

Appunti Fisica 2

Federico Segala

Anno Accademico 2021/2022

Contents

1	Elettrostatica nel Vuoto	1
1.1	Introduzione all'Elettrostatica	1
1.1.1	Fatti Sperimentali	1
1.1.2	Elettrizzazione per Strofinio	2
1.1.3	Elettrizzazione per Induzione	3
1.1.4	Elettrizzazione per Contatto	3
1.1.5	Natura dei Materiali	3
1.2	Forza Elettrostatica e Legge di Coulomb	4
1.2.1	Fatti Sperimentali	4
1.2.2	Generalizzazione a un sistema di n cariche	5
1.3	Campo Elettrostatico	5
1.3.1	Energia Elettrostatica	6
1.3.2	Linee di Campo	7
1.4	Campo Potenziale Elettrostatico	8
1.4.1	Calcolo Potenziale Elettrostatico	9
1.4.2	Superfici Equipotenziali	9
1.5	Relazione Cariche - Campo - Potenziale	10
1.5.1	Carica Puntiforme	10
1.5.2	Sistema di n cariche discrete	11
1.6	Riassumendo...	12
1.7	Teorema di Gauss	12
1.7.1	Angolo Solido	13
1.7.2	Flusso del campo elettrostatico	14
1.7.3	Enunciato del Teorema	14
1.8	Elettrostatica nei Conduttori	16
1.8.1	Proprietà dei Conduttori in Equilibrio	16
1.8.2	Cavità in un Conduttore	17
1.9	Capacità Elettrostatica	17
1.9.1	Conduttore Isolato	18
1.9.2	Condensatore	18

1.9.3	Collegamento di Condensatori	19
1.9.4	Energia Immagazzinata nel Capacitore	20
1.10	Elettrostatica nei Dielettrici	21
1.10.1	Condensatore riempito di Dielettrico	23
1.10.2	Dielettrici Lineari	24
1.10.3	Teorema di Gauss per i Dielettrici	24
1.10.4	Riassunto	25
1.11	Energia Elettrostatica	26
1.11.1	Distribuzione discreta di cariche	26
1.11.2	Distribuzione continua di cariche	27
1.11.3	Sistema di conduttori	27
1.11.4	Densità di Energia Elettrostatica	28
1.12	Dipolo Elettrico	28
1.12.1	Dipolo Elettrico in un campo esterno costante	30
1.13	Equazioni di Maxwell per l'elettrostatica	31
2	Elettrodinamica	33
2.1	Conduzione Elettrica	33
2.1.1	Corrente Elettrica e Forza Elettromotrice	33
2.1.2	Intensità di Corrente	34
2.1.3	Corrente Stazionaria	36
2.2	Legge di Ohm	36
2.2.1	Legge di Ohm Locale	37
2.3	Potenza Elettrica - Effetto Joule	38
2.3.1	Bilancio Energetico di un Circuito	38
2.4	Collegamento di Resistori	40
2.4.1	Potenze	42
2.5	Leggi di Kirchhoff	43
2.6	Carica e Scarica di un Condensatore	44
3	Il Magnetismo Stazionario	47
3.1	Introduzione alla Magnetostatica	47
3.1.1	Fatti Sperimentali	47
3.2	Forza di Lorentz	48
3.3	Dipolo Magnetico in campo esterno \vec{B}	49
3.4	Teorema di Ampere	50
3.5	Azione Meccanica tra Correnti	51
3.6	Flusso del Campo Magnetico B	52
3.6.1	Mutua Induzione	52
3.6.2	Autoinduzione	52
3.7	1° Legge Elementare di Laplace	53

3.8	Energia del Campo Magnetico	53
4	Induzione Elettromagnetica	55
4.1	Fatti Sperimentali	55
4.2	Legge del flusso di Faraday	56
4.2.1	Legge di Lenz	57
4.2.2	Causa della forza elettromotrice indotta	57
4.3	Autoinduzione - circuito RL	58
4.3.1	Leggi di Accensione e Spegnimento del Circuito RL	59
4.3.2	Bilancio Energetico	60
4.4	Energia di un Sistema di Correnti	60
4.5	Equazioni di Maxwell	61

Chapter 1

Elettrostatica nel Vuoto

1.1 Introduzione all'Elettrostatica

La prima cosa che dobbiamo andare a definire all'interno del corso è il concetto di **forza**. Ogni interazione ha origine nella materia, ne esistono di diverse che vanno a generare tutte le forze di cui oggi siamo a conoscenza:

- Forza di Gravità $\rightarrow \vec{F}_g$
- **Forza Elettromotrice** $\rightarrow \vec{F}_{em}$
- Forze Nucleari Deboli e Forti

Mentre la forza di gravità e elettromotrice sono forze a lungo raggio, quelle nucleari sono forze a corto raggio che agiscono nel campo microscopico. Per quanto riguarda le forze a lungo raggio, si tratta di forze le cui interazioni sono osservabili anche all'infinito

1.1.1 Fatti Sperimentali

Si può osservare tramite degli esperimenti che esiste una interazione tra corpi che non è descrivibile tramite la meccanica classica: avvicinando corpi dotati di **carica elettrica**, che può essere positiva o negativa, sperimentiamo **forze attrattive** o **repulsive**.

In generale abbiamo che cariche dello stesso segno si respingono, mentre cariche discordi si attraggono. Indicheremo le cariche con il simbolo q .

Se la massa ha la proprietà di essere unicamente positiva, la carica può essere sia positiva che negativa, proprio per questo motivo la forza di gravità è soltanto attrattiva, mentre l'interazione che stiamo introducendo può essere sia attrattiva che repulsiva.

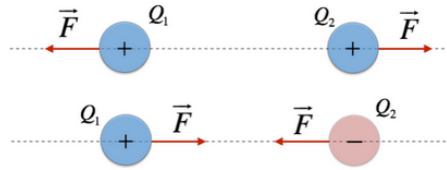


Figure 1.1: Attrazione e Repulsione di Cariche

A livello microscopico abbiamo a disposizione tre diversi strumenti per **indurre carica** all'interno della materia:

- strofinio
- induzione
- contatto

Sappiamo che un **atomo** si compone di un *nucleo* contenente *neutroni* e *protoni*, attorno a tale nucleo abbiamo una *nuvola elettronica* di particelle elementari a carica negativa. Si osserva che ogni quantità di carica che troviamo in natura è un *multiplo della carica dell'elettrone*. Per questo motivo la carica dell'elettrone si dice **carica elementare**.

Ordinariamente la materia che troviamo in natura è **neutra**, ovvero il numero di elettroni e protoni è lo stesso.

1.1.2 Elettizzazione per Strofinio

Nel momento in cui vado a strofinare un oggetto, a livello meccanico vengono spostati degli elettroni da un corpo all'altro. Per mezzo di questa procedura, il corpo che cede elettroni, diventerà carico positivamente, l'altro sarà carico negativamente.

Entrambi i due materiali ora elettrizzati avranno la **stessa quantità di carica** di segno chiaramente opposto. Un'altra considerazione che viene abbastanza naturale fare, è che la quantità di carica al termine dell'esperimento la quantità di carica si conserva e rimane neutra.

In un sistema isolato, la Q_{tot} si **conserva**

Chiaramente quale oggetto ceda elettroni all'altro dipende dalle caratteristiche dei materiali di cui si compongono gli oggetti.

1.1.3 Elettrizzazione per Induzione

Nel momento in cui vado ad *avvicinare* un oggetto con una certa carica ad un oggetto neutro, le cariche di segno opposto nell'oggetto neutro verranno attratte in prossimità dell'oggetto carico, mentre le cariche di segno uguale verranno respinte all'estremità opposta dell'oggetto



Figure 1.2: Elettrizzazione per Induzione

Nel momento in cui viene spostato il materiale che subisce induzione, l'azione della carica induttrice sarà maggiore o minore a seconda della distanza, ciò si può sperimentare per mezzo di un **elettroscopio**. Tramite un esperimento con l'elettroscopio è possibile dedurre il seguente fatto:

In elettrostatica vale il **principio di sovrapposizione**, ovvero le azioni delle cariche si sovrappongono nella forza elettrostatica. Ciò verrà dimostrato in seguito.

1.1.4 Elettrizzazione per Contatto

Nel momento in cui metto a contatto un oggetto carico con un altro materiale neutro, otteniamo dal punto di vista fisico, un unico oggetto carico (che chiameremo **conduttore**). Se prendo un conduttore carico e lo *collego alla Terra* le cariche possono migrare, dato che il conduttore diventa un tutt'uno con la terra.

1.1.5 Natura dei Materiali

I materiali tendono a comportarsi in due modi differenti, tali comportamenti vanno a caratterizzare due tipologie di materiali:

Conduttori sono materiali che si compongono di *cariche libere di muoversi*. Si tratta di tutti quei materiali che una volta spostati da un materiale carico ritornano allo stato precedente.

Dielettrici sono materiali nei quali gli *elettroni sono vincolati agli atomi*.

Nel momento in cui viene avvicinato un materiale carico ad un dielettrico avverrà spostamento di carica (così come anche per i conduttori) ma all'interno del materiale i *centri di simmetria delle cariche* smettono di coincidere

1.2 Forza Elettrostatica e Legge di Coulomb

Come suggerisce la parola *statica* non andremo, per ora, a considerare variazioni nel tempo. Questo porta il vantaggio di riuscire a studiare il campo elettrico e quello magnetico in maniera separata, contrariamente a quanto accade in elettrodinamica.

1.2.1 Fatti Sperimentali

Per sperimentare l'interazione elettrica tra due cariche (concordi o discordi) si utilizza una **bilancia di torsione**

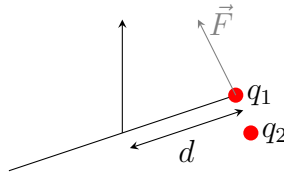


Figure 1.3: Bilancia di Torsione

Si osserva che, data r la distanza tra le due cariche, otteniamo che $|\vec{F}_{el}| = K \frac{q_1 q_2}{r^2}$, e valorizzando il coefficiente K troviamo la seguente equazione dell'**interazione di Coulomb**:

$$|\vec{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r} \quad (1.1)$$

Tale forza va ad agire *sulla particella* q_1 , prende la direzione del vettore distanza tra q_1 e q_2 e si misura, ovviamente, in **Newton**; per quanto riguarda invece l'unità di misura della carica abbiamo $[q] = C$ (**Coulomb**). Il valore ϵ_0 è detta **costante dielettrica del vuoto**

Chiaramente vale la **terza legge di Newton**, che dice che per ogni forza da una particella q_1 a una particella q_2 , ne agisce una uguale e contraria da q_2 a q_1 . Si osserva che il prodotto delle due cariche va a caratterizzare la *attrattività* o la *repulsività* del fenomeno in questione infatti:

- $\text{sgn}(q_1) = \text{sgn}(q_2)$: le forze seguono le direzioni dei vettori, dunque abbiamo un'azione **repulsiva**
- $\text{sgn}(q_1) \neq \text{sgn}(q_2)$: il verso delle forze si ribalta e otteniamo una azione **attrattiva**

1.2.2 Generalizzazione a un sistema di n cariche

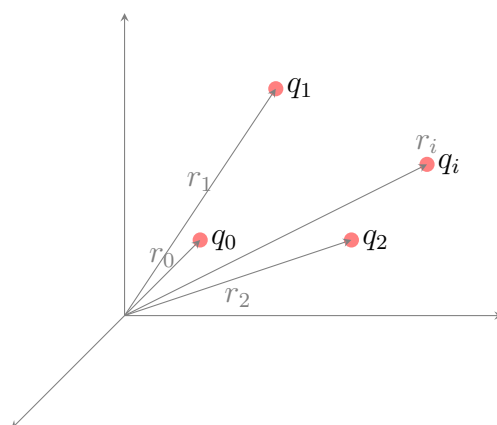


Figure 1.4: Sistema discreto di n cariche

In un sistema come quello di cui sopra, vale il **principio di sovrapposizione**, ciò implica l'importante concetto di *indipendenza dei fenomeni*. Sulla generica particella q_0 agir  la seguente forza risultante:

$$\sum_{i=1}^n \frac{q_i q_0}{4\pi\epsilon_0 r_{i0}^2} \hat{r}_{i0} \quad (1.2)$$

1.3 Campo Elettrostatico

La prima domanda che pu  sorgere   il *perch * serva introdurre il concetto di **campo elettrostatico**. Il motivo   che ipotizzando di spostare una carica all'interno del sistema 1.4, stando alle leggi descritte nell'equazione 1.2, dato che varia il sistema, andr  a misurare una forza differente, tale variazione avviene per  in modo **istantaneo**.

Questo non   possibile, dato che la massima velocit  di trasmissione di informazione   quella della luce; questa visione porta dunque alla contraddizione dell'**azione istantanea** che in fisica non esiste.

Come già anticipato, risolviamo questo importante vincolo tramite il concetto di **campo elettrostatico**, infatti osservando attentamente l'equazione 1.2 vediamo che la forza è *proporzionale a q_0* , possiamo dunque scriverla nel seguente modo:

$$\vec{F}_{el} = q_0 \vec{E}_i(\vec{r}_0) \quad (1.3)$$

Possiamo quindi definire il **campo elettrostatico** come:

$$E_i(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \hat{r} = \frac{\vec{F}}{q_{int}} \quad (1.4)$$

dove q è una carica qualunque ed r è la distanza dal punto di osservazione a tale carica, dunque andando a introdurre la definizione di campo all'interno di 1.2 troviamo che

$$\vec{F}_{tot(q_0)} = q_0 \sum_i \vec{E}_i \quad (1.5)$$

Anche nel caso del campo, vale il **principio di sovrapposizione** e l'unità di misura del campo elettrostatico è data dal N/C esprimibile anche come rapporto volt su metri V/m

1.3.1 Energia Elettrostatica

Andiamo in questa sezione a studiare la **conservatività della forza elettrostatica**. Sappiamo che una forza si dice conservativa se vale:

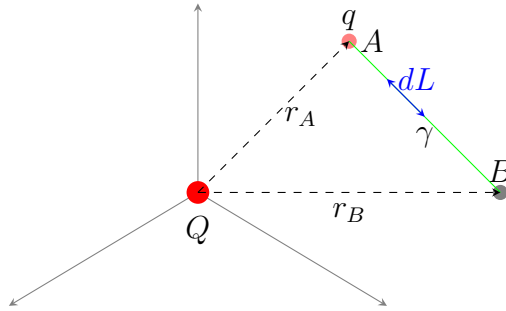
- il lavoro L è **indipendente** dal percorso
- $\oint dL = 0$
- esiste U (**energia potenziale**) tale che $L_{AB} = -\Delta U$

Consideriamo quindi il sistema seguente:

Abbiamo che $dL = \vec{F} \cdot d\vec{l}$, ovvero $dL = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot d\vec{l}$. E possiamo quindi esprimere il lavoro da A a B come:

$$L_{AB} = \int_A^B dL = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{\hat{r} \cdot d\vec{l}}{r^2} \quad (1.6)$$

ossia:



$$L_{AB} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) = -\Delta U \quad (1.7)$$

Troviamo quindi che l'**energia elettrostatica** è data da:

$$U = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r} + c[J] \quad (1.8)$$

Così come è stata fatta, l'energia non rappresenta altro che un calcolo, se però andiamo a cercarne il significato scopriamo che la **forza elettrostatica è conservativa**. Ciò, se ad esempio ipotizziamo di trovarci all'infinito, ci permette di porre $U_\infty = 0$, e quindi di esprimere l'energia nel modo seguente:

$$U = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} = -(U_\infty - U_r) = \Delta U \quad (1.9)$$

In pratica la formulazione dell'energia descritta in 1.8 rappresenta il lavoro svolto dal campo per allontanare una carica verso l'infinito, ovvero per distruggere il sistema. In modo analogo l'equazione 1.9 rappresenta il *lavoro esterno* necessario a portare una carica in una certa posizione a partire dall'infinito.

1.3.2 Linee di Campo

Si tratta di una rappresentazione che ci consente di farci un'idea sulla forma del campo elettrostatico, hanno le seguenti caratteristiche:

- sono *tangenti* al campo
- escono dalle cariche positive
- entrano nelle cariche negative

Rispetto ad una carica puntiforme, o riconducibile a tale, seguono la direzione **radiale**. In qualsiasi altra situazione vale il principio di sovrapposizione e la visualizzazione diventa abbastanza difficile da rappresentare. In generale però, tutti i casi che andremo a considerare rimarranno abbastanza semplici.

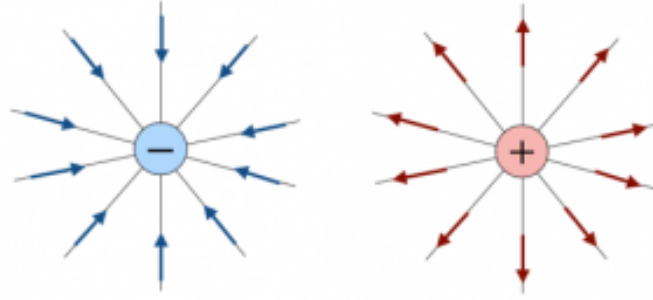


Figure 1.5: Linee di Campo di una carica puntiforme

1.4 Campo Potenziale Elettrostatico

Abbiamo visto come la forza di Coulomb sia colei che va a generare il campo elettrostatico, definito come \vec{F}/q_{test} . Abbiamo anche osservato che la forza di Coulomb è conservativa, questo alla luce del fatto che siamo riusciti a ricavarne l'energia potenziale tramite la trattazione descritta in 1.3.1.

Sappiamo che il campo elettrostatico per una carica puntiforme q , viene percepito ad una distanza r da una particella di test q_i come descritto dall'equazione 1.4. La forza di Coulomb percepita da tale particella q_i sarà data da $\vec{f} = q_i \vec{E}$

Vogliamo capire se possiamo passare ad una visione di **energia come caratteristica dello spazio**. Si osserva che data una carica unitaria, il campo e la forza coincidono ($E = F/q_{test}$). Definiamo il **campo potenziale elettrostatico** come:

$$\Delta V_{AB} \equiv \frac{\Delta U_{AB}}{q} \quad (1.10)$$

Si noti l'analogia con l'equazione 1.4. In questo caso la q al denominatore è la carica che sto spostando lungo il percorso AB . Così come campo elettrostatico e forza elettrostatica coincidono nel caso di cariche unitarie, anche

ΔV e ΔU coincidono. Dando un significato fisico a quanto definito fino a qui troviamo che:

$$L = -q\Delta V \quad (1.11)$$

Riassumendo dunque, abbiamo che un sistema di cariche sorgenti, va sempre a generare in **tutto lo spazio** sia un **campo elettrostatico** $\vec{E}(\vec{r})$ (campo vettoriale) che un **potenziale elettrostatico** $V(\vec{r})$ (campo scalare). L'unità di misura del potenziale è il **volt** [V]. Da qui dovrebbe risultare chiaro il motivo per cui il campo elettrostatico viene misurato in V/m .

1.4.1 Calcolo Potenziale Elettrostatico

Come avevamo $\Delta U = - \int_A^B F \cdot d\vec{l}$ così abbiamo che:

$$\Delta V = V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1.12)$$

A livello operativo andremo quindi, prima a calcolare il campo \vec{E} , in seguito calcolerò l'integrale di cui sopra per il calcolo del potenziale, e a partire da lì mi sarà possibile calcolare tutti quanti i vari lavori. Anche il potenziale verrà definito a meno di una costante.

Siccome però non vogliamo avere a che fare con una **differenza di potenziale**, sceglieremo $V(r_0) = V_0$ come valore di riferimento. In molti casi (quando il sistema considerato non è indefinito) potremo scegliere $V(r_0) = V_\infty = 0$. Grazie a queste semplificazioni otterremo:

$$V(r) = - \int_{r_0}^r \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1.13)$$

Avendo a che fare con integrali di cammino, potremmo chiederci quale cammino scegliere, ma avendo a che fare con una forza conservativa, possiamo sempre scegliere un **cammino qualunque** (in generale quello **radiale**).

1.4.2 Superfici Equipotenziali

Così come per il campo potremmo chiederci in quale modo rappresentare il potenziale elettrostatico, lo strumento necessario in questo caso diventano le **superfici equipotenziali**. Vedremo che il potenziale nel caso di una carica puntiforme alla sorgente in 1.16, la cui forma, in punto r qualsiasi per una carica di test è espressa da $V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$.

Come suggerisce il nome, stiamo cercando le *superfici in cui il potenziale rimane costante*, osservando 1.11, troviamo che $dL = -q dV$ e se voglio $dV = 0$ devo necessariamente avere **lavoro nullo**. Tale proprietà si raggiunge nel momento in cui $E \cdot ds = 0$ ovvero mi sto spostando in maniera ortogonale al campo. Se voglio avere **campo perpendicolare alle superfici equipotenziali** devo necessariamente avere come superfici equipotenziali delle **sferiche centrate nella carica sorgente**.

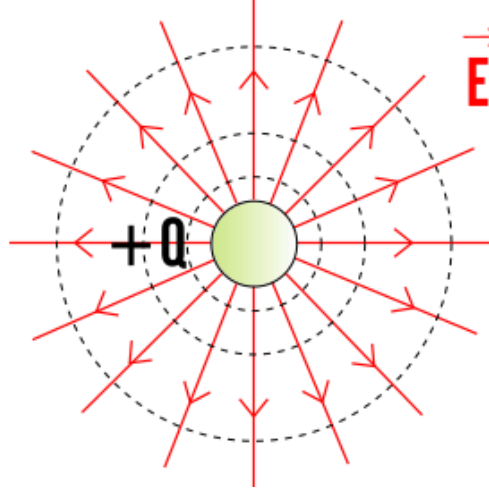


Figure 1.6: Superfici Equipotenziali per una carica puntiforme

1.5 Relazione Cariche - Campo - Potenziale

Vogliamo in questa sezione andare a indagare la relazione che viene a crearsi tra cariche sorgenti, campo elettrostatico e potenziale elettrostatico a seconda della configurazione delle cariche sorgenti.

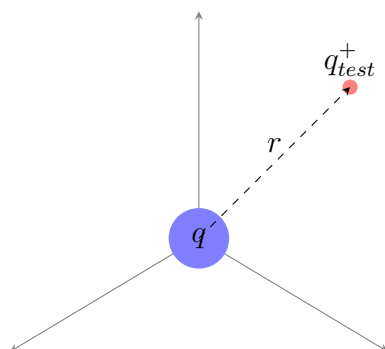
1.5.1 Carica Puntiforme

Condiserato il seguente sistema di riferimento sappiamo che

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \longrightarrow V(r) - V(0) = - \int_{r_0}^r \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot d\vec{l} \quad (1.14)$$

ma, dato che $\hat{r} \cdot d\vec{l} = dr$ otteniamo semplicemente:

$$V(r) - V(0) = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^r \frac{1}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right] \quad (1.15)$$



e, ponendo $V_0 = 0$ con $r_0 = \infty$ otteniamo finalmente

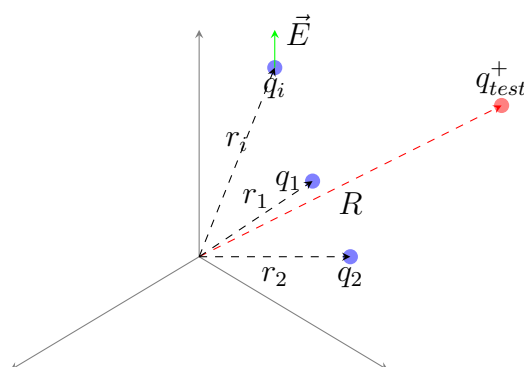
$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (1.16)$$

che è la formula del potenziale per un sistema composto da un'unica **carica puntiforme**.

Posso prendere il potenziale di riferimento all'infinito soltanto nel momento in cui il mio sistema ha **dimensioni finite**

1.5.2 Sistema di n cariche discrete

Dopo aver studiato cosa succede nel caso di una sola carica andiamo a considerare un sistema composto da un numero n di cariche discrete, come nella situazione seguente:



Osservando e svolgendo alcuni semplici calcoli troviamo che: $\forall i$ la distanza tra q_i e q_{test}^+ è data da $R - r_i$. Tale carica come si vede in figura genera un campo E , descritto dall'equazione 1.4 dove r^2 è la distanza dalla sorgente

appena indicata. Da cui il campo totale, per il principio di sovrapposizione è dato dalla somma dei campi:

$$\vec{E}_i(R) = \frac{q_i \widehat{R - r_i}}{4\pi\epsilon_0 (R - r_i)^2} \rightarrow E_{tot} = \sum E_i \quad (1.17)$$

Analogamente a ciò, per il potenziale elettrostatico risultante troviamo che è dato dalla somma di potenziali:

$$V_{tot}(R) = \sum_i V_i(R) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 |R - r_i|} \quad (1.18)$$

Nel caso in cui la distribuzione sia **continua** la sommatoria di cui sopra, diventa un *integrale* che potrà essere di linea, di superficie o di volume, a seconda della distribuzione di carica.

1.6 Riassumendo...

Abbiamo visto che il campo elettrostatico è **conservativo**, ovvero che il lavoro lungo un percorso chiuso è nullo. Potremo dunque scrivere

1° Equazione di Maxwell

$$\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (1.19)$$

Questa equazione è importantissima per il fatto che ci dice che il lavoro lungo un circuito chiuso è sempre nullo.

1.7 Teorema di Gauss

Si tratta di uno strumento utilissimo nel momento in cui si renda necessario il **calcolo del campo elettrostatico** generato da una qualsiasi distribuzione di carica. Ci troveremo in diverse situazioni:

- **Volume di cariche:** $\rho d\tau$
- **Superficie carica:** σdS
- **Linea carica:** λdl

Prima di dare l'enunciato possiamo osservare che il campo è sempre *proporzionale* a $\frac{\hat{r}}{r^2}$ e che il valore del campo $E(r)$ resta **costante** su sfere centrate nella sorgente. Notiamo inoltre che se andiamo a moltiplicare il campo per l'area di una qualsiasi di queste sfere, questo **prodotto** rimane **costante** (area della sfera = $4\pi r^2$).

Formuliamo a questo punto una teoria utilizzando l'**angolo solido** $d\Omega$.

1.7.1 Angolo Solido

Per comprendere al meglio questo concetto facciamo un passo indietro trattando l'**angolo piano**

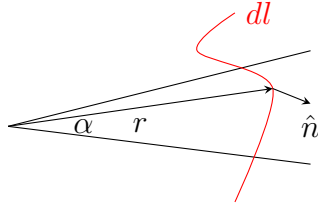


Figure 1.7: Angolo Piano

Sappiamo che tale angolo è dato da $d\alpha = \frac{dl}{r}$, dove dl è un arco di circonferenza ma che può sempre essere considerata come una curva generica con una propria normale. In questo caso più generale avremo che $d\alpha = \frac{\hat{r} \cdot \hat{n} dl}{r}$. L'integrale di questo angolo piano in tutto il dominio in cui sia possibile integrarlo vale 2π .

Passando quindi alle 3 dimensioni definiamo l'angolo solido:

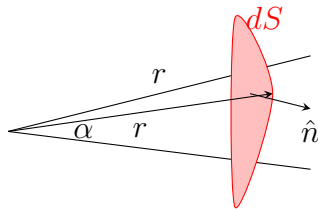


Figure 1.8: Angolo Solido

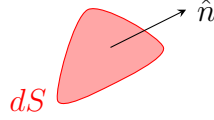
In questo caso avremo dunque:

$$d\Omega = \frac{\hat{r} \cdot \hat{n} dS}{r^2} \quad (1.20)$$

E il massimo angolo solido ottenibile integrando in tutto il dominio andrà a stagliare una sfera, il cui angolo solido è 4π .

1.7.2 Flusso del campo elettrostatico

Sia il campo vettoriale \vec{E} preso un elemento di superficie dS infinitesimo, caratterizzato dalla sua normale:



Definiamo **flusso del campo** \vec{E} il valore:

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} \rightarrow \Phi(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (1.21)$$

dove $d\vec{S} = dS\hat{n}$. L'unità di misura è $[Vm^2/m = Vm]$, stiamo parlando di una quantità **scalare**.

1.7.3 Enunciato del Teorema

Il teorema che andremo a presentare di seguito ci dice che il flusso di \vec{E} attraverso una **qualsiasi superficie chiusa** è uguale al rapporto tra la somma delle **cariche interne alla superficie** e il coefficiente ϵ_0 .

Teorema di Gauss

$$\Phi(\vec{E}) = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{tot}}{\epsilon_0} \quad (1.22)$$

Questo teorema è anche noto come **2° Equazione di Maxwell**. Si noti quindi come il flusso del campo non sia dipendente dalla distanza dalla sorgente della carica.

Andiamo ora ad analizzare il contributo che porta una carica esterna alla superficie presa in considerazione: in particolare all'interno di una superficie chiusa, per ogni elemento di superficie dS ne avremo sempre uno dalla parte opposta con normale diretta in direzione opposta.

Ciò porta ad avere da un lato flusso di modulo uguale, che da una parte è positivo, dall'altra è negativo. Dato che i contributi delle varie cariche si sommano, arriviamo a dire che le **cariche esterne** alla superficie di Gauss sono totalmente **ininfluenti**.

Le sorgenti di \vec{E} sono le **single cariche**

Si può notare, tracciando il grafico del campo in funzione della distanza dalle sorgenti, che a volte il campo può presentare una **discontinuità** data dal valore $\Delta E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, questo accade nel momento in cui il campo deve attraversare una superficie carica σ e accade *sempre*, si può dimostrare mediante l'utilizzo del teorema di Gauss.

Calcolo del campo di due piani indefiniti Vediamo ora il calcolo del campo per due piani indefiniti. Un calcolo che tornerà molto utile una volta introdotti i **condensatori**.

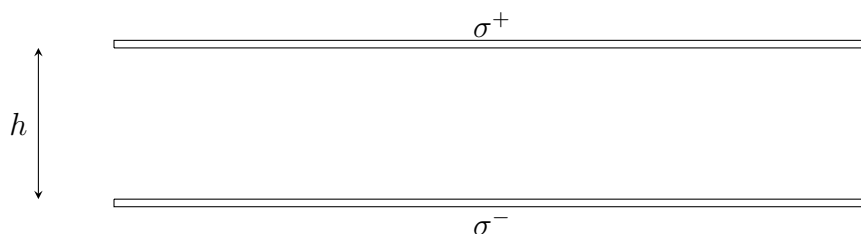


Figure 1.9: Sovrapposizione di piani indefiniti

Effettueremo questo calcolo tramite il principio di **sovrapposizione**. Il campo risultante sarà dunque dato dalla somma tra i campi generato dal piano σ^+ e dal piano σ^- . Sappiamo anche che dato un piano indefinito il suo campo è dato da

$$\vec{E}(r) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \begin{cases} +\frac{\sigma}{2\epsilon_0} & \text{se } z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} & \text{se } z < 0 \end{cases} \quad (1.23)$$

È facile immaginare a questo punto come all'esterno dei due piani il campo sia nullo e che internamente il campo sarà la somma dei due campi. La direzione sarà certamente quella dalla distribuzione positiva a quella negativa. Dunque avremo:

$$\vec{E}(r) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (1.24)$$

Si noti come la distanza **h non influisce nel calcolo del campo**

1.8 Elettrostatica nei Conduttori

Nel momento in cui andiamo ad accendere un campo, ogni carica presente nei materiali sente questo campo. In natura possiamo osservare due situazioni principali:

- **cariche libere:** l'esempio classico è quello del metallo, in questa situazione essendo le cariche libere di muoversi, verrà a generarsi un nuovo campo, dato dalla ridistribuzione della carica.
- **dielettrici:** in questo genere di materiale le cariche sono fortemente vincolate agli atomi.

1.8.1 Proprietà dei Conduttori in Equilibrio

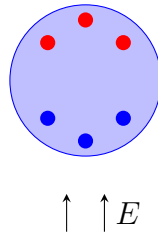


Figure 1.10: Conduttore in presenza di un Campo Esterno

- le cariche positive sentiranno una forza lungo la direzione del campo, mentre le cariche negative sentiranno tale forza in direzione opposta a quella del campo
- la separazione di cariche va ad **indurre un campo** al quale si sovrappone il campo esterno. All'interno in questo modo avremo due contributi: $E_{indotto} + E_{esterno}$
- in un conduttore all'equilibrio il **campo interno è nullo**. Se non fosse nullo, gli elettroni sarebbero in moto
- nel momento in cui ho campo interno nullo, per ogni curva da un punto A a B il lavoro è sempre nullo. Ciò implica che anche il **potenziale sarà costante**, in particolare tale potenziale sarà quello della superficie.

- dal momento in cui il campo è nullo, per il Teorema di Gauss, avrò carica interna nulla, avrò quindi soltanto **cariche distribuite sulla superficie del conduttore**.
- il campo della superficie dei conduttori è dato da $\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$, questo è il **Teorema di Coulomb**. Tale campo è **normale alla superficie**

1.8.2 Cavità in un Conduttore

Ora che siamo riusciti ad osservare le proprietà dei conduttori, ci interessa comprendere che cosa succede nel momento in cui all'interno del conduttore in questione andiamo ad inserire una cavità vuota.

Ipotizziamo di avvicinare una carica al nostro conduttore, questo tipo di struttura ha l'importante caratteristica di mantenere una densità di carica sulla superficie della cavità e un campo interno alla cavità **nulli**.

Questi due fatti si possono ricavare tramite il teorema di Gauss. Dato che siamo in presenza di un conduttore, sappiamo che internamente al conduttore abbiamo campo nullo, e applicando il teorema di Gauss (utilizzando una superficie gaussiana adiacente alla cavità) otteniamo: $\oint E ds = 0 = Q_{int}/\epsilon_0 \rightarrow Q_{int} = 0$.

Sappiamo anche che il campo elettrostatico è un campo conservativo, questo ci dice che la circuitazione lungo un cammino chiuso deve essere nulla. L'unico modo perché questo fatto sia vero, il campo interno alla cavità **deve** essere nullo, altrimenti avremmo circuitazione $\neq 0$. Questo ci dice che non è possibile avere una separazione di carica per mantenere nulla la carica interna alla cavità.

Avendo campo nullo, all'interno della cavità il **potenziale è lo stesso del potenziale iniziale**. Questo significa che la differenza di potenziale tra il dentro ed il fuori rimane *costante*, ciò vuol dire che l'informazione, non essendoci variazioni nelle differenze di potenziale, non viene mai trasmessa all'interno dello **schermo elettrostatico**.

1.9 Capacità Elettrostatica

Si tratta di una proprietà che va a riguardare **conduttori isolati** e **condensatori**. Abbiamo visto che una certa distribuzione di cariche genera un **campo**, al quale è possibile associare un **potenziale**, si veda 1.16 dalla quale possiamo ricavare che il potenziale è **lineare nella carica**.

1.9.1 Conduttore Isolato

Consideriamo un conduttore che sia isolato elettrostaticamente e ipotizziamo di caricare tale conduttore con una carica Q . In questo momento la carica si distribuisce su tutta la superficie del conduttore e questo va ad un certo potenziale costante.

Definiamo **capacità** C nel modo seguente:

$$C := \frac{Q}{V} \quad [F] \quad (1.25)$$

Si consideri che questa capacità è una proprietà che dipende unicamente dalla *geometria* del sistema che andiamo a considerare e dal mezzo (ϵ_0) in cui questo conduttore è immerso.

Si consideri ad esempio una sfera isolata di raggio R . Sottoposta ad una carica Q questa sfera andrà a potenziale $Q/(4\pi\epsilon_0 R)$. Da cui avremo $C = 4\pi\epsilon_0 R$.

1.9.2 Condensatore

Si tratta in sostanza di un conduttore non isolato: ipotizziamo che dati due conduttori, una carica Q del conduttore C_1 venga spostata al conduttore C_2 . Ciò implica che su C_1 andrà a comparire una $-Q$. In questo modo C_2 andrà al potenziale V_2 e C_1 andrà a V_1 . Immaginiamo ora di avvicinare i due conduttori, in particolare C_1 sentirà il campo generato da C_2 e viceversa.

In realtà in un sistema non isolato sono presenti conduttori in grande quantità, basti banalmente pensare alla Terra. Per semplificare il nostro operato ipotizzeremo di lavorare in condizioni di **induzione completa**. In pratica andremo ad allontanare gli altri conduttori in esame verso l'infinito, in modo che il loro effetto sia trascurabile. Per ottenere induzione completa abbiamo a disposizione diverse strade:

- mettiamo uno dei due conduttori all'interno nella cavità dell'altro conduttore. La capacità è data da $\frac{Q}{\Delta V}$. Notare che allontanando l'armatura del conduttore più esterno all'infinito otteniamo di nuovo il caso del conduttore isolato. L'applicazione di ciò è data dal **condensatore sferico** che presenta *induzione completa ideale*.
- **struttura tubolare** nella quale la lunghezza è molto maggiore rispetto alla sezione. Alla metà del tubo siamo chiaramente in una situazione di cavità. L'applicazione pratica di ciò è il **condensatore cilindrico**,

- **due lamine affiancate** in cui le superfici siano molto maggiori della distanza tra le lamine. Questa situazione si può approssimare ad un **condensatore piano**.

1.9.3 Collegamento di Condensatori

Per aumentare la capacità di un sistema abbiamo a disposizione due modi di collegare tra di loro i condensatori: in **serie** oppure in **parallelo**

Collegamento in Serie Si tratta di un collegamento di n condensatori che ha la caratteristica di avere la *stessa carica nelle armature*, nel quale il potenziale totale è dato dalla *somma* dei singoli potenziali.

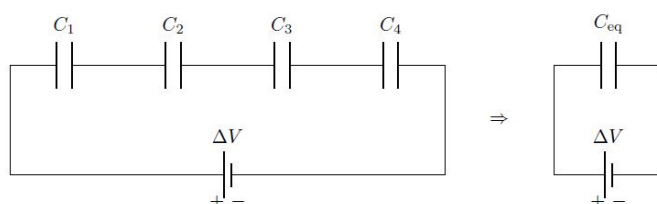


Figure 1.11: Collegamento di capacitori in serie

In questo caso, ricordando che la capacità è data da 1.25, avremo

$$C_{tot} := \frac{Q}{\sum_i \frac{Q}{C_i}} \rightarrow \frac{1}{C_{tot}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \quad (1.26)$$

Notiamo quindi che il collegamento in serie serve a **ridurre** la capacità totale a parità di potenziale.

Collegamento in Parallelo Si tratta di un collegamento che ha la caratteristica di avere lo **stesso potenziale**.

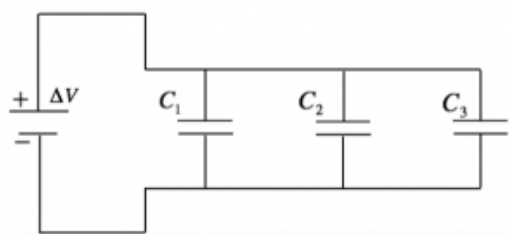
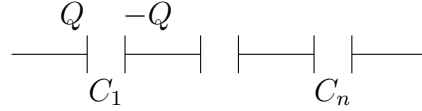


Figure 1.12: Collegamento di capacitori in parallelo

In questo caso, considerando che la carica sarà data dalla somma delle cariche dei singoli capacitori avremo:

$$Q_{tot} = \sum_I C_i V_i \rightarrow C_{tot} := \sum_i C_i \quad (1.27)$$

Partitore Capacitivo Si tratta di un elemento tipico di molti circuiti elettrici. È un collegamento di condensatori in serie nel quale si richiede di calcolare come si ripartisce il potenziale collegato agli estremi nei vari elementi del circuito.



Sapendo che su ogni capacitore è presente lo stesso valore di Q avremo che $V_i = \frac{Q}{C_i}$. Sappiamo anche che $Q = C_{tot} V_{tot}$, dunque avremo:

$$V_i = \frac{C_{tot}}{C_i} V_{tot}$$

1.9.4 Energia Immagazzinata nel Capacitore

Vogliamo andare a trovare l'energia immagazzinata nel capacitore per poi provare a generalizzare il concetto trattando la **densità di energia elettrostatica**. Ipotizziamo di caricare le due armature del condensatore, spostando da un'armatura all'altra delle cariche positive. Ci troviamo nella seguente situazione:

- lo spostamento della prima carica q_0 avviene in modo gratuito, tale carica andrà a generare un **campo**
- spostare q_2 implica di fare lavoro contro il campo generato da q_1

Per ogni carica spostata compierò un lavoro espresso come

$$dL_{est} = dqV(q)$$

Il potenziale nella formula di cui sopra varia in base alla quantità di carica che viene depositata. Il lavoro per caricare il condensatore sarà dunque dato da

$$L_{est} = \int_0^Q V(q) dq \quad (1.28)$$

Ma noi sappiamo che $V(q)$ è dato da q/C , dunque abbiamo:

$$U = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV \quad (1.29)$$

Questa formula esprime l'**energia immagazzinata nel condensatore**. Utilizzando il campo del condensatore piano, possiamo esprimere la nostra energia come:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \Sigma h \quad (1.30)$$

Dove Σh è il **volume** del condensatore piano, o meglio, il volume interno al condensatore nel quale abbiamo **campo non nullo**. Possiamo definire la **densità di energia** come:

$$\mu_E = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \left[\frac{J}{m^3} \right] \quad (1.31)$$

1.10 Elettrostatica nei Dielettrici

Questi materiali sono caratterizzati dal fatto che si compongono di **cariche vincolate all'atomo**. Nel momento in cui viene acceso un campo esterno attorno al dielettrico, il centro delle cariche positive si sposta lungo la direzione del campo, mentre quello delle cariche negative si sposta in direzione opposta, questo a motivo del fatto che vale la legge di Coulomb 1.1. In questo modo viene a formarsi un **dipolo elettrico**

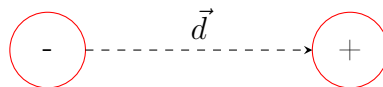


Figure 1.13: Dipolo Elettrico

Definiamo il **dipolo elettrico** un sistema di due carica, con segno opposto e modulo uguale, che rimangono vincolate ad una distanza fissa d .

Definiamo il **momento di dipolo** come il prodotto tra cariche e distanza:

$$\vec{p} := q\vec{d} \quad (1.32)$$

Per ricordare il verso del vettore d può essere utile notare che va nello stesso verso del campo.

Nel momento in cui si accende un campo attorno ad un isolante, abbiamo due situazioni che possono venirsi a creare:

- il materiale si **polarizza**, arrivando ad una separazione di carica. A differenza dei conduttori, il campo qui non è nullo

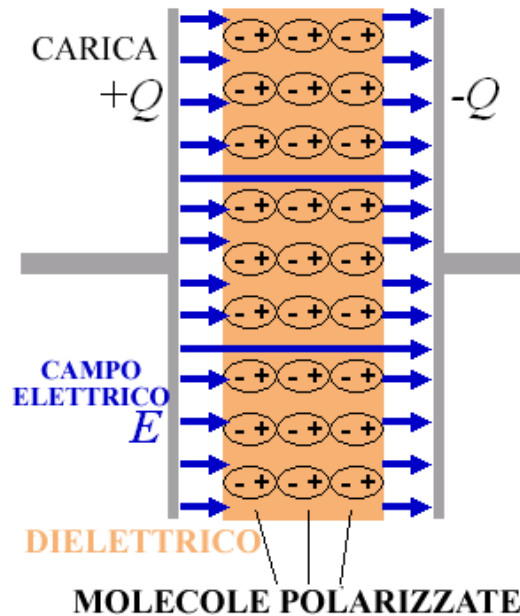


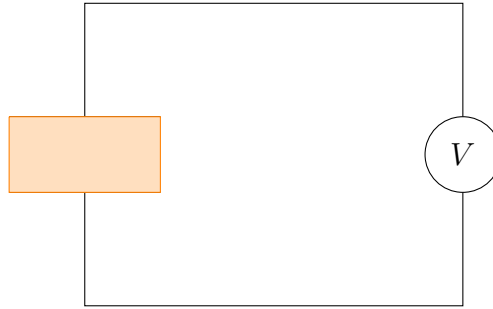
Figure 1.14: Dielettrico Polarizzato

- il materiale potrebbe essere **già polarizzato** sebbene il momento di dipolo medio sia nullo. Nel momento in cui il campo esterno si accende, i dipoli sentono **momento meccanico** τ fino a quando i dipoli non saranno allineati al campo esterno.

Ovviamente noi andremo a lavorare, non con i singoli dipoli ma con un **campo di polarizzazione** $\vec{P}(\vec{r})$ definito nel modo seguente:

1.10.1 Condensatore riempito di Dielettrico

Ipotizziamo di avere un condensatore piano riempito di materiale dielettrico:



Sappiamo che nel **vuoto** la capacità del condensatore è data da $\frac{\epsilon_0 \Sigma}{d}$ e che $Q = C_0 V_0$, mentre $E_0 = \sigma_0 / \epsilon_0$, con $\Delta V = E_0 d$. Ipotizziamo ora di staccare il nostro sistema dal generatore, rimanendo dunque a carica costante, e di riempire di dielettrico il condensatore.

Avremo che il potenziale del condensatore riempito di dielettrico sarà dato da:

$$V_k = \frac{V_0}{k}$$

dove k è detta **costante dielettrica del materiale**. Avendo un potenziale minore, avremo che la capacità del condensatore aumenta:

$$C_k = \frac{Q}{V} = k C_0 = k \epsilon_0 \frac{\sigma}{d}$$

dove il valore $k \epsilon_0$ è detto **pernettività del materiale** (notare come $k_{vuoto} = 1$). Anche E_k sarà scalato allo stesso modo del potenziale, in particolare sarà sempre non nullo, al contrario di quanto accade nel momento in cui riempiamo il condensatore di conduttore.

All'interno del dielettrico avremo un campo di indotto E_p detto di polarizzazione che si oppone al campo E_0 , questo è il motivo per cui il campo totale E_k viene scalato di un certo fattore k . Le cariche più esterne relative ai dipoli si dicono **cariche di polarizzazione**.

Calcolo delle Cariche di Polarizzazione Vogliamo a questo punto andare a calcolare le cariche di polarizzazione nel nostro capacitore. Utilizzando il teorema di Gauss otteniamo che il campo totale all'interno del dielettrico è dato da:

$$E_{tot} = \frac{|\sigma_0|}{\epsilon_0} - \frac{|\sigma_p|}{\epsilon_0}$$

ma siccome abbiamo visto anche che $E_{tot} = \frac{E_0}{k}$ otteniamo un'espressione finale per le cariche di polarizzazione:

$$\sigma_p = \sigma_0 \frac{k-1}{k} \quad (1.33)$$

La **polarizzazione** $\vec{P}(\vec{r})$ sarà data proprio da

$$|\vec{P}| = \sigma_p \quad (1.34)$$

Dunque, dato un campo di polarizzazione potremo esprimere in un nuovo modo la σ_p :

$$\sigma_p^\pm = \vec{P} \cdot \hat{n} \quad (1.35)$$

1.10.2 Dielettrici Lineari

Definiamo un **dielettrico lineare** un dielettrico per il quale, nel momento in cui si accende il campo, la **polarizzazione è parallela e proporzionale al campo E**:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad (1.36)$$

In questo caso il valore χ è detto **suscettività dielettrica del materiale**. Osservando l'equazione che ci dà $E_k = E_0/k$, utilizzando $1 + \chi = k$ possiamo scrivere:

$$E_k = \frac{E_0}{1 + \chi}$$

1.10.3 Teorema di Gauss per i Dielettrici

Immaginiamo di avere un condensatore piano riempito di dielettrico, le cui cariche libere nella lastra superiore sono positive, viene da sé che le cariche di polarizzazione saranno negative. Utilizziamo come superficie di Gauss un

cilindro con la base superiore nella lastra superiore. Applicando il teorema avremo

$$\oint E = E_{cond}A_{base} + E_{diel}A_{base} = \frac{\sigma_{libere} - \sigma_{pol}}{\epsilon_0}A_{base}$$

Avendo un conduttore, il valore di E_{cond} è chiaramente nullo. Sappiamo anche che $\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$, ma tale valore è anche uguale a $d\Phi(P)$. Ottengo dunque:

$$\oint E \cdot dS = \frac{q_{lib}}{\epsilon_0} - \frac{\oint \vec{P} \cdot d\vec{S}}{\epsilon_0}$$

Vogliamo però ottenere un teorema che ci permetta di conoscere informazioni sulle sole cariche libere. Per fare ciò facciamo nel seguente modo:

$$\oint (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot dS = Q_{libere}$$

e, definendo $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ come **campo di induzione elettrica** otteniamo

Teorema di Gauss nei Dielettrici

$$\oint \vec{D} \cdot dS = Q_{libere} \quad (1.37)$$

1.10.4 Riassunto

Riassumendo quanto visto fino a qui sui dielettrici, possiamo concludere che date delle cariche sorgenti immerse in un dielettrico, verrà a generarsi un campo E_{tot} dato dalla somma tra il campo iniziale e il campo di polarizzazione. Per ricavare informazioni andrò in primo luogo a calcolare $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, dove $\vec{P} = \epsilon_0 \chi E$

Grazie alla costante dielettrica nota, posso a questo punto ricavare tutto ciò di cui ho bisogno come segue:

- $\vec{D} = \epsilon_0 k \vec{E}_k \longrightarrow \vec{E}_k = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0 k}$
- $\vec{P} = \epsilon_0 (k - 1) \vec{E}$ oppure $\vec{P} = \frac{k-1}{k} \vec{D}$
- $\sigma_p(r = R) = \vec{P}(r = R)$

1.11 Energia Elettrostatica

Data una carica immersa in un campo elettrostatico, sappiamo che su tale carica agisce una forza descritta da 1.1 che vista in termini di campo diventa semplicemente $F = qE$. Sotto l'effetto di tale forza di Coulomb, che è *conservativa*, entriamo nel mondo della dinamica.

Alla luce della conservatività di questa forza, abbiamo modo di calcolare il lavoro di tale forza, ovvero

$$L_{elettr.} = -\Delta U_{elettr}$$

Se andiamo a porre l'energia all'infinito uguale a 0, possiamo riscrivere la formula del lavoro nel modo seguente:

$$L_{elettr.} = -q\Delta V$$

Abbiamo visto come l'energia, nel caso in cui $U_\infty = 0$, rappresenta il **lavoro esterno necessario a costruire il sistema**, ma anche il **lavoro del campo per disassemblare il sistema** (portare tutte le cariche all'infinito).

1.11.1 Distribuzione discreta di cariche

Data una distribuzione discreta di cariche $\{q_i\}_{i:1\dots n}$ consideriamo il lavoro esterno necessario alla costruzione del sistema, che corrisponderà all'energia immagazzinata nel sistema di cariche:

- porto q_1 da ∞ , non avendo forze in gioco, compio $L_1 = 0$
- porto q_2 da ∞ , sento in questo momento il campo generato da q_1 :

$$L_2 = q_2 V_1(r_2) = q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r = r_2}$$
- ...
- per quanto riguarda la n -esima carica, sfrutteremo il principio di sovrapposizione: $L_n = q_n(\Delta V_{tot}) = q_n(V_1(r_n) + \dots + V_i(r_n) + \dots + V_{n-1}(r_n))$

Per la particella i -esima il potenziale sarà dato da:

$$\frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r = r_n}$$

Il lavoro totale sarà quindi dato dalla somma di tutte le componenti appena descritte, e quindi l'energia sarà data da:

$$U_{el} = \frac{1}{2} \sum_i^n q_i V_i = \frac{1}{2} \sum_i^n \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \quad (1.38)$$

1.11.2 Distribuzione continua di cariche

Andiamo ora a generalizzare quanto visto fino a questo momento per la distribuzione **continua** di cariche. È abbastanza intuitivo capire che per passare al continuo le sommatorie dovranno diventare degli *integrali* nello spazio.

Dati dunque due volumetti unitari, rispettivamente a distanza r_1 ed r_2 dall'origine degli assi, ciascuno del volume $d\tau_1, d\tau_2$ a distanza, l'uno dall'altro r_{12} ; avremo che per portare il primo volumetto, non compieremo lavoro, per quanto riguarda invece il secondo compieremo un certo lavoro, espresso dall'energia unitaria che segue:

$$dU_{el} = \frac{\rho(r_1)d\tau_1\rho(r_2)d\tau_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$

dove $\rho d\tau_1$ corrisponde a dq_1 , lo stesso vale per dq_2 , possiamo a questo punto passare all'energia totale:

$$U_{el} = \frac{1}{2} \frac{\int_{vol} \int_{vol} \rho(r_1)\rho(r_2)}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} d\tau_1 d\tau_2 \quad (1.39)$$

tramite le opportune semplificazioni, otteniamo:

$$\frac{1}{2} \int_{vol} \rho(r)V(r)d\tau \quad (1.40)$$

1.11.3 Sistema di conduttori

Ipotizziamo ora di essere in un sistema di conduttori, nei quali ricordando quanto già visto, abbiamo carica distribuita unicamente in superficie, e potenziale costante. A questo punto potremo utilizzare 1.40. Data infatti la carica:

$$Q_i = \int_{sup} \sigma_i dS$$

otteniamo

$$U_{el} = \frac{1}{2} \int \rho V d\tau = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{sup} \sigma_i V_i$$

e, dato che il potenziale è costante, possiamo scrivere

$$U_{el} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n n Q_i V_i \quad (1.41)$$

Rispetto all'equazione 1.38, nella quale V_i rappresenta il potenziale di interazione, dunque soltanto quello delle **altre cariche**, in questa equazione il potenziale rappresenta anche il **lavoro necessario a caricare il singolo conduttore**, questo a motivo del fatto che, sebbene il primo conduttore venga caricato gratuitamente, avvicinando il secondo conduttore al sistema, questo sente induzione dovuta al primo. Questo lavoro in pratica comprende sia il lavoro di interazione, che il lavoro di carica del conduttore stesso.

Due conduttori in induzione completa Ipotizziamo ora di avere due conduttori, il primo caricato a Q_1 e a potenziale V_1 , il secondo con Q_2, V_2 . Applicando quanto visto in precedenza avremo che:

$$U_{el} = \frac{1}{2} \sum_1^2 Q_i V_i = \frac{1}{2} (Q_1 V_1 + Q_2 V_2)$$

Sappiamo che, avendo un **condensatore** (conduttori in induzione completa), avremo $Q_1 = C(V_1 - V_2)$ e $Q_2 = -Q_1$. Inserendo quanto appena visto nell'equazione di cui sopra otteniamo:

$$U_{el} = \frac{1}{2} C \Delta V^2$$

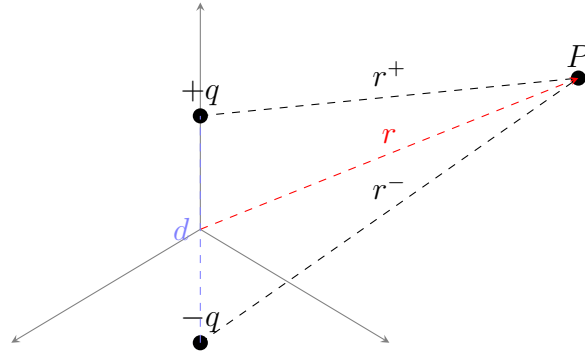
1.11.4 Densità di Energia Elettrostatica

Andiamo ora a trattare l'energia elettrostatica immagazzinata all'interno del campo elettrostatico. È dimostrabile che il risultato ottenuto per il condensatore nell'equazione 1.31, è in realtà un risultato che vale in **generale**.

1.12 Dipolo Elettrico

In questa situazione abbiamo due cariche di segno opposto vincolate da una distanza rigida d , caratterizzato da un momento di dipolo $\vec{p} = q\vec{d}$.

Vogliamo calcolare il potenziale del seguente sistema in un punto P :



Il **potenziale** V si calcolerà tramite principio di sovrapposizione ed è dato dalla somma dei potenziali delle due cariche :

$$V = V_+ + V_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_- - r_+}{r_+ r_-}$$

Considerando il fatto che stiamo utilizzando oggetti molto piccoli, basterà prendere il *baricentro* del dipolo come punto di partenza dei due raggi vettori, posso in pratica effettuare una **approssimazione di punto lontano**, che mi permette di non andare a vedere la struttura di una struttura microscopica.

Avremo quindi che $r_+ r_-$ diventa r^2 e tramite la trigonometria $r_- - r_+$ diventa $d \cos \theta$ dove θ è l'angolo tra la distanza rigida e il raggio vettore che collega al punto P . Ricordando che $qd = p \rightarrow q = p/d$ e che $a \cdot b = ab \cos \theta$, otteniamo

$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

Si noti come il potenziale del dipolo scende più rapidamente del potenziale della singola carica. Per arrivare a tale formula notiamo come la carica $q = p/d$ si semplifichi con $d \cos \theta$.

Vogliamo ora studiare il **campo** del dipolo elettrico, in particolare osservarne le linee di campo. Sappiamo che il potenziale è nullo nel momento in cui $\vec{p} \perp \vec{r}$. Sopra il piano avremo potenziale positivo, sotto avremo invece potenziale negativo. Sappiamo che il campo va dal potenziale positivo a quello negativo, e che le linee di campo sono sempre ortogonali alle superfici equipotenziali. Questo ci può dare un'idea chiara dell'andamento delle linee di campo.

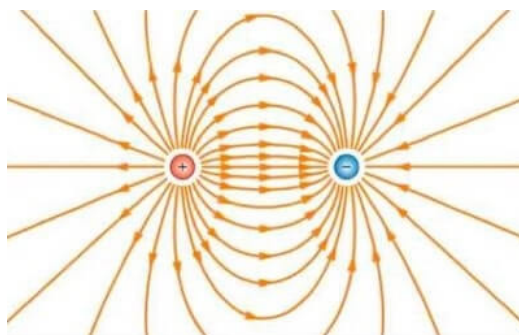


Figure 1.15: Linee di Campo di un Dipolo

1.12.1 Dipolo Elettrico in un campo esterno costante

Tuttavia queste due forze costituiscono una coppia di forze applicate al polo, si verificherà dunque una **rotazione** a causa di un momento torcente $\vec{\tau} \neq 0$. Il valore di tale $\vec{\tau}$ ci è dato da:

$$\vec{\tau} = (\vec{r} \times \vec{F}) = \vec{d} \times \vec{F} = \vec{d} \times q\vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$

L'ultima uguaglianza si ottiene chiaramente spostando la carica a sinistra del prodotto vettoriale. Otteniamo quindi la seguente equazione che rappresenta il **momento meccanico** sul dipolo a **causa del campo esterno**:

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (1.42)$$

In pratica succede che il dipolo si **allinea al campo esterno**. Cercando invece andare a studiare l'**energia** del sistema abbiamo che il lavoro torcente è dato dall'equazione seguente:

$$dL = (\tau d\Theta) = pE \sin\theta d\theta = d(-pE \cos\theta)$$

Da ciò ricaviamo che

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad (1.43)$$

Questa equazione ci fornisce l'**energia di interazione del dipolo nel campo esterno**. In pratica abbiamo massima energia nel momento in cui abbiamo **equilibrio instabile**, viceversa nel momento in cui abbiamo energia minima abbiamo equilibrio **stabile**.

Nel momento in cui immergiamo un dipolo in un **campo non omogeneo**, avremo che le forze sentite dal dipolo saranno:

$$F_x = \vec{p} \cdot \nabla E_x$$

1.13 Equazioni di Maxwell per l'elettrostatica

La prima equazione è quella relativa al fatto che il campo elettrostatico è conservativo:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (1.44)$$

La seconda è anche nota come il teorema di Gauss:

$$\oint_{sup} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad (1.45)$$

Il significato del teorema di Gauss è chiaramente quello che le sorgenti del campo sono unicamente le singole cariche. Quelle viste fino a questo momento sono le equazioni di Maxwell per l'elettrostatica e valgono a livello **macroscopico**. Abbiamo modo di ottenere queste formule che erano in **termini integrali** anche in **termini locali**, questo utilizzando il Teorema di Stokes ed il Teorema di Gauss della Divergenza.

Le due equazioni di cui sopra in questo modo diventano, la prima tramite Stokes:

$$\nabla \times E = 0$$

e, tramite la divergenza:

$$\int_{vol} \nabla \cdot E d\tau = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Inoltre, abbiamo visto come $\Delta V = -\int_{\gamma} E \cdot dl$, tramite il teorema del gradiente possiamo scrivere la terza equazione locale per l'elettrostatica, considerando che $\Delta V = \int_{\gamma} \nabla V$:

$$\vec{E} = -\nabla V$$

e, utilizzando la seconda e la terza equazione, ricavare l'**equazione di Poisson** per l'elettrostatica:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Chapter 2

Elettrodinamica

Andremo in questo capitolo ad introdurre il **tempo** in tutta la trattazione vista fino a questo punto.

2.1 Conduzione Elettrica

Ricordiamo che le equazioni di Maxwell in elettrostatica valgono solamente, come suggerisce il nome, in condizioni di $t = 0$. In questo capitolo, questa ipotesi viene abbattuta, dunque avremo la necessità di andare a rivedere tali equazioni al fine di adattarle al nuovo contesto in cui ci troviamo.

In particolare, dato che per fare scorrere una carica in un circuito è necessario compiere lavoro, la seconda equazione andrà rivista..

Avendo delle cariche in moto, su tali cariche agirà una forza $F = qE$ e dunque il lavoro $L = \oint F ds = \dots q \oint E \neq 0$. In sostanza il **campo elettrico non è conservativo** e quindi *serve del lavoro per mantenere le cariche in moto*.

2.1.1 Corrente Elettrica e Forza Elettromotrice

Ipotizziamo di avere due conduttori, uno di questi a V^+ , l'altro V^- , collegati con un filo di rame che non contribuisca al nostro sistema. Sappiamo che dal potenziale maggiore al potenziale minore avremo un campo elettrostatico.

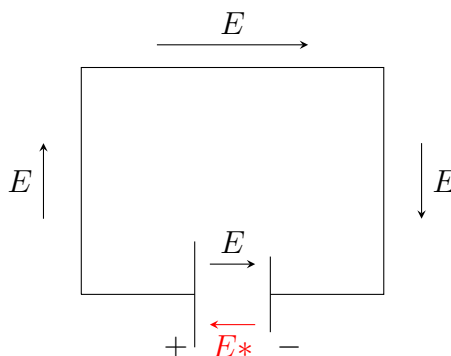


Figure 2.1: Corrente

Vediamo come, una volta collegati i due conduttori, inizia un **moto di cariche** che terminerà nel momento in cui i due conduttori avranno raggiunto lo stesso potenziale. Per mantenere le cariche in moto abbiamo bisogno di ripristinare continuamente la differenza di potenziale. Per fare questo avrò bisogno di un nuovo oggetto che agisca nella direzione opposta rispetto al campo: un **generatore**. La forza che sposta nuovamente le cariche positive in modo da ripristinare il potenziale, è detta **forza elettromotrice**.

$$f.e.m. \quad \mathcal{E} = \int_A^B \frac{F}{q} dl = V_B^+ - V_A^- \quad (2.1)$$

tale *f.e.m.* è detta anche **tensione** o **differenza di potenziale** *ddp*.



Considerando la situazione seguente, andiamo a calcolare la circuitazione, otteniamo che

$$\oint E_{\text{elettrostatico}} + E^* \neq 0$$

Il risultato dell'integrale di cui sopra è proprio la forza elettromotrice. Definiamo quindi nel seguente modo la **forza elettromotrice**:

$$\mathcal{E} = \oint E^* \quad [V] \quad (2.2)$$

2.1.2 Intensità di Corrente

Definiamo **intensità di corrente** i la quantità di carica che scorre nell'unità di tempo attraverso una **certa superficie**. Tale valore è una quantità scalare, il cui segno va a rappresentare il verso di scorrimento delle cariche. Per

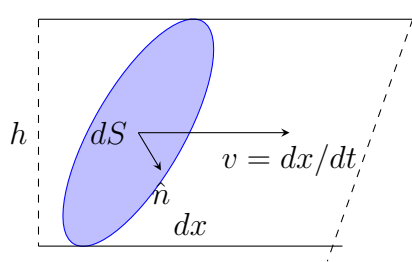
convenzione si considera positiva l'intensità legata al moto di cariche positive, e negativa quella legata al moto di cariche negative:

$$i := \frac{dq}{dt} \quad [A] \quad (2.3)$$

Per chiarire meglio il concetto di "attraverso una certa superficie" abbiamo bisogno del concetto di **densità di corrente** \vec{j} , ovvero la quantità di carica che passa attraverso la superficie unitaria orientata in modo ortogonale al moto della carica, in pratica l'intensità non è altro che il **flusso** tramite tale superficie:

$$i = \int_{sup} \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (2.4)$$

dove \vec{j} è la densità di corrente, che si misura in $[\frac{A}{m^2}]$. Da punto di vista microscopico ci troveremo nella situazione seguente:



Abbiamo che l'intensità di corrente i è data dalla carica q nel cilindretto di lato vdt , aprendo tale formula otteniamo che l'intensità è data da:

$$i = Nq_e v dS \cdot \hat{n} \quad (2.5)$$

In questa formula avremo che N rappresenta il numero di elettroni per unità di volume, ciò moltiplicato per q_e va a fornirci la carica totale che scorre all'interno del volumetto. La formula $dS \cdot \hat{n}$ ci permette di trovare il valore di h .

Siccome i è il flusso della densità di corrente j , abbiamo trovato la formula della **densità di corrente a livello microscopico**:

$$\vec{j} = Nq\vec{v} \quad (2.6)$$

2.1.3 Corrente Stazionaria

Parliamo di **corrente stazionaria** o **continua** quando abbiamo a che fare con una corrente in cui l'intensità i nella sezione del conduttore è **costante**. Questo chiaramente non implica il fatto che la sezione del conduttore rimanga costante, dunque nel momento in cui il conduttore ha una sezione variabile, varierà di conseguenza la **densità di corrente**.

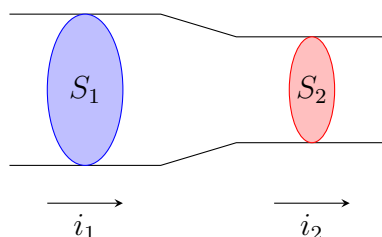


Figure 2.2: Corrente Stazionaria

Chiaramente per mantenere l'uguaglianza tra i_1 e i_2 è necessario che valga la relazione $j_1 \ll j_2$, soltanto in questo modo ci sarà possibile scrivere $j_1 S_1 = j_2 S_2$.

2.2 Legge di Ohm

Andiamo a vedere la fenomenologia microscopica alla base di questa importante legge della fisica. Ipotizziamo infatti di fare uno zoom su un conduttore che va a collegare i capi di un generatore, che va quindi a formare un circuito. All'interno di tale conduttore, a *causa della temperatura* abbiamo delle cariche in moto libero disordinato (la media di tale moto è chiaramente nulla). Nel momento in cui accendiamo un campo, tali cariche iniziano un moto ordinato contro le collisioni dovute all'agitazione termica.

In sostanza avremo che la velocità media $\langle \vec{v}_{termica} \rangle = 0$ e che la media della velocità di deriva $\langle \vec{v}_{deriva} \rangle \neq 0$. Avremo dunque che la densità $j = Nq \langle v_{deriva} \rangle$. Mentre la velocità termica ha un ordine di grandezza di $10^2 m/s$, mentre la velocità di deriva è dell'ordine di grandezza di $10^{-5} m/s$.

Possiamo osservare in modo sperimentale che la differenza di potenziale ai capi di un conduttore è proporzionale all'intensità, il fattore di proporzionalità è una caratteristica intrinseca del conduttore in questione.

Legge di Ohm

$$V = Ri \quad (2.7)$$

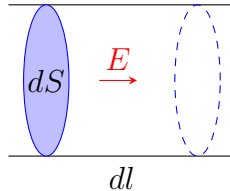
Tutti i conduttori che rispettano questa legge sono detti **conduttori ohmici**. La resistenza si esprime in Ω e dipende dal materiale di cui un conduttore si compone oltre che dalla sua geometria, in particolare avremo quindi che

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (2.8)$$

Il valore ρ è detto **resistività del materiale**, per quanto riguarda invece la geometria del conduttore, avremo quindi che la resistenza aumenta con la lunghezza del conduttore e che è inversamente proporzionale alla sezione del conduttore.

2.2.1 Legge di Ohm Locale

Dopo aver visto ciò che accade macroscopicamente, facciamo uno zoom internamente al conduttore preso in considerazione e andiamo a vedere cosa succede a livello microscopico:



Applicando in questa situazione la legge di Ohm abbiamo che

$$dV = Rdi$$

e, inserendo quanto conosciamo già sull'intensità di corrente:

$$\begin{cases} di = jdS \\ dV = Edl \end{cases}$$

Sostituendo opportunamente le due identità di cui sopra, otteniamo di seguito la formula, che una volta semplificata ci darà la legge di ohm valida in ambito microscopico:

$$Edl = \rho \frac{dl}{dS} j dS \quad (2.9)$$

Legge di Ohm Locale

$$\vec{E} = \rho \vec{j} \quad (2.10)$$

Cercando di ottenere il valore di \vec{j} abbiamo $j = \sigma E$, il valore $\sigma = 1/\rho$ è detto **conducibilità elettrica**.

2.3 Potenza Elettrica - Effetto Joule

Sia una resistenza attraverso la quale sta scorrendo una intensità di corrente, dunque presentemente un insieme di cariche. Sappiamo che il moto di queste cariche è reso possibile grazie ad un lavoro esterno, calcolabile tramite $dL = V dq$ fornito dal *generatore*. Nel momento in cui abbiamo un lavoro, possiamo anche trovare la **potenza** data dal lavoro per unità di tempo $P = dL/dt$:

$$P_{elettrica} = V \frac{dq}{dt} = Vi \text{ [W]} \quad (2.11)$$

Questa è in pratica la **potenza elettrica erogata** dal generatore per avere l'intensità i . Se dovesse anche valere la legge di Ohm, avremo anche che

$$P = Ri^2 = \frac{V^2}{R} \quad (2.12)$$

Questa equazione ci dà invece l'espressione della **potenza dissipata nel materiale**; tale dissipazione è anche detta **effetto Joule**, l'effetto ultimo è quello della produzione di *calore*.

Potremmo essere interessati a raccogliere la potenza erogata Vi in un **capacitore**. Andremo successivamente a sviluppare questa trattazione.

2.3.1 Bilancio Energetico di un Circuito

Supponiamo di essere sempre in corrente stazionaria, di avere un circuito dotato di un generatore \mathcal{E} e di una certa resistenza R . Abbiamo che la potenza generata $P_{gen} = \mathcal{E}i$, e che la potenza dissipata $P_r = Ri^2 = Vi$, dove

V è la differenza di potenziale ai capi di R . In questo modo, stiamo dicendo che la potenza viene **dissipata lungo tutto il circuito**.

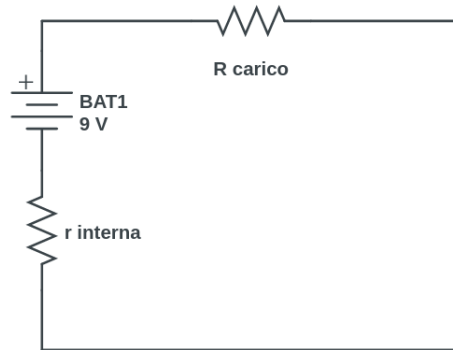
$$L = \int_{\text{tempo}} P dt \longrightarrow L_{\text{totgen.}} = \mathcal{E}_i \Delta t = L_{\text{dissipatoR}} = Ri^2 \Delta t$$

Chiaramente, nel caso in cui abbiamo all'interno del nostro circuito anche un condensatore avremo che $L_{\text{tot}} = L_{\text{dissipato}} + L_{\text{en.immagazzinata}}$

Osservazione Considerando un'altra formulazione della potenza, sappiamo che $P = F \cdot v$ e, sostituendo $F = qE$ troviamo $P = qE \cdot V$, ma sappiamo che $qv = j$, dunque potremo anche scrivere:

$$P_{\text{dissipata}} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Facciamo ora riferimento all'immagine seguente:



In questo caso avremo che la *f.e.m.* prodotta dal generatore, sarà quella necessaria a *ristabilire le cadute di potenziale* dovute alle due resistenze nel circuito, dunque, applicando ohm avremo che:

$$f.e.m. = Ri + ri \quad (2.13)$$

Questa equazione ci fornisce il bilancio energetico del nostro circuito in termini di **potenziale**. Se ad esempio vogliamo trovare la differenza di potenziale ai capi della resistenza di carico, questa sarà data da Ri , ovvero $\mathcal{E} - ri$: in pratica togliamo alla *f.e.m.* totale tutto il potenziale fatto cadere dagli altri elementi del circuito. Un altro modo per esprimere tale valore è il seguente:

$$V_a - V_b = Ri = \frac{\mathcal{E}}{1 + r/R}$$

In sostanza la formula di cui sopra ci dice che se vogliamo misurare la forza elettromotrice dovremo farlo a *circuito aperto*, ovvero con $R \rightarrow \infty$, $i \rightarrow 0$ e dunque, la *f.e.m.* è data dalla differenza di potenziale ai capi della resistenza di carico.

Per trovare il bilancio energetico in termini di **energia**, aggiungiamo all'equazione della *f.e.m.* 2.1 la carica, sapendo che $dq = idt$:

$$\mathcal{E}idt = Ri^2dt + ri^2dt \quad (2.14)$$

Dal bilancio in energia, togliendo il tempo, avremo anche il bilancio nelle **potenze**:

$$\mathcal{E}i = Ri^2 + ri^2 \quad (2.15)$$

2.4 Collegamento di Resistori

Così come per i capacitori, anche per quanto riguarda i resistori abbiamo la possibilità di effettuare un collegamento in **serie** o in **parallelo**.

Collegamento in Serie Definiamo questo tipo di collegamento tramite il fatto che per i resistori collegati in serie passa la **stessa corrente**



Figure 2.3: Resistenze in Serie

In questo caso la resistenza *equivalente* sarà data da:

$$V_{tot} = \sum^n V_i = \sum^n R_i i = i \sum^n R_i \quad (2.16)$$

In sostanza avremo dunque che il collegamento in serie serve ad aumentare la resistenza totale:

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i$$

Collegamento in Parallelo Questo collegamento è invece caratterizzato dal fatto che ai capi delle resistenze abbiamo la **stessa differenza di potenziale**

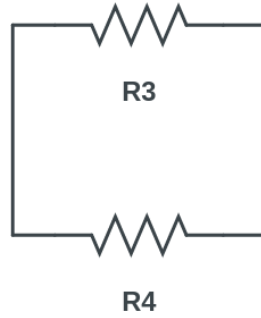


Figure 2.4: Resistenze in Parallelo

In questo caso, avremo invece che la resistenza *equivalente* è data da:

$$i_{tot} = \sum_{i=1}^n i_i = \sum_{i=1}^n \frac{V_i}{R_i} = V \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \quad (2.17)$$

In pratica avremo che questo tipo di collegamento è utilizzato per abbassare il valore della resistenza equivalente, e dunque

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Partitore Resistivo Si tratta di un oggetto che ripartisce la equamente la **tensione** tra le resistenze collegate in **serie** all'interno del nostro circuito.

Come già anticipato si tratta di un oggetto componibile tramite il collegamento in serie di n resistenze collegate ad un generatore. È abbastanza immediato vederlo come un circuito elementare composto dal generatore e dalla resistenza equivalente di cui abbiamo già dato la formulazione. Avremo quindi che:

$$i = (i_1 = i_2) = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2}$$

Chiaramente questa formulazione è ottenuta utilizzando un'inversa di 2.16, ricordando che la differenza di potenziale è praticamente \mathcal{E} . Si noti

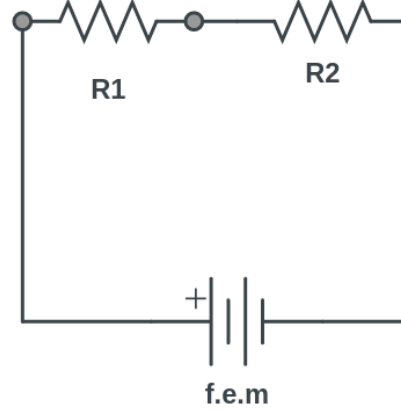


Figure 2.5: Partitore Resistivo Serie

come l'intensità sia la stessa ai capi di R_1 e di R_2 , tipica caratteristica del collegamento in serie.

Se vogliamo invece verificare V_1 e V_2 avremo che questi sono espressi nel modo seguente:

$$\begin{cases} V_1 = R_1 i = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \mathcal{E} \\ V_2 = R_2 i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \mathcal{E} \end{cases}$$

Nel caso in cui le resistenze siano invece collegate in **parallelo** avremo che ad essere ripartita sarà l'**intensità di corrente**. Avremo dunque una resistenza equivalente data da $R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. L'intensità di corrente ai capi delle due resistenze sarà invece:

$$\begin{cases} i_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i \\ i_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i \end{cases}$$

2.4.1 Potenze

Dato che la potenza è locale, avremo che la potenza è sempre la somma delle potenze dissipate dai singoli elementi del circuito: $P_{tot} = \sum R_i i^2 = R_{eq} i_{tot}^2$.

$$P_{serie} = (R_1 + R_2) i_{tot}^2 \quad (2.18)$$

$$R_{parallelo} = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 = \mathcal{E}^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (2.19)$$

2.5 Leggi di Kirchhoff

In questo punto del corso stiamo trattando le *reti lineari*, nelle quali abbiamo a che fare con resistori e generatori. Una qualsiasi rete elettrica è rappresentabile utilizzando due elementi principali:

- **Nodi:** oggetti nei quali confluiscono più rami
- **Maglie:** caratterizzate da un verso di percorrenza della corrente

Le leggi di Kirchhoff impongono dei vincoli sui nodi e sulle maglie:

1° Legge di Kirchhoff

Considerando un nodo avremo che la somma delle correnti uscenti e delle correnti entranti è sempre nulla. Per convenzione consideriamo uscenti le correnti positive, entranti quelle negative.

$$\sum_k i_k = 0 \quad (2.20)$$

Si noti come tale legge è fortemente legata alla **conservazione della carica**.

2° Legge di Kirchhoff

Associando un verso alla maglia, avremo che la somma delle tensioni (elementi passivi) in una maglia con i segni decisi dal verso assegnato alla maglia, è uguale alla somma degli elementi passivi che producono cadute di potenziale.

$$\sum_k \mathcal{E}_k = \sum_k R_k i_k \quad (2.21)$$

2.6 Carica e Scarica di un Condensatore

Torniamo ora a quanto descritto nell'immagine 2.1.1 e ipotizziamo di collegare i due conduttori in questione tramite un filo di rame, che sarà dotato di una sua resistenza R_{filo} . Vogliamo ora andare ad indagare l'intensità di corrente e la potenza.

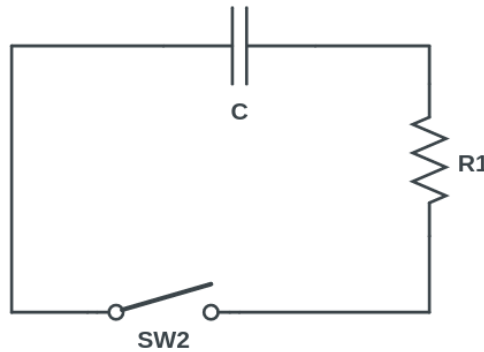


Figure 2.6: Scarica di un Condensatore

Possiamo riassumere la struttura descritta con il circuito di cui sopra. Nel momento in cui l'interruttore viene chiuso le cariche inizieranno a scorrere dalla lastra del condensatore a potenziale maggiore verso quella a potenziale minore.

È chiaro come la carica che scorrerà nel circuito sarà variabile nel tempo, così come la carica immagazzinata nel condensatore, questo a motivo del fatto che il condensatore si scarica. Così come le cariche variano nel tempo, lo farà anche il potenziale, questo perché la capacità del condensatore deve rimanere costante.

Chiameremo Q la carica immagazzinata nel condensatore, e q quella che scorre nel circuito a causa della scarica del condensatore. Nel momento in cui a t_0 viene chiuso l'interruttore abbiamo $Q(t_0) = Q_0$.

$$\begin{cases} V_C(t) = \frac{Q(t)}{C} \\ i = -\frac{dQ}{dt} \end{cases}$$

Il motivo del segno meno, sta nel fatto che se Q nel condensatore **diminuisce**, l'**intensità** di corrente nel circuito **aumenta**. $V_C(t)$ indica invece la differenza di potenziale ai capi del condensatore. Dalla **legge di Ohm** sappiamo inoltre che:

$$i(t) = \frac{V(t)}{R}$$

dove la $V(t)$ è la V ai *capi della resistenza*. Dobbiamo però considerare che la nostra scarica è "lenta" e quindi possiamo considerare $V_R(t) = V_C(t)$. Dunque possiamo impostare l'equazione di cui sopra utilizzando le informazioni ricavate in precedenza, ottenendo:

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{RC} \longrightarrow \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = 0$$

Si tratta di un'equazione differenziale a variabili separabili del primo ordine, che una volta risolta ci porta alla legge di **scarica del condensatore**:

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (2.22)$$

Se vogliamo invece andare a vedere quello che accade alla corrente, la sua legge sarà data da

$$i(t) = i_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (2.23)$$

nella quale $i_0 = Q_0/RC = V_0/R$. Il **potenziale** sarà dato in modo analogo:

$$V(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (2.24)$$

dove $V_0 = Q_0/C$. Per quanto riguarda invece la **potenza**, sapendo che $P = Ri^2(t)$, possiamo inserire la forma di $i(t)$ calcolata e ottenere:

$$P = \frac{V_0^2}{R} e^{-\frac{2t}{RC}}$$

e quindi l'**energia totale dissipata** sarà data da:

$$\int_{t_0}^{\infty} P dt = \frac{V_0^2}{R} \left[\frac{RC}{2} e^{-\frac{2t}{RC}} \right]_0^{\infty} = \frac{V_0^2 C}{2}$$

Si noti come $C/2V_0^2$ sia esattamente l'energia che era **immagazzinata nel condensatore**.

In modo analogo, la **carica** del condensatore di capacità C inizialmente scarico, sarà data a partire dalla legge di Ohm:

$$\mathcal{E} = V_R(t) + V_C(t) \quad i = dQ/dt$$

Dunque avremo che

$$\begin{cases} Q(t) = \frac{C\mathcal{E}}{Q_{finale}} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \\ i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \\ V(t) = Q(t)/C \end{cases} \quad (2.25)$$

Dunque, se in precedenza il nostro bilancio energetico poneva l'energia erogata dal generatore uguale all'energia dissipata nel circuito, in questo caso la potenza erogata dal generatore sarà uguagliata alla somma tra l'energia dissipata e l'energia immagazzinata nel condensatore. Svolgendo qualche calcolo potremo inoltre trovare come in termini di potenza questa procedura sia per metà inefficiente, nel senso che la potenza erogata viene per metà immagazzinata e per metà dissipata nella resistenza del circuito:

$$C\mathcal{E}^2 = \frac{1}{2}C\mathcal{E}_{dissipata}^2 + \frac{1}{2}C\mathcal{E}_{immagazzinata}^2$$

Chapter 3

Il Magnetismo Stazionario

Andremo in questo capitolo, in modo analogo a quanto fatto con l'elettricità, a osservare i campi magnetici in condizioni *statiche*.

3.1 Introduzione alla Magnetostatica

3.1.1 Fatti Sperimentali

Possiamo osservare che alcuni materiali palesano l'esistenza di una **nuova forza** non descrivibile tramite le teorie fino a questo punto note. Questa forza può essere *attrattiva* o *repulsiva* ed è localizzata ai **poli del materiale**.

Prendendo un materiale molto piccolo tale da non perturbare il nostro sistema, chiamato **ago magnetico**, osserviamo che tale oggetto si **orienta** sempre in una stessa direzione. Questo ci dice che esiste un *effetto magnetico* dovuto al pianeta Terra.

Nel momento in cui *spezziamo una calamita* possiamo osservare che non è possibile isolare il polo nord dal polo sud, troveremo di nuovo due pezzi di calamita dotati ciascuno di un polo nord e di un polo sud. Questo ci dice che **non esiste il monopolo magnetico**.

Un altro esperimento molto importante che possiamo fare è fatto considerando un filo di corrente che attraversa una lastra cosparsa di aghi magnetici, possiamo osservare che gli aghi si orientano secondo delle **linee chiuse attorno al filo**. In pratica la corrente elettrica è causa di *effetti magnetici*.

Concludiamo che la sorgente del campo magnetico \vec{B} è la corrente elettrica, ma le correnti sono cariche in moto, quindi ci aspetteremo di avere come campo magnetico prodotto dalla carica microscopica in moto.

Abbiamo dunque scoperto l'esistenza di un **campo magnetico** che va ad agire sugli oggetti attorno ad esso. Così come il campo elettrostatico agisce

sulle cariche con una forza data da qE ed è generato da una sorgente di cariche, per il campo magnetico avremo che le sorgenti sono le **cariche in moto** e che gli oggetti su cui agisce sono sempre cariche in moto e le correnti.

3.2 Forza di Lorentz

Poniamo di avere un campo magnetico e consideriamo un oggetto su cui tale campo agisce (una carica in moto). Potremo osservare che l'intensità della forza è proporzionale alla carica, alla velocità e al campo magnetico. Mentre in elettrostatica abbiamo che la forza è parallela al campo, nel magnetismo parallelamente al campo la forza è nulla, così parallelamente alla velocità. Osserviamo che questa nuova forza è **perpendicolare** al campo B e alla velocità.

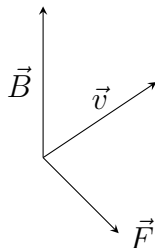


Figure 3.1: Forza di Lorentz

Dunque avremo che la forza di Lorentz sarà espressa da

$$\vec{F}_{Lorentz} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (3.1)$$

Ipotizziamo di ingrandire un filo conduttore di sezione s e di lunghezza dl . Al suo interno avremo delle cariche in moto. Su ognuna di queste cariche agirà chiaramente una forza di Lorentz. Andrò a contare ognuna di queste cariche mettendo le forze in una sommatoria. Ricordo inoltre che la densità di corrente \vec{j} è data dal numero dei portatori di carica, per la carica e la velocità di deriva: $j = Nqv$ e che l'intensità $i = \vec{j} \cdot d\vec{S}$.

Troveremo dunque che la risultante delle forze di Lorentz che agiscono in un conduttore è esprimibile in termini di intensità di corrente:

$$d\vec{F} = i d\vec{l} \times \vec{B} \quad (3.2)$$

Quella descritta in questa equazione è detta **2° Legge di Laplace**. Chiaramente, dato che la forza magnetica è ortogonale alla velocità e al campo magnetico, non avremo lavoro, dunque non avremo un potenziale scalare. In sostanza, anche ricordando il fatto che non esiste una sorgente isolata di carica magnetica, le **linee di campo** del campo magnetico sono **chiuse**. Potremo quindi trovare la seguente equazione importantissima:

1° Equazione di Maxwell nel Magnetismo Stazionario

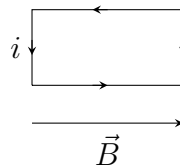
$$\Phi(\vec{B}) = 0 \quad (3.3)$$

3.3 Dipolo Magnetico in campo esterno \vec{B}

Definiamo **dipolo magnetico** una spira elementare, ovvero della quale non ci importa la geometria, percorsa da una corrente i . Attraverso questo concetto andiamo a definire il concetto di **momento di dipolo**:

$$\vec{\mu} := i\vec{S} \quad [Am^2] \quad (3.4)$$

Consideriamo ora la nostra spira percorsa da corrente i immersa in un campo magnetico stazionario \vec{B} .



Chiameremo il lato lungo b e il lato corto a , e, ricordando la formulazione della Forza di Lorentz $F = idl \times B$, avremo sui lati a una forza data da $F = iaB$, mentre sui lati b avremo forza nulla. Chiaramente le due forze saranno in contrapposizione, dunque il nostro oggetto non traslerà ma avrà un momento torcente non nullo, con $\tau = (r \times F) = iabB$, in particolare avremo che

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

ovvero il momento **meccanico** di un dipolo magnetico o di una spira immersa in un campo esterno B . Avremo anche che l'**energia** nel dipolo immerso nel campo esterno sarà data da:

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad (3.5)$$

Si noti l'analogia con la formulazione dell'energia immagazzinata nel dipolo elettrico.

3.4 Teorema di Ampere

Andiamo ora a vedere lo strumento che ci consentirà di calcolare il campo magnetico in condizioni stazionarie. Abbiamo visto che il lavoro della forza magnetica è sempre nullo, dunque non ci sarà possibile trovare un potenziale magnetico. Per questo motivo ci possiamo aspettare che lungo un percorso chiuso non avremo circuitazione di campo nulla.

Questo teorema ci permetterà di ricavare il campo nello spazio a partire dalle **cariche in moto**, ovvero le sorgenti. In sostanza, contrariamente a quanto visto nella forza di Lorentz, andiamo ad indagare come le cariche in moto agiscono sul campo magnetico (la forza di Lorentz ci dice come le cariche in moto interagiscono con questo).

Si consideri un filo percorso da una corrente \vec{i} e guardiamo le linee di campo generate da tale corrente, potremo osservare delle circonferenze concentriche che si avvolgono attorno a tale filo (lungo tutto il filo).

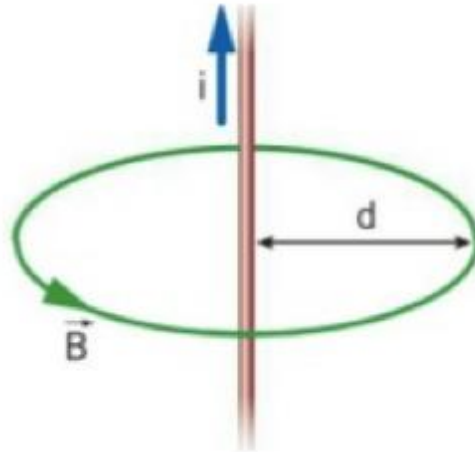


Figure 3.2: Linee di Campo Magnetico

Notiamo che poteva andare soltanto in questo modo, infatti se consideriamo un filo sufficientemente lungo da trasformare gli effetti ai bordi, abbiamo

simmetria cilindrica, avendo delle linee chiuse, saranno per forza delle circonferenze. Poiché le linee sono delle circonferenza, il campo sarà costante in tutte le circonferenze distanti r dal nostro filo (\vec{B} andrà giù al massimo come r^{-1} e osserviamo che \vec{B} è **proporzionale** alle correnti.

$$\begin{cases} |B| \propto i \\ |B| \propto \frac{1}{r} \end{cases}$$

Tramite queste osservazioni possiamo formulare il nostro **teorema di Ampere**

1° Equazione di Maxwell nel Magnetismo Stazionario

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{concat.} \quad (3.6)$$

Ovvero il la circuitazione del campo magnetico lungo una *qualsiasi linea chiusa* è dato dalla **permeabilità magnetica** moltiplicata per le **correnti concatenate** a tale linea chiusa.

Sappiamo che la carica in moto è una corrente, possiamo quindi utilizzare Lorentz, ma avremo anche qualcosa che riguarda Laplace. In particolare la forza di Laplace che agisce su un elemento di filo immerso in un campo \vec{B} è data da $F = idl \times B$.

3.5 Azione Meccanica tra Correnti

Siamo in una situazione in cui abbiamo un filo percorso da i_1 con, a una certa distanza d , un altro filo percorso da i_2 . Ci chiediamo quale sia la forza agente sui due fili, utilizzeremo questo risultati per andare a definire l'unità di misura dell'**Ampere**.

Avremo che i_1 produrrà un campo B_1 che andrà ad agire in tutto lo spazio circostante, e la stessa cosa farà i_2 producendo B_2 . In sostanza avremo che sulla corrente i_2 agirà la forza seguente:

$$dF_{1 \rightarrow 2} = i_2 d\vec{l} \times \vec{B}_1(r = d)$$

Sappiamo che $B_1 = \mu_0 i / 2\pi r$, avremo dunque:

$$dF = i_2 \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d}$$

Tale forza sarà **attrattiva** e si registrerà in ugual misura con pedici invertiti. Da ciò ricaviamo che correnti **parallele** si **attraggono** e che correnti **antiparallele** si **respingono**.

3.6 Flusso del Campo Magnetico B

In questo paragrafo siamo interessati, dato un campo magnetico \vec{B} e una superficie sup a calcolare il flusso $\int_{sup} B(r) \cdot dS$, tale superficie sarà chiaramente **aperta**, in quanto le linee di campo sono chiuse.

Prima di andare a chiarire questo calcolo andiamo a introdurre due concetti che sono la **mutua induzione** e l'**autoinduzione**.

3.6.1 Mutua Induzione

Si considerino due circuiti Γ_1, Γ_2 , il circuito Γ_1 percorso da una i_1 , produrrà un campo magnetico B_1 che sarà percepito anche nel circuito Γ_2 . Andiamo ora a modellare il flusso del campo magnetico B_1 sul circuito Γ_2 , più precisamente sarà il **flusso di B_1 concatenato al circuito Γ_2** .

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \int_{\Sigma_2} B_1 \cdot dS = M_{12} i_1 \quad (3.7)$$

tale coefficiente M è detto **coefficiente di mutua induzione** che è uguale al coefficiente di mutua induzione di 2 su 1 e dipende soltanto da *fattori geometrici* relativi ai due circuiti presi in considerazione, dunque analogamente avremo che il flusso di 2 su 1 sarà:

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = M i_2$$

3.6.2 Autoinduzione

Sappiamo che la corrente che percorre un circuito produce un campo che va ad avvolgersi attorno al circuito stesso, potremo in pratica osservare per un circuito isolato un **autoflusso** sulla superficie del circuito preso in considerazione. Più precisamente andremo a parlare di un **autoflusso concatenato**

$$\Phi = \int_{\Sigma} B \cdot dS = L i \quad (3.8)$$

dove L è detto **coefficiente di autoinduzione**, o **induttanza** che si misura in Henry $[H]$.

3.7 1° Legge Elementare di Laplace

Dopo aver visto quali siano le sorgenti dei campi (le correnti) ed aver visto come il campo vada ad agire su correnti immerse in questo campo, esercitando **Forza di Lorentz e di Laplace**, vogliamo, analogamente a quanto visto in elettrostatica, vedere quale sia il **campo elementare** prodotto da una **corrente unitaria**.

In elettrostatica abbiamo infatti che un volumetto di cariche dq produce un campo elementare

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Quindi dato un elemento dl percorso da una corrente i , avremo che questo produce un campo magnetico elementare espresso da

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^2} \quad (3.9)$$

Utilizzando il fatto che $i = jSup$ e che $j = nq < v >$ e l'equazione di cui sopra, potremo ricavare il **campo magnetico di una singola carica in moto**

$$\vec{B}_q = \frac{\mu_0}{4\pi} q \vec{v} \times \frac{\hat{r}}{r^2} \quad (3.10)$$

Questo indica che nel momento in cui abbiamo una *singola carica in moto*, questa genera **campo magnetico**.

3.8 Energia del Campo Magnetico

Abbiamo visto che nel caso di campo elettrostatico, andando a considerare un volumetto $d\tau$ abbiamo una densità di energia $\mu_E = E^2\epsilon_0/2$. Vogliamo ora indagare la densità di energia relativa al campo magnetico.

Sia \vec{B} un campo magnetico *qualunque* in una regione di spazio, in tale regione avremo una **densità di energia** data da un'equazione molto simile a quella vista in elettrostatica; questo avviene per il fatto che ci sia una strettissima analogia tra magnetismo e elettrostatica.

$$\mu_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad (3.11)$$

Il valore di tale densità, sarà chiaramente dato da J/m^3 . Per calcolare l'energia immagazzinata in un sistema quindi, considereremo il campo magnetico, ne calcoleremo la densità e andremo ad integrare tale densità nel nostro sistema.

Chapter 4

Induzione Elettromagnetica

Andiamo in questo capitolo ad unire le due trattazioni principali viste fino a questo momento, in sostanza andremo ad aggiungere una **variazione del tempo** a tutta quanta la trattazione vista nel capitolo sul magnetismo. Il nome più importante in questo contesto è quello di **Faraday**.

Abbiamo visto che un'intensità di corrente va a generare un campo magnetico. Ci chiediamo a questo punto se possa essere che il campo magnetico non sia sorgente di intensità di corrente.

4.1 Fatti Sperimentali

Faraday condusse vari esperimenti, che gli permisero di arrivare alle sue note conclusioni:

1. immergendo una spira scarica all'interno di un campo, possiamo osservare la comparsa di un picco di corrente all'interno di tale spira. Parleremo in questo caso di una **corrente indotta** da un **campo magnetico stazionario**
2. tenendo ferma la spira e "muovendo" il campo magnetico avremo che il campo magnetico in considerazione non sarà più stazionario, bensì parleremo di un **campo magnetico variabile nel tempo** (ovviamente quello percepito dalla spira), osservando di nuovo una **corrente indotta**
3. considero due spire e faccio variare la corrente su una di esse nel tempo, ottenendo di nuovo un campo magnetico variabile e di nuovo, sulla spira scarica, potremo osservare una **corrente indotta**

Sebbene la prima e la seconda situazione sembrino ad un primo impatto molto simili, dal punto di vista fisico sono molto diverse: nel primo dei tre casi siamo di fronte ad un **conduttore in moto** nei confronti di un **campo magnetico stazionario**, nelle altre due situazioni, che possono essere considerate una situazione unica, la **spira è ferma** ma abbiamo un **campo magnetico variabile**.

È chiaro che per avere una corrente interna ad un circuito, avremo bisogno di una **forza elettromotrice indotta**.

Nel momento in cui abbiamo un conduttore in moto, questo sarà soggetto alla **forza di Lorentz**, ma se noi andiamo a calcolare questa forza elettromotrice $\mathcal{E} = \oint F/q \cdot dl$ abbiamo un qualcosa che non ci stupisce: delle cariche in moto che sono immerse in un campo magnetico e che quindi sono soggette alla forza di Lorentz, che sarà quella che andrà a "generare" la nostra forza elettromotrice.

Negli altri due casi però *non abbiamo* alcuna forza di Lorentz dato che la spira inizialmente è ferma, abbiamo soltanto un campo magnetico che varia nel tempo. Quello che in realtà ci interessa che vari non è tanto il campo magnetico nel tempo, bensì siamo interessati alla **variazione del flusso del campo magnetico**.

4.2 Legge del flusso di Faraday

Legge di Faraday

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi(B)}{dt} \quad (4.1)$$

dove la \mathcal{E} è una **forza elettromotrice indotta** che andremo a misurare in una regione di spazio dove abbiamo una variazione di flusso di B nel tempo. Questo forza elettromotrice viene osservata in tutta la regione, che nel momento in cui viene chiusa con un circuito, ci permette di vedere una corrente che scorre per il circuito.

Per far variare il flusso, che sappiamo essere dato da $d\Phi = B \cdot dS$, a questo punto abbiamo diverse strade:

- far variare nel tempo il **campo** B
- far variare la **superficie** dS entro cui passa un campo costante
- far variare l'**angolo** tra il campo B e la superficie dS

4.2.1 Legge di Lenz

Questa legge va a dare un significato al simbolo - davanti all'equazione della forza elettromotrice indotta. Questa ci dice che ad una variazione di flusso, corrisponde una forza elettromotrice indotta i cui effetti si **oppongono** alla causa che l'ha generata.

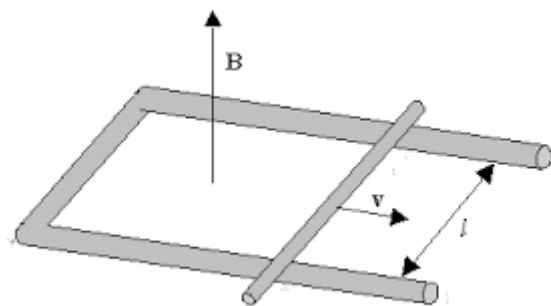


Figure 4.1: Circuito Mobile

Si consideri ad esempio il seguente circuito mobile, avremo che una variazione del flusso genererà una *fem* indotta, che a sua volta corrisponderà ad una corrente indotta. Come visto nella **prima legge di Laplace** sappiamo che ad una corrente corrisponde un **campo**, anche questo **indotto**, che si andrà ad opporre all'aumento di flusso. Per fare questo ovviamente il campo magnetico indotto sarà **antiparallelo** al campo B della figura, dunque la corrente indotta scorrerà in senso **antiorario**.

4.2.2 Causa della forza elettromotrice indotta

All'interno della barretta che scorre sul circuito mobile di Faraday, abbiamo delle **cariche libere** di muoversi. Ipotizziamo di andare a zoomare su una di queste cariche. Su di essa agisce un campo \vec{B} , ed è in **moto** a velocità \vec{v} . Per questo motivo ad ogni carica libera corrisponderà una **forza di Lorentz** $F = qv \times B$. Essendo libere di muoversi le cariche all'interno di questa barretta avremo una *separazione* tra cariche positive e negative (la forza viene sentita da entrambe in uguale direzione e verso, le cariche negative ribaltano il verso della forza). Ad una tale separazione di cariche, corrisponde un campo dalle cariche positive a quelle negative, e conseguentemente una **differenza di potenziale** che va dalle negative alle positive. Tale differenza di potenziale è esattamente la nostra **forza elettromotrice**, che ci sarà possibile calcolare anche con questo approccio.

Ricordando la formulazione della forza di Lorentz giungiamo al calcolo seguente:

$$\mathcal{E} = \left(\int F/q \cdot dl \right) = \oint v \times B = -vBl$$

Dove il meno si riferisce ad un contesto in cui l'asse y è rivolto in direzione *entrante* (vedi esercizio 6).

4.3 Autoinduzione - circuito RL

Siamo in questo momento nella situazione descritta dalla figura 4.1 e abbiamo trattato il bilancio energetico corrispondente ad un circuito minimo composto da un generatore e da una resistenza equivalente (vedi es. 6 sulle note), nel quale viene applicata una semplice legge di ohm.

$$\mathcal{E}_{indotta} = Ri$$

e, moltiplicando ambo i lati per un'intensità di corrente

$$P_{erogata} = \mathcal{E}_{indotta}i = P_{dissipata} = Ri^2$$

Andiamo ora ad ampliare quanto visto fino a questo momento. Ipotizziamo che ad un certo istante t_0 abbiamo $v(t_0) = 0, i(t_0) = 0$, e che ad un certo punto passiamo da $i = 0$ ad una certa i di **regime**. Avremo certamente un processo tramite il quale questa corrente varia per arrivare al valore di regime. Siamo interessati proprio a questo meccanismo.

Abbiamo visto come una corrente positiva va a generare un flusso positivo (**autoflusso**) e viceversa, formalizzando questo fatto richiamando il fatto che

$$\Phi(B) = Li$$

dove L rappresenta l'**induttanza** ($L > 0$). Immaginiamo di avere un circuito dotato di un interruttore, un generatore V_0 e una resistenza equivalente R . Nel momento in cui l'interruttore viene chiuso osserveremo un'intensità di corrente, che chiaramente non sarà immediatamente l'intensità di regime, durante il periodo in cui la corrente aumenta avremo anche una *variazione del flusso*, e dunque una forza **contro elettromotrice** data dalla variazione di quest'ultimo (Faraday).

In modo analogo immaginiamo di chiudere il nostro interruttore, avremo di nuovo una intensità di corrente variabile nel tempo, allo stesso modo un flusso variabile dato da Li e quindi una forza **contro elettromotrice**

$$\mathcal{E}_{\text{contro elettromotrice}} = -L \frac{di}{dt}$$

Arriviamo dunque ad una nuova **legge di Ohm** per il circuito di accensione espressa da

$$V_0 - L \frac{di}{dt} = Ri \quad (4.2)$$

In modo analogo, ma staccando il generatore dal circuito, avremo la legge dello spegnimento:

$$-L \frac{di}{dt} = Ri \quad (4.3)$$

Sarà quindi necessario aggiornare gli schemi dei nostri circuiti aggiungendo il simbolo dell'**induttanza** e una **corrente variabile nel tempo** a tutta la nostra trattazione. Si noti come a crescere e decrescere in maniera esponenziale nel caso dello *spegnimento* è la **corrente**, mentre nell'*accensione* a decrescere in modo esponenziale è la **corrente che manca per arrivare a regime**.

$$i(t) = i_{\text{regime}} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (4.4)$$

dove $\tau = L/R$

4.3.1 Leggi di Accensione e Spegnimento del Circuito RL

Accensione La corrente sarà data dall'intensità di regime (V_0/R) a cui si vuole arrivare moltiplicata per la parte esponenziale:

$$i(t) = \frac{V_0}{R} (1 - e^{-t/\tau})$$

Spegnimento La corrente sarà data dalla corrente di regime che però scende in modo esponenziale:

$$i(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/\tau}$$

Si noti come siamo in presenza di **circuiti non lineari**.

4.3.2 Bilancio Energetico

Andiamo ora a vedere di ritoccare il bilancio energetico guardando cosa succede in un circuito RL che viene modificato dalla presenza dell'**induttanza**. Vogliamo andare a vedere quale è il lavoro esterno necessario all'accensione della corrente. In particolare avremo che per andare $i = 0$ a una certa i_{regime} facciamo lavoro **contro l'autoinduzione**, e questo lavoro si trova immagazzinato come **energia della corrente** (del sistema). Sarà necessario che dall'esterno sia fornita una **potenza esterna** $-\mathcal{E}_L i$.

$$L = \int \left(Li \frac{di}{dt} \right) dt = \frac{1}{2} Li^2 \quad (4.5)$$

Questa equazione fornisce l'**energia intrinseca della corrente** che è una quantità reversibile (accensione e spegnimento).

4.4 Energia di un Sistema di Correnti

Immaginiamo di avere un sistema inizialmente composto soltanto da un circuito composto da i_1 , per costruire tale primo circuito compiamo un lavoro pari ad $\frac{1}{2} Li_1^2$, dobbiamo in pratica fare lavoro soltanto contro l'autoinduzione.

Ipotizziamo ora di mettere un altro circuito percorso da corrente i_2 .

Abbiamo visto che esiste un **coefficiente di mutua induzione**, grazie alla quale sappiamo che $\Phi_{1 \rightarrow 2} = M i_1$ e che, analogamente $\Phi_{2 \rightarrow 1} = M i_2$. Nel momento in cui facciamo variare la i_1 nel tempo, varierà anche il flusso, e dunque per Faraday osserveremo $\mathcal{E}_{indotta}$.

Tornando dunque alla nostra situazione iniziale, nel momento in cui facciamo variare i_2 avremo, oltre al lavoro contro l'autoinduzione, un **flusso mutuo** su i due circuiti, dunque nel momento in cui il nostro sistema è composto dai due circuiti, il lavoro esterno sarà dato da $1/2 Li_1^2 + 1/2 Li_2^2 + M i_1 i_2$. Questo perché nel momento in cui accendiamo $i_2(t)$ avremo $\mathcal{E}_{2 \rightarrow 1} = -M \frac{di_2}{dt}$ dunque il lavoro esterno espresso in *potenza* sarà dato da $-\mathcal{E}_{21} i_1$ e integrando tale potenza nel tempo, otterremo il lavoro:

$$L_{est} = \int M i_1 \frac{di_2}{dt} dt = M i_1 i_2$$

Andando a generalizzare ad n circuiti otteniamo la seguente formula per l'energia:

$$\mathcal{U} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} L i_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k, l, k \neq l}^n M i_k i_l \quad (4.6)$$

L'importante quindi sarà sempre ricordare che nel momento in cui andiamo a costruire un sistema di n circuiti il lavoro esterno per costruire tale sistema è necessario considerare l'**energia intrinseca** della corrente oltre a quella di **interazione** tra i due circuiti.

4.5 Equazioni di Maxwell

Vediamo intanto le equazioni nel caso **stazionario**:

$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$	Campo Elettrostatico conservativo
$\oint_{sup} \vec{E} \cdot \hat{n} dS$	Teorema di Gauss
$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$	Teorema di Ampere
$\oint_{sup} \vec{B} \cdot \hat{n} dS = 0$	Flusso di B nullo

Passiamo ora al caso **non stazionario**, ovvero introducendo il **tempo** alla trattazione

$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi(B)}{dt}$	Teorema di Faraday
$\oint_{sup} \vec{E} \cdot \hat{n} dS$	Teorema di Gauss
$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi(E)}{dt}$	Introdotta Corrente di Spostamento
$\oint_{sup} \vec{B} \cdot \hat{n} dS = 0$	Flusso di B nullo

Notiamo che nel caso stazionario campo elettrico e campo magnetico sono **disaccoppiati** mentre nel caso non stazionario abbiamo che la **variazione di flusso dell'uno genera l'altro**.

