Dimostrazione della derivata della funzione sigmoidea

Federico Zanardo

28 Ottobre 2020

1 Dimostrazione

Si dimostri la seguente uguaglianza:

$$\frac{\partial(\sigma(y))}{\partial y} = \sigma(y) \cdot (1 - \sigma(y))$$

dato

$$\sigma(y) = \frac{1}{1 + e^{-y}}$$

Si utilizzi la seguente regola di derivazione

$$D\Big(\frac{f(x)}{g(x)}\Big) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2} \tag{1}$$

Si proceda con la dimostrazione

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\sigma(y))}{\partial y} &= \frac{0 \cdot (1 + e^{-y}) - 1 \cdot (-1) \cdot e^{-y}}{(1 + e^{-y})^2} \\ &= \frac{e^{-y}}{(1 + e^{-y}) \cdot (1 + e^{-y})} \end{aligned} \tag{2}$$

questo ultimo termine può essere riscritto come

$$\frac{e^{-y}}{(1 + e^{-y}) \cdot (1 + e^{-y})} = \frac{1}{(1 + e^{-y})} \cdot \frac{e^{-y}}{(1 + e^{-y})} \tag{3}$$

in cui

$$\sigma(y) = \frac{1}{(1 + e^{-y})} \tag{4}$$

$$1 - \sigma(y) = 1 - \frac{1}{1 + e^{-y}} = \frac{(1 + e^{-y}) - 1}{1 + e^{-y}} = \frac{e^{-y}}{(1 + e^{-y})} \tag{5}$$

quindi tornando al punto (3)

$$\frac{1}{(1 + e^{-y})} \cdot \frac{e^{-y}}{(1 + e^{-y})} = \sigma(y) \cdot (1 - \sigma(y)) \tag{6}$$

l'uguaglianza è dimostrata.

$\square$