Avvitamento

Si sa che $\lambda \in \lambda(A)$ con v relativo autovettore, ovvero che $[\lambda I - A]v = 0$. Allora

$$e^{\lambda\theta} \in \lambda(e^{A\theta}), \quad \text{ovvero} \quad [e^{\lambda\theta} I - e^{A\theta}]v = 0$$

con v stesso autovettore del caso precedente. Inoltre si sa che $S(v)v = v \wedge v = 0$. Dire che $S(v)v = 0$ equivale a dire che $0 \in \lambda(S(v))$ con v relativo autovettore. Allora

$$e^{0\theta} \in \lambda(e^{S(v)\theta}) \quad \forall \theta$$

$$\Downarrow$$

$$1 \in \lambda(R_v(\theta)) \quad \forall \theta$$

con v stesso autovettore. Da ciò, $R_v(\theta)v = v$. Infatti:

$$[1 \cdot I - R_v(\theta)]v = 0$$

Consideriamo le trasformazioni di rotazione e di traslazione intorno ad uno stesso asse v,

$$T_R = \begin{bmatrix} e^{S(v)\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T_T = \begin{bmatrix} I & dv \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con θ, d scalari. Allora, se entrambe le trasformazioni avvengono lungo lo stesso asse, le matrici di trasformazione commutano.

$$T_R T_T = \begin{bmatrix} e^{S(v)\theta} & d\,\underbrace{e^{S(v)\theta} v}_{} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{S(v)\theta} & dv \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_T T_R = \begin{bmatrix} e^{S(v)\theta} & dv \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow T_T T_R = T_R T_T = A_v(\theta, d)$$

L'operazione di ruotare di θ e traslare di d lungo uno stesso asse è detta avvitamento. La matrice A_v ottenuta dal precedente prodotto commutativo è la matrice di avvitamento.

Denavit - Hartenberg

I robot sono visti come una catena cinematica aperta, ovvero un'unione di più membri ottenuta con coppie cinematiche in cui esiste almeno un membro con un solo accoppiamento. In particolare, si hanno n corpi rigidi interconnessi da n giunti ($n+1$ con la terra).
Per definire univocamente la posizione di ogni giunto nello spazio, si ha necessità di 6 grandezze. In totale si necessita dunque di $6n$ grandezze.
Tramite la procedura D.H. è possibile passare da $6n$ grandezze a $4n$ grandezze.

Passo 1) Individuare gli assi dei giunti: questi assi sono proprio gli assi z_0, z_1, ..., z_{n-1}.
Passo 2) Definire il sistema di riferimento $\mathcal{R}_0$: la sua origine deve cadere sull'asse z_0 che è stato già definito al Passo 1), mentre gli assi x_0 e y_0 posso essere definiti a piacere, con l'unico vincolo di costituire un sistema di riferimento destro.
Passo 3) Porre $i = 1$.
Passo 4) Se gli assi z_i e z_{i-1} sono paralleli, definire l'origine del sistema di riferimento i-esimo proprio in corrispondenza del giunto i-esimo. Se gli assi z_i e z_{i-1} non sono paralleli, e l'asse z_i interseca l'asse z_{i-1}, definire l'origine del sistema di riferimento i-esimo proprio in corrispondenza del punto di intersezione. In tutti gli altri casi, identificare quell'unica retta che è ortogonale sia a z_i sia a z_{i-1}; definire l'origine del sistema di riferimento i-esimo in corrispondenza del punto di intersezione di tale retta con l'asse z_i.
Passo 5) Se l'asse z_i interseca l'asse z_{i-1}, definire l'asse x_i passante per l'origine del sistema di riferimento i-esimo e perpendicolare al piano formato da z_{i-1} e z_i (ossia, tenendo conto dell'arbitrarietà del verso, porre $x_i = \pm(z_{i-1} \times z_i)/\|z_{i-1} \times z_i\|)$. In tutti gli altri casi, definire l'asse x_i passante per l'origine del sistema di riferimento i-esimo e normale sia a z_i sia a z_{i-1}.
Passo 6) Definire l'asse y_i in modo da completare la terna destra, ossia $y_i = (z_i \times x_i)/\|z_i \times x_i\|$.
Passo 7) Porre $i = i + 1$. Se $i < n$, andare al Passo 4), altrimenti andare al Passo 8).
Passo 8) Definire l'ultimo sistema di riferimento $\mathcal{R}_n$. Si assuma che l'ultimo giunto sia rotoidale. Definire z_n parallelo a z_{n-1}, definire l'origine sull'asse z_n (possibilmente localizzata al centro della pinza), e definire gli altri due assi a completamento della terna destra.
Passo 9) Per $i = 1, 2, ..., n$, identificare i parametri di Denavit-Hartenberg nel modo seguente:

- d_i = distanza **lungo l'asse** z_{i-1} dall'origine o_{i-1} fino al punto d'intersezione degli assi x_i e z_{i-1}.
- a_i = distanza **lungo l'asse** x_i dal punto d'intersezione degli assi x_i e z_{i-1} fino all'origine o_i.
- θ_i = l'angolo in senso antiorario dall'asse x_{i-1} all'asse x_i, misurato intorno all'asse z_{i-1}.
- α_i = l'angolo in senso antiorario dall'asse z_{i-1} all'asse z_i, misurato intorno all'asse x_i.

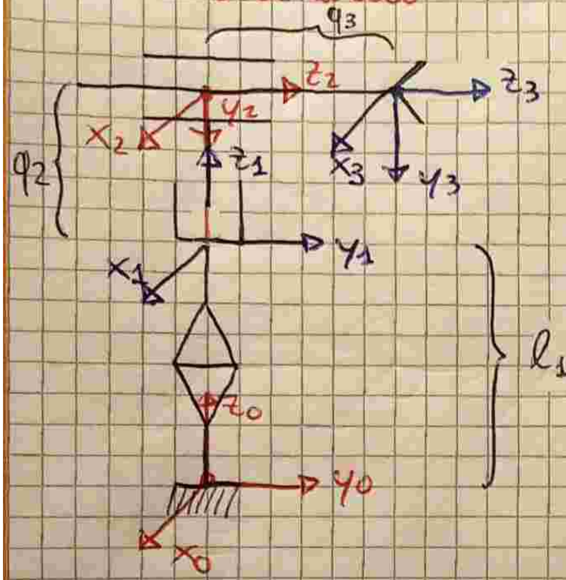
Passo 10) Calcolare le matrici di trasformazione omogenea $\mathbf{Q}_{i-1,i}$.

Per avere un movimento lungo l'asse y e' necessario fare due avvitamenti, uno lungo z e uno lungo x. Cio' definisce la matrice di Denavit - Hartenberg Q

$$Q = A_v(z, \theta, d)\, A_v(x, \alpha, a)$$

con θ, d, α e a parametri raccolti nella tabella di Denavit - Hartenberg.

Robot cilindrico



giunto	θ	d	α	a
1	q_1	l_1	0	0
2	0	q_2	$-\frac{\pi}{2}$	0
3	0	q_3	0	0

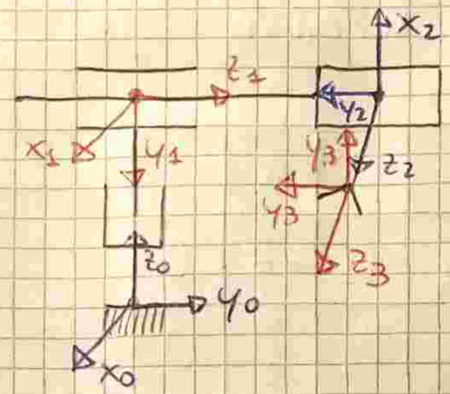
Le variabili q_i sono le variabili di giunto, dunque dipendono dalla caratteristica del giunto di essere prismatico oppure rotoidale. Esse possono comparire solo nelle prime due colonne della tabella.

La cinematica diretta completa del robot cilindrico e' data da

$$Q_{03} = A_v(z, q_1, l_1)\, A_v(x, 0, 0) \cdot A_v(z, 0, q_2)\, A_v(x, -\tfrac{\pi}{2}, 0) \cdot A_v(z, 0, q_3)\, A_v(x, 0, 0) =$$

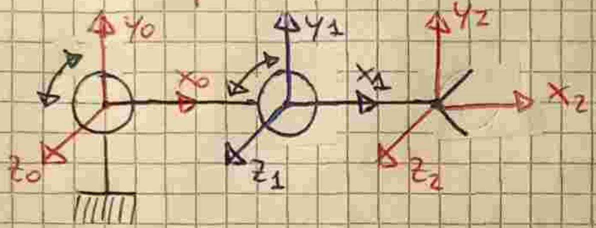
$$\begin{bmatrix} R_{03} & d_{03} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Robot cartesiano



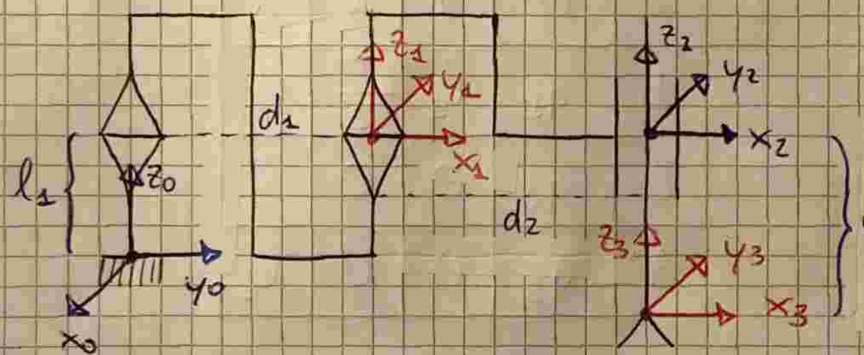
giunto	θ	d	α	a
1	0	q_1	$-\frac{\pi}{2}$	0
2	$-\frac{\pi}{2}$	q_2	$-\frac{\pi}{2}$	0
3	0	q_3	0	0

2 DOF planare



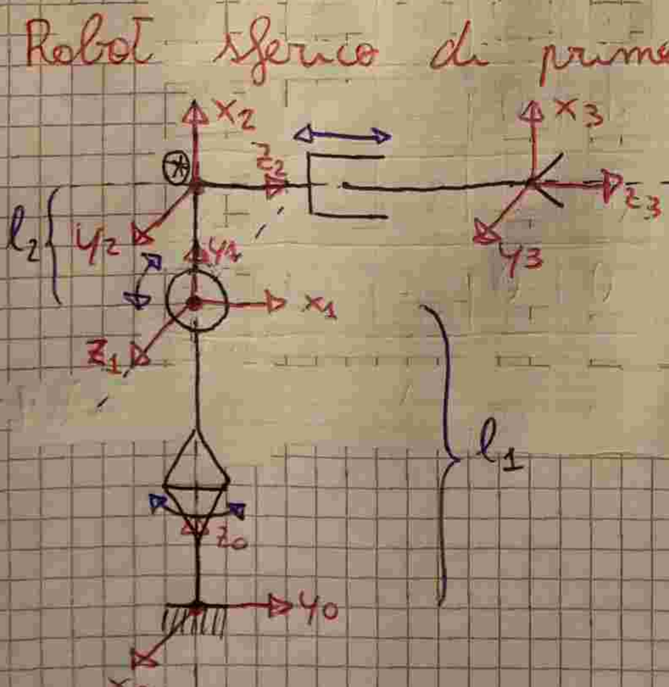
giunto	θ	d	α	a
1	q_1	0	0	l_1
2	q_2	0	0	l_2

SCARA (Selective Compliance Assembly Robot Arm)



giunto	θ	d	α	a
1	q_1	l_1	0	d_1
2	q_2	0	0	d_2
3	0	q_3	0	0

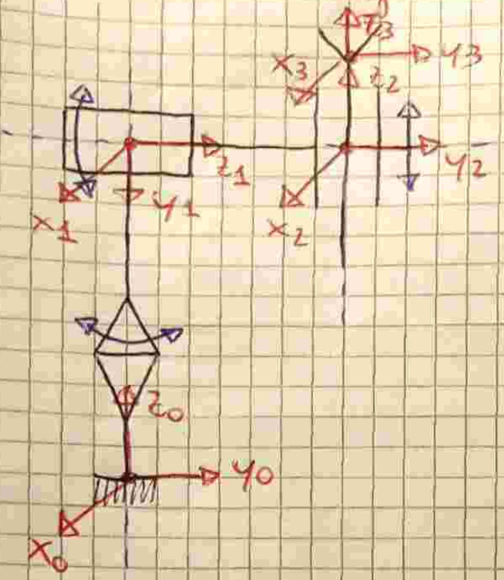
Robot sferico di primo tipo $\boxed{\text{RRP}}$



giunto	θ	d	α	a
1	q_1	l_1	$\frac{\pi}{2}$	0
2	q_2	0	$\frac{\pi}{2}$	l_2
3	0	q_3	0	0

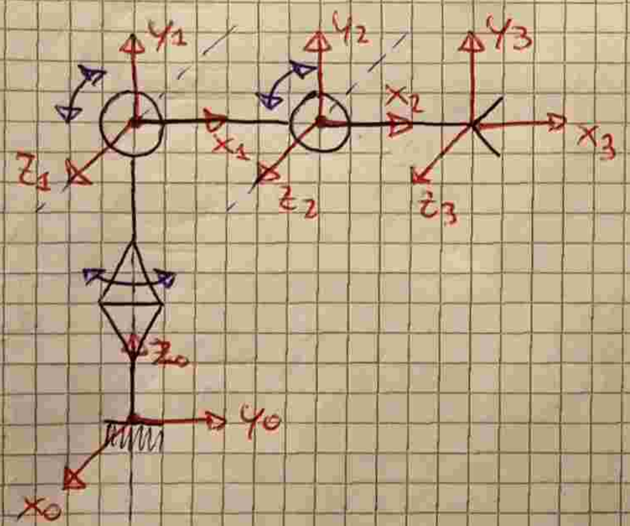
(*) gli assi z_1 e z_2 non si intersecano, perciò viene preso come origine l'intersezione del segmento di minima distanza

Robot di Stanford, o sferico di secondo tipo



giunto	θ	d	α	a
1	q_1	l_1	$-\frac{\pi}{2}$	0
2	q_2	l_2	$\frac{\pi}{2}$	0
3	0	q_3	0	0

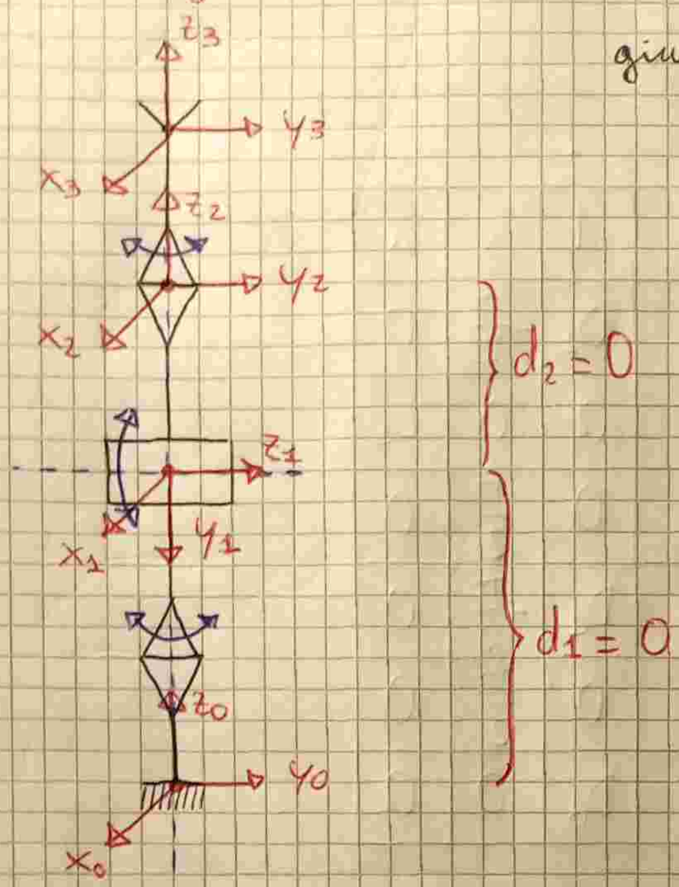
Robot antropomorfo $\boxed{RRR}$



giunto	θ	d	α	a
1	q_1	l_1	$\frac{\pi}{2}$	0
2	q_2	0	0	l_2
3	q_3	0	0	l_3

Tra il secondo ed il terzo giunto gli assi z sono paralleli: l'origine di R_3 si trova dunque nel centro del terzo giunto.

Polso sferico



giunto	θ	d	α	a
1	q_1	0	$-\frac{\pi}{2}$	0
2	q_2	0	$\frac{\pi}{2}$	0
3	q_3	d_3	0	0

poiché in realtà l'origine di R_0 si trova, nel polso sferico, nell'intersezione tra l'asse verticale e l'asse orizzontale disegnati

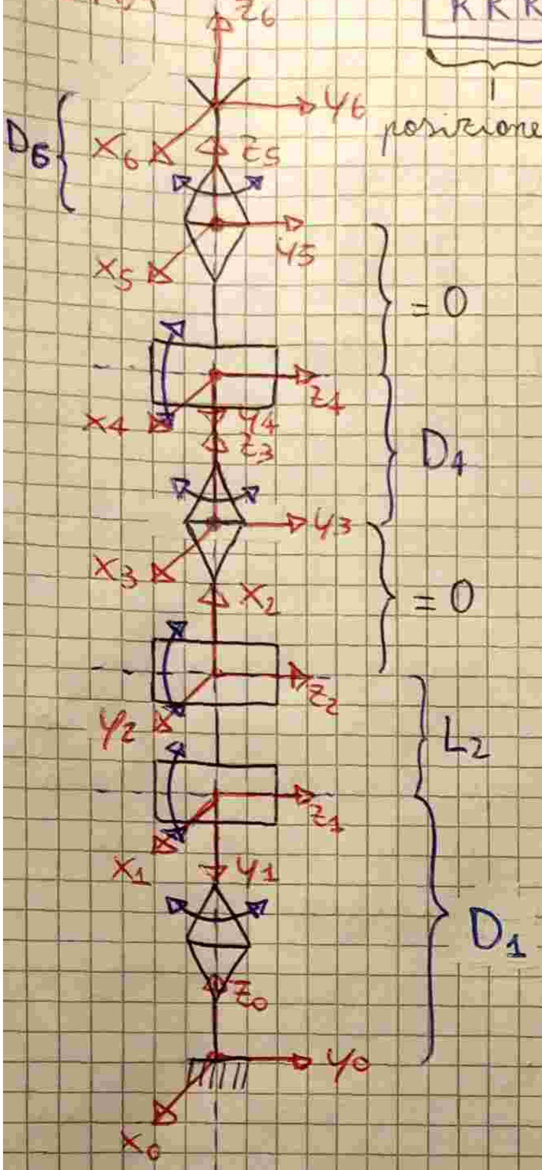
Il polso sferico effettivamente presenta tre sistemi di riferimento con l'origine coincidente.
L'unione tra una struttura portante (robot cartesiano, cilindrico, SCARA, sferico di I / II tipo o antropomorfo) e un polso sferico dà origine a dei robot completi, che hanno 6 gradi di libertà.

I robot completi che vedremo sono:
- il PUMA, dato da un polso sferico unito ad un robot antropomorfo;
- il manipolatore di Stanford, dato da un polso sferico unito ad un robot di Stanford.

PUMA

$\boxed{RRRRRR}$

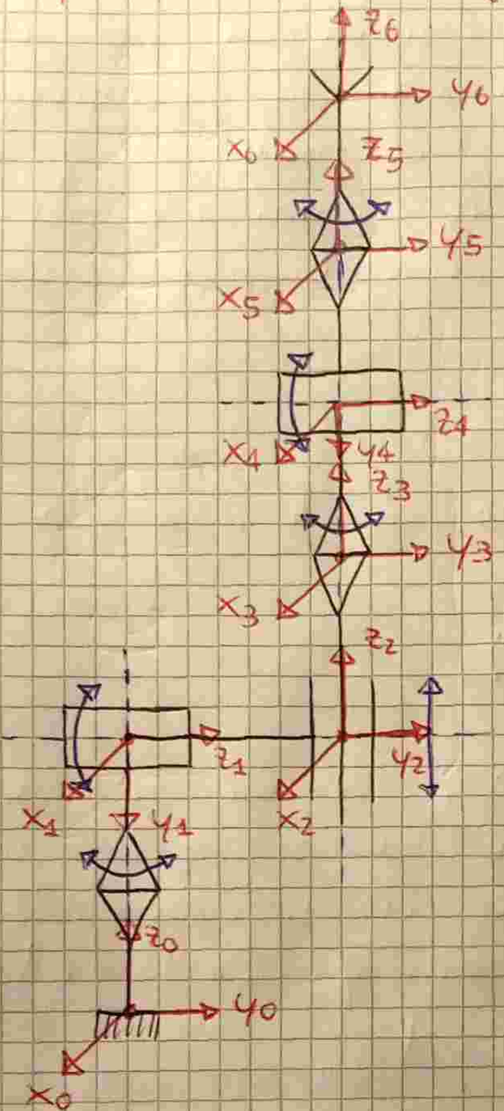
$\underbrace{RRR}_{\text{posizione}}\underbrace{RRR}_{\text{orientamento}}$



giunto	θ	d	α	a
1	q_1	D_1	$-\frac{\pi}{2}$	0
2	q_2	0	0	L_2
3	q_3	0	$\frac{\pi}{2}$	0
4	q_4	D_4	$-\frac{\pi}{2}$	0
5	q_5	0	$\frac{\pi}{2}$	0
6	q_6	D_6	0	0

Manipolatore di Stanford

$\boxed{RRP\,RRR}$



$\Big\} = 0$

giunto	θ	d	α	a
1	q_1	D_1	$-\frac{\pi}{2}$	0
2	q_2	D_2	$\frac{\pi}{2}$	0
3	0	q_3	0	0
4	q_4	D_4	$-\frac{\pi}{2}$	0
5	q_5	0	$\frac{\pi}{2}$	0
6	q_6	D_6	0	0

Cinematica inversa

Tramite la cinematica diretta è possibile, a partire dalle variabili di giunto, determinare la posizione dell'end-effector nello spazio. Indicando con q le variabili di giunto e con τ le coordinate del punto terminale, la cinematica diretta può essere vista come una funzione h:

$$\tau = h(q)$$

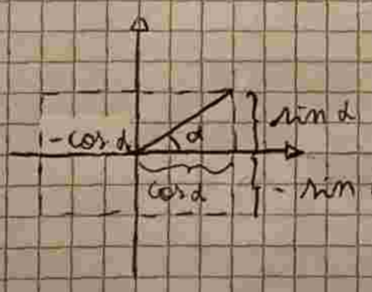
La cinematica inversa è l'inversa di h, ovvero h^{-1}, quando possibile:

$$q = h^{-1}(q)$$

Per il teorema di Rouché-Capelli, per un sistema lineare del tipo $y = Ax$, esso ha soluzione se e solo se $y \in \mathrm{Im}(A)$. Nel caso il sistema abbia soluzione, esse saranno ∞^q, con $q = \dim\{\mathrm{Ker}(A)\}$.

$$y = A(x_p + x_{g,0}) = Ax_{g,m}$$

Si ricorda inoltre che



$$\mathrm{atan2}(\sin\alpha, \cos\alpha) = \alpha$$
$$\mathrm{atan2}(-\sin\alpha, \cos\alpha) = -\alpha$$
$$\mathrm{atan2}(\sin\alpha, -\cos\alpha) = \pi - \alpha$$
$$\mathrm{atan2}(-\sin\alpha, -\cos\alpha) = \pi + \alpha$$

Metodi risolutivi per sistemi non lineari

1) $\cos(\theta) = a$

So che $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$. Allora

$\sin\theta = \pm\sqrt{1-a^2}$ e dunque deve essere che

$1 - a^2 \geq 0 \rightarrow -1 \leq a \leq 1 \rightarrow$ spazio operativo

$\theta = \mathrm{atan2}(\pm\sqrt{1-a^2}, a)$ soluzione generica

Se $a = \pm 1$ ho una soluzione, mentre se $a^2 < 1$

si hanno due soluzioni.

2) $\sin(\theta) = a$
Similarmente al caso precedente
$\theta = \text{atan2}(a, \pm\sqrt{1-a^2})$
e se:
- $a^2 = 1$, si ha una sola soluzione non generica
- $a^2 < 1$, si hanno due soluzioni

3) $a\cos\theta + b\sin\theta = 0$

Se $(a,b) = (0,0)$ l'equazione ha infinite soluzioni, ovvero per ogni valore di θ.

Se $(a,b) = (a,0)$, si ha $a\cos\theta = 0$ con $a \neq 0$, allora $\theta = \text{atan2}(\pm 1, 0)$.

Se $(a,b) = (0,b)$, si ha $b\sin\theta = 0$ con $b \neq 0$, allora $\theta = \text{atan2}(0, \pm 1)$.

Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, $a\cos\theta = -b\sin\theta \rightarrow$

$a^2\cos^2\theta = b^2\sin^2\theta = b^2(1-\cos^2\theta) \rightarrow$

$a^2\cos^2\theta + b^2\cos^2\theta = b^2 \rightarrow \cos\theta = \pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2+b^2}}$

$\rightarrow \sin\theta = -\frac{a}{b}\cos\theta = \mp\sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2}}$

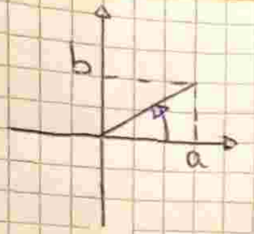
da cui
$$\theta = \text{atan2}\left(\mp\sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2}}, \pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2+b^2}}\right)$$

ovvero si hanno due soluzioni distinte.
$$\theta = \text{atan2}(\mp a, \pm b) \leftarrow \text{vero purché } (a,b) \neq (0,0)$$

4) $a\cos\theta + b\sin\theta = c$

Se $(a,b) = (0,0)$, allora:
- se $c = 0$, si hanno ∞^1 soluzioni
- se $c \neq 0$, non si hanno soluzioni

Se $(a,b) \neq (0,0)$,



$$\rho = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\alpha = \mathrm{atan2}(b, a)$$

$$a = \rho \cos\alpha \qquad b = \rho \sin\alpha$$

e sostituendo, $\rho \cos\alpha \cos\theta + \rho \sin\alpha \sin\theta = c$

$\rightarrow \rho(\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta) = c \rightarrow$

$\rho \cos(\alpha - \theta) = c \rightarrow \cos(\alpha - \theta) = \frac{c}{\rho} \rightarrow$

$\alpha - \theta = \hat{\theta} \rightarrow \cos(\hat{\theta}) = \frac{c}{\rho}$

di cui si conosce soluzione.

5) $\begin{cases} \sin\theta \sin\varphi = a \\ \cos\theta \sin\varphi = b \end{cases}$

Se $(a, b) = (0, 0)$, allora:
- se $\sin\varphi = 0$, si hanno ∞^1 soluzioni;
- se $\sin\varphi \neq 0$, non si hanno soluzioni.

Se $(a, b) \neq (0, 0)$,

$\sin^2\theta \sin^2\varphi + \cos^2\theta \sin^2\varphi = a^2 + b^2 \rightarrow$

$\sin^2\varphi = a^2 + b^2$, da cui $\sin\varphi \neq 0$

$\sin\theta = \frac{a}{\sin\varphi} \qquad \cos\theta = \frac{b}{\sin\varphi}$

$\theta = \mathrm{atan2}\left(\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}\right) \rightarrow$ soluzione generica

6) $\begin{cases} \sin\theta \sin\varphi = a \\ \cos\theta \sin\varphi = b \\ \cos\varphi = c \end{cases}$

$\sin^2\theta \sin^2\varphi + \cos^2\theta \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = a^2 + b^2 + c^2$

$\rightarrow \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = a^2 + b^2 + c^2 \rightarrow 1 = a^2 + b^2 + c^2$

che e' la soluzione che deve essere soddisfatta per avere che il sistema abbia soluzione.