger a_j$ e U è un'opportuna costante. Il parametro K descrive una trappola armonica esterna. L'esperimento è effettuato usando atomi di ^{87}Rb e vengono realizzate catene unidimensionali che hanno un numero medio di atomi $\bar{N} = 31$. Il sistema è preparato in modo che inizialmente solo i siti pari siano occupati e $J = 0$; i parametri J , K e U sono improvvisamente variati e il sistema è lasciato libero di evolvere in modo coerente. In figura 1.2 sono riportate le misure della densità di occupazione dei siti dispari n_{odd} . Per piccoli tempi i risultati sperimentali sono stati confrontati con calcoli numerici effettuati tramite time-dependent density-matrix renormalization group (t -DMRG).

1.5 Riassunto e organizzazione della tesi

In questa tesi studieremo nello specifico due modelli integrabili, il modello di Lieb-Liniger e il modello anisotropo di Heisenberg (o catena XXZ). Il primo è un modello continuo unidimensionale di bosoni con interazione di contatto repulsiva, mentre il secondo consiste in un reticolo discreto di spin in una dimensione con accoppiamento a primi vicini.

Le parti originali costituiscono il capitolo 4 e il capitolo 5, e la breve sezione 2.1.6.

I capitoli 2 e 3 sono necessari per introdurre i modelli integrabili che studieremo, e le tecniche che si utilizzano per risolverli (cioè diagonalizzare l'hamiltoniana) e calcolare le quantità d'interesse. In particolare, nel capitolo 2 verranno definiti i modelli di Lieb-Liniger e la catena XXZ di Heisenberg, e verrà presentato il cosiddetto *coordinate Bethe ansatz* per risolverli. Nel capitolo 3 illustreremo la tecnica dell'algebraic Bethe ansatz, fondamentale per calcolare alcune quantità fisiche e di cui faremo un uso sistematico nei capitoli 4 e 5.

Per quanto riguarda la parte originale, nel capitolo 4 affronteremo il problema difficile di calcolare i prodotti scalari tra autostati di hamiltoniane corrispondenti a parametri di quench diversi, che sono i *building blocks* per l'espansione in fattori di forma discussa nella sezione 1.3. In particolare, proporremo un approccio basato sulla derivazione di formule ricorsive, e saremo in grado di calcolare esplicitamente i prodotti scalari per un particolare problema di quench. Nel capitolo 5 presenteremo uno studio numerico di un problema di quench con variazione al prim'ordine nella costante d'interazione per il modello di Lieb-Liniger. Lo studio sarà basato su una formula per il prodotto scalare che deriveremo all'inizio del capitolo. Infine, nella sezione 2.1.6 presenteremo un breve studio sulle cariche conservate nel modello di Lieb-Liniger.

Concludiamo la tesi con il capitolo 6, in cui riassumiamo e commentiamo i risultati ottenuti, discutendo alcune idee per studi futuri.

Capitolo 2

Coordinate Bethe Ansatz

In questo capitolo introduciamo due importanti sistemi integrabili in una dimensione: il modello di Lieb-Liniger e la catena di Heisenberg. I modelli verranno risolti usando il cosiddetto coordinate Bethe ansatz, introdotto da Bethe nel 1931 [31]. Questa tecnica, inizialmente utilizzata per trovare gli autostati dell'hamiltoniana della catena di Heisenberg, si è dimostrata fondamentale per la soluzione di un'intera famiglia di modelli integrabili in una dimensione che non possono essere in generale mappati in un sistema di particelle libere, come invece succede per il modello di Ising quantistico unidimensionale.

2.1 Il modello di Lieb-Liniger

Consideriamo un gas di N bosoni di uguale massa m in una dimensione spaziale con interazioni di contatto repulsive. Scegliamo le unità di misura in modo che $\hbar = 1$, $2m = 1$; possiamo allora scrivere l'hamiltoniana nel modo seguente:

$$H_N^{LL} = - \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + 2c \sum_{1 \leq j < l \leq N} \delta(x_j - x_l) , \quad (2.1)$$

dove $c > 0$. Le particelle sono vincolate a muoversi su un segmento di lunghezza L , e imponiamo condizioni periodiche (figura 2.1); le funzioni d'onda del sistema devono quindi essere invarianti per una trasformazione delle coordinate della forma seguente:

$$(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N) \longrightarrow (x_1, \dots, x_j + L, \dots, x_N) . \quad (2.2)$$

Il modello definito dalle equazioni (2.1),(2.2) fu introdotto da Lieb e Liniger nel 1967 e da loro risolto [32], [33]. Nonostante la sua apparente semplicità, si tratta di un

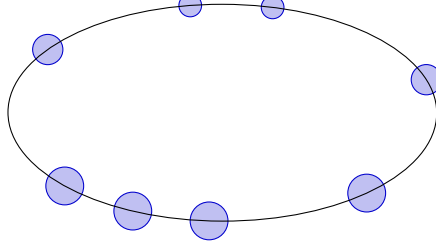


FIGURA 2.1: Rappresentazione intuitiva del modello di Lieb-Liniger, per $N = 8$ bosoni

modello molto realistico per particelle confinate in una dimensione spaziale con un potenziale di interazione a corto raggio.

Il problema può essere scritto anche con un formalismo di seconda quantizzazione. Il gas di Bose è descritto da operatori bosonici di distruzione e creazione dipendenti da x , rispettivamente $\psi(x)$, $\psi^\dagger(x)$ che soddisfano:

$$[\psi(x), \psi^\dagger(y)] = \delta(x - y) , \quad (2.3)$$

$$[\psi(x), \psi(y)] = [\psi^\dagger(x), \psi^\dagger(y)] = 0 . \quad (2.4)$$

L'hamiltoniana è scritta quindi come

$$H^{LL} = \int dx \left[\partial_x \psi^\dagger(x) \partial_x \psi(x) + c \psi^\dagger(x) \psi^\dagger(x) \psi(x) \psi(x) \right] . \quad (2.5)$$

La corrispondente equazione del moto

$$i\partial_t \psi = [H^{LL}, \psi] = \partial_x^2 \psi + 2c \psi^\dagger \psi \psi \quad (2.6)$$

è chiamata equazione di Schrödinger non lineare. Gli operatori corrispondenti al numero di particelle e all'impulso sono definiti nel modo seguente:

$$\hat{N} = \int dx \psi^\dagger(x) \psi(x), \quad (2.7)$$

$$\hat{P} = -\frac{i}{2} \int dx \left\{ \psi^\dagger(x) \partial_x \psi(x) - [\partial_x \psi^\dagger(x)] \psi(x) \right\} . \quad (2.8)$$

Come ci aspettiamo, questi operatori commutano con l'hamiltoniana (si vede facilmente che $[H^{LL}, \hat{N}] = [H^{LL}, \hat{P}] = 0$) e lo spazio di Hilbert si decompone in sottospazi a numero di particelle e impulso fissati. In un sottospazio a numero di particelle N fissato

gli stati del sistema si possono scrivere

$$|\psi_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \int dx_1 \dots dx_N \Psi_N(x_1, \dots, x_N) \psi^\dagger(x_1) \dots \psi^\dagger(x_N) |0\rangle_{LL} , \quad (2.9)$$

dove $\Psi_N(\mathbf{x})$ è la funzione d'onda a N particelle e $|0\rangle_{LL}$ è il vuoto del modello. Utilizzando le regole di commutazione (2.3), si vede che l'operatore impulso si scrive, nel formalismo di prima quantizzazione, come ci aspettiamo:

$$\hat{P}_N = \sum_{j=1}^N \left(-i \frac{\partial}{\partial x_j} \right) . \quad (2.10)$$

Possiamo quindi scrivere il problema in due modi equivalenti rispettivamente con il formalismo di prima e seconda quantizzazione:

$$H_N^{LL} \Psi_N(\mathbf{x}) = E_N \Psi_N(\mathbf{x}) \iff H^{LL} |\psi_N\rangle = E_N |\psi_N\rangle . \quad (2.11)$$

2.1.1 Il problema a due particelle

Per fissare le idee e capire come affrontare il problema per N generico conviene partire dal caso più semplice di due particelle; dobbiamo risolvere l'equazione agli autovalori:

$$H_2^{LL} \Psi_2(x_1, x_2) = \left[-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + 2c\delta(x_1 - x_2) \right] \Psi_2(x_1, x_2) = E_2 \Psi_2(x_1, x_2) , \quad (2.12)$$

con le condizioni al bordo

$$\begin{aligned} \Psi_2(x_1 + L, x_2) &= \Psi_2(x_1, x_2) , \\ \Psi_2(x_1, x_2 + L) &= \Psi_2(x_1, x_2) . \end{aligned} \quad (2.13)$$

Osserviamo per prima cosa che poiché stiamo trattando un sistema di bosoni lo spazio di Hilbert è ristretto alle funzioni d'onda completamente simmetriche e dobbiamo quindi richiedere:

$$\Psi_2(x_1, x_2) = \Psi_2(x_2, x_1) . \quad (2.14)$$

Concentriamoci quindi sulla regione $R = \{(x_1, x_2) : x_1 \leq x_2\}$; la funzione d'onda per (x_1, x_2) generici si otterrà simmetrizzando opportunamente la soluzione $\Psi_2(x_1, x_2)$ in R . Se le particelle fossero non interagenti, un'autofunzione dell'hamiltoniana (posponendo la discussione sulle condizioni periodiche), avrebbe un andamento del tipo:

$$\Psi_2(x_1, x_2) \sim e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} , \quad (2.15)$$

cioè le particelle si muovono liberamente con impulsi k_1, k_2 . Consideriamo invece la presenza dell'interazione: possiamo immaginare che in questo caso le particelle collidano e siamo portati a scrivere la soluzione come una sovrapposizione di funzioni d'onda corrispondenti alle situazioni fisiche in cui le particelle si riflettono una contro l'altra oppure vengono trasmesse (questo è un effetto puramente quantistico). Per procedere oltre quindi facciamo un'ipotesi per la forma dell'autofunzione (ansatz): supponiamo che abbia la forma seguente nella regione R :

$$\Psi_2(x_1, x_2) = A(k_1, k_2)e^{i(k_1x_1+k_2x_2)} + A(k_2, k_1)e^{i(k_2x_1+k_1x_2)}. \quad (2.16)$$

Per fissare i parametri $A(k_1, k_2) = A_{12}$ e $A(k_2, k_1) = A_{21}$ dobbiamo imporre che la funzione d'onda soddisfi l'equazione agli autovalori $H_2\Psi_2 = E_2\Psi_2$; nella regione R questo corrisponde a richiedere che valga:

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\Psi_2(x_1, x_2) = E_2\Psi_2(x_1, x_2), \quad (2.17)$$

$$(\partial_{x_2} - \partial_{x_1} - c)\Psi_2(x_1, x_2)\Big|_{x_2-x_1=0^+} = 0. \quad (2.18)$$

La (2.18) si ottiene dalla (2.12) usando la procedura che è familiare da corsi di base di meccanica quantistica. Entrando nel dettaglio, si passa alle coordinate $x_+ = (x_1 + x_2)/2$, $x_- = x_1 - x_2$; integrando (2.12) sulla variabile x_- nell'intervallo $I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)$ (ricordando che la funzione d'onda deve essere continua in $x_1 = x_2$) e prendendo successivamente il limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$ otteniamo:

$$-\frac{1}{2}(\partial_{x_1} - \partial_{x_2})\Psi_2\Big|_{x_1-x_2=0^+}^{x_1-x_2=0^+} + c\Psi_2\Big|_{x_1=x_2} = 0. \quad (2.19)$$

Utilizzando la simmetria della funzione d'onda $\Psi_2(x_1, x_2) = \Psi_2(x_2, x_1)$ si arriva così alla (2.18). Utilizzando l'ansatz (2.16) vediamo che le equazioni (2.17), (2.18) sono soddisfatte se per i coefficienti A_{12}, A_{21} vale la seguente:

$$\frac{A_{12}}{A_{21}} = \frac{i(k_1 - k_2) - c}{i(k_1 - k_2) + c}. \quad (2.20)$$

Poiché la funzione d'onda è definita a meno di una costante vediamo che (2.16), (2.20) e (2.14) definiscono l'autofunzione a due particelle. Dobbiamo però ora rivolgerci alle condizioni di periodicità (2.13), che non saranno in generale soddisfatte dalla soluzione che abbiamo trovato per k_1, k_2 generici. Imporre le condizioni di periodicità significa allora selezionare i k_1, k_2 permessi. Ripartiamo dall'equazione (2.20); come vedremo in seguito le condizioni di periodicità impongono $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ e possiamo allora riscrivere:

$$\frac{A_{12}}{A_{21}} = -e^{-i\vartheta(k_1-k_2)}, \quad (2.21)$$

con

$$\vartheta(k) \equiv 2 \arctan \frac{k}{c} . \quad (2.22)$$

Possiamo allora riscrivere la funzione d'onda per $x_1 < x_2$:

$$\Psi_2(x_1, x_2 | k_1, k_2) = e^{ik_1 x_1 + ik_2 x_2 - \frac{i}{2} \vartheta(k_1 - k_2)} - e^{ik_2 x_1 + ik_1 x_2 + \frac{i}{2} \vartheta(k_1 - k_2)} . \quad (2.23)$$

Infine, usando la (2.14) abbiamo la soluzione per x_1, x_2 generici:

$$\begin{aligned} \Psi_2(x_1, x_2 | k_1, k_2) &= \text{sgn}(x_2 - x_1) \times \\ &\times \left[e^{ik_1 x_1 + ik_2 x_2 - \frac{i}{2} \text{sgn}(x_2 - x_1) \vartheta(k_1 - k_2)} - e^{ik_2 x_1 + ik_1 x_2 + \frac{i}{2} \text{sgn}(x_2 - x_1) \vartheta(k_1 - k_2)} \right] . \end{aligned} \quad (2.24)$$

Imponiamo ora le condizioni di periodicit ; usando l'indipendenza lineare delle funzioni esponenziali, le (2.13) richiedono che le seguenti equazioni siano verificate:

$$e^{ik_1 L} = -e^{-i\vartheta(k_1, k_2)} = \frac{k_1 - k_2 + ic}{k_1 - k_2 - ic} , \quad (2.25)$$

$$e^{ik_2 L} = -e^{i\vartheta(k_1, k_2)} = \frac{k_2 - k_1 + ic}{k_2 - k_1 - ic} .$$

Queste vengono chiamate equazioni di Bethe, e le soluzioni sono in corrispondenza con gli autostati dell'hamiltoniana H_2^{LL} con condizioni al bordo periodiche. Rimandiamo lo studio di queste equazioni alla prossima sezione in cui studieremo il caso generico di N particelle.

2.1.2 Coordinate Bethe Ansatz

Consideriamo ora un sistema di N particelle, con hamiltoniana data dalla (2.1) e generalizziamo la soluzione della sezione precedente. In questo caso per la simmetria della funzione d'onda possiamo limitarci alla regione $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_N$; in questa regione l'equazione agli autovalori $H_N \Psi_N(\mathbf{x}) = E_N \Psi_N(\mathbf{x})$   equivalente alle equazioni:

$$\left(- \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \right) \Psi_N(x_1, \dots, x_N) = E_N \Psi_N(x_1, \dots, x_N) , \quad (2.26)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_{j+1}} - \frac{\partial}{\partial x_j} - c \right) \Big|_{x_{j+1}=x_j^+} \Psi_N(x_1, \dots, x_N) = 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad (2.27)$$

con le condizioni periodiche

$$\Psi_N(x_1, \dots, x_j + L, \dots, x_N) = \Psi_N(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N) \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.28)$$

Possiamo allora generalizzare in modo naturale l'ansatz della sezione precedente e scrivere la funzione d'onda per $x_1 \leq \dots \leq x_N$ come

$$\Psi_N(x_1, \dots, x_N | k_1, \dots, k_N) = \sum_{\mathcal{P}} A_{\mathcal{P}}(k_1, \dots, k_N) e^{i(\sum_{j=1}^N k_{\mathcal{P}_j} x_j)} , \quad (2.29)$$

dove la sommatoria è su tutte le permutazioni \mathcal{P} di N elementi. Imponiamo come nel caso a due particelle che la (2.29) soddisfi le equazioni (2.26), (2.27); per farlo, consideriamo inizialmente la condizione (2.27) con $j=1$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_1} - c \right) \Psi_N(x_1, \dots, x_N) = 0 . \quad (2.30)$$

Sia \mathcal{P} una permutazione fissata con $k_{\mathcal{P}_1} = p$, $k_{\mathcal{P}_2} = q$ e sia \mathcal{Q} la permutazione definita da

$$\begin{cases} \mathcal{Q}_1 = \mathcal{P}_2 \\ \mathcal{Q}_2 = \mathcal{P}_1 \\ \mathcal{Q}_j = \mathcal{P}_j, \quad j = 3, \dots, N. \end{cases} \quad (2.31)$$

Utilizzando ancora l'indipendenza lineare degli esponenziali vediamo che la (2.30) implica

$$\frac{A_{\mathcal{P}}}{A_{\mathcal{Q}}} = -\frac{c - i(p - q)}{c + i(p - q)} = -e^{-i\vartheta(p-q)} , \quad (2.32)$$

dove $\vartheta(k)$ è definita in (2.22). Quindi vedendo la funzione d'onda Ψ_N come somma di $N!/2$ termini accoppiati tra loro come quelli corrispondenti ai coefficienti $A_{\mathcal{P}}$ e $A_{\mathcal{Q}}$ considerati sopra concludiamo che è possibile soddisfare la condizione (2.30) a patto di scegliere opportunamente i coefficienti $A_{\mathcal{P}}$. È facile poi rendersi conto che è possibile soddisfare contemporaneamente le condizioni (2.27) e questo vincola i coefficienti $A_{\mathcal{P}}$ ad avere la forma seguente, a meno di un fattore globale non rilevante:

$$A_{\mathcal{P}} = (-1)^{\mathcal{P}} \prod_{j < l} (k_{\mathcal{P}_j} - k_{\mathcal{P}_l} + ic) = (-1)^{\mathcal{P}} \exp \left[\frac{i}{2} \sum_{1 \leq j < r \leq N} \vartheta(k_{\mathcal{P}_r} - k_{\mathcal{P}_j}) \right] . \quad (2.33)$$

Possiamo quindi finalmente scrivere la funzione d'onda per x_1, \dots, x_N generici:

$$\begin{aligned} \Psi_N(x_1, \dots, x_N | k_1, \dots, k_N) &= \\ &= \prod_{j > k} \text{sgn}(x_j - x_k) \sum_{\mathcal{P}} \text{sgn}(\mathcal{P}) e^{i \left[\sum_{j=1}^N k_{\mathcal{P}_j} x_j + \frac{1}{2} \sum_{i > j}^N \text{sgn}(x_i - x_j) \vartheta(k_{\mathcal{P}_i} - k_{\mathcal{P}_j}) \right]} . \end{aligned} \quad (2.34)$$

Possiamo a questo punto imporre le condizioni periodiche (2.30); utilizzando la (2.34) e di nuovo l'indipendenza lineare degli esponenziali otteniamo le equazioni di Bethe

per il caso generale di N particelle:

$$e^{ik_j L} = \prod_{l \neq j} \frac{k_j - k_l + ic}{k_j - k_l - ic}, \quad (2.35)$$

che possiamo riscrivere prendendo il logaritmo ad entrambi i membri:

$$k_j + \frac{1}{L} \sum_l \vartheta(k_j - k_l) = \frac{2\pi}{L} I_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad (2.36)$$

dove

$$I_j \in \begin{cases} \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, & N \text{ pari,} \\ \mathbb{Z}, & N \text{ dispari.} \end{cases} \quad (2.37)$$

I numeri $\{I_j\}$ sono i numeri quantici del sistema, mentre le soluzioni $\{k_j\}$ del sistema (2.36) sono chiamate rapidità. Vedremo in seguito che per ogni scelta di numeri quantici *distinti* $\{I_j\}$ esiste un unico insieme di soluzioni $\{k_j\}$ del sistema (2.36). Queste a loro volta sono in corrispondenza con gli autostati dell'hamiltoniana (2.1). Possiamo quindi concludere:

Proposizione 2.1. *Gli autostati dell'hamiltoniana (2.1) sono in corrispondenza biunivoca naturale con gli insiemi ordinati di numeri quantici distinti $\{I_j\}_{j=1}^N$ che soddisfano (2.37).*

Un autostato dell'hamiltoniana può quindi essere indicato equivalentemente con $|\{I_j\}\rangle$ o $|\{\lambda_j\}\rangle$, a seconda che si voglia focalizzare l'attenzione sui suoi numeri quantici o sulle sue rapidità; tali autostati verranno talvolta chiamati di Bethe.

2.1.3 Studio delle equazioni di Bethe

Focalizziamo ora l'attenzione su alcune proprietà fondamentali delle equazioni di Bethe; a questo scopo conviene considerarne la forma logaritmica. Osserviamo per prima cosa che dobbiamo escludere le eventuali soluzioni $\{k_j\}$ del sistema (2.36) ottenute ponendo due numeri quantici uguali tra loro. Supponiamo per esempio $I_1 = I_2$; allora è facile vedere che dovrebbe essere $k_1 = k_2$. Se consideriamo adesso però la funzione d'onda corrispondente $\Psi_N(\mathbf{x}|\mathbf{k})$ vediamo che questa è identicamente nulla per $k_1 = k_2$ e non otteniamo quindi uno stato accettabile. Enunciamo ora le proprietà fondamentali delle soluzioni delle equazioni di Bethe.

- Le soluzioni k_j sono numeri reali.
- Le soluzioni esistono e sono uniche per qualsiasi scelta di numeri quantici $\{I_j\}$ diversi fra loro.

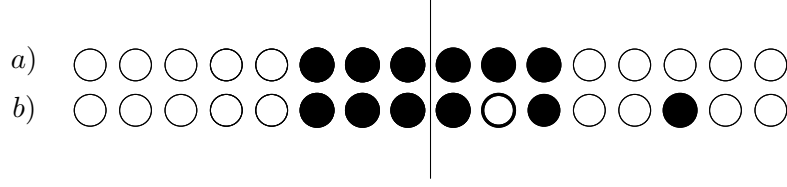


FIGURA 2.2: Struttura alla mare di Fermi delle rapidità. La figura a) rappresenta uno schema della distribuzione dei numeri quantici dello stato fondamentale per un sistema di $N=6$ bosoni; i numeri quantici scelti in questo caso sono tutti i semi-interi da $-5/2$ a $5/2$. La figura b) rappresenta la distribuzione per i numeri quantici per uno stato eccitato; vediamo che in questo caso si ha la formazione di una buca, e una particella viene eccitata in modo che le corrisponda il numero quantico $11/2$.

- Cambiare un numero quantico cambierà in generale tutte le rapidità.
- La monotonia tra i numeri quantici è rispettata tra le rapidità, ma la distribuzione delle rapidità sulla retta reale non sarà in generale omogenea.

Non riportiamo qui la dimostrazione di queste proprietà per cui rimandiamo a [34]. Osserviamo che le equazioni di Bethe vengono semplificate notevolmente nel limite $c \rightarrow \infty$. In questo caso ritroviamo il cosiddetto gas di *Tonks-Girardeau* e le rapidità sono date semplicemente da $k_j = 2\pi I_j/L$. Se osserviamo le funzioni d'onda in questo limite, si vede che nelle regione $x_1 \leq \dots \leq x_N$ queste sono date da un determinante di Slater e coincidono con una funzione d'onda fermionica.

2.1.4 Proprietà degli autostati

Sia $|\{\lambda_k\}\rangle$ un autostato di Bethe. Allora, si calcolano facilmente l'energia e l'impulso (che è ben definito) corrispondenti:

$$E_N(\{\lambda_k\}) = \sum_{j=1}^N \lambda_j^2, \quad (2.38)$$

$$P_N(\{\lambda_k\}) = \sum_{j=1}^N \lambda_j. \quad (2.39)$$

Si noti che sebbene l'impulso totale sia ben definito così non è per gli impulsi delle singole particelle, che non vanno quindi confusi con le rapidità λ_j . Passiamo adesso ad analizzare lo stato fondamentale. In generale, è possibile dimostrare (ed è facile convincersi) che la minima energia possibile si ottiene scegliendo i numeri quantici in

modo simmetrico rispetto allo zero:

$$I_j = -\frac{N+1}{2} + j, \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.40)$$

E' chiaro che questo definisce uno stato ad impulso nullo (se $\sum I_j = 0$ anche $\sum k_j = 0$). Lo stato fondamentale ha quindi una struttura di mare di Fermi occupato; gli stati eccitati sono descrivibili in termini di buche (figura 2.2). Infine, enunciamo la proprietà di completezza:

Proposizione 2.2. *Gli autostati trovati tramite Bethe ansatz rappresentano un insieme completo (ortogonale) di funzioni d'onda.*

Non riportiamo la dimostrazione che è piuttosto tecnica, per cui rimandiamo all'articolo di Dorlas [35].

2.1.5 Limite termodinamico: lo stato fondamentale

Una caratteristica fondamentale del modello di Lieb-Liniger è la possibilità di uno studio esatto all'equilibrio nel limite termodinamico, sia a temperatura nulla che a temperatura finita. Qui discutiamo solo la caratterizzazione dello stato fondamentale nel limite termodinamico a temperatura nulla.

Il limite termodinamico si ottiene considerando nel modello di Lieb-Liniger $N \rightarrow \infty$, $L \rightarrow \infty$ mantenendo costante la densità data dal rapporto $d = N/L$. Questo limite diventa rilevante quando vogliamo confrontarci con i risultati di esperimenti che trattino un numero molto grande di particelle. Dato un insieme di N numeri quantici $\{I_j\}$ il punto di partenza della trattazione termodinamica è la seguente stima, che si ottiene facilmente, sulla distanza tra due delle rapidità corrispondenti:

$$\frac{2\pi}{L}(I_j - I_l) \geq |k_j - k_l| \geq \frac{2\pi}{L} \frac{(I_j - I_l)}{1 + \frac{2d}{c}}. \quad (2.41)$$

Nel limite $L \rightarrow \infty$ le rapidità diventano quindi dense sulla retta reale e possono essere descritte da una funzione di distribuzione $\rho(\lambda)$ come vedremo tra poco. Si definisce la funzione $\lambda(x)$ per $x \in \mathbb{R}$ tramite la seguente equazione:

$$L\lambda(x) + \sum_{k=1}^N \vartheta(\lambda(x) - \lambda_k) = 2\pi Lx. \quad (2.42)$$

Abbiamo quindi che $\lambda(I_j/L) = \lambda_j$ è una soluzione delle equazioni di Bethe; chiamiamo allora λ_j rapidità della particella corrispondente a I_j . Per $\tilde{I} \in \mathbb{Z}$ ma tale che $\tilde{I} \notin \{I_j\}$ chiamiamo invece $\lambda(\tilde{I}/L)$ la rapidità della buca corrispondente a \tilde{I} . Ogni intero

definisce quindi un posto libero che può essere occupato da una buca o da una particella. Possiamo definire la densità di numeri quantici associati alle particelle, alle buche, e ai posti liberi totali:

$$\rho(x) = \frac{1}{L} \sum_j \delta(x - \frac{I_j}{L}) , \quad (2.43)$$

$$\rho_h(x) = \frac{1}{L} \sum_{n \in \{\tilde{I}\}} \delta(x - \frac{n}{L}) , \quad (2.44)$$

$$\rho_t(x) = \rho(x) + \rho_h(x) = \frac{1}{L} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - \frac{n}{L}) . \quad (2.45)$$

Abbiamo quindi due spazi in corrispondenza biunivoca: lo spazio dei numeri quantici x , e quello delle rapidità λ ; le densità di numeri quantici (2.43)-(2.45) inducono delle densità di rapidità tramite moltiplicazione per lo jacobiano $dx/d\lambda$. Nel limite termodinamico, i razionali della forma n/L , $n \in \mathbb{Z}$ diventano densi e possiamo sostituire alle distribuzioni (2.43)-(2.45) delle funzioni continue; in particolare vediamo che:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \rho_t(x) = 1 , \quad (2.46)$$

dove il limite è inteso in senso distribuzionale. Segue che nel limite termodinamico, per quanto detto, possiamo scrivere la densità di rapidità totale come:

$$\rho_t(\lambda) = \frac{dx(\lambda)}{d\lambda} . \quad (2.47)$$

Prendendo ora la derivata in λ della (2.42) otteniamo:

$$1 + \frac{1}{L} \sum_{k=1}^N K(\lambda, \lambda_k) = 2\pi \rho_t(\lambda) , \quad (2.48)$$

dove $K(\lambda, \mu) = 2c/(c^2 + (\lambda - \mu)^2)$. Concentriamoci ora sullo stato fondamentale; gli stati occupati costituiranno un mare di Fermi e riempiranno l'intervallo simmetrico nello spazio delle rapidità $[-k_F, k_F]$, in cui sarà perciò $\rho(\lambda) = \rho_t(\lambda)$ (tutti i posti liberi sono occupati da particelle e non ci sono buche). Inoltre, nel limite termodinamico la sommatoria in (2.48) verrà sostituita da un integrale pesato con la stessa densità delle particelle $\rho(\lambda)$. Arriviamo quindi finalmente all'equazione che caratterizza lo stato fondamentale nel limite termodinamico:

$$\rho(\lambda) - \frac{1}{2\pi} \int_{-k_F}^{k_F} d\mu K(\lambda, \mu) \rho(\mu) d\mu = \frac{1}{2\pi} . \quad (2.49)$$

Questa è un'equazione integrale nota come equazione di Lieb; gli estremi d'integrazione sono determinati dalla seguente equazione, che deve essere risolta in modo consistente

con la precedente:

$$d = \int_{-k_F}^{k_F} d\lambda \rho(\lambda) . \quad (2.50)$$

Queste equazioni sono in generale complicate. É tuttavia possibile dimostrare che le (2.49) e (2.50) ammettono una soluzione unica [34]. In conclusione, siamo riusciti a caratterizzare lo stato fondamentale nel limite termodinamico in termini di una distribuzione $\rho(\lambda)$. Osserviamo che la conoscenza di $\rho(\lambda)$, ottenuta tramite la soluzione dell'equazione di Lieb, ci permette in linea di principio il calcolo delle quantità fisiche di interesse nel limite termodinamico.

2.1.6 Studio delle cariche conservate

In questa sezione presentiamo una dimostrazione originale della dipendenza continua degli elementi di matrice di operatori locali dalle cariche conservate del sistema.

Il modello di Lieb-Liniger possiede, in quanto sistema integrabile, un numero infinito di cariche conservate $\{\hat{Q}_n\}$, cioè di operatori indipendenti commutanti tra loro e che commutano con l'hamiltoniana del sistema. Nel sottospazio in cui il numero di particelle è fissato a N , nella base degli autostati di Bethe $|\{\lambda_j\}_{j=1}^N\rangle$ le cariche conservate sono operatori diagonali definiti dalla seguente:

$$\hat{Q}_n |\{\lambda_j\}\rangle = \left(\sum_{j=1}^N \lambda_j^n \right) |\{\lambda_j\}\rangle . \quad (2.51)$$

É stato dimostrato [36], [37], che per $n \geq 4$ l'operatore \hat{Q}_n non può essere scritto in forma di un operatore normalmente ordinato nel formalismo di seconda quantizzazione, mentre le prime tre cariche conservate si esprimono nel modo seguente:

$$\hat{Q}_1 = \hat{P} = -\frac{i}{2} \int_0^L \left(\psi^\dagger \psi_x - \psi_x^\dagger \psi \right) dx , \quad (2.52)$$

$$\hat{Q}_2 = H = \int_0^L \left(\psi_x^\dagger \psi_x + c \psi^\dagger \psi^\dagger \psi \psi \right) dx , \quad (2.53)$$

$$\hat{Q}_3 = i \int_0^L \left(\psi^\dagger \psi_{xxx} - 3c \psi^\dagger \psi^\dagger \psi \psi_x \right) dx . \quad (2.54)$$

Un insieme di soluzioni di Bethe $\{\lambda_j\}$ identifica un autostato $|\{\lambda_j\}\rangle$ che è autovettore per gli operatori \hat{Q}_n con autovalori Q_n dati da (2.51). É intuitivo pensare che l'insieme degli autovalori $\{Q_n\}$ identifichi in modo univoco un insieme di rapidità $\{\lambda_j\}$ e quindi uno stato di Bethe. In effetti è vero, ed è quello che dimostriamo ora. Consideriamo il

sistema seguente:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^N \lambda_j = Q_1 \\ \sum_{j=1}^N \lambda_j^2 = Q_2 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^N \lambda_j^N = Q_N \end{cases} \quad (2.55)$$

dove le incognite sono le λ_i , supponendo note le cariche Q_i . Indichiamo ora con π_k la somma di tutti i prodotti di k rapidità distinte:

$$\begin{cases} \pi_1 = \sum_{j=1} \lambda_j \\ \pi_2 = \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j \\ \pi_3 = \sum_{i<j<k} \lambda_i \lambda_j \lambda_k \\ \vdots \\ \pi_N = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_N . \end{cases} \quad (2.56)$$

È facile vedere che è possibile esprimere le quantità π_k in termini di Q_k ; per esempio, per $k = 1, 2, 3$ si ha:

$$\pi_1 = Q_1 , \quad (2.57)$$

$$\pi_2 = \frac{1}{2} (Q_1^2 - Q_2) , \quad (2.58)$$

$$\pi_3 = \frac{1}{6} (Q_1^3 - 3Q_2Q_1 + 2Q_3) . \quad (2.59)$$

Facciamo ora l'osservazione cruciale; consideriamo l'equazione di grado N :

$$x^N + \pi_1 x^{N-1} + \dots + \pi_{N-1} x + \pi_N = 0 . \quad (2.60)$$

Per le proprietà fondamentali delle equazioni polinomiali di grado N , la (2.60) ha esattamente N soluzioni e queste sono proprio le rapidità $\{\lambda_j\}$; questo ci dice che fissare le cariche Q_1, \dots, Q_N significa identificare in modo univoco, poiché i coefficienti π_k sono funzioni dei Q_k , le rapidità ottenute come le uniche soluzioni della (2.60). Possiamo dire di più; infatti dal teorema di Rouché di analisi complessa sappiamo che le N soluzioni di un'equazione di grado N dipendono in modo continuo dai coefficienti. Dalla forma delle funzioni d'onda corrispondenti agli autostati di Bethe, è poi evidente che il valore di aspettazione nello stato $|\{\lambda_j\}\rangle$ di osservabili locali dipende in modo continuo dalle rapidità $\{\lambda_j\}$ che identificano lo stato. In conclusione, abbiamo dimostrato la seguente:

Proposizione 2.3. *Nel modello di Lieb-Liniger il valore di aspettazione su autostati di Bethe $|\{\lambda_j\}\rangle$ di osservabili locali è una funzione continua delle cariche conservate.*

Questa proposizione è interessante perché rappresenta una verifica per il modello di Lieb-Liniger di una congettura generale recentemente proposta come meccanismo alla base della validità del generalized Gibbs ensemble [16].

2.2 La catena di Heisenberg

L'altro modello che abbiamo considerato in questa tesi è la catena di spin di Heisenberg, in particolare nel caso anisotropo in cui prende anche il nome di “modello XXZ”. Il modello omogeneo, o XXX, fu risolto da Bethe nel 1931 con l'idea che ha dato origine alla tecnica che oggi è chiamata “Bethe ansatz” [31]. La procedura di diagonalizzazione dell'hamiltoniana è simile a quella della sezione precedente, e la nostra trattazione sarà più breve. Tuttavia, lo studio delle soluzioni delle equazioni di Bethe per questo modello è più complesso e verrà solo accennato.

2.2.1 Il modello

Consideriamo N spin disposti lungo una catena in una dimensione spaziale con interazione tra primi vicini in presenza di un campo magnetico esterno (figura 2.3). L'hamiltoniana del sistema è

$$H_N^{XXZ} = 4J \sum_{j=1}^N \left\{ s_x^j s_x^{j+1} + s_y^j s_y^{j+1} + \Delta \left(s_z^j s_z^{j+1} - \frac{1}{4} \right) \right\} - 2h \sum_{j=1}^N s_z^j, \quad (2.61)$$

dove s_x^j , s_y^j , s_z^j sono gli operatori di spin associati al sito j -esimo. Per comodità, riscriviamo gli operatori di spin in termini delle matrici di Pauli:

$$H_N^{XXZ} = J \sum_{j=1}^N \left\{ \sigma_x^j \sigma_x^{j+1} + \sigma_y^j \sigma_y^{j+1} + \Delta (\sigma_z^j \sigma_z^{j+1} - 1) \right\} - h \sum_{j=1}^N \sigma_z^j, \quad (2.62)$$

dove ricordiamo

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.63)$$

Anche in questo caso imponiamo condizioni periodiche al bordo

$$\sigma_\alpha^{N+1} = \sigma_\alpha^1, \quad \alpha = x, y, z. \quad (2.64)$$

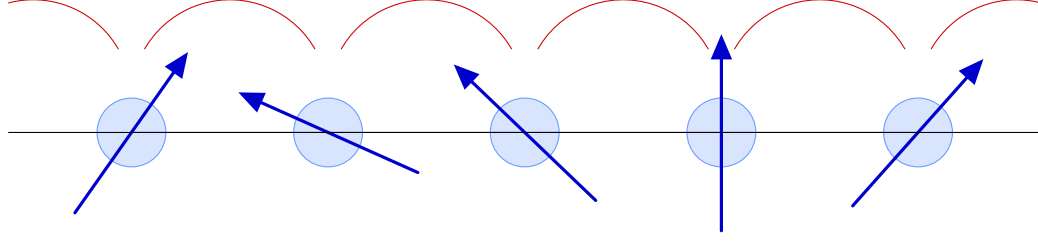


FIGURA 2.3: Rappresentazione intuitiva del modello di Heisenberg.

Lo spazio di Hilbert su cui agisce l'hamiltoniana si scrive quindi come $\mathcal{H}_N = h_1 \otimes \dots \otimes h_N$, essendo $h_i \simeq \mathbb{C}_2$ lo spazio associato al singolo sito su cui agiscono le matrici di Pauli $\sigma_x^i, \sigma_y^i, \sigma_z^i$.

Procediamo ora ad illustrare la tecnica di Bethe ansatz per trovare gli autostati dell'hamiltoniana. Per prima cosa osserviamo che l'hamiltoniana commuta con l'operatore di spin totale lungo z , $S_z = 1/2 \sum_{j=1}^N \sigma_z^j$, quindi possiamo trovare autostati di H_N^{XXZ} con S_z definito. Nel seguito indicheremo con $|\uparrow\rangle_i, |\downarrow\rangle_i$ gli stati di spin “up” e “down” che costituiscono una base dello spazio di Hilbert h_i associato al sito i -esimo.

Il punto di partenza della trattazione è definire lo “stato di vuoto” come lo stato con la massima magnetizzazione:

$$|0\rangle_{XXZ} \equiv |\uparrow\rangle_1 \otimes \dots \otimes |\uparrow\rangle_N . \quad (2.65)$$

Poniamo poi nel seguito $|i_1, \dots, i_k\rangle \equiv \sigma_-^{i_1} \dots \sigma_-^{i_k} |0\rangle_{XXZ}$, dove $\sigma_-^j = (\sigma_x^j - i\sigma_y^j)/2$. Scegliendo allora un particolare sottospazio di Hilbert con numero di spin down fissato a r , possiamo scrivere un generico stato in questo sottospazio come:

$$|\psi\rangle = \sum_{1 \leq i_1 \dots < i_r \leq N} f(i_1, \dots, i_r) |i_1, \dots, i_r\rangle . \quad (2.66)$$

Il Bethe ansatz nel modello XXZ si esprime come un'ipotesi sulla forma della funzione $f(i_1, \dots, i_r)$ in modo analogo a quanto fatto per la funzione d'onda a numero di particelle fissato nel modello di Lieb-Liniger. In particolare, assumiamo che f abbia la forma seguente:

$$\begin{aligned} f(i_1, \dots, i_r) &\equiv \sum_{\mathcal{P}} A_{\mathcal{P}} \exp \left[i \sum_{j=1}^r k_{\mathcal{P}_j} i_j \right] = \\ &= \sum_{\mathcal{P}} \exp \left[i \sum_{j=1}^r k_{\mathcal{P}_j} i_j + \frac{i}{2} \sum_{j < l}^r \vartheta(k_{\mathcal{P}_j}, k_{\mathcal{P}_l}) \right] . \end{aligned} \quad (2.67)$$

con $\vartheta(k_i, k_j)$ da determinare. Osserviamo a questo punto che imporre che la (2.66) soddisfi l'equazione agli autovalori

$$(H_N^{XXZ} - E) |\psi\rangle = 0 \quad (2.68)$$

implica che sia soddisfatta la seguente:

$$\begin{aligned} & 2J \sum_{j=1}^r (1 - \delta_{i_j+1, i_{j+1}}) \left[f(i_1, \dots, i_j + 1, i_{j+1}, \dots, i_r) + \right. \\ & \left. + f(i_1, \dots, i_j, i_{j+1} - 1, \dots, i_r) \right] + \\ & + \left[E_0 - E - 2\Delta JN + 2hr + 2J\Delta \sum_{j=1}^r \delta_{i_j+1, i_{j+1}} \right] f(i_1, \dots, i_r) = 0, \end{aligned} \quad (2.69)$$

dove $E_0 = (J\Delta - h)N$. Usando l'ansatz (2.67), la (2.69) si esprime come una condizione sui coefficienti $A_{\mathcal{P}}$:

$$A_{\mathcal{P}} = (-1)^{\text{sgn} \mathcal{P}} \prod_{j < l} \left(\exp [i(k_{\mathcal{P}_j} + k_{\mathcal{P}_l})] + 1 - 2\Delta \exp [ik_{\mathcal{P}_j}] \right). \quad (2.70)$$

Come visto per il caso di Lieb-Liniger, a meno di fissare una fase globale, questa condizione è equivalente alla seguente, che fissa la definizione della funzione $\vartheta(k_i, k_j)$:

$$e^{i\vartheta(k, k')} = \frac{e^{i(k+k')} + 1 - 2\Delta e^{ik}}{e^{i(k+k')} + 1 - 2\Delta e^{ik'}}. \quad (2.71)$$

Come prima, dobbiamo a questo punto affrontare il problema delle condizioni periodiche, che sono soddisfatte se valgono le seguenti, che costituiscono le equazioni di Bethe per il modello XXZ :

$$\begin{aligned} e^{ik_j N} &= \prod_{l \neq j} e^{i\vartheta(k_j, k_l)} = \\ &= (-1)^{r-1} \prod_{l \neq j} \frac{e^{i(k_j+k_l)} + 1 - 2\Delta e^{ik_j}}{e^{i(k_j+k_l)} + 1 - 2\Delta e^{ik_l}}, \quad j = 1, \dots, r. \end{aligned} \quad (2.72)$$

A questo punto è conveniente introdurre una nuova parametrizzazione. Da una parte, infatti è scomodo lavorare con le variabili k_j perché $\vartheta(k, k')$ non dipende esclusivamente dalla differenza $k - k'$, e non è quindi invariante per traslazione dei k_j . Dall'altra, le nuove variabili che introdurremo saranno quelle che vengono utilizzate nell'algebraic Bethe ansatz che vedremo nel prossimo capitolo; la loro introduzione in questo contesto permetterà di vedere con maggior facilità l'equivalenza delle due trattazioni.

In letteratura sono presenti diverse convenzioni; in particolare, i dettagli della parametrizzazione che si utilizza dipendono di solito da quale dei tre regimi del modello XXZ stiamo considerando: il regime “con gap” corrispondente a $|\Delta| > 1$, quello con $\Delta = 1$, che definisce il modello isotropo XXX , oppure quello di sistema ‘gapless’, caratterizzato da $|\Delta| < 1$. Diverse parametrizzazioni corrispondono a scegliere alcuni parametri reali oppure immaginari. Per fissare le idee, illustriamo la parametrizzazione generalmente usata per $|\Delta| < 1$. Introduciamo quindi il parametro η e le nuove variabili λ , chiamate *rapidità* (in analogia al modello di Lie-Liniger), definiti da:

$$e^{ik_j} = \frac{\sinh(\lambda_j + \eta/2)}{\sinh(\lambda_j - \eta/2)} , \quad (2.73)$$

$$\Delta = \cosh(\eta) . \quad (2.74)$$

La relazione (2.73) può essere messa in forma più esplicita prendendo il logaritmo:

$$k(\lambda) = -i \ln \left(\frac{\sinh(\lambda + \eta/2)}{\sinh(\lambda - \eta/2)} \right) \equiv \vartheta_1(\lambda) . \quad (2.75)$$

Osserviamo esplicitamente che con questa parametrizzazione la funzione $\vartheta(\lambda_1, \lambda_2)$ è invariante per traslazione delle rapidità:

$$\vartheta(k(\lambda_1), k(\lambda_2)) = -i \ln \left(\frac{\sinh(\lambda_1 - \lambda_2 + \eta)}{\sinh(\lambda_1 - \lambda_2 - \eta)} \right) \equiv \vartheta_2(\lambda_1, \lambda_2) . \quad (2.76)$$

Possiamo quindi riscrivere le equazioni di Bethe in termini delle rapidità ottenendo:

$$\left(\frac{\sinh(\lambda_j + \eta/2)}{\sinh(\lambda_j - \eta/2)} \right)^N = \prod_{k \neq j}^r \frac{\sinh(\lambda_j - \lambda_k + \eta)}{\sinh(\lambda_j - \lambda_k - \eta)} . \quad (2.77)$$

In analogia al caso di Lieb-Liniger, possiamo infine riscrivere in forma logaritmica le equazioni di Bethe che dopo una semplice manipolazione prendono la forma seguente:

$$\vartheta_1(\lambda_j) = 2\pi \frac{I_j}{N} + \frac{1}{N} \sum_{l=1}^r \vartheta_2(\lambda_j - \lambda_l) , \quad (2.78)$$

dove i numeri I_j sono i numeri quantici associati alle rapidità λ_j .

2.2.2 Proprietà delle soluzioni

Come accennato all’inizio della sezione, la struttura delle equazioni di Bethe (2.78) per il modello XXZ è più complessa rispetto alle equazioni corrispondenti (2.36) per il modello di Lieb-Liniger. Da una parte, non è vero che ogni scelta di numeri quantici distinti I_j fornisce una soluzione delle equazioni di Bethe, e dall’altra esistono insiemi

di soluzioni $\{\lambda_j\}_j$ accettabili determinate da insiemi di numeri quantici $\{I_j\}_j$ in cui $I_j = I_l$ per qualche $j \neq l$. La differenza rispetto alle (2.36) sta nel fatto che le soluzioni delle equazioni (2.78) per il modello XXZ non sono in generale reali. Una discussione più approfondita sulla struttura delle soluzioni esula dai nostri scopi. In questa tesi assumeremo la completezza degli stati individuati dalle soluzioni delle (2.78) (cioè assumeremo che le (2.78) abbiano un numero di soluzioni uguali alla dimensione del sottospazio di Hilbert di \mathcal{H} generato dagli stati con r spin abbassati) e rimandiamo a [38] per approfondimenti.

Dato un insieme di soluzioni delle (2.78), possiamo ricavare l'energia dell'autostato corrispondente; osserviamo poi che questo è anche un autostato dell'impulso (inteso come generatore delle traslazioni discrete nel reticolo di spin). In effetti, dalle equazioni che abbiamo scritto, è facile derivare energia ed impulso corrispondenti ad un autostato di Bethe in termini delle rapidità:

$$E(\{\lambda_j\}) = 4J \sum_{j=1}^r \frac{\sinh^2 \eta}{\cosh 2\lambda_j - \cosh \eta} - h(N - 2r) , \quad (2.79)$$

$$P(\{\lambda_j\}) = -i \sum_{j=1}^r \ln \left[\frac{\sinh(\lambda_j + \eta/2)}{\sinh(\lambda_j - \eta/2)} \right] . \quad (2.80)$$

2.3 Conclusioni

In questo capitolo abbiamo introdotto il modello di Lieb-Liniger e la catena di spin XXZ . Abbiamo diagonalizzato le rispettive hamiltoniane utilizzando la tecnica del coordinate Bethe ansatz, che ci ha permesso di scrivere esplicitamente i livelli energetici e le autofunzioni. La soluzione che abbiamo illustrato è non banale perché i modelli in questione costituiscono esempi di sistemi quantistici a molti corpi interagenti. Tuttavia, la forma delle autofunzioni che abbiamo scritto è complicata e non si presta a calcolare quantità di interesse fisico come le funzioni di correlazione. Per questo, nel prossimo capitolo introdurremo l'algebraic Bethe ansatz; uno dei successi di questo formalismo è stato proprio quello di ottenere risultati analitici per quantità che sarebbe impossibile calcolare utilizzando le funzioni d'onda che abbiamo trovato.

Capitolo 3

Algebraic Bethe Ansatz

Uno degli obiettivi nello studio di un sistema a molti corpi è il calcolo delle funzioni di correlazione che danno la possibilità di un confronto con i risultati sperimentali. All'interno del framework del “coordinate Bethe ansatz” però, anche il calcolo delle funzioni di correlazione più semplici diventa di fatto impossibile a causa della complessità della struttura delle funzioni d'onda corrispondenti agli autostati. Per rendere l'idea del grado di difficoltà che s'incontra nel trattare la rappresentazione degli autostati in termini di funzioni d'onda trovate nella sezione precedente, possiamo considerare il calcolo della loro norma, che è evidentemente fondamentale per ottenere previsioni per qualsiasi quantità d'interesse fisico. Considerando ad esempio il modello di Lieb-Liniger a N particelle, poiché ogni funzione d'onda nel coordinate Bethe ansatz si scrive come somma di $(N!)$ termini, il calcolo della norma corrispondente richiede quello di $(N!)^2$ integrali in N variabili, che rende praticamente impossibile qualsiasi trattazione analitica o anche solo numerica.

Un passo avanti fondamentale fu compiuto negli anni Settanta con la scoperta del cosiddetto algebraic Bethe ansatz, come tecnica risolutiva dei sistemi integrabili. Questa trattazione mette in luce le strutture fondamentali e universali ai sistemi integrabili e permette di arrivare ad un controllo tale del problema da riuscire a calcolare in modo esatto alcune funzioni di correlazione d'interesse sperimentale e ad esprimere alcune quantità fondamentali come la norma degli autostati del sistema in modo intellegibile e analiticamente trattabile (talvolta anche nel limite termodinamico).

In questa sezione presentiamo i concetti principali dell'algebraic Bethe ansatz e li applichiamo ai due sistemi integrabili considerati nel capitolo precedente. Sebbene la storia della nascita dell'algebraic Bethe ansatz sia molto interessante e abbia le sue radici nello studio di equazioni differenziali classiche integrabili non lineari, non seguiremo una trattazione storica e l'attenzione nel seguito sarà rivolta a presentare i concetti nel

modo più chiaro possibile. Gli strumenti introdotti in questa sezione verranno utilizzati in tutto il resto della tesi.

3.1 Impostazione generale

Consideriamo il modello di Lieb-Liniger introdotto nella sezione precedente nella sua versione di seconda quantizzazione. L'hamiltoniana

$$H^{LL} = \int dx \left\{ \partial_x \psi^\dagger(x) \partial_x \psi(x) + c \psi^\dagger(x) \psi^\dagger(x) \psi(x) \psi(x) \right\} \quad (3.1)$$

agisce su uno spazio di Hilbert \mathcal{H} e commuta con il numero di particelle \hat{N} . Di conseguenza \mathcal{H} si decompone in sottospazi \mathcal{H}_k in cui $\hat{N} = k\mathbb{1}$ (essendo $\mathbb{1}$ l'identità). Se indichiamo la restrizione di H^{LL} a \mathcal{H}_k con H_k^{LL} , una base di \mathcal{H}_k si ottiene prendendo l'insieme degli autostati di H_k^{LL} ; ricordando che questi ultimi sono etichettati da insiemi ordinati di rapidità, una base di \mathcal{H}_k è data quindi da $\mathcal{B}_k = \left\{ |\{\lambda_j\}_{j=1}^k\rangle \right\}$, dove $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ indica un generico insieme di soluzioni delle equazioni di Bethe a k particelle. Una costruzione analoga è possibile per la catena di Heisenberg a N siti. In questo caso ricordiamo che la magnetizzazione lungo z , $S_z = \sum_{j=1}^N s_z^j = 1/2 \sum_{j=1}^N \sigma_z^j$ commuta con l'hamiltoniana H^{XXZ} , cioè gli autostati di Bethe hanno un numero ben definito di spin abbassati rispetto allo stato di riferimento $|\uparrow\rangle^{\otimes N}$. Possiamo allora pensare in questo contesto ad un autostato di Bethe con k spin abbassati, identificato dalle rapidità $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ come uno stato a k particelle (caratterizzate dalle stesse rapidità).

Questa struttura è in effetti generale nei sistemi integrabili ad una dimensione, e la sua natura universale viene messa in luce nell'algebraic Bethe ansatz, che introduciamo ora in termini qualitativi, per poi tornare ad una trattazione rigorosa in un secondo momento. L'idea di base è quella di identificare degli operatori di “creazione” e “distruzione” dipendenti in modo continuo da un parametro λ , che vengono di solito indicati rispettivamente come $B(\lambda)$ e $C(\lambda)$, e uno stato di vuoto $|0\rangle$ (con duale $\langle 0|$), in modo che sia possibile scrivere:

$$\begin{aligned} |\{\lambda_j\}_{j=1}^k\rangle &= B(\lambda_1)B(\lambda_2)\dots B(\lambda_k)|0\rangle = \prod_{j=1}^k B(\lambda_j)|0\rangle, \\ \langle\{\lambda_j\}_{j=1}^k| &= \langle 0|C(\lambda_1)C(\lambda_2)\dots C(\lambda_k) = \langle 0|\prod_{j=1}^k C(\lambda_j). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Gli operatori $B(\lambda)$, (così come i $C(\lambda)$) sono definiti in generale per $\lambda \in \mathbb{C}$, ma applicati al vuoto $|0\rangle$ danno gli autostati del sistema se scegliamo come parametri le soluzioni delle equazioni di Bethe. Ci chiediamo ora perché una rappresentazione come la (3.2)

comporti una semplificazione del problema del calcolo delle quantità d'interesse fisico nei sistemi integrabili. Le ragioni sono principalmente due:

- per molti sistemi integrabili d'interesse è possibile scrivere gli operatori locali (come ad esempio gli operatori σ_i nel modello XXZ) in termini degli operatori $B(\lambda)$, $C(\lambda)$ e di altri due operatori che vengono introdotti assieme a questi ultimi, indicati di solito con $A(\lambda)$, $D(\lambda)$;
- gli operatori $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$, $D(\lambda)$ soddisfano regole di commutazione ben precise tra loro.

Questo quadro ci permette di ricondurre il calcolo delle funzioni di correlazione ad un problema algebrico (definito in termini di regole di commutazione tra gli operatori), e questo permette di semplificare i risultati in modo stupefacente.

Nella prossima sezione illustreremo la costruzione esplicita nel modello XXZ che porta a definire gli operatori $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$, $D(\lambda)$ e vedremo quali sono le loro proprietà fondamentali. Nella sezione successiva studieremo come sia possibile definire un modello *in astratto*, introducendo oggetti formali caratterizzati solo in termini delle relazioni reciproche. Di fatto, definiremo un'algebra e ne ricaveremo le proprietà; lo studio di un singolo modello integrabile sarà quindi ricondotto a quello di una sua opportuna rappresentazione. In questa logica non stupisce che emerga una stretta analogia tra sistemi integrabili apparentemente molto diversi, in quanto questi ultimi sono rappresentazioni (distinte) di una stessa algebra.

3.2 Algebraic Bethe ansatz per il modello XXZ

Consideriamo il modello XXZ introdotto nella sezione precedente definito dall'hamiltoniana seguente (dove per semplicità abbiamo posto $h = 0$ e $J = 1$, senza perdere di generalità):

$$H_N^{XXZ} = \sum_{j=1}^N \{ \sigma_x^j \sigma_x^{j+1} + \sigma_y^j \sigma_y^{j+1} + \Delta (\sigma_z^j \sigma_z^{j+1} - 1) \} . \quad (3.3)$$

Ricordiamo che l'hamiltoniana agisce nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}_N^{XXZ} = h_1^{XXZ} \otimes \dots \otimes h_N^{XXZ}$ essendo h_i^{XXZ} lo spazio di Hilbert da singola particella, $h_i^{XXZ} \simeq \mathbb{C}_2$. Possiamo considerare uno spazio ausiliario $h_0 \simeq \mathbb{C}_2$, e definiamo ora un operatore $L_{n,0}^{XXZ} : h_0 \otimes h_n^{XXZ} \rightarrow h_0 \otimes h_n^{XXZ}$. Se $|\uparrow\rangle_i, |\downarrow\rangle_i$ sono vettori di base di h_i^{XXZ} , nella base $\mathcal{B}_{0,i} = \{|\uparrow\rangle_0 |\uparrow\rangle_i, |\uparrow\rangle_0 |\downarrow\rangle_i, |\downarrow\rangle_0 |\uparrow\rangle_i, |\downarrow\rangle_0 |\downarrow\rangle_i\}$ definiamo la matrice corrispondente all'operatore

$L_{n,0}^{XXZ}$ (detta L -matrix), nel modo seguente:

$$L_{n,0}^{XXZ}(\lambda) = \begin{pmatrix} \sinh(\lambda + \frac{\eta}{2}) & & & \\ & \sinh(\lambda - \frac{\eta}{2}) & \sinh(\eta) & \\ & \sinh(\eta) & \sinh(\lambda - \frac{\eta}{2}) & \\ & & & \sinh(\lambda + \frac{\eta}{2}) \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

dove il parametro η è dato da $\cosh(\eta) = \Delta$. La L -matrix appena introdotta può sembrare “calata dall’alto”; in realtà si tratta di un oggetto che viene naturale considerare nello studio della funzione di partizione di un reticolo classico di spin in due dimensioni. La stretta relazione tra modelli classici in due dimensioni e modelli quantistici in una dimensione è stata storicamente molto importante per lo sviluppo delle tecniche algebriche che stiamo per presentare, ma una discussione dei modelli integrabili di spin classici in due dimensioni ci avrebbe portati troppo lontani dagli scopi di questa tesi, ed è stata quindi omessa. Il confronto con il caso classico rimane tuttavia molto interessante e può essere approfondita in [39],[34].

Il secondo oggetto fondamentale che introduciamo è la cosiddetta R -matrix:

$$R^{XXZ}(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} f^{XXZ}(\mu, \lambda) & & & \\ & g^{XXZ}(\mu, \lambda) & 1 & \\ & 1 & g^{XXZ}(\mu, \lambda) & \\ & & & f^{XXZ}(\mu, \lambda) \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

dove

$$f^{XXZ}(\mu, \lambda) = \frac{\sinh(\lambda - \mu + \eta)}{\sinh(\lambda - \mu)}, \quad g^{XXZ}(\mu, \lambda) = \frac{\sinh(\eta)}{\sinh(\lambda - \mu)}. \quad (3.6)$$

É facile verificare che con queste definizioni vale la seguente relazione fondamentale:

$$L_{n,0}^{XXZ}(\lambda) L_{m,0}^{XXZ}(\mu) R^{XXZ}(\lambda, \mu) = R^{XXZ}(\lambda, \mu) L_{n,0}^{XXZ}(\lambda) L_{m,0}^{XXZ}(\mu). \quad (3.7)$$

Possiamo adesso definire la matrice di monodromia, prendendo il prodotto delle L -matrix lungo la catena di spin (omettiamo nel seguito l’indice 0 relativo allo spazio ausiliario):

$$T^{XXZ}(\lambda) = L_N^{XXZ}(\lambda) \otimes \dots \otimes L_1^{XXZ}(\lambda). \quad (3.8)$$

L’operatore $T(\lambda)$ agisce sullo spazio $\hat{\mathcal{H}} = h_0 \otimes \mathcal{H}_N^{XXZ}$. Consideriamo la base di $\hat{\mathcal{H}}$ definita nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\hat{\mathcal{H}}} = \{ & |\uparrow\rangle_0 \otimes e_1^{XXZ}, |\uparrow\rangle_0 \otimes e_2^{XXZ}, \dots \\ & \dots, |\uparrow\rangle_0 \otimes e_{2^N}^{XXZ}, |\downarrow\rangle_0 \otimes e_1^{XXZ}, \dots, |\downarrow\rangle_0 \otimes e_{2^N}^{XXZ} \}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

dove $\{e_i^{XXZ}\}_{i=1}^{2^N}$ costituisce una base di \mathcal{H}_N^{XXZ} . Nella base $\mathcal{B}_{\hat{\mathcal{H}}}$ l'operatore $T^{XXZ}(\lambda)$ si può rappresentare come una matrice a blocchi:

$$T^{XXZ}(\lambda) = \begin{pmatrix} A^{XXZ}(\lambda) & B^{XXZ}(\lambda) \\ C^{XXZ}(\lambda) & D^{XXZ}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

dove $A^{XXZ}(\lambda)$, $B^{XXZ}(\lambda)$, $C^{XXZ}(\lambda)$, $D^{XXZ}(\lambda)$ sono operatori che agiscono su \mathcal{H}_N^{XXZ} . Facciamo ora un'osservazione la cui importanza sarà chiara più avanti. Definiamo intanto:

$$|0\rangle_{XXZ} = |\uparrow\rangle_N \otimes \dots \otimes |\uparrow\rangle_1. \quad (3.11)$$

Dalla definizione della matrice $T^{XXZ}(\lambda)$ si vede facilmente che valgono le seguenti:

$$A^{XXZ}(\lambda) |0\rangle_{XXZ} = a^{XXZ}(\lambda) |0\rangle_{XXZ}, \quad D^{XXZ}(\lambda) |0\rangle_{XXZ} = d^{XXZ}(\lambda) |0\rangle_{XXZ}. \quad (3.12)$$

essendo

$$a^{XXZ}(\lambda) = \sinh\left(\lambda + \frac{\eta}{2}\right)^N, \quad (3.13)$$

$$d^{XXZ}(\lambda) = \sinh\left(\lambda - \frac{\eta}{2}\right)^N. \quad (3.14)$$

Vedremo che la possibilità di identificare, nel modello, un vettore di riferimento $|0\rangle$, che sia autostato di due operatori A e D , sarà ciò che rende universale l'approccio dell'algebraic Bethe ansatz. Vediamo ora un'altra proprietà fondamentale:

Proposizione 3.1. *La matrice di monodromia $T^{XXZ}(\lambda)$ (3.10) soddisfa:*

$$R^{XXZ}(\lambda, \mu) T^{XXZ}(\lambda) \otimes T^{XXZ}(\mu) = T^{XXZ}(\lambda) \otimes T^{XXZ}(\mu) R^{XXZ}(\lambda, \mu), \quad (3.15)$$

dove $R^{XXZ}(\lambda, \mu)$ è definita in (3.5).

La dimostrazione è immediata, e si ottiene per induzione partendo dalla definizione di $T^{XXZ}(\lambda)$ in (3.8) e dalla relazione (3.7) per la L -matrix. Vediamo subito una conseguenza di questa relazione importante. Definiamo per prima cosa la transfer matrix:

$$\tau^{XXZ}(\lambda) = \text{tr} [T^{XXZ}(\lambda)] = A^{XXZ}(\lambda) + D^{XXZ}(\lambda). \quad (3.16)$$

Dalla (3.15) è facile vedere allora, grazie alla ciclicità della traccia, che vale:

$$[\tau^{XXZ}(\lambda), \tau^{XXZ}(\mu)] = 0. \quad (3.17)$$

Abbiamo quindi costruito una famiglia ad un parametro $\tau(\lambda)$ di operatori commutanti che agiscono sullo spazio di Hilbert \mathcal{H}_N^{XXZ} . Questo fatto risulta di importanza cruciale grazie alla seguente proposizione.

Proposizione 3.2. *Per l'hamiltoniana del sistema vale la seguente:*

$$H_N^{XXZ} = 2 \sinh(\eta) \sinh^2(\lambda + \frac{\eta}{2}) \frac{d}{d\lambda} \ln \tau^{XXZ}(\lambda) \Big|_{\lambda=\eta/2}. \quad (3.18)$$

Quindi in particolare, dalla (3.17), abbiamo

$$[H_N^{XXZ}, \tau^{XXZ}(\lambda)] = 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}_2. \quad (3.19)$$

Questo ci dice che per diagonalizzare l'hamiltoniana di partenza possiamo diagonalizzare gli operatori $\tau^{XXZ}(\lambda)$. La (3.18) viene di solito chiamata *trace rule*. Non vedremo la dimostrazione dell'equazione (3.19) che richiede solo manipolazioni delle matrici L definite in precedenza. Come abbiamo detto, gli operatori $B^{XXZ}(\lambda)$ agiscono sullo spazio d'interesse \mathcal{H}_N^{XXZ} ed è immediato vedere dalla definizione che $B^{XXZ}(\lambda)$ applicato ad uno stato con k spin down restituisce uno stato con $k+1$ spin down. Vediamo che lo stato $B^{XXZ}(\lambda_1) \dots B^{XXZ}(\lambda_k) |0\rangle$ corrisponde ad uno stato che appartiene al sottospazio di Hilbert \mathcal{H}_k in cui gli stati hanno k spin down. A questo punto abbiamo tutti gli strumenti per procedere e dimostrare che gli stati $B^{XXZ}(\lambda_1) \dots B^{XXZ}(\lambda_k) |0\rangle_{XXZ}$ sono autostati dell'hamiltoniana H_N^{XXZ} se i parametri $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ soddisfano le equazioni di Bethe viste nel capitolo precedente. Invece di dimostrare questo per il caso specifico del modello XXZ presentato qui, illustriamo la dimostrazione direttamente nel caso astratto discusso nella prossima sezione.

3.3 Algebraic Bethe ansatz astratto

Consideriamo un sistema quantistico non specificato e chiamiamo \mathcal{H} lo spazio di Hilbert corrispondente, mentre con h_0 indichiamo uno spazio ausiliario di dimensione due, cioè $h_0 \simeq \mathbb{C}_2$. Se $\{|\uparrow\rangle_0, |\downarrow\rangle_0\}$, e $\{e_1, \dots, e_{\dim \mathcal{H}}\}$ sono due basi di vettori rispettivamente per h_0 e \mathcal{H} , consideriamo la seguente base per lo spazio $h_0 \otimes \mathcal{H}$:

$$\mathcal{B} = \{|\uparrow\rangle_0 \otimes e_1, \dots, |\uparrow\rangle_0 \otimes e_{\dim \mathcal{H}}, |\downarrow\rangle_0 \otimes e_1, \dots, |\downarrow\rangle_0 \otimes e_{\dim \mathcal{H}}\}. \quad (3.20)$$

Supponiamo che esista su $h_0 \otimes \mathcal{H}$ una famiglia di operatori $T(\lambda)$ dipendenti da un parametro (in generale complesso), tale che $T(\lambda) : h_0 \otimes \mathcal{H} \rightarrow h_0 \otimes \mathcal{H}$; nella base \mathcal{B} abbiamo la seguente rappresentazione matriciale a blocchi per T :

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

dove quindi $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$, $D(\lambda)$ sono operatori su \mathcal{H} . Supponiamo poi che esista un vettore chiamato stato di vuoto e indicato con $|0\rangle$, $|0\rangle \in \mathcal{H}$ che sia autostato di $A(\lambda)$, $D(\lambda)$, $\forall \lambda$:

$$A(\lambda) |0\rangle = a(\lambda) |0\rangle , \quad (3.22)$$

$$D(\lambda) |0\rangle = d(\lambda) |0\rangle . \quad (3.23)$$

Nel modello astratto $a(\lambda)$, $d(\lambda)$ sono lasciati come parametri funzionali liberi. Infine, assumiamo che esista una matrice $R(\lambda, \mu)$ tale che $T(\lambda)$ soddisfi

$$R(\lambda, \mu)T(\lambda) \otimes T(\mu) = T(\lambda) \otimes T(\mu)R(\lambda, \mu) . \quad (3.24)$$

A priori la matrice R potrebbe avere una forma generica (si veda anche la sezione 3.3.1). In questa tesi ci concentriamo però su matrici R della forma:

$$R(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} f(\lambda, \mu) & & & \\ & g(\lambda, \mu) & 1 & \\ & 1 & g(\lambda, \mu) & \\ & & & f(\lambda, \mu) \end{pmatrix} , \quad (3.25)$$

dove $f(\lambda, \mu)$, $g(\lambda, \mu)$ sono funzioni arbitrarie compatibili con la (3.24). Possiamo definire ora:

$$\tau(\lambda) = \text{tr}[T(\lambda)] = A(\lambda) + B(\lambda) . \quad (3.26)$$

Vale allora il seguente teorema fondamentale, su cui poggia tutta la struttura dell'algebraic Bethe ansatz.

Teorema 3.1. *Gli operatori $\tau(\mu)$ possono essere diagonalizzati simultaneamente; i vettori*

$$B(\lambda_1) \dots B(\lambda_k) |0\rangle \quad (3.27)$$

sono autostati di $\tau(\mu)$ se sono soddisfatte le equazioni di Bethe

$$r(\lambda_j) = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^k \frac{f(\lambda_l, \lambda_j)}{f(\lambda_j, \lambda_l)} , \quad (3.28)$$

dove $r(\lambda) = a(\lambda)/d(\lambda)$.

Vediamo la dimostrazione del teorema. Partiamo dalla relazione fondamentale (3.24). La riscriviamo, usando che $R(\lambda, \mu)$ è invertibile:

$$R(\lambda, \mu)T(\lambda) \otimes T(\mu)R^{-1}(\lambda, \mu) = T(\lambda) \otimes T(\mu) . \quad (3.29)$$

Possiamo a questo punto prendere la traccia di entrambi i membri e usando la proprietà di ciclicità otteniamo:

$$[\tau(\lambda), \tau(\mu)] = 0 . \quad (3.30)$$

Quindi $\{\tau(\lambda)\}_\lambda$ è una famiglia di operatori commutanti ed esiste allora una base di autovettori comuni a tutti gli elementi della famiglia.

Dimostriamo ora la seconda parte del teorema. Esplicitando la (3.24) in termini degli elementi di matrice $T(\lambda)$, si ottiene che gli operatori $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$, $D(\lambda)$ sono vincolati a soddisfare le seguenti relazioni quadratiche:

$$[A(\lambda), A(\mu)] = [B(\lambda), B(\mu)] = 0 ; \quad (3.31)$$

$$[C(\lambda), C(\mu)] = [D(\lambda), D(\mu)] = 0 ; \quad (3.32)$$

$$A(\mu)B(\lambda) = f(\mu, \lambda)B(\lambda)A(\mu) + g(\lambda, \mu)B(\mu)A(\lambda) ; \quad (3.33)$$

$$D(\mu)B(\lambda) = f(\lambda, \mu)B(\lambda)D(\mu) + g(\mu, \lambda)B(\mu)D(\lambda) ; \quad (3.34)$$

$$C(\lambda)A(\mu) = f(\mu, \lambda)A(\mu)C(\lambda) + g(\lambda, \mu)A(\lambda)C(\mu) ; \quad (3.35)$$

$$C(\lambda)D(\mu) = f(\lambda, \mu)D(\mu)C(\lambda) + g(\lambda, \mu)D(\lambda)C(\mu) ; \quad (3.36)$$

$$B(\mu)A(\lambda) = f(\mu, \lambda)A(\lambda)B(\mu) + g(\lambda, \mu)A(\mu)B(\lambda) ; \quad (3.37)$$

$$D(\mu)C(\lambda) = f(\mu, \lambda)C(\lambda)B(\mu) + g(\lambda, \mu)C(\mu)D(\lambda) ; \quad (3.38)$$

$$A(\lambda)C(\mu) = f(\mu, \lambda)C(\mu)A(\lambda) + g(\lambda, \mu)C(\lambda)A(\mu) ; \quad (3.39)$$

$$B(\lambda)D(\mu) = f(\mu, \lambda)D(\mu)B(\lambda) + g(\lambda, \mu)D(\lambda)B(\mu) ; \quad (3.40)$$

$$[C(\lambda), B(\mu)] = g(\lambda, \mu) [A(\lambda)D(\mu) - A(\mu)D(\lambda)] ; \quad (3.41)$$

$$[D(\lambda), A(\mu)] = g(\lambda, \mu) [B(\lambda)C(\mu) - B(\mu)C(\lambda)] ; \quad (3.42)$$

$$[A(\lambda), D(\mu)] = g(\lambda, \mu) [C(\lambda)B(\mu) - C(\mu)B(\lambda)] ; \quad (3.43)$$

$$[B(\lambda), C(\mu)] = g(\lambda, \mu) [D(\lambda)A(\mu) - D(\mu)A(\lambda)] ; \quad (3.44)$$

Consideriamo a questo punto il vettore $B(\lambda_k) \dots B(\lambda_1) |0\rangle$, e chiediamoci se esistono dei valori di $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ per cui è autostato comune alla famiglia $\{\tau(\mu)\}_\mu$. Utilizzando le relazioni (3.31)-(3.44) possiamo calcolare l'azione di $A(\lambda)$, $D(\lambda)$ su $B(\lambda_k) \dots B(\lambda_1) |0\rangle$. Consideriamo per esempio:

$$A(\mu)B(\lambda_k) \dots B(\lambda_1) |0\rangle . \quad (3.45)$$

La regola di commutazione (3.33) ci permette di spostare a destra l'operatore $A(\mu)$ rispetto a $B(\lambda_k)$ e questo produce due termini, per ognuno dei quali abbiamo un operatore B e un operatore A rispettivamente in prima e seconda posizione (con argomento scambiato). Possiamo allora immaginare di iterare la procedura, continuando a spostare verso destra l'operatore A per ognuno dei termini che vengono generati, fino ad arrivare ad applicare A allo stato di riferimento $|0\rangle$ (che per ipotesi è un suo autostato).

Riassumendo, l'espressione in (3.45) si potrà riscrivere come:

$$\begin{aligned}
 A(\mu) \prod_{j=1}^k B(\lambda_j) |0\rangle &= \Lambda \prod_{j=1}^k B(\lambda_j) |0\rangle + \\
 &+ \sum_{r=1}^k \Lambda_r B(\mu) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^k B(\lambda_j) |0\rangle .
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Possiamo ora facilmente esplicitare i coefficienti Λ e Λ_r . Λ si ottiene osservando che nella procedura descritta sopra, in cui spostiamo successivamente l'operatore A verso destra, l'unico modo con cui è possibile arrivare ad un vettore nella cui definizione non compare $B(\mu)$ è selezionando di volta in volta il termine nella (3.33) in cui gli argomenti non vengono scambiati. Concentriamoci ora invece su Λ_k . Effettuiamo una prima commutazione tra l'operatore $A(\mu)$, che inizialmente è all'estrema sinistra nell'espressione (3.45), e l'operatore $B(\lambda_k)$. Siccome stiamo considerando il contributo a Λ_k , dobbiamo tenere solo il secondo termine nella (3.33); a questo punto abbiamo in prima posizione l'operatore $B(\mu)$ e in seconda $A(\lambda_k)$; per ottenere il termine che contribuisce alla definizione di Λ_k dobbiamo applicare ancora una volta la (3.33) per portare a destra $A(\lambda_k)$, tenendo di volta in volta, in questo caso, solo il primo termine in cui gli argomenti non vengono scambiati. Notiamo ora che l'espressione finale deve essere completamente simmetrica nei λ_j (poiché gli operatori B commutano), quindi dall'espressione per Λ_k possiamo ottenere per simmetria quella per Λ_r . Otteniamo così:

$$\Lambda = a(\mu) \prod_{j=1}^k f(\mu, \lambda_j) , \tag{3.47}$$

$$\Lambda_r = a(\lambda_r) g(\lambda_r, \mu) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^k f(\lambda_r, \lambda_j) . \tag{3.48}$$

Possiamo ora in modo analogo calcolare

$$\begin{aligned}
 D(\mu) \prod_{j=1}^k B(\lambda_j) |0\rangle &= \tilde{\Lambda} \prod_{j=1}^k B(\lambda_j) |0\rangle + \\
 &+ \sum_{r=1}^k \tilde{\Lambda}_r B(\mu) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^k B(\lambda_j) |0\rangle ,
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

dove, come prima, si trova:

$$\tilde{\Lambda} = d(\mu) \prod_{j=1}^k f(\lambda_j, \mu) , \quad (3.50)$$

$$\tilde{\Lambda}_r = d(\lambda_r) g(\mu, \lambda_r) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^k f(\lambda_j, \lambda_r) . \quad (3.51)$$

Siamo ora nella posizione di scrivere la condizione per cui i vettori $B(\lambda_1) \dots B(\lambda_k) |0\rangle$ sono autovettori per $\tau(\mu)$. Utilizzando le formule precedenti, vediamo immediatamente che la condizione per cui valga

$$[A(\mu) + B(\mu)] B(\lambda_1) \dots B(\lambda_k) |0\rangle \propto B(\lambda_1) \dots B(\lambda_k) |0\rangle \quad (3.52)$$

è che sia:

$$\Lambda_j + \tilde{\Lambda}_j = 0, \quad j = 1, \dots, k. \quad (3.53)$$

Dalle (3.48), (3.51) vediamo che le equazioni in (3.53) sono esattamente una riscrittura di quelle in (3.28) e il teorema è dimostrato. Torniamo ancora sul modello XXZ trattato nella sezione precedente. Se sostituiamo i parametri funzionali $a(\lambda)$, $d(\lambda)$ con le corrispondenti funzioni $a^{XXZ}(\lambda)$ e $d^{XXZ}(\lambda)$, le equazioni che otteniamo dal teorema sopra coincidono con le (2.77) che avevamo trovato con il coordinate Bethe ansatz.

L'approccio astratto è utile perché fa emergere quali sono gli elementi universali dei diversi modelli integrabili. Dato un generico sistema integrabile, quello che occorre fare per applicare la logica dell'algebraic Bethe ansatz è identificare una matrice di monodromia $T(\lambda)$ le cui entrate siano operatori sullo spazio degli stati, e una R -matrix che soddisfi la (3.24). Questo garantirà l'esistenza di una famiglia di operatori commutanti $\tau(\lambda)$ e una struttura di autostati di Bethe come abbiamo illustrato sopra. L'ultimo fondamentale tassello sarà quello di derivare una trace rule per scrivere l'hamiltoniana in termini degli operatori $\tau(\lambda)$, in modo da assicurarci che gli stati di Bethe trovati siano anche autostati dell'hamiltoniana. Evidentemente, il problema di derivare una trace rule andrà affrontato e risolto modello per modello, come fatto per la catena XXZ.

3.3.1 Invertire la logica

Nella sezione 3.2 siamo partiti da un modello specifico (la catena XXZ), per cui abbiamo identificato una matrice di monodromia $T(\lambda)$ e una matrice $R(\lambda, \mu)$ che verificassero la relazione fondamentale (3.15). Questo ha permesso di risolvere il modello attraverso il metodo dell'algebraic Bethe ansatz. Un diverso punto di vista è quello

di utilizzare questo formalismo algebrico per *generare* dei nuovi modelli integrabili. Questo approccio si basa sul fatto che tutte le quantità calcolabili all'interno dell'algebraic Bethe ansatz dipendono in sostanza solamente dalla forma della matrice $R(\lambda, \mu)$ e dalle funzioni $a(\lambda)$, $d(\lambda)$. Il problema è allora quello di studiare quali sono le possibili matrici $R(\lambda, \mu)$, in modo da ottenere una classificazione dei modelli integrabili risolvibili tramite Bethe Ansatz. Entriamo nel dettaglio e consideriamo la relazione (3.24) per un modello generico; questa implica che la matrice $R(\lambda, \mu)$ non può essere arbitraria ma deve soddisfare un'equazione di consistenza. Consideriamo infatti il prodotto $T(\lambda)T(\mu)T(\nu)$; identificando per brevità gli operatori associati a λ , μ e ν con 1, 2, 3, abbiamo che la (3.24) implica che le due equazioni seguenti debbano valere:

$$T_1 T_2 T_3 = R_{12}^{-1} R_{13}^{-1} R_{23}^{-1} T_3 T_2 T_1 R_{23} R_{13} R_{12} , \quad (3.54)$$

$$T_1 T_2 T_3 = R_{23}^{-1} R_{13}^{-1} R_{12}^{-1} T_3 T_2 T_1 R_{12} R_{13} R_{23} , \quad (3.55)$$

dove la prima si ottiene scambiando prima T_1 e T_2 , mentre la seconda scambiando prima T_2 e T_3 . I membri di destra di queste due equazioni devono ovviamente essere uguali. Questo porta ad un vincolo per la matrice $R(\lambda, \mu)$ che deve soddisfare la cosiddetta equazione di Yang-Baxter:

$$R_{23}(\mu, \nu) R_{13}(\lambda, \nu) R_{12}(\lambda, \mu) = R_{12}(\lambda, \mu) R_{13}(\lambda, \nu) R_{23}(\mu, \nu) . \quad (3.56)$$

Le possibili matrici $R(\lambda, \mu)$ si ottengono allora come soluzioni delle (3.56). L'equazione di Yang-Baxter compare in altre branche della fisica teorica, per esempio è legata alle matrici S fattorizzate in teoria dei campi, ed è stata oggetto di studio negli anni [40].

3.3.2 Cariche conservate

L'algebraic Bethe ansatz fornisce anche un metodo per scrivere formalmente le cariche conservate del modello. Se espandiamo l'operatore $\tau(\lambda)$ in potenze del parametro λ , otterremo che le varie potenze di λ nella serie moltiplicheranno degli operatori che commutano con l'hamiltoniana e saranno quindi delle quantità conservate. Convenzionalmente si considera di solito il logaritmo dell'operatore $\tau(\lambda)$, che avrà la stessa proprietà e si prende la sua espansione come definizione delle cariche conservate del modello:

$$\ln \tau(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \xi)^n Q_n , \quad (3.57)$$

dove ξ è un parametro che dipende dal modello che stiamo considerando. Dalla (3.30) segue che $[Q_n, Q_m] = 0$, e $\{Q_n\}_n$ costituisce quindi un insieme di cariche conservate.

3.4 Algebraic Bethe ansatz per il modello di Lieb-Liniger

Prima di procedere con il calcolo delle quantità d'interesse, presentiamo la trattazione algebrica nel modello di Lieb-Liniger. Qui gli operatori $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$ e $D(\lambda)$ agiranno su spazi di funzioni a dimensione infinita. Il modo migliore per definirli è introdurre un modello su reticolo di cui quello di Lieb-Liniger sarà il limite continuo.

Consideriamo quindi un reticolo discreto di N siti, il cui spazio di Hilbert è $\mathcal{H}_{\text{dis}}^{LL} = h_1^{LL} \otimes \dots \otimes h_N^{LL}$, essendo h_i^{LL} lo spazio a dimensione infinita corrispondente al singolo sito. Si definiscono poi gli operatori bosonici ψ_n , ψ_n^\dagger che agiscono su h_n^{LL} e che soddisfano le relazioni:

$$[\psi_n, \psi_m^\dagger] = \frac{1}{\Delta} \delta_{n,m} , \quad (3.58)$$

$$[\psi_n, \psi_m] = [\psi_n^\dagger, \psi_m^\dagger] = 0 , \quad (3.59)$$

dove $\Delta = L/N$, essendo L la lunghezza del reticolo. Introduciamo ora, in analogia a quanto fatto per il modello XXZ , uno spazio ausiliario h_0^{LL} , con $\dim[h_0^{LL}] = 2$, e una L -matrix corrispondente ad un operatore $L_{n,0}^{LL} : h_0^{LL} \otimes \mathcal{H}_{\text{dis}}^{LL} \mapsto h_0^{LL} \otimes \mathcal{H}_{\text{dis}}^{LL}$:

$$L_{n,0}^{LL}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 - i\frac{\lambda\Delta}{2} & -i\sqrt{c}\psi_n^\dagger\Delta \\ i\sqrt{c}\psi_n\Delta & 1 + i\frac{\lambda\Delta}{2} \end{pmatrix} . \quad (3.60)$$

L'altro elemento fondamentale che introduciamo è la matrice R ; questa è diversa rispetto a quella del modello XXZ , e precisamente:

$$R^{LL}(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} f^{LL}(\mu, \lambda) & & & \\ & g^{LL}(\mu, \lambda) & 1 & \\ & 1 & g^{LL}(\mu, \lambda) & \\ & & & f^{LL}(\mu, \lambda) \end{pmatrix} , \quad (3.61)$$

dove:

$$f^{LL}(\lambda, \mu) = \frac{\lambda - \mu + ic}{\lambda - \mu}, \quad g^{LL}(\lambda, \mu) = \frac{ic}{\lambda - \mu} . \quad (3.62)$$

Si verifica che, se ci limitiamo al prim'ordine nel parametro Δ , che verrà alla fine mandato a zero per ritrovare il modello di Lieb-Liniger, la matrice $L^{LL}(\lambda)$ soddisfa l'equazione analoga alla (3.7) con la matrice $R^{LL}(\lambda, \mu)$. Possiamo poi costruire la matrice di monodromia (omettendo il pedice 0 relativo allo spazio ausiliario) $T^{LL}(\lambda) = L_N^{LL}(\lambda) \otimes \dots \otimes L_1^{LL}(\lambda)$, per cui varrà:

$$R^{LL}(\lambda, \mu) T^{LL}(\lambda) \otimes T^{LL}(\mu) = T^{LL}(\lambda) \otimes T^{LL}(\mu) R^{LL}(\lambda, \mu) . \quad (3.63)$$

Nel limite $N \rightarrow \infty$ tutti gli operatori introdotti nel modello discreto definiscono operatori sullo spazio di funzioni nell'intervallo continuo $[0, L]$. Quello che manca da dimostrare è l'esistenza di una trace rule analoga alla (3.18) per mettere in relazione gli operatori $\tau^{LL}(\lambda) = \text{tr}[T^{LL}(\lambda)]$, con l'hamiltoniana del modello continuo H^{LL} , in modo che diagonalizzare quest'ultima sia effettivamente equivalente a trovare gli auto-stati di Bethe come nel modello astratto. Per la derivazione della trace rule, piuttosto tecnica, rimandiamo a [34].

3.5 Calcolo dei prodotti scalari e dei fattori di forma

Consideriamo il modello di Lieb-Liniger, e concentriamoci sulla funzione d'onda a N particelle, che riscriviamo, con un diverso prefattore rispetto a quanto visto nel capitolo 2, nel modo seguente:

$$\chi_N(\mathbf{x}|\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{\mathcal{P}} \exp\left\{i \sum_j x_j \lambda_{\mathcal{P}_j}\right\} \prod_{j>k} \frac{\lambda_{\mathcal{P}_j} - \lambda_{\mathcal{P}_k} - ic \text{sgn}(x_j - x_k)}{\lambda_{\mathcal{P}_j} - \lambda_{\mathcal{P}_k}}. \quad (3.64)$$

Come abbiamo detto, il calcolo della norma della (3.64) richiede quello di $(N!)^2$ integrali in N variabili. Nel 1972 fu congetturato da M. Gaudin [41], basandosi sul calcolo esplicito per $N = 2$, $N = 3$ particelle, che la norma si potesse esprimere in termini del determinante di una matrice $N \times N$:

$$\mathcal{N}_{\{\lambda\}} \equiv \int d^N x |\chi_N|^2 = \prod_{j<k} \frac{(\lambda_j - \lambda_k)^2 + c^2}{(\lambda_j - \lambda_k)^2} \times \det \mathcal{G}^{LL}, \quad (3.65)$$

dove

$$G_{jr}^{LL} = \delta_{j,r} \left(L + \sum_{l=1}^N \varphi(\lambda_j - \lambda_l) \right) - \varphi(\lambda_j - \lambda_r), \quad \varphi(u) = \frac{2c}{u^2 + c^2}. \quad (3.66)$$

La relativa compattezza e semplicità dell'espressione (3.65) non deve indurre a pensare che questo si rifletta nella facilità di dimostrare o anche solo convincersi della sua validità. Un modo per apprezzare la necessità di una trattazione sistematica del problema è quello di provare a dimostrare direttamente la (3.65), per rendersi conto di quali difficoltà si incontrino. Il primo successo dell'algebraic Bethe ansatz fu la dimostrazione della congettura di Gaudin (3.65), ad opera di Korepin [42]. Più tardi un passo avanti fu compiuto da Slavnov che trovò una formula più generale per il prodotto scalare tra uno stato di Bethe e uno stato generico [43]; la formula per il calcolo della norma rappresenta un caso particolare del risultato di Slavnov.

3.5.1 La formula di Slavnov

Presentiamo ora il teorema di Slavnov. Definiamo per prima cosa la quantità seguente, che corrisponde al prodotto scalare tra due stati costruiti in termini degli operatori B e C :

$$\mathcal{S}_N \equiv \langle 0 | \prod_{j=1}^N \mathcal{C}(\lambda_j^C) \prod_{j=1}^N \mathcal{B}(\lambda_j^B) | 0 \rangle , \quad (3.67)$$

dove $\mathcal{C}(\lambda) = C(\lambda)/d(\lambda)$, $\mathcal{B}(\lambda) = B(\lambda)/d(\lambda)$, mentre $\{\lambda_j^B\}$ e $\{\lambda_j^C\}$ sono due insiemi di rapidità per il momento arbitrari. Il prodotto scalare \mathcal{S}_N è una funzione delle rapidità $\lambda_j^{C/B}$, e dei parametri funzionali $r(\lambda) = a(\lambda)/d(\lambda)$ calcolati nelle stesse λ_j ; perciò $\mathcal{S}_N = \mathcal{S}_N(\{\lambda_j^C\}, \{\lambda_j^B\}, \{r_j^C\}, \{r_j^B\})$, essendo $r_j^{C/B} = r(\lambda_j^{C/B})$. É possibile dimostrare [42], che \mathcal{S}_N come funzione della singola rapidità λ_k^C ha poli del prim'ordine per $\lambda_k^C \rightarrow \lambda_m^B$; inoltre, il residuo di \mathcal{S}_N in $\lambda_k^C = \lambda_m^B$ soddisfa la seguente formula ricorsiva:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_N(\{\lambda_j^C\}, \{\lambda_j^B\}, \{r_j^C\}, \{r_j^B\})|_{\lambda_k^C \rightarrow \lambda_m^B} &= g(\lambda_k^C, \lambda_m^B) (r_k^C - r_m^B) \times \\ &\times \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N f(\lambda_k^C, \lambda_j^C) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^N f(\lambda_m^B, \lambda_j^B) \mathcal{S}_{N-1}(\{\lambda_j^C\}_{j \neq k}, \{\lambda_j^B\}_{j \neq m}, \{\tilde{r}_j^C\}_{j \neq k}, \{\tilde{r}_j^B\}_{j \neq m}) , \end{aligned} \quad (3.68)$$

dove

$$\tilde{r}^{C/B} = r_j^{C/B} \frac{f(\lambda_j^{C/B}, \lambda_m^B)}{f(\lambda_m^B, \lambda_j^{C/B})} \quad (3.69)$$

e le funzioni $f(\lambda, \mu)$ e $g(\lambda, \mu)$ sono quelle che compaiono nella definizione della matrice $R(\lambda, \mu)$. Per calcolare il prodotto scalare \mathcal{S}_N dovremmo in generale effettuare una serie di scambi tra gli operatori B e C , utilizzando le regole di commutazione (3.31)-(3.44). La formula di Slavnov ci dice qual'è il risultato finale di questa procedura (il cui numero di passi cresce esponenzialmente con N), nel caso in cui l'insieme $\{\lambda_j^C\}_{j=1}^N$ soddisfi le equazioni di Bethe (3.28), che riportiamo qui per chiarezza:

$$r_j^C = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \frac{f(\lambda_k^C, \lambda_j^C)}{f(\lambda_j^C, \lambda_k^C)} . \quad (3.70)$$

Teorema 3.2 (Slavnov). *Dato un insieme di rapidità $\{\lambda_k^C\}$ che soddisfi (3.70) e un insieme di rapidità generico $\{\lambda_k^B\}$, il prodotto scalare (3.67) può essere scritto in termini del determinante di una matrice $N \times N$; precisamente si ha:*

$$\mathcal{S}_N = G_N(\{\lambda_j^C\}, \{\lambda_j^B\}) \det_N M_{lk}(\{r_j^B\}, \{\lambda_j^C\}, \{\lambda_j^B\}) , \quad (3.71)$$

dove

$$G_N(\{\lambda_j^C\}, \{\lambda_j^B\}) = \prod_{j>k}^N g(\lambda_j^B, \lambda_k^B) g(\lambda_k^C, \lambda_j^C) \prod_{\substack{j=1 \\ k=1}}^N h(\lambda_j^C, \lambda_k^B), \quad (3.72)$$

$$M_{lk}(\{r_j^B\}, \{\lambda_j^C\}, \{\lambda_j^B\}) = \frac{g(\lambda_k^C, \lambda_l^B)}{h(\lambda_k^C, \lambda_l^B)} - r_l^B \frac{g(\lambda_l^B, \lambda_k^C)}{h(\lambda_l^B, \lambda_k^C)} \prod_{m=1}^N \frac{f(\lambda_l^B, \lambda_m^C)}{f(\lambda_m^C, \lambda_l^B)}, \quad (3.73)$$

essendo

$$h(\lambda, \mu) = \frac{f(\lambda, \mu)}{g(\lambda, \mu)}. \quad (3.74)$$

Non riportiamo i dettagli della dimostrazione per la quale rimandiamo a [43], e di cui qui illustriamo solamente l'idea generale. Si procede per induzione; è immediato intanto verificare la (3.71) per $N = 2$. Per il passo induttivo, si verifica che anche il prodotto $\Theta_N \equiv G_N(\{\lambda_j^C\}, \{\lambda_j^B\}) \det_N M_{lk}(\{r_j^B\}, \{\lambda_j^C\}, \{\lambda_j^B\})$ verifica la relazione ricorsiva (3.68). Questo implica per ipotesi induttiva che la differenza $\mathcal{S}_N - \Theta_N$ non ha poli nel piano complesso come funzione della variabile λ_j^C . Osservando che per $\lambda_j^C \rightarrow \infty$ si ha $\mathcal{S}_N \rightarrow 0$, $\Theta_N \rightarrow 0$, si deduce $\mathcal{S}_N = \Theta_N$ e si conclude la dimostrazione.

Dal teorema 3.2 la formula per il calcolo della norma si ottiene come corollario, prendendo il limite $\lambda_j^C \rightarrow \lambda_j^B$ nella (3.71). Nello specifico, si pone $\lambda_j^B = \lambda_j^C + \varepsilon$, e si usa lo sviluppo seguente:

$$r_j^B = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \frac{f(\lambda_k^C, \lambda_j^C)}{f(\lambda_j^C, \lambda_k^C)} \left(1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \ln[r(\lambda_j)] \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (3.75)$$

Consideriamo per esempio il modello di Lieb-Liniger; usando le formule di questa sezione, e sostituendo la (3.75) nella (3.71) arriviamo alla formula per la norma degli stati di Bethe:

$$\langle 0 | \prod_{j=1}^N \mathcal{C}(\lambda_j) \prod_{j=1}^N \mathcal{B}(\lambda_j) | 0 \rangle = c^N \prod_{j \neq k} f(\lambda_j, \lambda_k) \det_N \frac{\partial \Gamma_j}{\partial \lambda_k}, \quad (3.76)$$

dove

$$\Gamma_j = i \ln \left\{ r_i \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \frac{f(\lambda_j, \lambda_k)}{f(\lambda_k, \lambda_j)} \right\}, \quad (3.77)$$

da cui si ricava subito la (3.65), che è così dimostrata.

3.5.2 Fattori di forma

Un altro merito dell'algebraic Bethe ansatz è stato quello di rendere possibile il calcolo di alcuni fattori di forma, cioè espressioni del tipo:

$$F(\{\lambda_j\}, \{\mu_j\})[\mathcal{O}] = \langle \{\lambda_j\} | \mathcal{O} | \{\mu_j\} \rangle, \quad (3.78)$$

dove \mathcal{O} è un opportuno operatore; gli operatori a cui saremo interessati saranno operatori locali. Uno dei modi in cui il calcolo (3.78) è possibile è quello di esprimere l'operatore \mathcal{O} in termini delle entrate della matrice di monodromia (si tratta del cosiddetto *quantum inverse scattering method*) in modo da poter utilizzare i metodi algebrici che si sono rivelati così potenti per il calcolo delle norme. Il problema dell'inverse scattering è stato risolto per il modello XXZ per gli operatori locali, cioè quelli che possono essere scritti in termini di operatori di Pauli corrispondenti ad un singolo sito della catena. La soluzione è comparsa per la prima volta in [44], [45] e generalizzata in [46]. Questi lavori sono tecnicamente complicati, ma le espressioni finali ottenute sono relativamente semplici, e le riportiamo di seguito per completezza. Con le notazioni utilizzate in questo capitolo, valgono le relazioni seguenti (scrivendo per brevità A al posto di A^{XXZ} , e analogamente per gli altri operatori):

$$\sigma_z^j = \frac{1}{\sinh^{N^2} \eta} (A + D)^{j-1} (\eta/2) \cdot (A - D) (\eta/2) \cdot (A + D)^{N-j} (\eta/2), \quad (3.79)$$

$$\sigma_-^j = \frac{1}{\sinh^{N^2} \eta} (A + D)^{j-1} (\eta/2) \cdot B(\eta/2) \cdot (A + D)^{N-j} (\eta/2), \quad (3.80)$$

$$\sigma_+^j = \frac{1}{\sinh^{N^2} \eta} (A + D)^{j-1} (\eta/2) \cdot C(\eta/2) \cdot (A + D)^{N-j} (\eta/2). \quad (3.81)$$

Notiamo che nelle (3.79)-(3.81) gli operatori compaiono con argomento fissato al valore $\eta/2$. Dato un operatore \mathcal{O} definito sulla catena di spin, possiamo usare queste formule per riscrivere \mathcal{O} in (3.78), in modo da ottenere un valore di aspettazione sul vuoto $|0\rangle$ di un prodotto delle entrate della matrice di monodromia, di cui conosciamo le regole di commutazione. Il problema si riduce quindi ad uno algebrico analogo a quello del calcolo delle norme; per alcuni operatori questo rende possibile scrivere il fattore di forma (3.78) in termini del determinante di un'opportuna matrice [44], [45], [46].

Il problema dell'inverse scattering per il modello di Lieb-Liniger non è invece ad oggi stato risolto, cioè non esiste nessuna formula per esprimere gli operatori $\psi(x)$, $\psi^\dagger(x)$ in termini degli operatori A^{LL} , B^{LL} , C^{LL} , D^{LL} . In questo caso, è necessario un approccio diverso e sempre grazie all'utilizzo dell'algebraic Bethe ansatz diversi fattori di forma di operatori locali sono stati calcolati. [34], [47], [48], [49]. Nel capitolo 5 utilizzeremo delle formule per il calcolo di alcuni fattori di forma, che introdurremo

più avanti senza presentarne la derivazione, spesso molto lunga e tecnica, rimandando alla letteratura per approfondimenti.

Capitolo 4

Formule ricorsive e alcuni risultati analitici

Riprendiamo la discussione introdotta nel capitolo 1 sullo studio della dinamica del non equilibrio. Concentriamoci su un modello specifico con hamiltoniana H , di cui indichiamo autostati ed autovalori rispettivamente con $|\psi_\alpha\rangle$ ed E_α ; preparando il sistema in uno stato iniziale $|\psi\rangle$ possiamo scrivere l'evoluzione temporale per il valore di aspettazione di un'osservabile d'interesse \mathcal{O} sullo stato del sistema (ponendo come al solito $\hbar = 1$):

$$\langle\psi(t)|\mathcal{O}|\psi(t)\rangle = \sum_{\alpha,\beta} c_\alpha^* c_\beta \langle\psi_\alpha|\mathcal{O}|\psi_\beta\rangle e^{i(E_\alpha - E_\beta)t}, \quad (4.1)$$

dove $c_\alpha = \langle\psi_\alpha|\psi\rangle$, $c_\beta = \langle\psi_\beta|\psi\rangle$. Come abbiamo visto, in un modello integrabile siamo in grado di scrivere gli autostati normalizzati e di calcolare i fattori di forma $\langle\psi_\alpha|\mathcal{O}|\psi_\beta\rangle$. Tuttavia, il calcolo dei prodotti scalari (o *overlap*) $\langle\psi_\alpha|\psi\rangle$, è tipicamente molto difficile anche per stati ψ con una forma semplice. Si noti naturalmente che i prodotti scalari possono sempre essere ottenuti utilizzando le funzioni d'onda, ma il grado di complessità di questa rappresentazione anche in questo caso rende impossibile qualsiasi trattazione analitica o numerica (per esempio, per il modello di Lieb-Liniger con N particelle, tali prodotti scalari richiedono il calcolo di almeno $N!$ integrali in N variabili).

Diventa allora cruciale il problema di trovare formule compatte, analoghe a quelle per la norma, per il calcolo dei prodotti scalari tra stati di Bethe e stati iniziali d'interesse. Nonostante i primi fattori di forma furono calcolati già negli anni Ottanta, il problema di trovare formule compatte per gli overlap ha ricevuto attenzione solo negli ultimi anni, a seguito dell'interesse per lo studio della dinamica del non equilibrio in sistemi

integrabili [50]. Inoltre solo un numero relativamente piccolo di risultati esatti è stato trovato fino ad ora [51], [52], [53], [54], [55], [56]; rimane per esempio aperto il problema del calcolo degli overlap per un quench in un modello integrabile generico con variazione arbitraria del parametro di controllo. In questo capitolo presentiamo un modo per ottenere delle formule ricorsive per il calcolo dei prodotti scalari nei modelli su reticolo (in particolare, ci concentreremo sul modello XXZ) tra stati di Bethe e stati fattorizzati nello spazio. Da una di queste formule ricorsive, deriveremo una formula compatta per l'overlap con lo stato di Néel che verrà definito nel seguito (questa formula è stata dimostrata per la prima volta alla fine del 2013 da B.Pozsgay in [53], utilizzando però tecniche diverse e in modo più complicato). Generalizzeremo poi quanto fatto per il modello di Lieb-Liniger.

I risultati principali ottenuti in questa sezione sono le formule (4.17), (4.38), (4.51), (4.96).

4.1 Formule ricorsive per il modello XXZ

La trattazione in questa sezione sarà necessariamente tecnica ed utilizziamo in modo sistematico gli strumenti introdotti nel capitolo precedente. Per rendere il discorso più chiaro e facile da seguire, fissiamo inizialmente le notazioni che useremo, più leggere rispetto a quelle del capitolo 3.

Consideriamo la catena XXZ di N siti; nel seguito considereremo per semplicità N pari, $N = 2M$; indichiamo con $\mathcal{H}_{N\dots 1} = h_N \otimes \dots \otimes h_1$ lo spazio di Hilbert associato alla catena di spin, dove h_i è lo spazio di Hilbert associato allo spin i -esimo. Prendiamo come L -matrix la (3.4) che riportiamo per chiarezza:

$$L_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \sinh(\lambda + \frac{\eta}{2}) & & & \\ & \sinh(\lambda - \frac{\eta}{2}) & \sinh(\eta) & \\ & \sinh(\eta) & \sinh(\lambda - \frac{\eta}{2}) & \\ & & & \sinh(\lambda + \frac{\eta}{2}) \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

e come R -matrix la (3.6):

$$R(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} f(\mu, \lambda) & & & \\ & g(\mu, \lambda) & 1 & \\ & 1 & g(\mu, \lambda) & \\ & & & f(\mu, \lambda) \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

dove ricordiamo

$$f(\mu, \lambda) = \frac{\sinh(\lambda - \mu + \eta)}{\sinh(\lambda - \mu)}, \quad g(\mu, \lambda) = \frac{\sinh(\eta)}{\sinh(\lambda - \mu)}. \quad (4.4)$$

La matrice di monodromia è indicata con

$$T_{N\dots 1}(\lambda) = L_N(\lambda) \dots L_1(\lambda) \quad (4.5)$$

e agisce sullo spazio $h_0 \otimes H_{N\dots 1}$ essendo h_0 lo spazio ausiliario. Poniamo inoltre

$$|0\rangle_{N\dots 1} = |\uparrow\rangle_N \otimes \dots \otimes |\uparrow\rangle_1. \quad (4.6)$$

Come nel capitolo precedente, poniamo

$$|i_1, \dots, i_k\rangle_{N\dots 1} = \sigma_-^{i_1} \dots \sigma_-^{i_k} |\uparrow\rangle_N \otimes \dots \otimes |\uparrow\rangle_1 = \sigma_-^{i_1} \dots \sigma_-^{i_k} |0\rangle_{N\dots 1}, \quad (4.7)$$

dove σ_-^k è l'operatore di Pauli che agisce sul sito k -esimo.

In questa sezione studiamo l'overlap tra un generico autostato di Bethe del modello XXZ e uno stato iniziale fattorizzato nello spazio. In particolare, tratteremo due casi specifici.

- Il primo stato che consideriamo è quello corrispondente a tutti gli spin che puntano nella direzione x :

$$|\psi_1\rangle_{N\dots 1} = |\chi\rangle_N \otimes |\chi\rangle_{N-1} \otimes \dots \otimes |\chi\rangle_1, \quad (4.8)$$

dove scegliamo:

$$|\chi\rangle = |+\rangle = |\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle, \quad (4.9)$$

Le (4.8),(4.9) definiscono lo stato fondamentale della catena XXZ con un campo magnetico trasverso h nel limite $h \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} H^{XXZ}(h = \infty) = \\ = \left\{ J \sum_{j=1}^N \{ \sigma_x^j \sigma_x^{j+1} + \sigma_y^j \sigma_y^{j+1} + \Delta (\sigma_z^j \sigma_z^{j+1} - 1) \} - h \sum_{j=1}^N \sigma_x^j \right\} \Big|_{h=\infty}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

- Il secondo stato che consideriamo è il cosiddetto *stato di Néel*:

$$|\psi_2\rangle = |\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow \dots \uparrow\downarrow\rangle, \quad (4.11)$$

che possiamo riscrivere come:

$$|\psi_2\rangle_{N\dots 1} = |\varphi\rangle_{N,N-1} \otimes |\varphi\rangle_{N-2,N-3} \otimes \dots \otimes |\varphi\rangle_{2,1} , \quad (4.12)$$

dove $|\varphi\rangle_{i,i-1}$ appartiene allo spazio $h_i \otimes h_{i-1}$ ed è dato da

$$|\varphi\rangle_{i,i-1} = |\uparrow\rangle_i \otimes |\downarrow\rangle_{i-1} . \quad (4.13)$$

Lo stato definito da (4.12),(4.13) è lo stato fondamentale della catena XXZ quando $\Delta \rightarrow \infty$.

Il nostro approccio è facilmente generalizzabile a tutti gli stati della forma (4.8) o (4.12): la definizione esplicita dei vettori $|\chi\rangle$, $|\varphi\rangle$ comparirà solo alla fine della trattazione e sarà chiaro come adattare il procedimento nei diversi casi. Osserviamo in particolare che tra gli stati che possiamo considerare con il nostro approccio è compreso il cosiddetto *dimer state*, definito come:

$$|\psi_3\rangle = \left(\frac{|\uparrow\rangle_N |\downarrow\rangle_{N-1} - |\downarrow\rangle_N |\uparrow\rangle_{N-1}}{\sqrt{2}} \right) \otimes \dots \otimes \left(\frac{|\uparrow\rangle_2 |\downarrow\rangle_1 - |\downarrow\rangle_2 |\uparrow\rangle_1}{\sqrt{2}} \right) \quad (4.14)$$

che è lo stato fondamentale dell'hamiltoniana di Majumdar-Ghosh [57]:

$$H_{MG} = J \left\{ \sum_{j=1}^N \sigma_{\alpha}^j \sigma_{\alpha}^{j+1} + \frac{1}{2} \sigma_{\alpha}^j \sigma_{\alpha}^{j+2} \right\} . \quad (4.15)$$

4.1.1 Formula ricorsiva per stati completamente fattorizzati

Siamo interessati al prodotto scalare tra uno stato di Bethe $B(\lambda_1) \dots B(\lambda_r) |0\rangle$ e lo stato $|\psi_1\rangle$ definito prima. Definiamo quindi:

$$S_r^N(\lambda_1, \dots, \lambda_r) = {}_{N\dots 1} \langle \psi_1 | B(\lambda_r) \dots B(\lambda_1) | 0 \rangle_{N\dots 1} . \quad (4.16)$$

Vogliamo dimostrare la seguente formula ricorsiva

$$\begin{aligned} S_r^{N+1}(\lambda_1, \dots, \lambda_r) &= \left[\prod_{k=1}^r \sinh \left(\lambda_k + \frac{\eta}{2} \right) \right] S_r^N(\lambda_1, \dots, \lambda_r) + \\ &+ \sinh(\eta) \sum_{j=1}^r \sinh^N \left(\lambda_j - \frac{\eta}{2} \right) \left[\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^r \sinh \left(\lambda_k + \frac{\eta}{2} \right) f(\lambda_k, \lambda_j) \right] S_{r-1}^N(\lambda_1, \dots, \hat{\lambda}_j, \dots, \lambda_r) , \end{aligned} \quad (4.17)$$

dove con la notazione $\widehat{\lambda}_j$ si intende che λ_j va tolto dall'elenco. Prima di procedere, osserviamo che vale:

$$S_r^N(\lambda_1, \dots, \lambda_r) = {}_{N \dots 1} \langle v_r | B(\lambda_r) \dots B(\lambda_1) | 0 \rangle_{N \dots 1} , \quad (4.18)$$

dove

$$|v_r\rangle_{N \dots 1} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq N} |i_1, \dots, i_r\rangle_{N \dots 1} . \quad (4.19)$$

La (4.18) si verifica facilmente tenendo conto che stati con numeri di spin down diversi sono ortogonali. Questa osservazione è interessante perché trovare l'overlap con lo stato $|\psi_1\rangle$ fornirebbe automaticamente quello con il vettore $|v_r\rangle$. É possibile dimostrare che il modello di Lieb-Liniger può essere ottenuto con un'opportuna procedura di *scaling* dal modello XXZ , e in questo scaling $|v_r\rangle$ in (4.19) viene mandato nello stato in cui tutti i bosoni hanno impulso nullo, cioè il condensato di Bose-Einstein la cui funzione d'onda a molti corpi è costante. In questo modo si otterrebbe automaticamente, tramite una procedura di scaling, anche la derivazione di una formula per il prodotto scalare nel modello di Lieb-Liniger tra autostati di Bethe e lo stato corrispondente al condensato di Bose-Einstein.

Passiamo ora alla dimostrazione della (4.17). Consideriamo una catena di $N + 1$ siti; possiamo scrivere la matrice di monodromia fattorizzando il contributo del sito N -esimo:

$$\begin{aligned} T_{N+1 \dots 1}(\lambda) &= \\ &= L_{N+1}(\lambda) T_{N \dots 1}(\lambda) = \begin{pmatrix} A_{N+1}(\lambda) & B_{N+1}(\lambda) \\ C_{N+1}(\lambda) & D_{N+1}(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{N \dots 1}(\lambda) & B_{N \dots 1}(\lambda) \\ C_{N \dots 1}(\lambda) & D_{N \dots 1}(\lambda) \end{pmatrix} , \end{aligned} \quad (4.20)$$

dove gli operatori $A_{N+1}(\lambda)$, $B_{N+1}(\lambda)$, $C_{N+1}(\lambda)$, $D_{N+1}(\lambda)$ agiscono su h_{N+1} e sono dati dalla (4.2), mentre $A_{N \dots 1}(\lambda)$, $B_{N \dots 1}(\lambda)$, $C_{N \dots 1}(\lambda)$ e $D_{N \dots 1}(\lambda)$, agiscono su $\mathcal{H}_{N \dots 1}$. Per comodità rinominiamo gli operatori e gli stati di vuoto:

$$\widetilde{X}(\lambda) \equiv X_{N+1}(\lambda) , \quad (4.21)$$

$$X(\lambda) \equiv X_{N \dots 1}(\lambda) , \quad (4.22)$$

$$|\widetilde{0}\rangle \equiv |\uparrow\rangle_{N+1} , \quad |0\rangle \equiv |0\rangle_{N \dots 1} = |\uparrow\rangle_N \otimes \dots \otimes |\uparrow\rangle_1 . \quad (4.23)$$

Abbiamo un “modello a due siti generalizzato” in cui lo stato di vuoto è il prodotto di due stati di vuoto $|0\rangle_{N+1 \dots 1} = |\widetilde{0}\rangle \otimes |0\rangle$ (un modello a due siti generalizzato è stato utilizzato per esempio per il calcolo di alcune funzioni di correlazione nel modello di Lieb-Liniger [34]).

Con questa notazione, dalla (4.20), abbiamo

$$B_{N+1\dots 1}(\lambda) = \tilde{A}(\lambda)B(\lambda) + \tilde{B}(\lambda)D(\lambda) . \quad (4.24)$$

Valgono inoltre le relazioni

$$\tilde{A}(\lambda) |\tilde{0}\rangle = \tilde{a}(\lambda) |\tilde{0}\rangle = \sinh\left(\lambda + \frac{\eta}{2}\right) |\tilde{0}\rangle , \quad (4.25)$$

$$D(\lambda) |0\rangle = d(\lambda) |0\rangle = \sinh^N\left(\lambda - \frac{\eta}{2}\right) |0\rangle . \quad (4.26)$$

Per calcolare $S_r^{N+1}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ dobbiamo prendere il prodotto scalare tra lo stato $|+\rangle^{\otimes N+1}$ e lo stato

$$\begin{aligned} & B(\lambda_r) \dots B(\lambda_1) |0\rangle_{N+1\dots 1} = \\ & = \left(\tilde{A}(\lambda_r)B(\lambda_r) + \tilde{B}(\lambda_r)D(\lambda_r) \right) \dots \left(\tilde{A}(\lambda_1)B(\lambda_1) + \tilde{B}(\lambda_1)D(\lambda_1) \right) |\tilde{0}\rangle \otimes |0\rangle . \end{aligned} \quad (4.27)$$

Semplifichiamo l'espressione in (4.27) usando tecniche standard di algebraic Bethe ansatz. Sviluppando il prodotto di operatori, otteniamo una sommatoria di termini che sono prodotto di r operatori tildati e r operatori non tildati. Siccome operatori tildati e non tildati commutano (agiscono su spazi diversi) in ogni termine possiamo portare a sinistra i primi e a destra i secondi, in modo che nella sommatoria ogni termine è della forma

$$\left[\tilde{A}(\lambda_r) \dots \tilde{B}(\lambda_j) \dots \tilde{A}(\lambda_1) |\tilde{0}\rangle \right] \otimes [B(\lambda_r) \dots D(\lambda_j) \dots B(\lambda_1) |0\rangle] . \quad (4.28)$$

Osserviamo che nella nostra rappresentazione dell'algebra degli operatori, $\tilde{B}(\lambda_i)\tilde{B}(\lambda_j) = 0$, quindi nella sommatoria dobbiamo tenere solo i termini che hanno al più un operatore $\tilde{B}(\lambda)$. Si vede subito che c'è un solo termine della sommatoria che non contiene operatori $\tilde{B}(\lambda)$

$$\left[\prod_{j=1}^r \tilde{A}(\lambda_j) |\tilde{0}\rangle \right] \otimes \left[\prod_{j=1}^r B(\lambda_j) |0\rangle \right] = \left[\prod_{j=1}^r \tilde{a}(\lambda_j) \right] |\tilde{0}\rangle \otimes \left[\prod_{j=1}^r B(\lambda_j) |0\rangle \right] , \quad (4.29)$$

mentre i termini non nulli restanti nella sommatoria sono quelli che contengono esattamente un $\tilde{B}(\lambda)$; il contributo di questi termini è

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^r \left[\tilde{A}(\lambda_r) \tilde{A}(\lambda_{r-1}) \dots \tilde{A}(\lambda_{j+1}) \tilde{B}(\lambda_j) \tilde{A}(\lambda_{j-1}) \dots \tilde{A}(\lambda_1) |\tilde{0}\rangle \right] \otimes \\ & \otimes \left[B(\lambda_r) B(\lambda_{r-1}) \dots B(\lambda_{j+1}) D(\lambda_j) B(\lambda_{j-1}) \dots B(\lambda_1) |0\rangle \right] . \end{aligned} \quad (4.30)$$

Semplifichiamo (4.30) con un argomento simile a quello che abbiamo utilizzato nel capitolo precedente per calcolare $A(\mu) \prod_{j=1}^N B(\nu_j)$ (sezione 3.3). Portando tutti gli operatori \tilde{A} e D a destra, usando le regole di commutazione note, si vede che la sommatoria in (4.30) deve essere della forma

$$\sum_{j=1}^r \tilde{w}_j \otimes \left[d(\lambda_j) \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^r B(\lambda_k) \right) |0\rangle \right] , \quad (4.31)$$

dove

$$\tilde{w}_j = \sum_{k=1}^r s_{j,k}(\{\lambda_i\}) \left[\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^r \tilde{a}(\lambda_l) \right] \tilde{B}(\lambda_k) |\tilde{0}\rangle , \quad (4.32)$$

con $s_{j,k}(\{\lambda_i\})$ coefficienti scalari. Per ottenere un'espressione esplicita del termine \tilde{w}_r osserviamo che nella sommatoria (4.30) dobbiamo considerare solo il termine r -esimo

$$\left[\tilde{B}(\lambda_r) \dots \tilde{A}(\lambda_j) \dots \tilde{A}(\lambda_1) |\tilde{0}\rangle \right] \otimes \left[D(\lambda_r) \dots B(\lambda_j) \dots B(\lambda_1) |0\rangle \right] . \quad (4.33)$$

Infatti, negli altri termini della sommatoria, portando l'operatore $D(\lambda_j)$ verso destra, questo non incontra l'operatore $B(\lambda_r)$ che rimane all'estrema sinistra e si ottengono termini che non intervengono a formare il termine $\tilde{w}_r \otimes \prod_{j=1}^{r-1} B(\lambda_j) |0\rangle$. Portando $D(\lambda_r)$ a destra nella (4.33), si generano una serie di termini; è facile ora vedere che ce n'è solamente uno che dobbiamo considerare per ottenere l'espressione per \tilde{w}_r . In effetti, possiamo usare la formula (3.49) del capitolo precedente, e otteniamo:

$$\tilde{w}_r = \left(\prod_{l=1}^{r-1} f(\lambda_l, \lambda_r) \right) \left(\prod_{l=1}^{r-1} \tilde{a}(\lambda_l) \right) \left[\tilde{B}(\lambda_r) |\tilde{0}\rangle \right] . \quad (4.34)$$

Riassumendo, abbiamo ricavato il termine r -esimo nella sommatoria (4.31). Osserviamo che l'espressione (4.27) è simmetrica nei $\{\lambda_i\}$ e dunque il ragionamento fatto per λ_r vale per tutti i λ_i (fissato λ_i , possiamo portare $B(\lambda_i)$ all'estrema sinistra del membro di sinistra della (4.27)). In conclusione, la sommatoria (4.30) si può riscrivere come

$$\sum_{j=1}^r d(\lambda_j) \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^r f(\lambda_k, \lambda_j) \tilde{a}(\lambda_k) \right) \left[\tilde{B}(\lambda_j) |\tilde{0}\rangle \right] \otimes \left[\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^r B(\lambda_k) |0\rangle \right] . \quad (4.35)$$

Possiamo quindi finalmente mettere insieme la (4.29) e la (4.35), e osservando che

$$\langle + | \tilde{B}(\lambda) |\tilde{0}\rangle = \sinh(\eta) ; \quad \langle + | \tilde{0}\rangle = 1 , \quad (4.36)$$

si ottiene finalmente la (4.17).

4.1.2 Formula ricorsiva per stati di tipo Néel

Consideriamo adesso il prodotto scalare tra uno stato di Bethe $B(\lambda_1) \dots B(\lambda_M) |0\rangle$ e lo stato $|\psi_2\rangle$ definito precedentemente (per la conservazione del numero di spin down, il prodotto scalare tra uno stato di Bethe $B(\lambda_1) \dots B(\lambda_r) |0\rangle$ con $r \neq M$ e $|\psi_2\rangle$ è nullo). Sottolineiamo ancora che la trattazione che seguiamo si può in realtà facilmente generalizzare a stati della forma (4.12), con $|\varphi\rangle$ stato a due siti arbitrario. Definiamo per cominciare

$$P_M(\lambda_1, \dots, \lambda_M) = {}_{2M \dots 1} \langle \psi_2 | B(\lambda_M) \dots B(\lambda_1) | 0 \rangle_{2M \dots 1} . \quad (4.37)$$

Vogliamo adesso dimostrare, analogamente a quanto fatto nella sezione precedente, la seguente formula ricorsiva:

$$\begin{aligned} P_{M+1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{M+1}) &= \\ &= \sinh(\eta) \sum_{j=1}^{M+1} \sinh^{2M} \left(\lambda_j - \frac{\eta}{2} \right) \sinh \left(\lambda_j + \frac{\eta}{2} \right) \times \\ &\quad \times \left[\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{M+1} \sinh^2 \left(\lambda_k + \frac{\eta}{2} \right) f(\lambda_k, \lambda_j) \right] P_M(\lambda_1, \dots, \hat{\lambda}_j, \dots, \lambda_{M+1}) . \end{aligned} \quad (4.38)$$

Procediamo analogamente alla sezione precedente. Consideriamo una catena di $N+2 = 2(M+1)$ siti. La matrice di monodromia è

$$\begin{aligned} T_{N+2 \dots 1}(\lambda) &= L_{N+2}(\lambda) L_{N+1}(\lambda) T_{N \dots 1}(\lambda) = T_{N+2, N+1}(\lambda) T_{N \dots 1}(\lambda) = \\ &= \begin{pmatrix} A_{N+2, N+1}(\lambda) & B_{N+2, N+1}(\lambda) \\ C_{N+2, N+1}(\lambda) & D_{N+2, N+1}(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{N \dots 1}(\lambda) & B_{N \dots 1}(\lambda) \\ C_{N \dots 1}(\lambda) & D_{N \dots 1}(\lambda) \end{pmatrix} , \end{aligned} \quad (4.39)$$

dove gli operatori $A_{N+2, N+1}(\lambda)$, $B_{N+2, N+1}(\lambda)$, $C_{N+2, N+1}(\lambda)$, $D_{N+2, N+1}(\lambda)$ agiscono su $h_{N+2} \otimes h_{N+1}$, mentre $A_{N \dots 1}(\lambda)$, $B_{N \dots 1}(\lambda)$, $C_{N \dots 1}(\lambda)$ e $D_{N \dots 1}(\lambda)$, agiscono su $\mathcal{H}_{N \dots 1}$. Rinominiamo gli operatori e gli stati di vuoto, in analogia alla sezione precedente:

$$\tilde{X}(\lambda) \equiv X_{N+2, N+1}(\lambda) , \quad (4.40)$$

$$X(\lambda) \equiv X_{N \dots 1}(\lambda) , \quad (4.41)$$

$$|\tilde{0}\rangle \equiv |\uparrow\rangle_{N+2} \otimes |\uparrow\rangle_{N+1} , \quad |0\rangle \equiv |0\rangle_{N \dots 1} = |\uparrow\rangle_N \otimes \dots \otimes |\uparrow\rangle_1 . \quad (4.42)$$

Lo stato di vuoto è ancora il prodotto di due stati di vuoto $|0\rangle_{N+2\dots 1} = |\tilde{0}\rangle \otimes |0\rangle$. Come prima dalla (4.39), abbiamo

$$B_{N+2\dots 1}(\lambda) = \tilde{A}(\lambda)B(\lambda) + \tilde{B}(\lambda)D(\lambda) . \quad (4.43)$$

Valgono inoltre le relazioni

$$\tilde{A}(\lambda) |\tilde{0}\rangle = \tilde{a}(\lambda) |\tilde{0}\rangle = \sinh^2 \left(\lambda + \frac{\eta}{2} \right) |\tilde{0}\rangle , \quad (4.44)$$

$$D(\lambda) |0\rangle = d(\lambda) |0\rangle = \sinh^N \left(\lambda - \frac{\eta}{2} \right) |0\rangle = \sinh^{2M} \left(\lambda - \frac{\eta}{2} \right) |0\rangle . \quad (4.45)$$

Procedendo allora come prima, dobbiamo sviluppare il prodotto di operatori che compare nello stato di Bethe:

$$\begin{aligned} & B(\lambda_{M+1}) \dots B(\lambda_1) |0\rangle_{N+2\dots 1} = \\ & = \left(\tilde{A}(\lambda_{M+1})B(\lambda_{M+1}) + \tilde{B}(\lambda_{M+1})D(\lambda_{M+1}) \right) \dots \left(\tilde{A}(\lambda_1)B(\lambda_1) + \tilde{B}(\lambda_1)D(\lambda_1) \right) |\tilde{0}\rangle \otimes |0\rangle . \end{aligned} \quad (4.46)$$

In questo caso siamo interessati a prendere il prodotto scalare di questo stato con il vettore

$$|\psi\rangle_{N+2\dots 1} = |\varphi\rangle_{N+2,N+1} \otimes |\psi\rangle_{N\dots 1} , \quad (4.47)$$

dove $|\varphi\rangle_{N+2,N+1} \in h_{N+2} \otimes h_{N+1}$ ha un solo spin-down; questo significa che nella sommatoria ottenuta sviluppando il prodotto di operatori in (4.46) dobbiamo tenere solo i termini in cui compare uno e un solo $\tilde{B}(\lambda)$ (gli altri termini sono ortogonali a $|\psi\rangle_{N+2\dots 1}$ per quanto detto). Ci siamo quindi ricondotti a considerare lo stato

$$\sum_{j=1}^{M+1} \left[\tilde{A}(\lambda_{M+1}) \dots \tilde{B}(\lambda_j) \dots \tilde{A}(\lambda_1) |\tilde{0}\rangle \right] \otimes \left[B(\lambda_{M+1}) \dots D(\lambda_j) \dots B(\lambda_1) |0\rangle \right] . \quad (4.48)$$

Semplifichiamo quest'espressione. Possiamo riutilizzare l'argomento della sezione precedente, usato per semplificare (4.30); in questo modo (4.48) diventa

$$\sum_{j=1}^{M+1} d(\lambda_j) \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{M+1} f(\lambda_k, \lambda_j) \tilde{a}(\lambda_k) \right) \left[\tilde{B}(\lambda_j) |\tilde{0}\rangle \right] \otimes \left[\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{M+1} B(\lambda_k) |0\rangle \right] . \quad (4.49)$$

Partendo dalla L -matrix in (4.2) è facile poi calcolare

$${}_{N+2,N+1} \langle \varphi | \tilde{B}(\lambda) |\tilde{0}\rangle = \sinh(\eta) \sinh \left(\lambda + \frac{\eta}{2} \right) . \quad (4.50)$$

Mettendo ora insieme (4.44), (4.45), (4.49), (4.50) si ha finalmente la (4.38).

4.2 Formula determinante per l'overlap con lo stato di Néel

Nella sezione precedente abbiamo ricavato le formule ricorsive (4.17) e (4.38); l'obiettivo sarebbe ora quello di risolverle per ottenere una formula chiusa degli overlap con gli stati $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$. Nel seguito vediamo come siamo stati in grado di risolvere la (4.38), arrivando a scrivere l'overlap con lo stato di Néel in termini del determinante di una matrice $N \times N$ (si veda la (4.51)); una trattazione pressoché identica porta a ottenere una formula compatta anche per l'overlap con lo stato di Majumdar-Ghosh (4.14). Non siamo tuttavia riusciti a risolvere la relazione (4.17), a causa della sua struttura leggermente più complicata.

Risolviamo ora la (4.38). Per prima cosa, osserviamo che la sua struttura ci ricorda l'espansione ricorsiva per il calcolo del determinante di una data matrice. In effetti, non è difficile indovinare “a occhio” quale dev'essere la forma di una matrice il cui determinante soddisfi la (4.38). Sebbene sia possibile procedere in modo diretto, per chiarezza di presentazione procediamo a ritroso: scriviamo prima la soluzione della (4.38) e poi dimostriamo che è effettivamente soluzione. La formula che vogliamo dimostrare è la seguente:

$$\begin{aligned} \langle \psi_2 | \lambda_1, \dots, \lambda_M \rangle &= \\ &= \frac{\prod_{j=1}^M \sinh^{2M}(\lambda_j - \eta/2) \sinh^{2M+1}(\lambda_j + \eta/2)}{\prod_{j=1}^M \sinh(2\lambda_j) \prod_{j < k} \sinh(\lambda_j - \lambda_k) \sinh(\lambda_j + \lambda_k)} \times \\ &\quad \times \det L_M(\lambda_1, \dots, \lambda_M) , \end{aligned} \quad (4.51)$$

dove $L_M(\lambda_1, \dots, \lambda_M)$ è la matrice di dimensione M data da

$$[L(\lambda_1, \dots, \lambda_M)]_{jk} = \coth^{2j}(\lambda_k - \eta/2) - \coth^{2j}(\lambda_k + \eta/2) . \quad (4.52)$$

Si vede a mano che la (4.51) è verificata per $M=2$; per dimostrare che è valida per M generico si procede per induzione. In particolare, basta verificare che soddisfa la relazione ricorsiva (4.38). Inserendo la (4.51) nella (4.38) siamo ricondotti a dimostrare

che la matrice $L_M(\lambda_1, \dots, \lambda_M)$ soddisfa la seguente:

$$\begin{aligned}
 \det L_{M+1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{M+1}) &= \\
 &= \sinh(\eta) \sum_{j=1}^{M+1} \sinh^{2M} \left(\lambda_j - \frac{\eta}{2} \right) \sinh \left(\lambda_j + \frac{\eta}{2} \right) \times \left[\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{M+1} \sinh^2 \left(\lambda_k + \frac{\eta}{2} \right) f(\lambda_k, \lambda_j) \right] \times \\
 &\times \frac{\sinh(2\lambda_j) \prod_{r=1}^{j-1} \sinh(\lambda_r - \lambda_j) \prod_{r=j+1}^{M+1} \sinh(\lambda_j - \lambda_r) \prod_{r \neq j}^{M+1} \sinh(\lambda_j + \lambda_r)}{\sinh^{2M+2}(\lambda_j - \eta/2) \sinh^{2M+3}(\lambda_j + \eta/2) \prod_{k \neq j}^{M+1} \sinh^2(\lambda_k - \eta/2) \sinh^2(\lambda_k + \eta/2)} \times \\
 &\times \det L_M(\lambda_1, \dots, \widehat{\lambda}_j, \dots, \lambda_{M+1}) .
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

Procediamo dunque a dimostrare che la (4.53) è verificata. Definiamo

$$a_j \equiv \lambda_j + \eta/2, \quad b_j \equiv \lambda_j - \eta/2 \tag{4.54}$$

e anche

$$\alpha_k \equiv \coth^2(a_k), \quad \beta_k \equiv \coth^2(b_k) . \tag{4.55}$$

Utilizziamo ora le seguenti identità che si ottengono con manipolazioni elementari:

$$\frac{\sinh(\eta) \sinh(2\lambda_j)}{\sinh^2(\lambda_j - \eta/2) \sinh^2(\lambda_j + \eta/2)} = \coth^2(b_j) - \coth^2(a_j) = \beta_j - \alpha_j , \tag{4.56}$$

$$\frac{\sinh(\lambda_j - \lambda_k + \eta) \sinh(\lambda_j + \lambda_k)}{\sinh^2(\lambda_j + \eta/2) \sinh^2(\lambda_k - \eta/2)} = \coth^2(b_k) - \coth^2(a_j) = \beta_k - \alpha_j , \tag{4.57}$$

$$\left(\prod_{k=1}^{j-1} \sinh(\lambda_k - \lambda_j) \right) \left(\prod_{r=j+1}^{M+1} \sinh(\lambda_j - \lambda_r) \right) = (-1)^{M+j+1} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{M+1} \sinh(\lambda_k - \lambda_j) .$$

(4.58)

Usando le equazioni (4.56), (4.57), (4.58), la (4.53) si semplifica e diventa:

$$\begin{aligned}
 \det L_{M+1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{M+1}) &= \\
 &= \sum_{j=1}^{M+1} (-1)^{j+1} \prod_{k=1}^{M+1} (\beta_k - \alpha_j) \det L_M(\lambda_1, \dots, \widehat{\lambda}_j, \dots, \lambda_{M+1}) .
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

Non è ora difficile dimostrare (4.59); supponiamo cioè di sapere che $L_M(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_M})$

è della forma (4.52) e facciamo vedere che

$$\begin{aligned} X_{M+1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{M+1}) &\equiv \\ &\equiv \sum_{j=1}^{M+1} (-1)^{j+1} \prod_{k=1}^{M+1} (\beta_k - \alpha_j) \det L_M(\lambda_1, \dots, \hat{\lambda}_j, \dots, \lambda_{M+1}) \end{aligned} \quad (4.60)$$

è effettivamente uguale al determinante della matrice $L_{M+1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{M+1})$ data ancora da (4.52). Osserviamo intanto che la matrice $L_M(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_M})$ ha per ipotesi induttiva una forma semplice in termini dei parametri α_k e β_k :

$$[L_M(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_M})]_{jk} = \beta_{i_k}^j - \alpha_{i_k}^j, \quad (4.61)$$

cioè, in forma matriciale, si ha

$$L_M(\lambda_1, \dots, \lambda_M) = \begin{pmatrix} \beta_1 - \alpha_1 & \beta_2 - \alpha_2 & \cdots & \beta_M - \alpha_M \\ \beta_1^2 - \alpha_1^2 & \beta_2^2 - \alpha_2^2 & \cdots & \beta_M^2 - \alpha_M^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_1^M - \alpha_1^M & \beta_2^M - \alpha_2^M & \cdots & \beta_M^M - \alpha_M^M \end{pmatrix}. \quad (4.62)$$

Ricordiamo lo sviluppo di Laplace del determinante di una matrice quadrata A di dimensione N , di elementi a_{ij} , rispetto alla riga N -esima:

$$\det A = \sum_{j=1}^N (-1)^{N+j} a_{Nj} \det \tilde{A}_{Nj}, \quad (4.63)$$

dove \tilde{A}_{Nj} è la matrice di dimensione $N - 1$ ottenuta togliendo da A la riga N -esima e la colonna j -esima. Usando (4.63) si vede facilmente da (4.60) allora che $X_{M+1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{M+1})$ si può scrivere come il determinante di una matrice, nel modo seguente:

$$\begin{aligned} X_{M+1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{M+1}) &= \det [Y_{M+1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{M+1})] = \\ &= \det \begin{pmatrix} \beta_1 - \alpha_1 & \cdots & \beta_{M+1} - \alpha_{M+1} \\ \beta_1^2 - \alpha_1^2 & \cdots & \beta_{M+1}^2 - \alpha_{M+1}^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_1^M - \alpha_1^M & \cdots & \beta_{M+1}^M - \alpha_{M+1}^M \\ (-1)^M \prod_{k=1}^{M+1} (\beta_k - \alpha_1) & \cdots & (-1)^M \prod_{k=1}^{M+1} (\beta_k - \alpha_{M+1}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Concentriamoci sull'ultima riga; l'elemento j -esimo di quest'ultima si scrive come

$$\begin{aligned}
 (-1)^M \prod_{k=1}^{M+1} (\beta_k - \alpha_j) &= \\
 &= -\alpha_j^{M+1} + \alpha_j^M \left(\sum_{i=1}^{M+1} \beta_i \right) - \alpha_j^{M-1} \left(\sum_{1 \leq i < j \leq M+1} \beta_i \beta_j \right) + \alpha_j^{M-2} \left(\sum_{i < j < k} \beta_i \beta_j \beta_k \right) + \dots \quad (4.65)
 \end{aligned}$$

Avendo in mente la forma dell'equazione che dobbiamo ottenere, e sfruttando le proprietà della funzione determinante, viene naturale semplificare la matrice Y_{M+1} in modo da lasciare invariato $X_{M+1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{M+1})$; in particolare, effettuiamo le seguenti operazioni sulle righe di Y_{M+1} (è evidente che queste operazioni lasciano invariato il determinante $X_{M+1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{M+1})$):

- moltiplichiamo la M -esima riga per $\left(\sum_{i=1}^{M+1} \beta_i \right)$ e la sottraiamo alla $(M+1)$ -esima riga;
- moltiplichiamo la $(M-1)$ -esima riga per $\left(\sum_{i < j} \beta_i \beta_j \right)$ e la sommiamo alla $(M+1)$ -esima riga;
- moltiplichiamo la $(M-2)$ -esima riga per $\left(\sum_{i < j < k} \beta_i \beta_j \beta_k \right)$ e la sottraiamo alla $(M+1)$ -esima riga;
- iteriamo questa procedura; l'ultimo passo sarà quello di moltiplicare la prima riga per $\beta_1 \cdots \beta_{M+1}$ e di sottrarla o sommarla (dipende dalla parità di M) alla $(M+1)$ -esima riga.

É facile vedere, usando la (4.65), che alla fine di questa sequenza di operazioni la riga $(M+1)$ -esima coincide con la riga $(M+1)$ -esima della matrice $L_{M+1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{M+1})$, cioè:

$$\left((\beta_1^{M+1} - \alpha_1^{M+1}), (\beta_2^{M+1} - \alpha_2^{M+1}), \dots, (\beta_{M+1}^{M+1} - \alpha_{M+1}^{M+1}) \right) \quad (4.66)$$

e questo è quello che dovevamo dimostrare.

La formula (4.51) è stata dimostrata per la prima volta nell'articolo di B. Pozsgay [53] comparso su arXiv nel settembre 2013, dove tuttavia è utilizzato un metodo più avanzato di *boundary Bethe ansatz* e la trattazione è a nostro avviso più complicata. La (4.51) è stata semplificata negli articoli [54], [55], comparsi su arXiv rispettivamente in gennaio e marzo 2014. Il vantaggio del nostro approccio rispetto a quello presentato da Pozsgay, oltre che nella maggiore semplicità, sta nel fatto che è in linea di principio generalizzabile ad altri stati, come ad esempio $|\psi_1\rangle$, o ad altri modelli integrabili su

reticolo. Da questo punto di vista sarebbe quindi importante riuscire a risolvere anche la formula di ricorrenza (4.17).

4.3 Formule Ricorsive per il modello di Lieb-Liniger

Il metodo della sezione precedente, applicabile in modo naturale su modelli integrabili su reticolo, può essere generalizzato anche al modello continuo di Lieb-Liniger. Il prezzo da pagare è una trattazione e un risultato finale più complessi, che presentiamo nel seguito. In questa sezione ci concentriamo in particolare sul prodotto scalare tra uno stato di Bethe e lo stato in cui tutti i bosoni hanno impulso nullo, cioè il condensato di Bose-Einstein la cui funzione d'onda a molti corpi è costante:

$$\Psi(x_1, \dots, x_M) = \frac{1}{L^{M/2}} . \quad (4.67)$$

Indichiamo lo stato corrispondente alla (4.67) con $|BEC_M\rangle$. Come discusso nel capitolo precedente (sezione 3.4) il modello di Lieb-Liniger può essere trattato come limite del corrispondente modello discreto infinitesimo. Per chiarezza, fissiamo le notazioni più leggere che useremo in questa sezione. Nel modello discreto, lo spazio di Hilbert che si considera è $\mathcal{H}_{N \dots 1} = h_N \otimes \dots \otimes h_1$, dove h_i è uno spazio a dimensione infinita. Si definiscono gli operatori ψ_n e ψ_n^\dagger , che agiscono sullo spazio h_n e che soddisfano $[\psi_n, \psi_m^\dagger] = \frac{1}{\Delta} \delta_{n,m}$, $[\psi_n, \psi_m] = [\psi_n^\dagger, \psi_m^\dagger] = 0$. Si prende come L-matrix la (3.60):

$$L_n(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 - i\lambda \frac{\Delta}{2} & -i\sqrt{c}\psi_n^\dagger \Delta \\ i\sqrt{c}\psi_n \Delta & 1 + i\lambda \frac{\Delta}{2} \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\Delta^2) \quad (4.68)$$

e come R-matrix la (3.61):

$$R(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} f(\mu, \lambda) & & & \\ & g(\mu, \lambda) & 1 & \\ & 1 & g(\mu, \lambda) & \\ & & & f(\mu, \lambda) \end{pmatrix} , \quad (4.69)$$

dove

$$f(\mu, \lambda) = \frac{\mu - \lambda + ic}{\mu - \lambda}, \quad g(\mu, \lambda) = \frac{ic}{\mu - \lambda} . \quad (4.70)$$

Il vuoto del modello discreto si ottiene come prodotto degli stati di vuoto dei singoli spazi:

$$|0\rangle_{N \dots 1} = |0\rangle_N \otimes \dots \otimes |0\rangle_1 . \quad (4.71)$$

Come discusso nel capitolo precedente, alla fine della trattazione dovremo prendere il limite $N \rightarrow \infty$, $\Delta \rightarrow 0$ tenendo costante $L = N\Delta$. Il limite definisce una matrice di monodromia $T_{[L,0]}(\lambda)$ con entrate $A_{[L,0]}(\lambda)$, $B_{[L,0]}(\lambda)$, $C_{[L,0]}(\lambda)$, $D_{[L,0]}(\lambda)$, che agiscono su un opportuno spazio di funzioni. Si ha uno stato di vuoto $|0\rangle_{[L,0]}$ tale che

$$\begin{aligned} A_{[L,0]}(\lambda) |0\rangle_{[L,0]} &= a_{[L,0]}(\lambda) |0\rangle_{[L,0]} = e^{-i\lambda L/2} |0\rangle_{[L,0]} , \\ D_{[L,0]}(\lambda) |0\rangle_{[L,0]} &= d_{[L,0]}(\lambda) |0\rangle_{[L,0]} = e^{i\lambda L/2} |0\rangle_{[L,0]} . \end{aligned} \quad (4.72)$$

Si passa inoltre dagli operatori ψ_n , ψ_n^\dagger agli operatori $\psi(x)$, $\psi^\dagger(x)$. Possiamo riscrivere lo stato d'interesse corrispondente alla funzione d'onda (4.67) in seconda quantizzazione (con una normalizzazione comoda per la trattazione seguente):

$$|BEC_M\rangle_{[L,0]} \equiv \int_0^L dx_1 \dots \int_0^L dx_M \psi^\dagger(x_1) \dots \psi^\dagger(x_M) |0\rangle_{[L,0]} . \quad (4.73)$$

Osserviamo che poiché stati con numeri di particelle diversi sono ortogonali, possiamo ricondurci a studiare

$$\begin{aligned} P_M(L; \lambda_1, \dots, \lambda_M) &\equiv \\ &\equiv M! \int_{[L,0]} \langle 0 | \exp \left[\int_0^L dx \psi(x) \right] B_{[L,0]}(\lambda_1) \dots B_{[L,0]}(\lambda_M) |0\rangle_{[L,0]} . \end{aligned} \quad (4.74)$$

Infatti siccome gli operatori $\psi(x)$ sono tutti commutanti fra loro (e non ci sono dunque problemi di ordinamento), possiamo sviluppare

$$\begin{aligned} &_{[L,0]} \langle 0 | e^{\int_0^L dx \psi(x)} = \\ &= {}_{[L,0]} \langle 0 | \left(1 + \dots + \frac{1}{M!} \int_0^L dx_1 \dots \int_0^L dx_M \psi(x_1) \dots \psi(x_M) + \dots \right) \end{aligned} \quad (4.75)$$

e quindi per la conservazione del numero di particelle effettivamente

$${}_{[L,0]} \langle BEC_M | B_{[L,0]}(\lambda_1) \dots B_{[L,0]}(\lambda_M) |0\rangle_{[L,0]} = P_M(L; \lambda_1, \dots, \lambda_M) . \quad (4.76)$$

Vogliamo dimostrare la seguente formula ricorsiva:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dL} P_{M+1}(L; \lambda_1, \dots, \lambda_{M+1}) &= - \left(\frac{i}{2} \sum_{j=1}^{M+1} \lambda_j \right) P_{M+1}(L; \lambda_1, \dots, \lambda_{M+1}) + \\ &- i(M+1)\sqrt{c} \sum_{j=1}^{M+1} e^{i\lambda_j L/2} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{M+1} f(\lambda_k, \lambda_j) P_M(L; \lambda_1, \dots, \hat{\lambda}_j, \dots, \lambda_{M+1}) . \end{aligned} \quad (4.77)$$

Consideriamo il modello di Lieb-Liniger sul segmento $I_{[L+\varepsilon,0]} = [0, L+\varepsilon]$; pensando al modello continuo come limite di quello discreto, si vede che otteniamo nel caso continuo un modello a due siti. Lo spazio di Hilbert corrispondente si fattorizza come $H_{[L+\varepsilon,0]} = H_{[L+\varepsilon,L]} \otimes H_{[L,0]}$; gli operatori $\psi(x)$, $\psi^\dagger(x)$ agiscono su $H_{[L+\varepsilon,L]}$ per $x \in [L, L+\varepsilon]$ (cioè agiscono come $\psi(x) \otimes \mathbb{1}$, $\psi^\dagger(x) \otimes \mathbb{1}$ su $H_{[L+\varepsilon,0]}$), mentre per $x \in [0, L]$ agiscono su $H_{[L,0]}$. Anche la matrice di monodromia e lo stato di vuoto si fattorizzano. Si ha

$$\begin{aligned} T_{[L+\varepsilon,0]}(\lambda) &= T_{[L+\varepsilon,L]}(\lambda) T_{[L,0]}(\lambda) = \\ &= \begin{pmatrix} A_{[L+\varepsilon,L]}(\lambda) & B_{[L+\varepsilon,L]}(\lambda) \\ C_{[L+\varepsilon,L]}(\lambda) & D_{[L+\varepsilon,L]}(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{[L,0]}(\lambda) & B_{[L,0]}(\lambda) \\ C_{[L,0]}(\lambda) & D_{[L,0]}(\lambda) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.78)$$

$$|0\rangle_{[L+\varepsilon,0]} = |0\rangle_{[L+\varepsilon,L]} \otimes |0\rangle_{[L,0]}, \quad (4.79)$$

dove gli operatori $A_{[L+\varepsilon,L]}$, $B_{[L+\varepsilon,L]}$, $C_{[L+\varepsilon,L]}$, $D_{[L+\varepsilon,L]}$ agiscono su $H_{[L+\varepsilon,L]}$, mentre $A_{[L,0]}$, $B_{[L,0]}$, $C_{[L,0]}$ e $D_{[L,0]}$ agiscono su $H_{[L,0]}$.

Usiamo adesso i due seguenti fatti.

Fatto 1. Vale

$${}_{[b,a]}\langle 0 | [\psi(x), B_{[b,a]}(\lambda)] | 0 \rangle_{[b,a]} = -i\sqrt{c} a_2(x; \lambda) d_1(x; \lambda), \quad (4.80)$$

dove $a_2(x; \lambda) = e^{-i\lambda(b-x)/2}$ e $d_1(x; \lambda) = e^{i\lambda(x-a)/2}$.

La (4.80) si dimostra facilmente usando tecniche standard di algebraic Bethe ansatz [34]. Osserviamo che questo ci permette di effettuare il seguente calcolo, che ci servirà più avanti:

$$\begin{aligned} {}_{[L+\varepsilon,L]}\langle 0 | \int_L^{L+\varepsilon} dx \psi(x) B_{[L+\varepsilon,L]}(\lambda) | 0 \rangle_{[L+\varepsilon,L]} &= \\ &= -i\sqrt{c} \int_L^{L+\varepsilon} e^{-i\lambda(L+\varepsilon-x)/2} e^{i\lambda(x-L)/2} = -2i \frac{\sqrt{c}}{\lambda} \sin\left(\lambda \frac{\varepsilon}{2}\right). \end{aligned} \quad (4.81)$$

Fatto 2. Per $r \geq 2$, nel limite $\varepsilon \rightarrow 0$ vale

$$\begin{aligned} {}_{[L+\varepsilon,L]}\langle 0 | \int_L^{L+\varepsilon} dx_1 \dots \int_L^{L+\varepsilon} dx_r \psi(x_1) \dots \psi(x_r) \times \\ \times B_{[L+\varepsilon,L]}(\lambda_1) \dots B_{[L+\varepsilon,L]}(\lambda_r) | 0 \rangle_{[L+\varepsilon,L]} &= \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (4.82)$$

Per dimostrarlo, basta osservare che $[\psi(x_1) \dots \psi(x_r), B(\lambda_1) \dots B(\lambda_r)]$ è una funzione regolare di $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r)$. In analogia a quanto fatto per la catena XXZ rinominiamo

adesso per comodità

$$\tilde{X}(\lambda) \equiv X_{[L+\varepsilon, L]}(\lambda) , \quad (4.83)$$

$$X(\lambda) \equiv X_{[L, 0]}(\lambda) , \quad (4.84)$$

$$|\tilde{0}\rangle \equiv |0\rangle_{[L+\varepsilon, L]} ; \quad |0\rangle \equiv |0\rangle_{[L, 0]} \implies |0\rangle_{[L+\varepsilon, 0]} = |\tilde{0}\rangle \otimes |0\rangle . \quad (4.85)$$

Valgono le seguenti relazioni:

$$\tilde{A}(\lambda) |\tilde{0}\rangle = \tilde{a}(\lambda) |\tilde{0}\rangle = e^{-i\lambda\varepsilon/2} |\tilde{0}\rangle , \quad (4.86)$$

$$D(\lambda) |0\rangle = d(\lambda) |0\rangle = e^{i\lambda L/2} |0\rangle . \quad (4.87)$$

Possiamo dunque considerare

$$\begin{aligned} P_{M+1}(L + \varepsilon; \lambda_1, \dots, \lambda_{M+1}) &= \\ &= (M+1)! |\tilde{0}\rangle \otimes \langle 0| \left(\exp \left[\int_0^{L+\varepsilon} dx \psi(x) \right] \right) \times \\ &\quad \times B_{[L+\varepsilon, 0]}(\lambda_1) \dots B_{[L+\varepsilon, 0]}(\lambda_{M+1}) |\tilde{0}\rangle \otimes |0\rangle = \\ &= (M+1)! |\tilde{0}\rangle \otimes \langle 0| \left(\exp \left[\int_L^{L+\varepsilon} dx \psi(x) \right] \right) \otimes \left(\exp \left[\int_0^L dx \psi(x) \right] \right) \times \\ &\quad \times B_{[L+\varepsilon, 0]}(\lambda_1) \dots B_{[L+\varepsilon, 0]}(\lambda_{M+1}) |\tilde{0}\rangle \otimes |0\rangle . \end{aligned} \quad (4.88)$$

Dalla (4.78) abbiamo

$$B_{[L+\varepsilon, 0]}(\lambda) = \tilde{A}(\lambda) B(\lambda) + \tilde{B}(\lambda) D(\lambda) \quad (4.89)$$

e quindi possiamo sviluppare lo stato che compare in (4.88) (ricordiamo che operatori tildati e non tildati commutano) nel modo seguente:

$$\begin{aligned} B_{[L+\varepsilon, 0]}(\lambda_{M+1}) \dots B_{[L+\varepsilon, 0]}(\lambda_1) |\tilde{0}\rangle \otimes |0\rangle &= \left(\prod_{j=1}^{M+1} \tilde{A}(\lambda_j) \right) |\tilde{0}\rangle \otimes \left(\prod_{j=1}^{M+1} B(\lambda_j) \right) |0\rangle + \\ &+ \sum_{j=1}^{M+1} \left[\tilde{A}(\lambda_{M+1}) \dots \tilde{A}(\lambda_{j+1}) \tilde{B}(\lambda_j) \tilde{A}(\lambda_{j-1}) \dots \tilde{A}(\lambda_1) |\tilde{0}\rangle \right] \otimes \\ &\quad \otimes \left[B(\lambda_{M+1}) \dots B(\lambda_{j+1}) D(\lambda_j) B(\lambda_{j-1}) \dots B(\lambda_1) |0\rangle \right] + \dots . \end{aligned} \quad (4.90)$$

Osservando (4.90) si vede che il prodotto scalare in (4.88) si scrive come una sommatoria, in cui ogni termine contiene un prodotto scalare in $H_{[L+\varepsilon, L]}$ e uno in $H_{[L, 0]}$. Portando tutti gli operatori $\tilde{A}(\lambda)$ verso destra con le opportune regole di commutazione e facendoli agire sul vuoto, si vede che i prodotti scalari in $H_{[L+\varepsilon, L]}$ che compaiono

sono del tipo

$$\langle \tilde{0} | \left(\exp \left[\int_L^{L+\varepsilon} dx \psi(x) \right] \right) \tilde{B}(\lambda_{i_1}) \dots \tilde{B}(\lambda_{i_k}) | \tilde{0} \rangle . \quad (4.91)$$

Come già osservato, per la conservazione del numero di particelle, possiamo riscrivere (4.91) come

$$\frac{1}{k!} \langle \tilde{0} | \left(\int_L^{L+\varepsilon} dx_1 \dots \int_L^{L+\varepsilon} dx_k \psi(x_1) \dots \psi(x_k) \right) \tilde{B}(\lambda_{i_1}) \dots \tilde{B}(\lambda_{i_k}) | \tilde{0} \rangle . \quad (4.92)$$

Se $k \geq 2$, nel limite $\varepsilon \rightarrow 0$, questo termine è per la (4.82) almeno di ordine ε^2 . Noi saremo interessati a tenere solo i termini ordine ε , quindi possiamo trascurare i termini successivi che non abbiamo scritto esplicitamente nella (4.90). Questi infatti contengono due o più operatori $\tilde{B}(\lambda)$ e sono quindi per quanto detto almeno di ordine ε^2 . Appliciamo poi lo stesso argomento utilizzato per il modello XXZ , per semplificare

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{M+1} \left[\tilde{A}(\lambda_{M+1}) \dots \tilde{A}(\lambda_{j+1}) \tilde{B}(\lambda_j) \tilde{A}(\lambda_{j-1}) \dots \tilde{A}(\lambda_1) | \tilde{0} \rangle \right] \otimes \\ & \quad \otimes \left[B(\lambda_{M+1}) \dots B(\lambda_{j+1}) D(\lambda_j) B(\lambda_{j-1}) \dots B(\lambda_1) | 0 \rangle \right] = \\ & = \sum_{j=1}^{M+1} d(\lambda_j) \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{M+1} f(\lambda_k, \lambda_j) \tilde{a}(\lambda_k) \right) \left[\tilde{B}(\lambda_j) | \tilde{0} \rangle \right] \otimes \left[\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{M+1} B(\lambda_k) | 0 \rangle \right] . \end{aligned} \quad (4.93)$$

Prendiamo quindi il prodotto scalare in (4.88); usiamo (4.81), (4.86), (4.87), (4.90), (4.93) e otteniamo finalmente:

$$\begin{aligned} & P_{M+1}(L + \varepsilon; \lambda_1, \dots, \lambda_{M+1}) = \\ & = P_{M+1}(L; \lambda_1, \dots, \lambda_{M+1}) - i \frac{\varepsilon}{2} \left(\sum_{j=1}^{M+1} \lambda_j \right) P_{M+1}(L; \lambda_1, \dots, \lambda_{M+1}) + \\ & - i(M+1)\varepsilon \sqrt{c} \sum_{j=1}^{M+1} e^{i\lambda_j L/2} \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{M+1} f(\lambda_k, \lambda_j) \right) P_M(L; \lambda_1, \dots, \hat{\lambda}_j, \dots, \lambda_{M+1}) + \\ & \quad + \mathcal{O}(\varepsilon^2) . \end{aligned} \quad (4.94)$$

Dividendo per ε e prendendo il limite $\varepsilon \rightarrow 0$ si ottiene finalmente la (4.77). Possiamo da questa ottenere una relazione ricorsiva più semplice; definiamo:

$$Q_M(L; \lambda_1, \dots, \lambda_M) = \exp \left[+ \frac{i}{2} \sum_{j=1}^M \lambda_j L \right] P_M(L; \lambda_1, \dots, \lambda_M) . \quad (4.95)$$

Prendendo la derivata in L di $Q_{M+1}(L; \lambda_1, \dots, \lambda_{M+1})$, e usando (4.77), si ottiene la seguente formula ricorsiva:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dL} Q_{M+1}(L; \lambda_1, \dots, \lambda_{M+1}) &= \\ &= -i(M+1)\sqrt{c} \sum_{j=1}^{M+1} e^{i\lambda_j L} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{M+1} f(\lambda_k, \lambda_j) Q_M(L; \lambda_1, \dots, \hat{\lambda}_j, \dots, \lambda_{M+1}) . \end{aligned} \quad (4.96)$$

4.3.1 Verifiche e commenti

Abbiamo verificato analiticamente la formula (4.96) per $M+1=2$ e $M+1=3$. Non siamo tuttavia riusciti a risolverla in modo da ottenere una formula compatta per il prodotto scalare tra uno stato di Bethe e lo stato corrispondente alla funzione d'onda a molti corpi in (4.67). Successivamente al nostro studio presentato in questa sezione, una formula per il prodotto scalare tra uno stato di Bethe e lo stato in (4.67) è stata dimostrata nell'articolo [56] comparso su arXiv nel febbraio 2014. La dimostrazione utilizza un particolare scaling della formula (4.51) (più precisamente, della sua versione semplificata in [54]). Lo stato in (4.67) è l'unico stato non banale nel modello di Lieb-Liniger per cui esiste una formula compatta di overlap con uno stato di Bethe. Questo dato, insieme alla difficoltà di derivare dei risultati per casi particolari, mette in evidenza la necessità di trovare un metodo sistematico per affrontare il problema del calcolo degli overlap all'interno della logica di quench nei sistemi quantistici integrabili.

Capitolo 5

Quench d'interazione nel modello di Lieb-Liniger

Mettiamo ora in pratica alcuni degli strumenti introdotti nel capitolo 3 e motiviamo lo sforzo e i risultati presentati nel capitolo 4 studiando un quench d'interazione per il modello di Lieb-Liniger. Per questo modello sono stati effettuati studi numerici [58], [59] e nell'ultimo anno anche alcuni studi analitici [21], [60]. In [58] viene calcolata numericamente l'evoluzione temporale dell'entropia di Shannon per un sistema di $N = 7$ bosoni a seguito dell'improvvisa variazione della costante di interazione c da zero ad un valore finito, mentre in [59] si tratta, sempre numericamente, un quench in cui il valore di c viene improvvisamente posto uguale a zero per un sistema di $N = 20$ bosoni. Per quanto riguarda gli studi analitici, in [21] vengono forniti risultati esatti (in accordo con quelli numerici trovati precedentemente in [52]) per l'evoluzione temporale della funzione di correlazione densità-densità nel limite termodinamico a seguito della variazione della costante d'interazione da $c = 0$ a $c = \infty$. Inoltre in [60] viene studiato analiticamente il problema di determinare lo stato stazionario (in termini del valore di aspettazione delle osservabili) raggiunto dopo un quench da $c = 0$ a c finito e arbitrario.

Il problema di un quench generico definito da una variazione $c \rightarrow c'$, con c, c' finiti e arbitrari, non è stato studiato ed è difficile da attaccare (anche dal punto di vista numerico), sostanzialmente perché non si conosce nessuna formula compatta per l'overlap tra autostati di Bethe corrispondenti all'hamiltoniana di Lieb-Liniger con parametri d'interazione diversi. In questo capitolo ci concentriamo sul problema più semplice, ma ancora non studiato, di quench corrispondente ad una variazione al prim'ordine del parametro d'interazione nel modello di Lieb-Liniger.

5.1 Definizione del problema

Consideriamo il modello di Lieb-Liniger per N particelle; cambiando leggermente notazione, indichiamo con c_i il parametro d'interazione. Riscriviamo qui per comodità l'hamiltoniana (2.1):

$$H_N^{LL}(c_i) = - \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + 2c_i \sum_{1 \leq j < l \leq N} \delta(x_j - x_l) . \quad (5.1)$$

Esplicitando la dipendenza dalla costante d'interazione, scriviamo gli autostati normalizzati dell'hamiltoniana (5.1) come $|\{\lambda_j\}, c_i\rangle$, dove $\{\lambda_j\}$ sono insiemi di soluzioni delle equazioni di Bethe (si veda sezione 2.1.2), mentre conveniamo di indicare lo stato fondamentale (normalizzato) con $|\psi_0(c_i)\rangle$ (che sarà caratterizzato da un insieme di rapidità $\{\lambda_j^{GS}\}$ con una struttura a mare di Fermi). Seguendo il protocollo di quench discusso nel capitolo 1, prepariamo il sistema nello stato fondamentale di $H_N^{LL}(c_i)$. All'istante $t = 0$ effettuiamo una variazione del parametro $c_i \rightarrow c$ e studiamo l'evoluzione temporale del valore di aspettazione di alcune osservabili d'interesse, che indichiamo per il momento genericamente con \mathcal{O} :

$$\begin{aligned} \langle \psi_0(c_i) | \mathcal{O}(t) | \psi_0(c_i) \rangle &\equiv \langle \psi_0(c_i) | e^{iH^{LL}(c)t} \mathcal{O} e^{-iH^{LL}(c)t} | \psi_0(c_i) \rangle = \\ &= \sum_{\{\lambda_j\}} \sum_{\{\mu_j\}} \langle \psi_0(c_i) | \{\lambda_j\}, c \rangle \langle \{\mu_j\}, c | \psi_0(c_i) \rangle \langle \{\lambda_j\}, c | \mathcal{O} | \{\mu_j\}, c \rangle \times \\ &\quad \times \exp \left\{ i [E(\{\lambda_j\}, c) - E(\{\mu_j\}, c)] t \right\} , \end{aligned} \quad (5.2)$$

dove le due sommatorie si estendono a tutti gli insiemi di soluzioni delle equazioni di Bethe (per i parametri c ed L), e dove $E(\{\lambda_j\}, c) = \sum_{j=1}^N \lambda_j^2$. Come abbiamo accennato, il nostro scopo è quello di studiare l'evoluzione temporale (5.2) per una variazione *al prim'ordine*, $c = c_i - \delta c_i$, ed è quello che facciamo in questo capitolo. Organizziamo la trattazione come segue. Per prima cosa, presentiamo alcune regole di selezione e proprietà degli overlap valide per c_i , c arbitrari. Passiamo poi alla derivazione di una formula compatta per il calcolo del prodotto scalare $\langle \psi_0(c_i) | \{\lambda_j\}, c \rangle$ per quench al prim'ordine. Finalmente, applichiamo questi risultati ad uno studio numerico di evoluzione temporale per sistemi fino a $N = 10$ bosoni.

5.2 Regole di selezione e proprietà degli overlap

Focalizziamo l'attenzione su alcune proprietà degli overlap che possiamo dimostrare facilmente, e che valgono per variazioni arbitrarie del parametro d'ordine. Sarà facile verificare che sono soddisfatte anche dalla formula per il prodotto scalare relativa ad una variazione al prim'ordine che troveremo. Queste proprietà sono importanti perché ci dicono ad esempio che alcuni overlap sono nulli a causa di alcune regole di selezione, e possiamo quindi evitare di calcolarli quando valutiamo numericamente espressioni come la (5.2).

Proprietà 1 (Conservazione dell'impulso). Dati gli stati $|\{\lambda_j\}, c\rangle$, $|\{\mu_j\}, c'\rangle$, vale la seguente regola di selezione:

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j \neq \sum_{j=1}^N \mu_j \implies \langle \{\lambda_j\}, c | \{\mu_j\}, c' \rangle = 0 . \quad (5.3)$$

Per dimostrarla, basta ricordare (si veda il capitolo 2) che gli stati di Bethe $|\{\lambda_j\}, c\rangle$ sono autostati dell'impulso totale \hat{P}_N con autovalore $\sum_{j=1}^N \lambda_j$, per cui la (5.3) segue da

$$\left(\sum_{j=1}^N \lambda_j \right) \langle \{\lambda_j\}, c | \{\mu_j\}, c' \rangle = \langle \{\lambda_j\}, c | \hat{P}_N | \{\mu_j\}, c' \rangle = \left(\sum_{j=1}^N \mu_j \right) \langle \{\lambda_j\}, c | \{\mu_j\}, c' \rangle . \quad (5.4)$$

Proprietà 2 (Overlap reali). Dati due insiemi di soluzioni delle equazioni di Bethe $\{\lambda_j\}$, $\{\mu_j\}$ relativi a due parametri d'interazione c , c' eventualmente distinti l'overlap $\langle \{\lambda_j\}, c | \{\mu_j\}, c' \rangle$ è reale (s'intende che la fase degli autostati $|\{\lambda_j\}, c\rangle$ è fissata come nel capitolo 2, si veda (2.34)).

Questa proprietà è non banale perché a priori non c'è nessuna ragione per cui l'overlap non debba avere valori complessi. Per dimostrarla, indicando con $\Psi_N^c(\{\lambda_j\}|\mathbf{x})$ la funzione d'onda associata all'autostato di Bethe relativo all'hamiltoniana $H_N^{LL}(c)$ e determinato dalle rapidità $\{\lambda_j\}$, osserviamo inizialmente:

$$\Psi^c(\{-\lambda_j\}|\mathbf{x}) = \overline{\Psi^c(\{\lambda_j\}|\mathbf{x})} , \quad (5.5)$$

che è evidente usando la forma (2.34) delle funzioni d'onda. Segue:

$$\overline{\langle \{\lambda_j\}, c | \{\mu_j\}, c' \rangle} = \langle \{-\lambda_j\}, c | \{-\mu_j\}, c' \rangle . \quad (5.6)$$

Sempre dalla forma delle funzioni d'onda (2.34) (ricordando che $\text{sgn}(-x) = -\text{sgn}(x)$), è anche evidente che vale:

$$\Psi^c(\{-\lambda_j\}|\mathbf{x}) = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \Psi^c(\{\lambda_j\}|- \mathbf{x}) . \quad (5.7)$$

L'ultima equazione che ci serve è la seguente, che deriva dalla periodicità delle soluzioni del modello:

$$\Psi^c(\{\lambda_j\}|x_1 + mL, \dots, x_N + mL) = \Psi^c(\{\lambda_j\}|x_1, \dots, x_N), \quad m \in \mathbb{Z} . \quad (5.8)$$

Mettendo insieme (5.6), (5.7), (5.8) otteniamo:

$$\begin{aligned} \overline{\langle \{\lambda_j\}, c | \{\mu_j\}, c' \rangle} &= \langle \{-\lambda_j\}, c | \{-\mu_j\}, c' \rangle = \int_0^L d^N x \overline{\Psi_N^c(-\{\lambda_j\}|\mathbf{x})} \Psi^{c'}(-\{\mu_j\}|\mathbf{x}) = \\ &= \int_0^L d^N x \overline{\Psi_N^c(\{\lambda_j\}|- \mathbf{x})} \Psi^{c'}(\{\mu_j\}|- \mathbf{x}) = \int_{-L}^0 d^N y \overline{\Psi_N^c(\{\lambda_j\}|\mathbf{y})} \Psi^{c'}(\{\mu_j\}|\mathbf{y}) = \\ &= \int_0^L d^N z \overline{\Psi_N^c(\{\lambda_j\}|z_1 - L, \dots, z_N - L)} \Psi^{c'}(\{\mu_j\}|z_1 - L, \dots, z_N - L) = \\ &= \int_0^L d^N x \overline{\Psi^c(\{\lambda_j\}|\mathbf{x})} \Psi^{c'}(\{\mu_j\}|\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (5.9)$$

e quindi:

$$\overline{\langle \{\lambda_j\}, c | \{\mu_j\}, c' \rangle} = \langle \{\lambda_j\}, c | \{\mu_j\}, c' \rangle , \quad (5.10)$$

cioè gli overlap sono reali.

Consideriamo adesso lo stato fondamentale $|\psi_0(c)\rangle$. Come abbiamo visto, l'insieme $\{\lambda_j^{GS}\}$ delle rapidità corrispondenti è simmetrico, cioè $\{\lambda_j^{GS}\} = -\{\lambda_j^{GS}\}$. Tuttavia, questa proprietà non sarà vera sempre; date $\{\mu_j\}$ soluzioni generiche delle equazioni di Bethe, l'insieme delle rapidità opposte in segno $\{-\mu_j\} \equiv -\{\mu_j\}$ costituirà ancora un insieme di soluzioni di Bethe, ma in generale $\{\mu_j\} \neq \{-\mu_j\}$ (se invece vale l'uguaglianza diciamo che l'insieme $\{\mu_j\}$ è *simmetrico*). Possiamo quindi definire, dato $\{\mu_j\}$, due stati:

$$|\{\mu_j^+\}, c\rangle \equiv |\{\mu_j\}, c\rangle + |-\{\mu_j\}, c\rangle , \quad (5.11)$$

$$|\{\mu_j^-\}, c\rangle \equiv |\{\mu_j\}, c\rangle - |-\{\mu_j\}, c\rangle . \quad (5.12)$$

Chiaramente, se $\{\mu_j\}$ è simmetrico, $|\{\mu_j^-\}, c\rangle = 0$. In generale invece, vale la seguente proprietà.

Proprietà 3. Sia $\{\lambda_j\} = \{-\lambda_j\}$ insieme simmetrico di soluzioni delle equazioni di Bethe relative al parametro c (per esempio, quelle associate allo stato fondamentale). Dato

un insieme generico $\{\mu_j\}$ di soluzioni delle equazioni di Bethe relative a c' , con c' eventualmente diverso da c , vale:

$$\langle \{\lambda_j\}, c | \{\mu_j^-\}, c' \rangle = 0 \quad (5.13)$$

e quindi

$$\langle \{\lambda_j\}, c | \{\mu_j\}, c' \rangle = \langle \{\lambda_j\}, c | \{-\mu_j\}, c' \rangle . \quad (5.14)$$

Per vederlo, utilizziamo che $\{\lambda_j\} = \{-\lambda_j\}$ e di nuovo la (5.6); si ha:

$$\begin{aligned} \overline{\langle \{\lambda_j\}, c | \{\mu_j^-\}, c' \rangle} &= \overline{\langle \{\lambda_j\}, c | \{\mu_j\}, c' \rangle} - \overline{\langle \{\lambda_j\}, c | \{-\mu_j\}, c' \rangle} = \\ &= \langle \{-\lambda_j\}, c | \{-\mu_j\}, c' \rangle - \langle \{-\lambda_j\}, c | \{\mu_j\}, c' \rangle = \\ &= - [\langle \{\lambda_j\}, c | \{\mu_j\}, c' \rangle - \langle \{\lambda_j\}, c | \{-\mu_j\}, c' \rangle] = - \langle \{\lambda_j\}, c | \{\mu_j^-\}, c' \rangle . \end{aligned} \quad (5.15)$$

E quindi $\langle \{\lambda_j\}, c | \{\mu_j^-\}, c' \rangle$ è immaginario puro; d'altra parte, per la proprietà 2 è la differenza di due numeri reali: l'unica possibilità è che sia $\langle \{\lambda_j\}, c | \{\mu_j^-\}, c' \rangle = 0$.

5.3 Calcolo dell'overlap al prim'ordine

In questa sezione calcoliamo il prodotto scalare

$$\langle \{\lambda\}, c | \{\mu\}, c_i \rangle \quad (5.16)$$

al prim'ordine nella differenza $c_i - c$. Il punto di partenza è scrivere l'hamiltoniana del sistema in seconda quantizzazione; riscrivendo la (2.5) osserviamo allora che vale:

$$\begin{aligned} H^{LL}(c_i) &= \int dx \left[\partial_x \psi^\dagger(x) \partial_x \psi(x) + c_i \psi^\dagger(x) \psi^\dagger(x) \psi(x) \psi(x) \right] = \\ &= H^{LL}(c) + (c_i - c) \int dx \left[\psi^\dagger(x) \psi^\dagger(x) \psi(x) \psi(x) \right] . \end{aligned} \quad (5.17)$$

Poiché $|\{\lambda_j\}, c\rangle$, $|\{\mu_j\}, c_i\rangle$ sono autostati rispettivamente di $H^{LL}(c)$ e $H^{LL}(c_i)$ abbiamo che per ottenere l'overlap al prim'ordine possiamo utilizzare la teoria standard delle perturbazioni, che ricordiamo ora brevemente. Consideriamo l'hamiltoniana dipendente da un parametro

$$H(\lambda) = H_0 + \lambda H_1 . \quad (5.18)$$

Supponiamo di avere un autostato $|0\rangle$ di H_0 corrispondente ad un livello E_0 non degenero. Assumiamo inoltre che gli altri autostati di H_0 siano indicizzati da un parametro n e siano associati ai livelli E_n ; se l'approccio perturbativo è applicabile, per λ sufficientemente piccolo a $|0\rangle$ corrisponderà un autostato $|\psi_0(\lambda)\rangle$ associato ancora ad un

livello non degenerare. Inoltre possiamo sviluppare $\psi_0(\lambda)$ come:

$$|\psi_0(\lambda)\rangle = |0\rangle + \lambda |w\rangle + O(\lambda^2) , \quad (5.19)$$

dove $|w\rangle$ è definito esplicitamente dalle relazioni seguenti:

$$\langle 0|w\rangle = 0 , \quad (5.20)$$

$$\langle n|w\rangle = \frac{1}{E_0 - E_n} \langle n|H_1|0\rangle . \quad (5.21)$$

Confrontiamo quindi (5.18) con (5.17). Poiché le rapidità $\{\lambda_j\}$ dipendono dalla scelta del parametro c , conviene adottare l'indicizzazione degli autostati attraverso gli insiemi dei numeri quantici distinti $\{I_j\}$: un dato insieme $\{I_j\}$ gioca il ruolo del parametro n nella discussione sopra. Inoltre, per chiarezza, nel seguito esplicitiamo la dipendenza delle rapidità da c , scrivendo ad esempio $\{\lambda_j(c)\}$. L'hamiltoniana imperturbata è nel nostro caso $H^{LL}(c)$, con autostati e livelli energetici noti:

$$|\{I_j\}\rangle = |\{\lambda_j(c)\}, c\rangle , \quad (5.22)$$

$$E(\{I_j\}) = \sum_{j=1}^N \lambda_j^2(c) . \quad (5.23)$$

Possiamo quindi scrivere l'overlap al prim'ordine nel parametro $c_i - c$:

$$\begin{aligned} & \langle \{\lambda(c)\}, c | \{\mu(c_i)\}, c_i \rangle \Big|_{\text{f.o.}} = \\ & = \frac{(c_i - c)}{\sum_j [\mu_j^2(c) - \lambda_j^2(c)]} \int dx \langle \{\lambda_j(c)\} | \psi^\dagger(x) \psi^\dagger(x) \psi(x) \psi(x) | \{\mu_j(c)\} \rangle , \end{aligned} \quad (5.24)$$

dove la notazione “f.o” sta per “first order”. Il calcolo dell'overlap si riduce quindi a quello di un fattore di forma. Usiamo ora che:

$$\psi(x) = e^{i\hat{P}x} \psi(0) e^{-i\hat{P}x} , \quad (5.25)$$

essendo \hat{P} l'impulso che genera la traslazione spaziale. Dalla proprietà 1 della sezione precedente l'overlap $\langle \{\lambda\}, c | \{\mu\}, c_i \rangle$ è nullo a meno che i due stati non abbiano lo stesso impulso; in questo caso si ha per la (5.25):

$$\begin{aligned} & \int dx \langle \{\lambda_j(c)\} | \psi^\dagger(x) \psi^\dagger(x) \psi(x) \psi(x) | \{\mu_j(c)\} \rangle = \\ & = L \langle \{\lambda_j(c)\} | \psi^\dagger(0) \psi^\dagger(0) \psi(0) \psi(0) | \{\mu_j(c)\} \rangle . \end{aligned} \quad (5.26)$$

Dobbiamo quindi calcolare il fattore di forma dell'operatore $\psi^\dagger(0) \psi^\dagger(0) \psi(0) \psi(0)$. Questo è stato fatto in un articolo recente [49] in cui una famiglia di fattori di forma per il

modello di Lieb-Liniger è stata ottenuta utilizzando tecniche di algebraic Bethe ansatz e un'opportuna procedura di scaling dal modello XXZ . L'espressione che si ottiene in [49] è la seguente:

$$\begin{aligned} F_N(\{\lambda\}, \{\mu\}) &\equiv \langle \{\lambda_j(c)\} | \psi^\dagger(0) \psi^\dagger(0) \psi(0) \psi(0) | \{\mu_j(c)\} \rangle = \\ &= \frac{4c^{2-N}}{\mathcal{N}_{\{\lambda\}} \mathcal{N}_{\{\mu\}}} \sum_{\substack{\{\lambda^+\} \cup \{\lambda^-\} \\ |\{\lambda^+\}|=2}} \prod_{o,l} f(\lambda_o^-, \lambda_l^+) \frac{\prod_{j,l} (\mu_j - \lambda_l^- + ic)}{\prod_{j<l} (\mu_j - \mu_l) \prod_{j<k} (\lambda_j^- - \lambda_k^-)} \times \det V, \end{aligned} \quad (5.27)$$

essendo $\mathcal{N}_{\{\lambda\}}$ la normalizzazione in (3.65) e dove la matrice V è data da

$$V_{j,l} = (\mu_j)^{l-1}, \quad l = 1, 2, \quad (5.28)$$

$$V_{j,l+2} = t(\mu_j, \lambda_l^-) + t(\lambda_l^-, \mu_j) \prod_{o=1}^N \frac{(\lambda_l^- - \mu_o + ic)(\lambda_l^- - \lambda_o - ic)}{(\lambda_l^- - \mu_o - ic)(\lambda_l^- - \lambda_o + ic)}, \quad \text{altrimenti}, \quad (5.29)$$

dove $f(\lambda, \mu)$ è data come al solito dalla (4.70) e

$$t(a, b) = \frac{ic}{(a-b)(a-b+ic)}. \quad (5.30)$$

La sommatoria in (5.27) è estesa a tutte le partizioni $\{\lambda^+\} \cup \{\lambda^-\}$ di $\{\lambda\}$ in cui $\{\lambda^+\}$ contiene 2 elementi. L'espressione in (5.27) è esatta ma è complicata anche per uno studio numerico. Quello che facciamo ora è semplificarla, usando metodi presenti in letteratura per trattare espressioni simili [61], [62]. Per cominciare, riscriviamo (5.27), sostituendo a f la sua espressione in (4.70), come:

$$\begin{aligned} F_N(\{\lambda\}, \{\mu\}) &= \frac{4c^{2-N}}{\mathcal{N}_{\{\lambda\}} \mathcal{N}_{\{\mu\}}} \sum_{\substack{\{\lambda^+\} \cup \{\lambda^-\} \\ |\{\lambda^+\}|=2}} \prod_{o,l} \frac{1}{(\lambda_o^- - \lambda_l^+)} \times \\ &\times \prod_{\substack{o,l \\ o \neq l}} \frac{1}{(\lambda_l^- - \lambda_o^- + ic)} \times \frac{1}{\prod_{j<l} (\mu_j - \mu_l) \prod_{j<k} (\lambda_j^- - \lambda_k^-)} \times \det \tilde{V}, \end{aligned} \quad (5.31)$$

dove per $l = 1, 2$ si ha $\tilde{V}_{j,l} = V_{j,l}$ mentre

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{j,l+2} &= t(\mu_j, \lambda_l^-) \prod_o (\mu_o - \lambda_l^- + ic) \prod_o' (\lambda_l^- - \lambda_o + ic) + \\ &- t(\lambda_l^-, \mu_j) \prod_{o=1} (\mu_o - \lambda_l^- - ic) \prod_o' (\lambda_l^- - \lambda_o - ic) \equiv \mathcal{A}_{jl}, \end{aligned} \quad (5.32)$$

per $l = 1, \dots, N-2$, dove la produttoria primata indica che abbiamo tolto il fattore $(\lambda_l^- - \lambda_l^- - ic)$. Indicizziamo ora i termini della sommatoria indicando con n, m gli

elementi di $\{\lambda_j\}$ che compaiono nella partizione $\{\lambda_j^+\}$ Utilizziamo poi

$$\begin{aligned} \prod_{j < l} (\lambda_j^- - \lambda_k^-) &= \prod_{l < r} (\lambda_l - \lambda_r) \frac{1}{\prod_{j=1}^{n-1} (\lambda_j - \lambda_n) \prod_{j=n+1}^N (\lambda_n - \lambda_j)} \times \\ &\times \frac{1}{\prod_{j=1}^{m-1} (\lambda_j - \lambda_m) \prod_{j=m+1}^N (\lambda_m - \lambda_j)} \times (\lambda_{\min(m,n)} - \lambda_{\max(m,n)}) \end{aligned} \quad (5.33)$$

e anche

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{o,l \\ o \neq l}} \frac{1}{(\lambda_l^- - \lambda_o^- + ic)} &= \left(\prod_{\substack{o,l=1 \\ o \neq l}}^N \frac{1}{\lambda_o - \lambda_l + ic} \right) \left(- \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq n}} [(\lambda_n - \lambda_r)^2 + c^2] \right) \times \\ &\times \left(- \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq m}} [(\lambda_m - \lambda_s)^2 + c^2] \right) \left(- \frac{1}{(\lambda_n - \lambda_m)^2 + c^2} \right). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Definiamo infine

$$b(x, y) \equiv - [(x - y)^2 + c^2] . \quad (5.35)$$

Possiamo quindi usare (5.33), (5.34), (5.35) per semplificare (5.31) ottenendo:

$$\begin{aligned} F_N(\{\lambda\}, \{\mu\}) &= \frac{2c^{2-N}}{\mathcal{N}_{\{\lambda\}} \mathcal{N}_{\{\mu\}}} \prod_{j < l} \frac{1}{(\mu_j - \mu_l) (\lambda_l - \lambda_r) b(\lambda_l, \lambda_r)} \times \\ &\times \sum_{n=1}^N \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq n}}^N b(\lambda_r, \lambda_n) \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N (\lambda_m - \lambda_n) \prod_{\substack{j \neq m \\ j \neq n}} b(\lambda_j, \lambda_m) \times \det A^{n,m}, \end{aligned} \quad (5.36)$$

dove $A^{n,m}$ è la matrice definita da:

$$[A^{n,m}]_{i,n} = 1 , \quad (5.37)$$

$$[A^{n,m}]_{i,m} = \mu_i , \quad (5.38)$$

$$[A^{n,m}]_{i,j} = \mathcal{A}_{ij}, \quad i, j \neq n, m, \quad (5.39)$$

con \mathcal{A}_{ij} definita in (5.32). Possiamo a questo punto fare la semplificazione finale; usando la linearità della funzione determinante rispetto alle colonne, e che il determinante di una matrice di rango uno è zero, è facile vedere che la (5.36) si riscrive come:

$$\begin{aligned} F_N(\{\lambda\}, \{\mu\}) &= \frac{2c^{2-N}}{\mathcal{N}_{\{\lambda\}} \mathcal{N}_{\{\mu\}}} \prod_{j < l} \frac{1}{(\mu_j - \mu_l) (\lambda_l - \lambda_r) b(\lambda_l, \lambda_r)} \times \\ &\times \sum_{n=1}^N \left(\prod_{j \neq n} b(\lambda_j, \lambda_n) \right) [\det(Y^n + X^n) - \det Z^n] , \end{aligned} \quad (5.40)$$

dove:

$$Y_{jl}^n = \begin{cases} W_{jl}, & l \neq n, \\ \mu_j, & l = n, \end{cases} \quad (5.41)$$

$$X_{jl}^n = (\lambda_l - \lambda_n) \prod_{\substack{j \neq l \\ j \neq n}}^N b(\lambda_j, \lambda_l), \quad (5.42)$$

$$Z_{jl}^n = \begin{cases} W_{jl}, & l \neq n, \\ \mu_j + X_{jl}^n, & l = n, \end{cases} \quad (5.43)$$

con W_{jl} data da:

$$W_{jl} = 2\text{Re} \left[\frac{1}{ic} t(\mu_j, \lambda_l) \prod_{o=1}^N (\mu_o - \lambda_l + ic) (\lambda_l - \lambda_o + ic) \right]. \quad (5.44)$$

La forma finale dell'overlap al prim'ordine è quindi:

$$\langle \{\lambda(c)\}, c | \{\mu(c_i)\}, c_i \rangle \Big|_{\text{f.o.}} = \frac{(c_i - c)L}{\sum_j (\mu_j^2(c) - \lambda_j^2(c))} \times F_N(\{\lambda(c)\}, \{\mu(c)\}) , \quad (5.45)$$

dove $F_N(\{\lambda(c)\}, \{\mu(c)\})$ è dato dalla (5.40). L'espressione (5.45) può sembrare ancora complicata, richiedendo il calcolo di N determinanti di matrici $N \times N$, ma è comunque una semplificazione enorme rispetto alla trattazione con le funzioni d'onda che comporterebbe scrivere $(N!)^2$ integrali in N variabili. In effetti, come vedremo nella prossima sezione (5.45) ci permetterà uno studio numerico per un sistema fino a $N = 10$ bosoni, in cui sarà richiesto il calcolo di circa 10^6 prodotti scalari. Abbiamo controllato la bontà dell'approssimazione al prim'ordine confrontandola con il calcolo esatto dei prodotti scalari tramite le funzioni d'onda dove era possibile (quindi nei casi in cui il numero di particelle era al massimo $N = 4$), trovando per piccole variazioni del parametro un ottimo accordo (si veda tabella 5.1). Questo costituisce anche una verifica non banale della (5.45).

5.3.1 Una formula ricorsiva

Prima di procedere oltre, facciamo un'ultima osservazione sul prodotto scalare (5.45). La formula che abbiamo trovato si presta per uno studio numerico ma è ancora troppo complicata per permettere una trattazione analitica del problema. Una semplificazione cruciale sarebbe riuscire a riscrivere la somma di N determinanti in (5.40) come un unico determinante: questo permetterebbe di prendere il limite termodinamico ottenendo quello che è chiamato *determinante di Fredholm*. A sua volta, questo passo

N	c_i	c	Numeri quantici	Overlap esatto	Prim'ordine
3	2.01	2.00	$\{-2, 0, 2\}$	$-640 \cdot 10^{-6}$	$-642 \cdot 10^{-6}$
3	2.1	2.0	$\{-2, 0, 2\}$	$-621 \cdot 10^{-5}$	$-642 \cdot 10^{-5}$
3	20.1	20.0	$\{-2, -1, 3\}$	$33.4 \cdot 10^{-6}$	$33.6 \cdot 10^{-6}$
3	21	20	$\{-2, -1, 3\}$	$321 \cdot 10^{-6}$	$336 \cdot 10^{-6}$
4	2.01	2.00	$\{-5/2, -1/2, 1/2, 5/2\}$	$-759 \cdot 10^{-6}$	$-762 \cdot 10^{-6}$
4	2.1	2.0	$\{-5/2, -1/2, 1/2, 5/2\}$	$-738 \cdot 10^{-5}$	$-762 \cdot 10^{-5}$

TABELLA 5.1: Nella tabella sono confrontati i prodotti scalari (reali, per la proprietà 2 vista nella sezione 5.2) calcolati esattamente tramite funzioni d'onda, e al prim'ordine, usando la formula (5.45) tra lo stato fondamentale di $H_N^{LL}(c_i)$ e alcuni autostati di $H_N^{LL}(c)$ per diversi valori di N , c_i e c . Il parametro L è fissato, $L = 12$, e gli autostati di $H_N^{LL}(c_i)$ sono indicati con i loro numeri quantici.

renderebbe possibile estendere il nostro studio numerico ad uno analitico nel limite termodinamico, come è stato fatto per il problema di quench presentato in [60].

In effetti, dalla (5.31) è possibile dimostrare che $F_N(\{\lambda_j\}, \{\mu_j\})$ non normalizzata ha poli per $\lambda_k \rightarrow \mu_j$, e che in corrispondenza di questi poli soddisfa una formula ricorsiva; cioè ponendo $\mathcal{F}_N = \mathcal{N}_{\{\lambda\}} \mathcal{N}_{\{\mu\}} F_N$ vale:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_N(\{\lambda_j\}, \{\mu_k\}) \big|_{\mu_r \rightarrow \lambda_m} &= \frac{i}{\mu_r - \lambda_m} \left(\prod_{l \neq m} \frac{1}{\lambda_m - \lambda_l} \prod_{j \neq r} \frac{1}{\mu_j - \lambda_m} \right) \times \\
&\times \left[\prod_{o \neq r} (\lambda_m - \mu_o - ic) \prod_{o \neq m} (\lambda_m - \lambda_o + ic) - (\lambda_m - \mu_o + ic) \prod_{o \neq m} (\lambda_m - \lambda_o - ic) \right] \times \\
&\times \mathcal{F}_{N-1}(\{\lambda_j\}_{j \neq m}, \{\mu_l\}_{l \neq r}).
\end{aligned} \tag{5.46}$$

La (5.46) è del tutto analoga alla (3.68) che porta a dimostrare che il prodotto scalare \mathcal{S}_N in (3.67) si scrive come un singolo determinante. Questo ci porta a pensare che effettivamente esista una rappresentazione determinante anche per il nostro overlap (5.45), anche se noi non siamo stati in grado di trovarla. Il problema rispetto alla possibilità di scrivere la formula di Slavnov (3.71) sta nel fatto che il fattore di forma non normalizzato che compare in (5.31), come funzione della rapidità λ_j , tende ad una costante non nulla per $\lambda_j \rightarrow \infty$, diversamente da \mathcal{S}_N . Questo implica che la (5.46) non basta da sola ad identificare univocamente la forma della matrice che stiamo cercando; in effetti siamo riusciti a ottenere delle successioni \mathcal{E}_N scritte in termini del determinante di una certa matrice che soddisfano (5.46) ma con $\mathcal{E}_N \neq \mathcal{F}_N(\{\lambda_j\}, \{\mu_k\})$. Il

problema di capire se sia possibile semplificare ulteriormente la (5.45) in modo da permettere una trattazione analitica rimane quindi aperto, e la (5.46) può essere utilizzata per studi futuri in questa direzione.

5.4 Risultati numerici

In questa sezione presentiamo uno studio numerico per l'evoluzione temporale di alcune osservabili d'interesse per un sistema fino a $N = 10$ bosoni, a seguito di un quench al prim'ordine del parametro d'interazione; questo studio è reso possibile dalla formula per l'overlap al prim'ordine (5.45) derivata nella sezione precedente.

Nel valutare numericamente espressioni come la (5.2) la prima difficoltà a cui andiamo incontro è che le sommatorie si estendono su un numero infinito di termini; evidentemente, per noi sarà possibile considerarne solo un numero finito, il che corrisponderà ad un troncamento dello spazio di Hilbert. Per tenere sotto controllo l'errore che si commette in questa procedura è opportuno avere una qualche regola di somma; poiché nella teoria delle perturbazioni la normalizzazione di un autostato dell'hamiltoniana perturbata è definita solo a posteriori, non possiamo tenere traccia della sommatoria dei moduli quadri degli overlap (che per uno stato normalizzato deve dare 1). Per ottenere una regola di somma, abbiamo considerato l'osservabile $\psi^\dagger(0)\psi^\dagger(0)\psi(0)\psi(0) = (\psi_0^\dagger)^2(\psi_0)^2$; possiamo espandere il valore di aspettazione su $|\psi_0(c_i)\rangle$ al prim'ordine in $c_i - c$ nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \langle \psi_0(c_i) | (\psi_0^\dagger)^2 (\psi_0)^2 | \psi_0(c_i) \rangle &= \langle \psi_0(c) | (\psi_0^\dagger)^2 (\psi_0)^2 | \psi_0(c) \rangle + \\ &+ 2 \sum_{\{\lambda_j\}} \langle \{\lambda_j\}, c | \psi_0(c_i) \rangle \Big|_{\text{f.o.}} \langle \psi_0(c) | (\psi_0^\dagger)^2 (\psi_0)^2 | \{\lambda_j\}, c \rangle + O((c_i - c)^2) , \end{aligned} \quad (5.47)$$

dove la sommatoria si estende su tutti gli insiemi di soluzioni $\{\lambda_j\}$ delle equazioni di Bethe, esclusa quella corrispondente allo stato fondamentale. Osserviamo ora:

$$\langle \psi_0(c_i) | \{\lambda_j\}, c \rangle \Big|_{\text{f.o.}} \propto (c_i - c) , \quad (5.48)$$

per cui otteniamo che dev'essere:

$$\begin{aligned} \lim_{c_i \rightarrow c} \left\{ \left(-2 \sum_{\{\lambda_j\}} \langle \{\lambda_j\}, c | \psi_0(c_i) \rangle \Big|_{\text{f.o.}} \langle \psi_0(c) | (\psi_0^\dagger)^2 (\psi_0)^2 | \{\lambda_j\}, c \rangle \right) \times \right. \\ \left. \times \left[\langle \psi_0(c) | (\psi_0^\dagger)^2 (\psi_0)^2 | \psi_0(c) \rangle - \langle \psi_0(c_i) | (\psi_0^\dagger)^2 (\psi_0)^2 | \psi_0(c_i) \rangle \right]^{-1} \right\} = 1 . \end{aligned} \quad (5.49)$$

Questa è una buona regola di somma; infatti tutti i termini nella sommatoria sono positivi:

$$\begin{aligned}
& - \langle \{\lambda_j\}, c | \psi_0(c_i) \rangle \Big|_{\text{f.o.}} \langle \{\psi_0(c) | (\psi_0^\dagger)^2 (\psi_0)^2 | \{\lambda_j\}, c \rangle = \\
& = - \frac{(c_i - c)L}{E_0 - E(\{\lambda_j\})} \times \langle \{\lambda_j\}, c | (\psi_0^\dagger)^2 (\psi_0)^2 | \{\psi_0(c) \rangle \langle \{\psi_0(c) | (\psi_0^\dagger)^2 (\psi_0)^2 | \{\lambda_j\}, c \rangle = \quad (5.50) \\
& = - \frac{(c_i - c)L}{E_0 - E(\{\lambda_j\})} \times \left| \langle \{\lambda_j\}, c | (\psi_0^\dagger)^2 (\psi_0)^2 | \{\psi_0(c) \rangle \right|^2 \geq 0 ,
\end{aligned}$$

essendo E_0 l'energia associata allo stato fondamentale $|\psi_0(c)\rangle$; inoltre sappiamo calcolare le quantità $\langle \psi_0(c) | (\psi_0^\dagger)^2 (\psi_0)^2 | \psi_0(c) \rangle$ e $\langle \psi_0(c_i) | (\psi_0^\dagger)^2 (\psi_0)^2 | \psi_0(c_i) \rangle$ con una formula analoga alla (5.27) derivata in [49]. In pratica, quello che abbiamo fatto è stato prendere c_i molto vicino a c ; sommando un numero sempre maggiore di termini l'espressione in (5.49) si avvicinava dal basso a 1, e abbiamo troncato la sommatoria quando veniva raggiunto un certo valore di soglia, che abbiamo fissato a 0.95.

Naturalmente, gli stati $|\{\lambda_j\}\rangle$ non possono essere sommati campionando lo spazio di Hilbert in modo causale, perché ci aspettiamo che se procedessimo in questo modo in gran parte dei casi troveremmo un overlap con $|\psi_0(c_i)\rangle$ molto vicino a 0, il che comporterebbe sommare un numero enorme di termini prima di raggiungere il valore di soglia nella regola di somma (5.49). Noi abbiamo seguito una procedura operativa, basata sull'osservazione della struttura a mare di Fermi dello stato fondamentale; ci aspettiamo infatti che stati che abbiano distribuzioni diverse, con particelle che corrispondano a numeri quantici più grandi, abbiano overlap sempre più piccoli con $|\psi_0(c_i)\rangle$, e quindi il loro contributo diventi ad un certo punto trascurabile per il calcolo delle osservabili (si veda figura 5.1). Abbiamo verificato che questo era effettivamente il caso, e abbiamo quindi implementato l'ordinamento degli stati seguendo questa logica.

Per il calcolo numerico della (5.2) per una certa osservabile \mathcal{O} abbiamo usato il programma Mathematica. Il codice che abbiamo scritto è diviso in parti che svolgono i seguenti passi intermedi:

- costruzione di una successione d'insiemi di numeri quantici, dove si è scelto un ordinamento in base al numero di “salti” complessivo per le occupazioni delle particelle; per la conservazione dell'impulso, si considerano solo insiemi $\{I_k\}$ in cui $\sum_k I_k = 0$. Per fare un esempio, per $N = 4$ particelle, i primi termini della

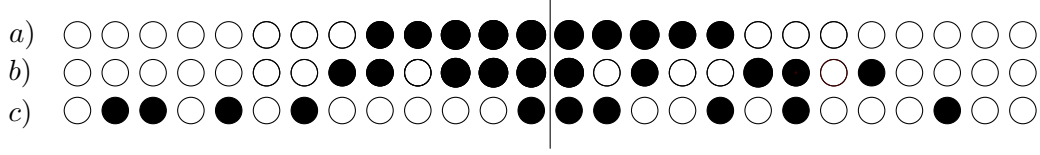


FIGURA 5.1: Rappresentazione della distribuzione delle occupazioni dei numeri quantici per un sistema di $N = 10$ bosoni. a) rappresenta la distribuzione per lo stato fondamentale, mentre in b), c), si hanno quelle relative a due stati eccitati. Lo stato corrispondente a b) presenta meno salti rispetto a quello in c) e determinerà quindi uno stato meno eccitato; corrispondentemente, l'overlap dello stato fondamentale con quello in b) sarà maggiore rispetto a quello con lo stato in c).

nostra successione sono:

$$\left\{ -\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right\}, \left\{ -\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{7}{2} \right\}, \left\{ -\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right\}, \\ \left\{ -\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{9}{2} \right\}, \left\{ -\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{7}{2} \right\}, \dots ; \quad (5.51)$$

- soluzione delle equazioni di Bethe (2.36) per ciascun insieme di numeri quantici $\{I_j\}$ costruiti al punto precedente. Si ottiene così una successione d'insiemi di rapidità $\{\lambda_j\}$ soluzioni delle equazioni di Bethe per costante di interazione c ;
- calcolo degli overlap al prim'ordine usando la formula che abbiamo derivato (5.45);
- calcolo dei fattori di forma dell'osservabile \mathcal{O} . Considereremo osservabili di cui il fattore di forma è calcolabile usando l'algebraic Bethe ansatz;
- calcolo della somma parziale nel membro di sinistra nella regola di somma (5.49). La procedura è interrotta quando è raggiunto il valore di soglia.

Implementando il calcolo numerico, abbiamo osservato che al crescere dei parametri c ed L gli overlap diventano più piccoli ed è quindi necessario considerare un numero maggiore di stati per raggiungere il valore di soglia nella regola di somma, rendendo meno efficiente il calcolo per grandi c (forte interazione) e grandi L (bassa densità). La prima quantità che abbiamo considerato è il Loschmidt echo, che è definito come il modulo quadro del prodotto scalare dello stato iniziale e dello stato al tempo t :

$$\mathcal{L}(t) = \left| \langle \psi_0(c_i) | e^{-iH_N^{LL}(c)t} | \psi_0(c_i) \rangle \right|^2. \quad (5.52)$$

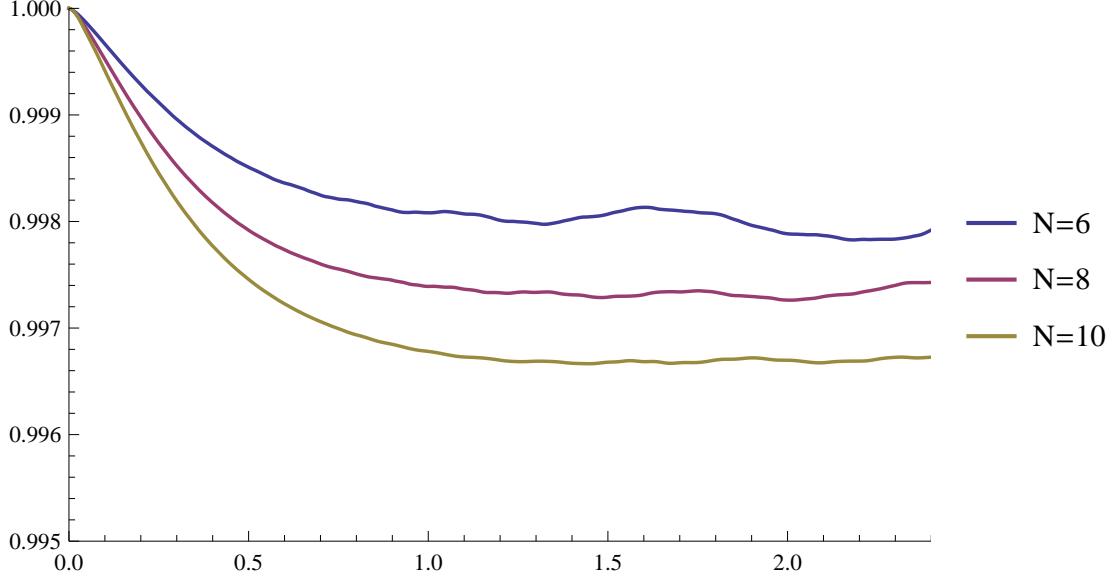


FIGURA 5.2: Evoluzione temporale del Loschmidt echo $\mathcal{L}(t)$. I parametri del sistema sono fissati a $c_i = 2.2$, $c = 2$, $L = 2N$.

Il Loschmidt echo è una misura di quanto lo stato del sistema si allontani dallo stato iniziale. E' inoltre una quantità interessante perché è la trasformata di Fourier della distribuzione del lavoro, che fornisce il lavoro medio che dobbiamo compiere sul sistema per effettuare il quench. Formalmente, possiamo vedere il Loschmidt echo come il valore di aspettazione dell'osservabile (non locale) $|\psi_0(c_i)\rangle \langle \psi_0(c_i)|$, e per calcolare l'evoluzione temporale di $\mathcal{L}(t)$ usiamo l'espansione (5.2). Possiamo semplificare la (5.2) tenendo conto che stiamo considerando un quench al prim'ordine; usando la teoria delle perturbazioni al prim'ordine abbiamo:

$$\mathcal{L}(t) = 1 - 4 \sum_{\{\lambda_j\}} \left(\langle \psi_0(c_i) | \{ \lambda \}, c \rangle \Big|_{\text{f.o.}} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{1}{2} [E_0 - E(\{ \lambda_j \})] t \right) + O((c_i - c)^2), \quad (5.53)$$

dove anche in questo caso la sommatoria è estesa a tutti gli insiemi di soluzioni delle equazioni di Bethe, escludendo quella corrispondente allo stato fondamentale, (ricordando che usiamo la notazione “f.o” per indicare “first order”).

In figura 5.2 riportiamo il Loschmidt echo per un quench con parametri $c_i = 2.2$, $c = 2$, per dimensione crescente del sistema, tenendo costante N/L . Vediamo che al crescere del sistema il comportamento diventa più regolare, e dopo una prima fase transiente $\mathcal{L}(t)$ si stabilizza attorno ad un valore stazionario.

A causa delle dimensioni finite del sistema dopo un certo tempo gli effetti di finite size per $\mathcal{L}(t)$ diventeranno evidenti. Abbiamo ritenuto utile fare un confronto con il già

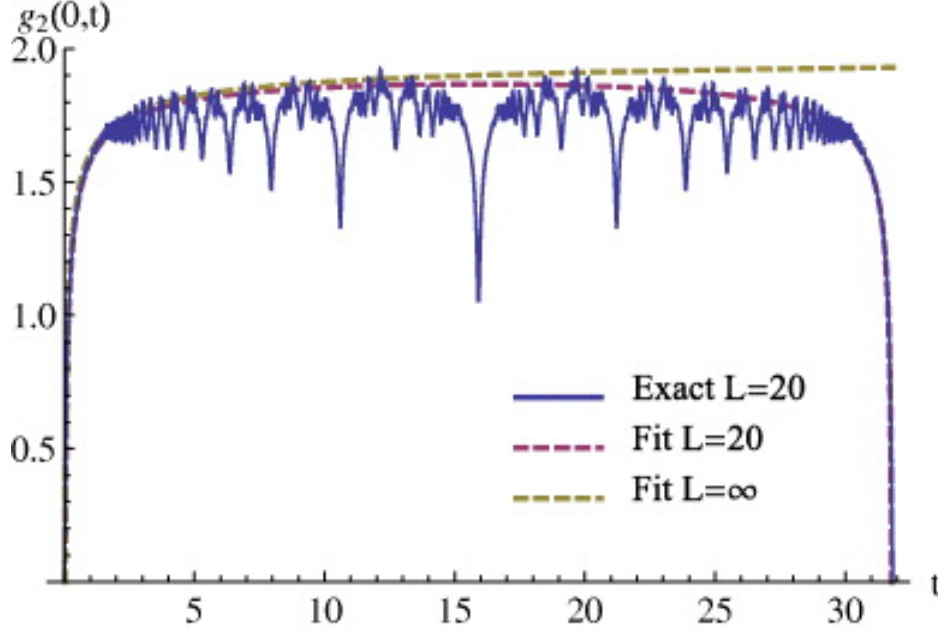


FIGURA 5.3: Evoluzione temporale di $g_2(0, t)$ definita in (5.54) per un sistema di $N = 20$ bosoni, con parametri $L = 20$, $c_i = 1000$. Immagine presa da [59].

citato studio presentato in [59] in cui si considera un quench sul modello di Lieb-Liniger in cui il parametro d'interazione c_i viene improvvisamente annullato ($c_i \rightarrow 0$); il sistema, preparato inizialmente nello stato fondamentale $|\psi_0(c_i)\rangle$ di $H_N^{LL}(c_i)$, viene quindi lasciato evolvere sotto l'hamiltoniana $H_{\text{free}} \equiv H_N^{LL}(0)$. Per l'hamiltoniana di evoluzione libera, gli autostati del sistema si fattorizzano in autostati di singola particella con livelli energetici dati da $E_n = (2\pi n/L)^2$ e questo si riflette in un comportamento periodico del valore di aspettazione delle osservabili. Riportiamo in figura 5.3 il grafico preso da [59] dell'evoluzione temporale del valore di aspettazione dell'osservabile $(\psi_0^\dagger)^2(\psi_0)^2$ per questo tipo di quench, cioè la quantità

$$g_2(0, t) = \frac{\langle \psi_0(c_i) | e^{iH_{\text{free}}t} (\psi_0^\dagger)^2 (\psi_0)^2 e^{-iH_{\text{free}}t} | \psi_0(c_i) \rangle}{\langle \psi_0(c_i) | \psi_0^\dagger \psi_0 | \psi_0(c_i) \rangle^2}. \quad (5.54)$$

Confrontiamo il caso libero di figura 5.3 con la situazione interagente che stiamo studiando e consideriamo la figura 5.4 in cui riportiamo il Loschmidt echo per $N = 8$, $N = 10$ bosoni per evidenziare gli effetti di finite size e il loro scaling con le dimensioni del sistema; osserviamo che a causa delle interazioni il comportamento di $\mathcal{L}(t)$ non è esattamente periodico. Dopo un transiente iniziale, $\mathcal{L}(t)$ raggiunge un plateau che si mantiene finché diventano evidenti gli effetti di finite size; nel limite termodinamico, $N, L \rightarrow \infty$ ci aspettiamo che la larghezza del plateau vada all'infinito. Infine, in figura 5.5 riportiamo il comportamento di $\mathcal{L}(t)$ per grandi tempi per un sistema di $N = 10$

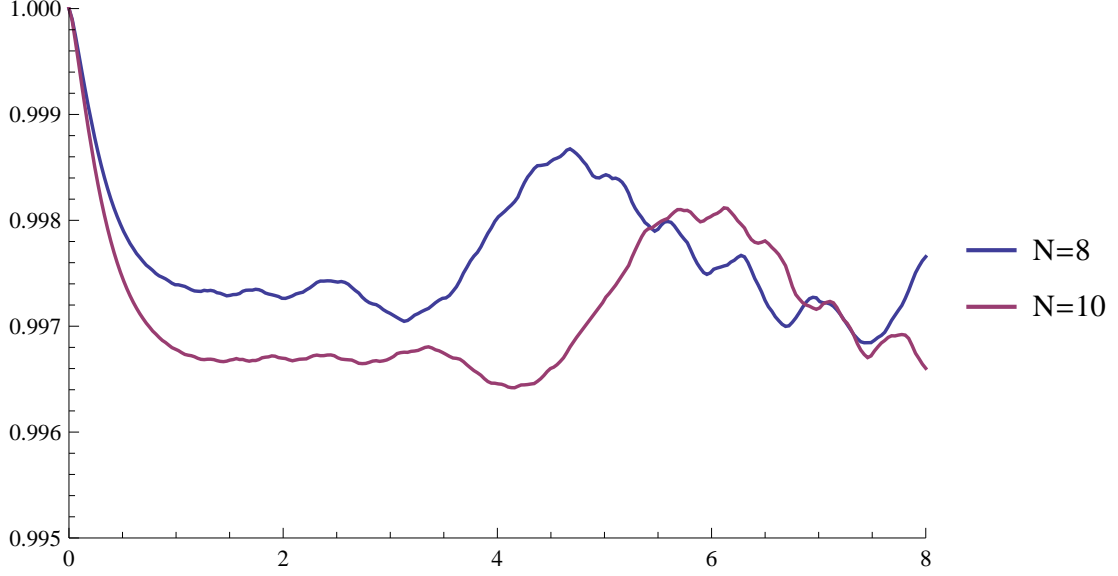


FIGURA 5.4: Evoluzione temporale del Loschmidt echo $\mathcal{L}(t)$ per $N = 8$, $N = 10$ particelle. I parametri del sistema sono fissati a $c_i = 2.2$, $c = 2$, $L = 2N$.

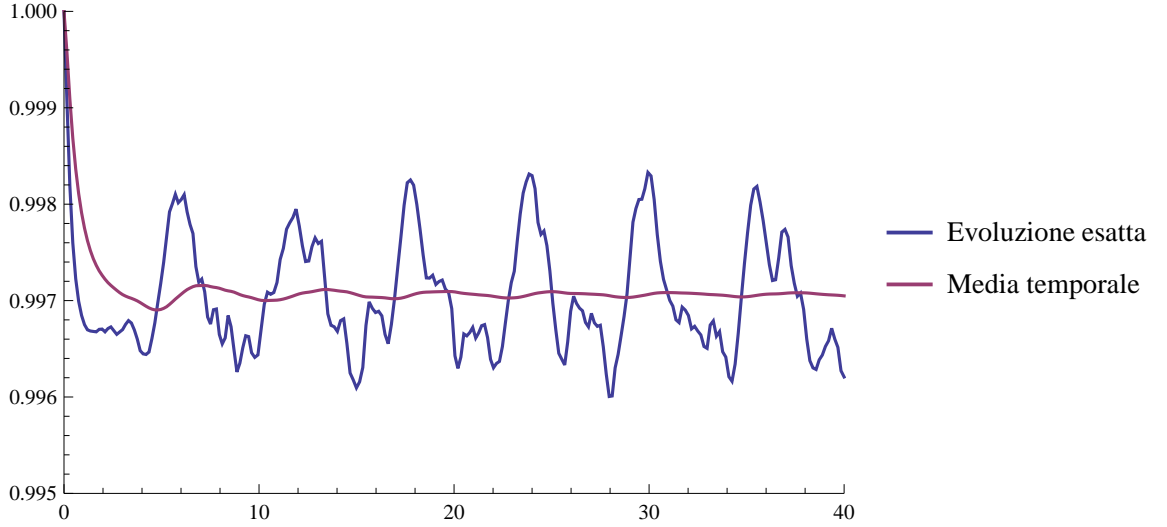


FIGURA 5.5: Evoluzione temporale a grandi tempi del Loschmidt echo $\mathcal{L}(t)$ per un sistema di $N = 10$ bosoni. I parametri del sistema sono fissati a $c_i = 2.2$, $c = 2$, $L = 20$.

bosoni; in figura è riportata anche la media temporale:

$$\bar{\mathcal{L}}(T) = \frac{1}{T} \int_0^T dt \mathcal{L}(t) . \quad (5.55)$$

Con l'espansione in fattori di forma (5.2) siamo in grado di calcolare l'evoluzione temporale di altre osservabili. La prima quantità che viene naturale considerare corrisponde all'operatore densità $\psi^\dagger(x)\psi(x)$; per questo modello tuttavia, poiché gli stati di Bethe

$|\{\lambda_j\}, c\rangle$ sono invarianti per traslazione e hanno numero di particelle fissato, si ha

$$\langle \{\lambda_j\}, c_i | \psi^\dagger(x, t) \psi(x, t) | \{\lambda_j\}, c_i \rangle = \frac{N}{L}, \quad (5.56)$$

cioè $\psi^\dagger(x) \psi(x)$ non evolve nel tempo.

Ci concentriamo quindi sull'osservabile $\psi^\dagger(x) \psi^\dagger(x) \psi(x) \psi(x)$, che per invarianza traslazionale possiamo valutare in 0, e che codifica la probabilità di avere due bosoni nello stesso punto. Anche in questo caso, possiamo semplificare l'espressione in (5.2) tenendo conto che siamo interessati ad una variazione al prim'ordine; riscriviamo quindi:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}(t) \rangle &= \langle \psi_0(c_i) | \mathcal{O}(t) | \psi_0(c_i) \rangle = \langle \psi_0(c) | (\psi_0^\dagger)^2 (\psi_0)^2 | \psi_0(c) \rangle + \\ &+ 2 \sum_{\{\lambda_j\}} \langle \{\lambda_j\}, c | \psi_0(c_i) \rangle \Big|_{\text{f.o.}} \langle \psi_0(c) | (\psi_0^\dagger)^2 (\psi_0)^2 | \{\lambda_j\}, c \rangle \cos \left[(E(\{\lambda_j\}) - E_0)t \right] + \\ &+ O((c_i - c)^2), \end{aligned} \quad (5.57)$$

dove in questo caso

$$\mathcal{O}(t) = e^{iH_N^{LL}(c)t} \psi^\dagger(0) \psi^\dagger(0) \psi(0) \psi(0) e^{-iH_N^{LL}(c)t} \quad (5.58)$$

e la sommatoria è su tutte gli insiemi di soluzioni delle equazioni di Bethe (esclusa quella corrispondente allo stato fondamentale).

Osserviamo che in questo caso il valore asintotico della media temporale è banale perché stiamo considerando il prim'ordine in $c_i - c$, e corrisponde al valore di aspettazione $\langle \psi_0(c) | (\psi_0^\dagger)^2 (\psi_0)^2 | \psi_0(c) \rangle$. È interessante tuttavia studiare l'evoluzione temporale; in figura 5.6 abbiamo riportato la quantità

$$\begin{aligned} d(t) &= \frac{1}{|\langle \psi_0(c_i) | \mathcal{O}(0) | \psi_0(c_i) \rangle - \langle \psi_0(c) | \mathcal{O}(0) | \psi_0(c) \rangle|} \times \\ &\times \left(\langle \psi_0(c_i) | \mathcal{O}(t) | \psi_0(c_i) \rangle - \langle \psi_0(c) | \mathcal{O}(0) | \psi_0(c) \rangle \right) \end{aligned} \quad (5.59)$$

per sistemi con numero di particelle crescente tenendo costante la densità N/L . Vediamo che il comportamento a piccoli tempi è invariante di scaling. Per $N = 4$ gli effetti di finite size sono dominanti, mentre aumentando le dimensioni del sistema per piccoli tempi ci avviciniamo al comportamento del sistema nel limite termodinamico. In ogni caso, come osservato per il Loschmidt echo, gli effetti di finite size diventeranno ad un certo punto evidenti; in figura 5.7 riportiamo il comportamento di $d(t)$ per grandi tempi per $N = 10$ bosoni. Vediamo che a causa delle dimensioni finite il sistema esibisce fluttuazioni di ampiezza maggiore attorno allo zero per tempi grandi.

L'ultima quantità che abbiamo considerato è la funzione di correlazione a due punti a

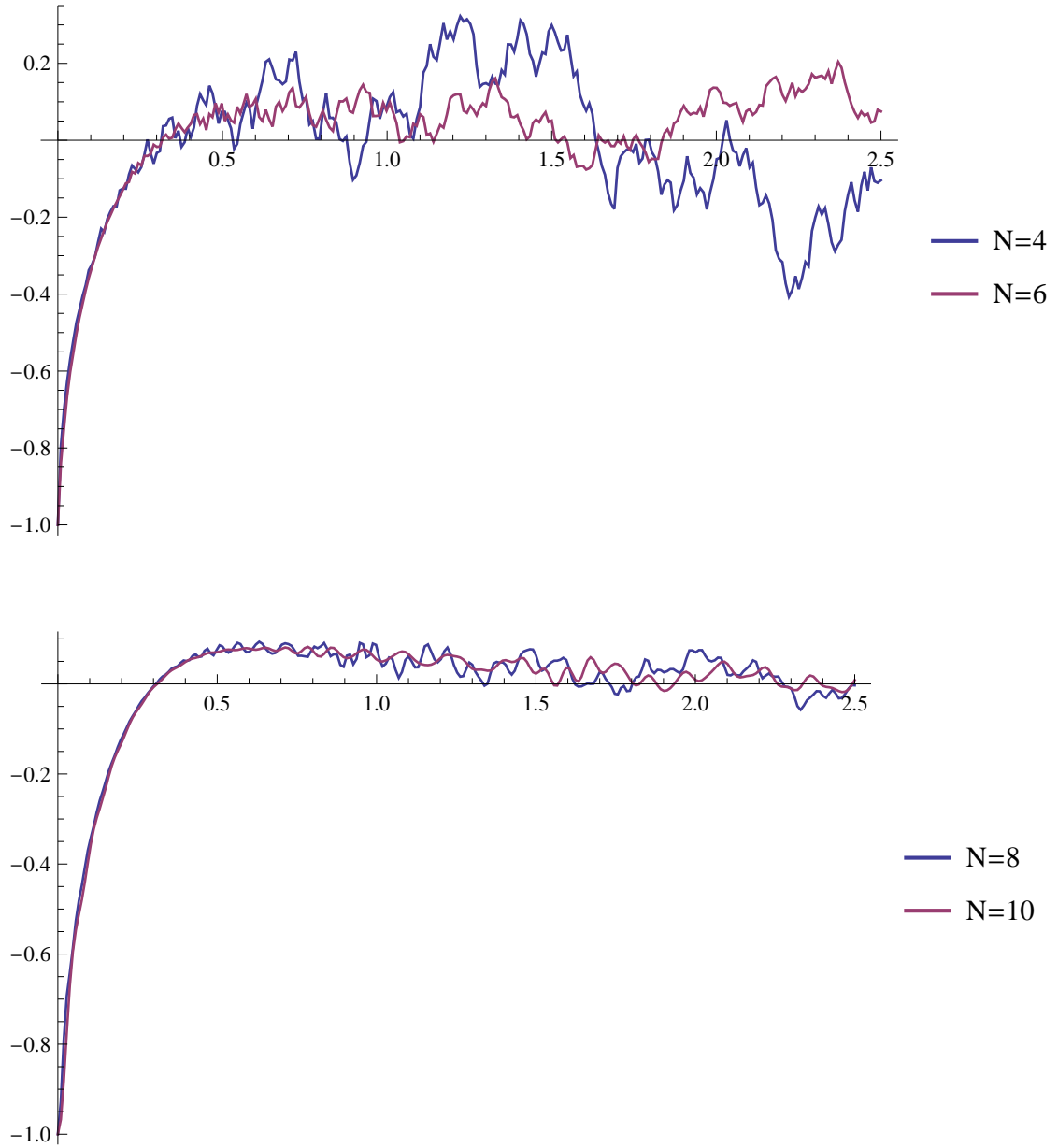


FIGURA 5.6: Nel grafico è riportata l'evoluzione temporale per $d(t)$ definito in (5.59) per sistemi con un numero crescente di particelle. I parametri sono fissati a $c_i = 2.2$, $c = 2.0$, $L = 2N$.

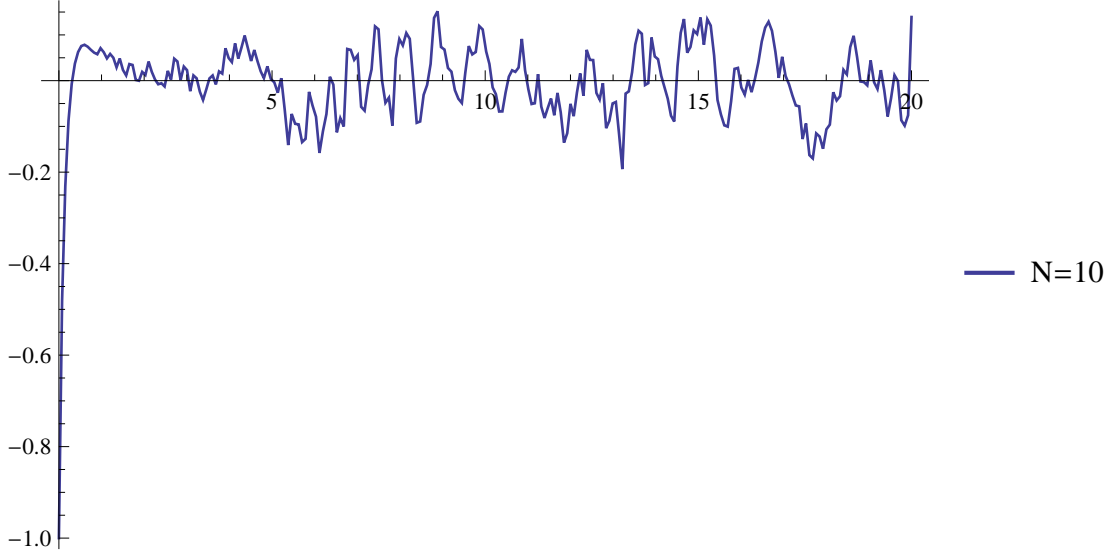


FIGURA 5.7: Evoluzione temporale a grandi tempi di $d(t)$ definita in (5.59) per un sistema di $N = 10$ bosoni. I parametri del sistema sono fissati a $c_i = 2.2$, $c = 2$, $L = 20$.

tempi uguali:

$$\psi^\dagger(x, t)\psi(0, t) = e^{iH_N^{LL}(c)t}\psi^\dagger(x)\psi(0)e^{-iH_N^{LL}(c)t}. \quad (5.60)$$

Per valutarne l'evoluzione temporale grazie all'espansione (5.2) è necessario conoscere il fattore di forma $\langle \{\lambda_j\}, c | \psi^\dagger(x)\psi(0) | \{\mu_j\}, c \rangle$; a differenza di $(\psi_0^\dagger)^2(\psi_0)^2$ non esiste una formula compatta per questo fattore di forma, e si deve ricorrere all'espansione:

$$\langle \{\lambda_j\}, c | \psi^\dagger(x)\psi(0) | \{\mu_j\}, c \rangle = \sum_{\{\nu_k\}} \langle \{\lambda_j\}, c | \psi^\dagger(x) | \{\nu_k\}, c \rangle \langle \{\nu_k\}, c | \psi(0) | \{\mu_j\}, c \rangle, \quad (5.61)$$

dove la sommatoria è estesa a tutte le soluzioni delle equazioni di Bethe di $N - 1$ particelle. La (5.61) può essere valutata numericamente, utilizzando una formula compatta in termini del determinante di una matrice $N \times N$ presente in letteratura [48] per i fattori di forma di $\psi^\dagger(x)$ e $\psi(0)$. Nel calcolo numerico della (5.61) la sommatoria infinita sugli insiemi $\{\nu_j\}$ è troncata ad un numero finito; per tenere sotto controllo l'errore, si è utilizzata la seguente identità:

$$\sum_{\{\nu_k\}} \langle \{\lambda_j\}, c | \psi^\dagger(0) | \{\nu_k\}, c \rangle \langle \{\nu_k\}, c | \psi(0) | \{\lambda_j\}, c \rangle = \frac{N}{L}. \quad (5.62)$$

Si vede subito che tutti gli addendi nella (5.62) sono positivi; quindi nel valutare fattori di forma del tipo $\langle \{\lambda\}, c | \psi^\dagger(x)\psi(0) | \{\mu\}, c \rangle$ abbiamo sommato un numero di termini

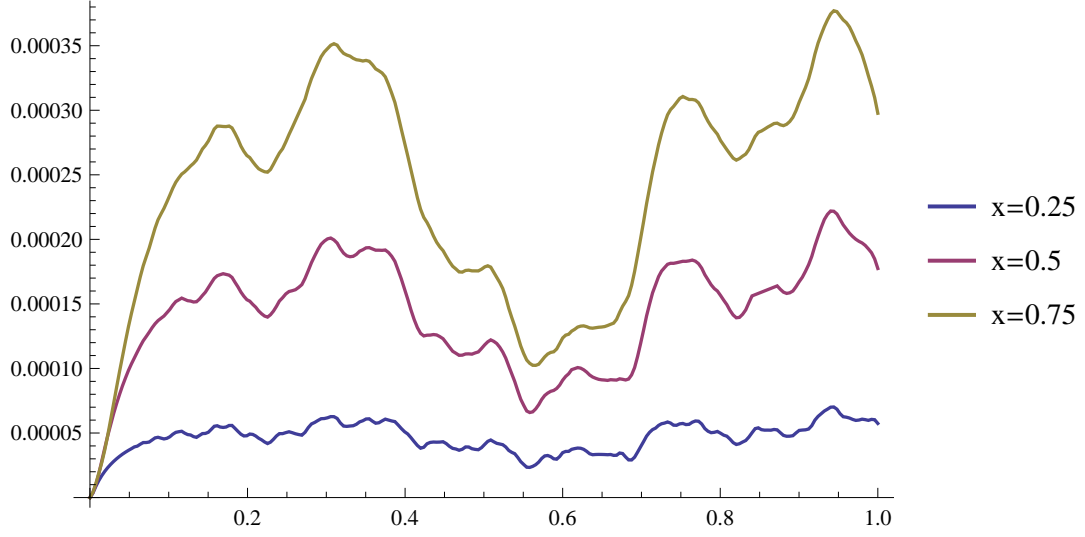


FIGURA 5.8: Evoluzione temporale a piccoli tempi di $g(x, t)$ definita in (5.65) per diversi valori di x per un sistema di $N = 4$ bosoni. I parametri del sistema sono fissati a $c_i = 4.4$, $c = 4$, $L = 4$.

sufficiente perché fossero verificate le seguenti:

$$\frac{L}{N} \left(\sum_{\{\nu_k\}} \langle \{\lambda_j\}, c | \psi^\dagger(0) | \{\nu_k\}, c \rangle \langle \{\nu_k\}, c | \psi(0) | \{\lambda_j\}, c \rangle \right) \geq v_s, \quad (5.63)$$

$$\frac{L}{N} \left(\sum_{\{\nu_k\}} \langle \{\mu_j\}, c | \psi^\dagger(0) | \{\nu_k\}, c \rangle \langle \{\nu_k\}, c | \psi(0) | \{\mu_j\}, c \rangle \right) \geq v_s, \quad (5.64)$$

dove v_s è un valore di soglia che abbiamo scelto essere 0.999. Evidentemente, la procedura per il calcolo dei fattori di forma richiede più tempo per questa osservabile rispetto a $(\psi_0^\dagger)^2(\psi_0)^2$. In figura 5.8 riportiamo a titolo illustrativo la quantità

$$g(x, t) = \langle \psi_0(c_i) | \psi^\dagger(x, t) \psi(0, t) | \psi_0(c_i) \rangle - \langle \psi_0(c_i) | \psi^\dagger(x, 0) \psi(0, 0) | \psi_0(c_i) \rangle \quad (5.65)$$

al prim'ordine in $(c_i - c)$ per diversi valori di x per un sistema di $N = 4$ bosoni (si noti che per le proprietà degli overlap la (5.65) è reale).

5.5 Conclusioni e commenti

In questo capitolo abbiamo presentato uno studio del modello di Lieb-Liniger e in particolare dell'evoluzione temporale a seguito di un quench d'interazione. Dopo aver dimostrato alcune proprietà generali per un quench arbitrario abbiamo derivato una

formula esplicita per gli overlap per una variazione al prim'ordine della costante d'interazione c . Abbiamo utilizzato questa formula per effettuare uno studio numerico dell'evoluzione temporale del Loschmidt echo, del valore di aspettazione dell'osservabile $(\psi_0^\dagger)^2(\psi_0)^2$ e della funzione di correlazione a due punti a tempi uguali.

Tra i risultati di questo capitolo, abbiamo presentato una formula ricorsiva per l'overlap al prim'ordine che potrebbe essere usata in studi successivi per semplificare ulteriormente la formula (5.40), e questo permetterebbe una trattazione analitica del problema di quench. Inoltre, la nostra derivazione della formula (5.40) può essere applicata anche alla catena XXZ , rendendo possibile estendere la nostra analisi anche a quest'ultimo modello.

Capitolo 6

Conclusioni

In questa tesi abbiamo considerato il problema di quench in sistemi quantistici isolati, che ha ricevuto interesse teorico crescente negli ultimi anni, soprattutto a seguito di alcuni recenti esperimenti fondamentali nel campo degli atomi freddi. In particolare, ci siamo concentrati sui sistemi integrabili, e nel capitolo 1 abbiamo introdotto il quadro generale in cui si inserisce il loro studio nel discorso più ampio della comprensione del non equilibrio in sistemi isolati. Nello specifico, l'oggetto principale di questa tesi sono stati i modelli di Lieb-Liniger e la catena XXZ , introdotti nel capitolo 2, insieme alla loro soluzione attraverso Bethe ansatz.

Negli ultimi anni, un approccio allo studio della dinamica del non equilibrio in sistemi integrabili a seguito di un quench è stato quello dell'espansione in fattori di forma del valore di aspettazione delle osservabili d'interesse (capitolo 1); i building blocks per questo approccio sono naturalmente gli autostati normalizzati del sistema, gli elementi di matrice dell'osservabile che si sta analizzando e gli overlap tra autostati di hamiltoniane corrispondenti a due diversi valori del parametro di quench. Come abbiamo illustrato nel capitolo 3, il problema delle norme e degli elementi di matrice è risolto all'interno dell'algebraic Bethe ansatz mentre rimane in generale aperto il problema del calcolo degli overlap. Nel capitolo 4 abbiamo proposto un approccio al calcolo degli overlap per il modello XXZ per stati fattorizzati, basato sulla derivazione di formule ricorsive. Siamo stati in grado di derivare in questo modo una formula compatta per gli overlap con uno stato d'interesse (stato di Néel), ritrovando in modo più semplice un risultato recentemente dimostrato in letteratura. Perdendo in termini di semplicità di derivazione e di risultati finali, abbiamo generalizzato questo approccio al modello continuo di Lieb-Liniger per lo stato in cui tutti i bosoni hanno impulso nullo. Siamo riusciti a risolvere soltanto una delle formule ricorsive che abbiamo dimostrato. Da una parte rimane da capire se sia possibile risolvere anche l'altra formula esplicita che

abbiamo derivato e le altre analoghe che si possono dimostrare nel modello XXZ , ottenendo così formule compatte per gli overlap tra autostati di Bethe e altri stati d'interesse; dall'altra, il nostro approccio si estende in modo naturale a tutti i sistemi integrabili su reticolo e una strada da percorrere in studi futuri è quella di cercare di ottenere risultati esatti anche in questi altri casi.

Nel capitolo 5 abbiamo studiato un quench nel modello di Lieb-Liniger. In particolare, abbiamo considerato il problema non studiato di variazione al prim'ordine $c \rightarrow c + \delta c$, con c arbitrario, ottenendo una formula per l'overlap in questo caso. Quest'ultima ci ha permesso uno studio numerico dell'evoluzione temporale di alcune osservabili del sistema. I calcoli numerici effettuati per il Loschmidt echo potrebbero essere usati in studi futuri per la verifica della validità del generalized Gibbs ensemble per il modello di Lieb-Liniger. Inoltre la derivazione della formula di quench al prim'ordine può essere generalizzata anche al modello XXZ , in modo da estendere a questo modello la nostra analisi. Tra i risultati di questo capitolo, abbiamo anche presentato una formula ricorsiva per l'overlap al prim'ordine che potrebbe essere utile per ottenere una formula semplificata rispetto a quella che abbiamo dimostrato, in modo da arrivare a trattare il problema dal punto di vista analitico; lo sforzo di ricerche future in questa direzione è motivato dall'importanza di ottenere risultati esatti nel campo in rapida crescita dello studio dei sistemi quantistici isolati.

Infine, i risultati esatti presentati in questa tesi riguardanti le formule analitiche degli overlap nel modello XXZ e quella corrispondente al quench al prim'ordine nel modello di Lieb-Liniger si uniscono a quelli comparsi nella letteratura dell'ultimo anno, che costituiscono un punto di partenza verso la soluzione del problema generale di quench in sistemi integrabili. Trovare un formalismo che permetta di ricavare formule compatte per gli overlap tra autostati di hamiltoniane corrispondenti a parametri di quench diversi per sistemi integrabili generici renderebbe possibile il controllo analitico per molti problemi teorici, fornendo calcoli esatti per una grande classe di potenziali esperimenti, e banchi di prova preziosi per verificare, ad esempio, la validità del generalized Gibbs ensemble. Nonostante il gran numero di studi degli ultimi anni, rimane ancora molto lavoro da fare per arricchire la nostra comprensione dei sistemi integrabili lontano dall'equilibrio.

Bibliografia

- [1] A. Polkovnikov, K. Sengupta, A. Silva e M. Vengalattore: *Colloquium: Nonequilibrium dynamics of closed interacting quantum systems*. Rev. Mod. Phys., **83**:863, 2011.
- [2] P. Reimann e M. Evstigneev: *Quantum versus classical foundation of statistical mechanics under experimentally realistic conditions*. Phys. Rev. E, **88**:052114, 2013.
- [3] P. Reimann: *Foundation of Statistical Mechanics under Experimentally Realistic Conditions*. Phys. Rev. Lett., **101**:190403, 2008.
- [4] P. Reimann e P. Kastner: *Equilibration of isolated macroscopic quantum systems*. New Journal of Physics, **14**:043020, 2012.
- [5] S. Goldstein, J. L. Lebowitz, R. Tumulka e N. Zanghì: *Canonical Typicality*. Phys. Rev. Lett., **96**:050403, 2006.
- [6] S. Popescu, A. J. Short e A. Winter: *Entanglement and the foundations of statistical mechanics*. Nature Physics, **2**:754, 2006.
- [7] J.-S. Caux e J. Mossel: *Remarks on the notion of quantum integrability*. Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, **2011**:P02023, 2011.
- [8] J. von Neumann: *Beweis des Ergodensatzes und des H-Theorems in der neuen Mechanik*. Zeitschrift für Physik, **57**:30, 1929.
- [9] J. von Neumann: *Proof of the ergodic theorem and the H-theorem in quantum mechanics*. The European Physical Journal H, **35**:201, 2010.
- [10] M. Rigol e M. Srednicki: *Alternatives to Eigenstate Thermalization*. Phys. Rev. Lett., **108**:110601, 2012.
- [11] M. Rigol, V. Dunjko e M. Olshanii: *Thermalization and its mechanism for generic isolated quantum systems*. Nature, **452**:854, 2008.

- [12] M. Srednicki: *Chaos and quantum thermalization*. Phys. Rev. E, **50**:888, 1994.
- [13] M. Rigol: *Breakdown of Thermalization in Finite One-Dimensional Systems*. Phys. Rev. Lett., **103**:100403, 2009.
- [14] G. P. Brandino, A. De Luca, R. M. Konik e G. Mussardo: *Quench dynamics in randomly generated extended quantum models*. Phys. Rev. B, **85**:214435, 2012.
- [15] J. M. Deutsch: *Quantum statistical mechanics in a closed system*. Phys. Rev. A, **43**:2046, 1991.
- [16] A. C. Cassidy, C. W. Clark e M. Rigol: *Generalized Thermalization in an Integrable Lattice System*. Phys. Rev. Lett., **106**:140405, 2011.
- [17] M. Rigol, V. Dunjko, V. Yurovsky e M. Olshanii: *Relaxation in a Completely Integrable Many-Body Quantum System: An Ab Initio Study of the Dynamics of the Highly Excited States of 1D Lattice Hard-Core Bosons*. Phys. Rev. Lett., **98**:050405, 2007.
- [18] E. T. Jaynes: *Information Theory and Statistical Mechanics*. Phys. Rev., **106**:620, 1957.
- [19] M. A. Cazalilla: *Effect of Suddenly Turning on Interactions in the Luttinger Model*. Phys. Rev. Lett., **97**:156403, 2006.
- [20] P. Calabrese e J. Cardy: *Quantum quenches in extended systems*. Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, **2007**:P06008, 2007.
- [21] M. Kormos, M. Collura e P. Calabrese: *Analytic results for a quantum quench from free to hard-core one-dimensional bosons*. Phys. Rev. A, **89**:013609, 2014.
- [22] D. Fioretto e G. Mussardo: *Quantum quenches in integrable field theories*. New Journal of Physics, **12**:055015, 2010.
- [23] M. Fagotti, M. Collura, F. H. L. Essler e P. Calabrese: *Relaxation after quantum quenches in the spin- $\frac{1}{2}$ Heisenberg XXZ chain*. Phys. Rev. B, **89**:125101, 2014.
- [24] D. M. Gangardt e M. Pustilnik: *Correlations in an expanding gas of hard-core bosons*. Phys. Rev. A, **77**:041604, 2008.
- [25] T. Caneva, E. Canovi, D. Rossini, G.E. Santoro e A. Silva: *Applicability of the generalized Gibbs ensemble after a quench in the quantum Ising chain*. Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, **2011**:P07015, 2011.
- [26] M. Greiner, O. Mandel, T. W. Hansch e I. Bloch: *Collapse and revival of the matter wave field of a Bose-Einstein condensate*. Nature, **419**:51, 2002.

- [27] T. Kinoshita, T. Wenger e D.S. Weiss: *A quantum Newton's cradle*. Nature, **440**:900, 2006.
- [28] S. Trotzky, Y A Chen, A. Flesch, I. P. McCulloch, U. Schollwöck, J. Eisert e I. Bloch: *Probing the relaxation towards equilibrium in an isolated strongly correlated one-dimensional Bose gas*. Nature Physics, **8**:325, 2012.
- [29] M. Cheneau, P. Barmettler, D. Poletti, M. Endres, P. Schausz, T. Fukuhara, C. Gross, I. Bloch, C. Kollath e S. Kuhr: *Light-cone-like spreading of correlations in a quantum many-body system*. Nature, **481**:484, 2012.
- [30] T. Fukuhara, P. Schausz, M. Endres, S. Hild, M. Cheneau, I. Bloch e C. Gross: *Microscopic observation of magnon bound states and their dynamics*. Nature, **502**:76, 2013.
- [31] H. Bethe: *Zur Theorie der Metalle*. Zeitschrift für Physik, **71**:205, 1931.
- [32] E. H. Lieb e W. Liniger: *Exact Analysis of an Interacting Bose Gas. I. The General Solution and the Ground State*. Phys. Rev., **130**:1605, 1963.
- [33] E. H. Lieb: *Exact Analysis of an Interacting Bose Gas. II. The Excitation Spectrum*. Phys. Rev., **130**:1616, 1963.
- [34] V. E. Korepin, N.M Bogoliubov e A.G Izergin: *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*. Cambridge University Press, 1993.
- [35] T. C. Dorlas: *Orthogonality and completeness of the Bethe ansatz eigenstates of the nonlinear Schrödinger model*. Communications in Mathematical Physics, **154**:347, 1993.
- [36] B. Davies: *Higher conservation laws for the quantum non-linear Schrödinger equation*. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, **167**:433, 1990.
- [37] B. Davies e V. E. Korepin: *Higher conservation laws for the quantum non-linear Schrödinger equation*. E-print arXiv:1109.6604, 2011.
- [38] M. Takahashi: *Thermodynamics of one-dimensional solvable models*. Cambridge University Press, 1999.
- [39] R. J. Baxter: *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*. Dover Publications, 1982.
- [40] M. Jimbo: *Yang-Baxter Equation in Integrable Systems*. World Scientific Publishing, 1990.
- [41] M. Gaudin: *La Fonction d'Onde de Bethe*. Masson, 1983.

- [42] V. E. Korepin: *Calculation of norms of Bethe wave functions*. Communications in Mathematical Physics, **86**:391, 1982.
- [43] N. A. Slavnov: *Calculation of scalar products of wave functions and form factors in the framework of the algebraic Bethe ansatz*. Theoretical and Mathematical Physics, **79**:502, 1989.
- [44] J. M. Maillet e J. Sanchez de Santos: *Drinfel'd Twists and Algebraic Bethe Ansatz*. E-print arXiv:q-alg/9612012, 1996.
- [45] N. Kitanine, J.M. Maillet e V. Terras: *Form factors of the XXZ Heisenberg spin-1/2 finite chain*. Nuclear Physics B, **554**:647, 1999.
- [46] F. Göhmann e V. E. Korepin: *Solution of the quantum inverse problem*. Journal of Physics A: Mathematical and General, **33**:1199, 2000.
- [47] T. Kojima, V. E. Korepin e N. A. Slavnov: *Determinant Representation for Dynamical Correlation Functions of the Quantum Nonlinear Schrödinger Equation*. Communications in Mathematical Physics, **188**:657, 1997.
- [48] J.-S. Caux, P. Calabrese e N.A. Slavnov: *One-particle dynamical correlations in the one-dimensional Bose gas*. Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, **2007**:01008, 2007.
- [49] B. Pozsgay: *Local correlations in the 1D Bose gas from a scaling limit of the XXZ chain*. Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, **2011**:P11017, 2011.
- [50] A. Faribault, P. Calabrese e J.-S. Caux: *Quantum quenches from integrability: the fermionic pairing model*. Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, **2009**:P03018, 2009.
- [51] A. Faribault, P. Calabrese e J.-S. Caux: *Bethe ansatz approach to quench dynamics in the Richardson model*. Journal of Mathematical Physics, **50**:095212, 2009.
- [52] V. Gritsev, T. Rostunov e E. Demler: *Exact methods in the analysis of the non-equilibrium dynamics of integrable models: application to the study of correlation functions for non-equilibrium 1D Bose gas*. Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, **2010**:P05012, 2010.
- [53] B. Pozsgay: *Overlaps between eigenstates of the XXZ spin-1/2 chain and a class of simple product states*. E-print arXiv:1309.4593, 2013.
- [54] M. Brockmann, J. De Nardis, B. Wouters e J.-S. Caux: *A Gaudin-like determinant for overlaps of Néel and Bethe states*. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, **47**:145003, 2014.

- [55] M. Brockmann, J. De Nardis, B. Wouters e J.-S. Caux: *Néel-XXZ state overlaps: odd particle numbers and Lieb-Liniger scaling limit*. E-print arXiv:1403.7469, 2014.
- [56] M. Brockmann: *A generalized Gaudin determinant for overlaps of q -raised Néel-like states with XXZ Bethe states and their relation to the Lieb-Liniger Bose gas*. E-print arXiv:1402.1471, 2014.
- [57] C. K. Majumdar: *Antiferromagnetic model with known ground state*. Journal of Physics C: Solid State Physics, **3**:911, 1970.
- [58] G. P. Berman, F. Borgonovi, F. M. Izrailev e A. Smerzi: *Irregular Dynamics in a One-Dimensional Bose System*. Phys. Rev. Lett., **92**:030404, 2004.
- [59] J. Mossel e J.-S. Caux: *Exact time evolution of space- and time-dependent correlation functions after an interaction quench in the one-dimensional Bose gas*. New Journal of Physics, **14**:075006, 2012.
- [60] J. De Nardis, B. Wouters, M. Brockmann e J.-S. Caux: *Solution for an interaction quench in the Lieb-Liniger Bose gas*. Phys. Rev. A, **89**:033601, 2014.
- [61] A. Faribault, P. Calabrese e J.-S. Caux: *Exact mesoscopic correlation functions of the Richardson pairing model*. Phys. Rev. B, **77**:064503, 2008.
- [62] A. Klauser, J. Mossel e J.-S. Caux: *Adjacent spin operator dynamical structure factor of the $S = 1/2$ Heisenberg chain*. Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, **2012**:P03012, 2012.

Ringraziamenti

Ringrazio il Professor Calabrese per avermi seguito nel mio lavoro di tesi durante quest'anno, lasciandomi allo stesso tempo libero di approfondire lo studio degli argomenti che trovavo più interessanti; per me è stato importante il modo in cui ha sempre risposto alla mia curiosità su alcuni argomenti di ricerca con discussioni che mi indirizzassero verso i punti fondamentali, motivandomi a proseguire nel mio percorso di studi.

Ringrazio i miei compagni di studio, con cui ho condiviso i momenti più impegnativi e le soddisfazioni di questi anni; in modo speciale i “fisici” Luca, Alvisè, Ludovico, Matteo, Paolo e Jinglei, insieme a tutti i “matematici”. Quello che ho imparato da loro costituisce una parte fondamentale della mia esperienza universitaria e ho sempre trovato una motivazione nella stima nei loro confronti. Vorrei ringraziare anche tutti gli amici che in questi anni hanno saputo essermi vicino, Matteo in particolare.

Ringrazio Francesca che mi ha sempre valorizzato e sostenuto nel mio percorso; nell'ultimo anno la sua vicinanza mi ha incoraggiato a credere in me stesso e in quello che stavo facendo, oltre che a spingermi a cercare di dare il meglio di me.

Infine ringrazio la mia famiglia e innanzitutto mia nonna Marina. Senza il suo sostegno avrei superato difficilmente alcuni periodi particolarmente impegnativi, e devo anche a lei alcuni dei traguardi che ho raggiunto: la sua ospitalità durante la preparazione di alcuni esami importanti mi ha sempre dato grande serenità. Ringrazio anche Katia e Laura per aver sempre manifestato entusiasmo per i miei studi. Naturalmente, ringrazio mio fratello per continuare a “tifare per me” in ogni occasione; in tutti questi anni l'ho sempre considerato un esempio da seguire. Più di tutti, vorrei ringraziare i miei genitori per il supporto incondizionato, che si è sempre manifestato nell'incoraggiamento quotidiano nei periodi più impegnativi o faticosi e nella valorizzazione di ogni piccolo risultato che ho ottenuto. Senza di loro non avrei avuto il coraggio di seguire la mia strada.