Métodos de Aproximación

William Baquero, Federico Torres

Agostó 2019

Índice

Índice de cuadros

Índice de figuras

1. Introducción

Basándonos en la función w(x) hallaremos las raíces correspondientes a la ecuación las cuales van a ser calculadas mediante diferentes métodos como Punto Fijo, Bisección, Newton-Raphson, Método de la Secante y Posición Falsa.

$$f(x) = e^x \tag{1}$$

$$g(x) = \pi x \tag{2}$$

$$f(x) - g(x) = w(x) = e^x - \pi x \tag{3}$$

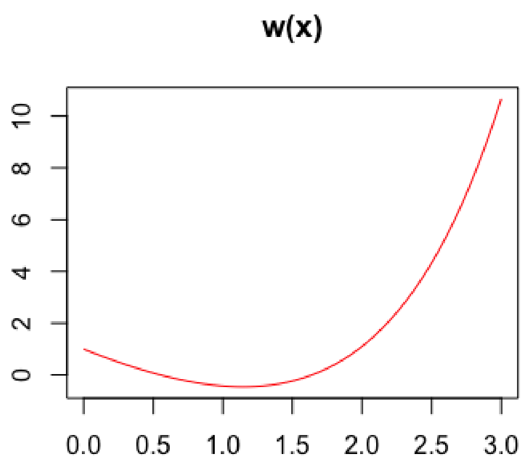

Figura 1: Gráficas w(x)

2. Implementación Métodos

2.1. Punto Fijo

fundamento matemático para construir métodos eficientes para el cálculo de raíces reales de ecuaciones no lineales. Este método consiste en re-escribir la ecuación f(x) = 0 en la forma x = g(x). Esta nueva ecuación debe ser equivalente a la ecuación original en el sentido que debe satisfacerse con la misma raíz, es decir la existencia de un punto fijo r de la ecuación x = g(x) es equivalente a encontrar una raíz real r de la ecuación f(x) = 0

2.1.1. Entradas

- Función: w(x)= $e^x - \pi x$

- Función: g(x)= $\frac{e^x}{\pi}$
- Tolerancia: $1 * 10^{-8}$
- Intervalo: [0,2]

2.1.2. Resultados

Valor Inicial	Iteraciones	Tolerancia	convergencia
0	28	9.743394758e-09	0.5538270246
1	28	9.743394758e-09	1.638528422

Cuadro 1: Tabla de resultados de la convergencia de las raíces mediante el método de punto fijo

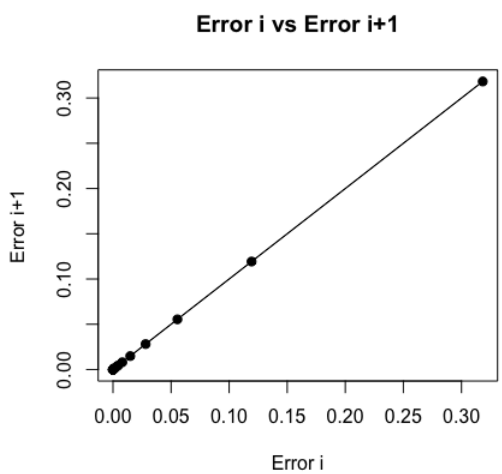

Figura 2: gráfica datos de errores en un intervalo de [0,2]

```
x_ 0 =  0.3183098862 error i =  0 error i+1 =  0.3183098862
 x_ 1 =  0.4376131405 error i =  0.3183098862 error i+1 =  0.1193032544
 x_ 2 =  0.4930637784 error i =  0.1193032544 error i+1 =  0.05545063788
 x_ 3 =  0.5211767166 error i =  0.05545063788 error i+1 =  0.02811293817
 x_ 4 =  0.5360364217 error i =  0.02811293817 error i+1 =  0.01485970512
 x_ 5 =  0.5440612404 error i =  0.01485970512 error i+1 =  0.008024818719
 x_ 6 =  0.5484447984 error i =  0.008024818719 error i+1 =  0.004383557931
 x_ 7 =  0.550854215 error i =  0.004383557931 error i+1 =  0.002409416596
 x_ 8 =  0.5521830525 error i =  0.002409416596 error i+1 =  0.001328837506
 x_ 9 =  0.5529173018 error i =  0.001328837506 error i+1 =  0.0007342492914
 x_ 10 =  0.55332343 error i =  0.0007342492914 error i+1 =  0.0004061282185
 x_ 11 =  0.5535481959 error i =  0.0004061282185 error i+1 =  0.0002247658977
 x_ 12 =  0.5536726286 error i =  0.0002247658977 error i+1 =  0.0001244327407
 x_ 13 =  0.5537415279 error i =  0.0001244327407 error i+1 =  6.889928922e-05
 x_ 14 =  0.5537796816 error i =  6.889928922e-05 error i+1 =  3.815371205e-05
 x_ 15 =  0.5538008108 error i =  3.815371205e-05 error i+1 =  2.112915359e-05
 x_ 16 =  0.5538125122 error i =  2.112915359e-05 error i+1 =  1.170146601e-05
 x_ 17 =  0.5538189927 error i =  1.170146601e-05 error i+1 =  6.480456202e-06
 x_ 18 =  0.5538225817 error i =  6.480456202e-06 error i+1 =  3.589011355e-06
 x_ 19 =  0.5538245694 error i =  3.589011355e-06 error i+1 =  1.987679102e-06
 x_ 20 =  0.5538256702 error i =  1.987679102e-06 error i+1 =  1.100826617e-06
 x_ 21 =  0.5538262799 error i =  1.100826617e-06 error i+1 =  6.096663743e-07
 x_ 22 =  0.5538266175 error i =  6.096663743e-07 error i+1 =  3.376493629e-07
 x_ 23 =  0.5538268045 error i =  3.376493629e-07 error i+1 =  1.869992361e-07
 x_ 24 =  0.5538269081 error i =  1.869992361e-07 error i+1 =  1.035651991e-07
 x_ 25 =  0.5538269654 error i =  1.035651991e-07 error i+1 =  5.735719699e-08
 x_ 26 =  0.5538269972 error i =  5.735719699e-08 error i+1 =  3.17659633e-08
 x_ 27 =  0.5538270148 error i =  3.17659633e-08 error i+1 =  1.759284829e-08
 x_ 28 =  0.5538270246 error i =  1.759284829e-08 error i+1 =  9.743394758e-09
```

Figura 3: Datos obtenidos en un intervalo de [0,2]

2.2. Bisección

Se basa en el Teorema de los Valores Intermedios, el cual establece que toda función continua f en un intervalo cerrado [a,b] ($f \in C[a,b]$) toma todos los valores que se hallan entre f (a) y f (b). Esto es, que todo valor entre f(a) y f(b) es la imagen de al menos un valor en el intervalo [a,b]. En caso de que f (a) y f (b) tengan signos opuestos (es decir, $f(a) \cdot f(b) < 0$), el valor cero sería un valor intermedio entre f (a) y f (b), por lo que con certeza existe un $x*$ en [a,b] que cumple $f(x*) = 0$. De esta forma, se asegura la existencia de al menos una solución de la ecuación $f(x) = 0$.

2.2.1. Entradas

- Función: w(x)= $e^x - \pi x$
- Tolerancia: $1 * 10^{-8}$
- Intervalo: [0,2]

2.2.2. Resultados

Intervalo	Iteraciones	Tolerancia	Convergencia
[0,1]	26	7.450580597e-09	0.5538270324
[1,2]	26	7.450580597e-09	1.638528422

Cuadro 2: Tabla de resultados de la convergencia de las raíces mediante el método de Bisección.

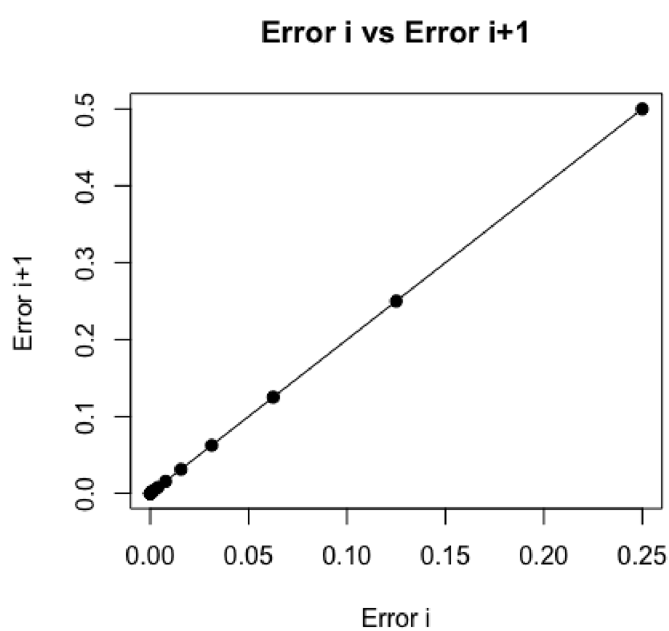

Figura 4: gráfica datos de errores en un intervalo de [0,2]

a	b	m	Error est.
0.5000000	1.0000000	0.5000000	0.2500000
0.5000000	0.7500000	0.7500000	0.1250000
0.5000000	0.6250000	0.6250000	0.0625000
0.5000000	0.5625000	0.5625000	0.0312500
0.5312500	0.5625000	0.5312500	0.0156250
0.5468750	0.5625000	0.5468750	0.0078125
0.5468750	0.5546875	0.5546875	0.0039062
0.5507812	0.5546875	0.5507812	0.0019531
0.5527344	0.5546875	0.5527344	0.0009766
0.5537109	0.5546875	0.5537109	0.0004883
0.5537109	0.5541992	0.5541992	0.0002441
0.5537109	0.5539551	0.5539551	0.0001221
0.5537109	0.5538330	0.5538330	0.0000610
0.5537720	0.5538330	0.5537720	0.0000305
0.5538025	0.5538330	0.5538025	0.0000153
0.5538177	0.5538330	0.5538177	0.0000076
0.5538254	0.5538330	0.5538254	0.0000038
0.5538254	0.5538292	0.5538292	0.0000019
0.5538254	0.5538273	0.5538273	0.0000010
0.5538263	0.5538273	0.5538263	0.0000005
0.5538268	0.5538273	0.5538268	0.0000002
0.5538268	0.5538270	0.5538270	0.0000001
0.5538269	0.5538270	0.5538269	0.0000001
0.5538270	0.5538270	0.5538270	0.0000000
0.5538270	0.5538270	0.5538270	0.0000000
0.5538270	0.5538270	0.5538270	0.0000000

Figura 5: Datos obtenidos en un intervalo de [0,1]

a	b	m	Error est.
1.5000000	2.0000000	1.5000000	0.2500000
1.5000000	1.7500000	1.7500000	0.1250000
1.6250000	1.7500000	1.6250000	0.0625000
1.6250000	1.6875000	1.6875000	0.0312500
1.6250000	1.6562500	1.6562500	0.0156250
1.6250000	1.6406250	1.6406250	0.0078125
1.6328125	1.6406250	1.6328125	0.0039062
1.6367188	1.6406250	1.6367188	0.0019531
1.6367188	1.6386719	1.6386719	0.0009766
1.6376953	1.6386719	1.6376953	0.0004883
1.6381836	1.6386719	1.6381836	0.0002441
1.6384277	1.6386719	1.6384277	0.0001221
1.6384277	1.6385498	1.6385498	0.0000610
1.6384888	1.6385498	1.6384888	0.0000305
1.6385193	1.6385498	1.6385193	0.0000153
1.6385193	1.6385345	1.6385345	0.0000076
1.6385269	1.6385345	1.6385269	0.0000038
1.6385269	1.6385307	1.6385307	0.0000019
1.6385269	1.6385288	1.6385288	0.0000010
1.6385279	1.6385288	1.6385279	0.0000005
1.6385283	1.6385288	1.6385283	0.0000002
1.6385283	1.6385286	1.6385286	0.0000001
1.6385283	1.6385285	1.6385285	0.0000001
1.6385284	1.6385285	1.6385284	0.0000000
1.6385284	1.6385284	1.6385284	0.0000000
1.6385284	1.6385284	1.6385284	0.0000000

Figura 6: Datos obtenidos en un intervalo de [1,2]

2.3. Newton Raphson

El método de Newton (llamado a veces método de Newton Raphson) es uno de los métodos que muestra mejor velocidad de convergencia llegando (bajo ciertas condiciones) a duplicar, en cada iteración, los decimales exactos. Si f es una función tal que f, f' y f'' existen y son continuas en un intervalo I y si un cero x∗ de f está en I, se puede construir una sucesión x n de aproximaciones, que converge a x∗ (bajo ciertas condiciones) de la manera que se describe a continuación: Si x0 está suficientemente cercano al cero x∗, entonces supongamos que h es la corrección que necesita x0 para alcanzar a x∗, es decir, x0+h=x∗ y f(x0+h)=0

2.3.1. Entradas

- Función: w(x)= $e^x - \pi x$
- Función: w'(x)= $e^x - \pi$
- Tolerancia: $1 * 10^{-8}$
- Valores iniciales: [0,2]

2.3.2. Resultados

Valor Inicial	Iteraciones	Tolerancia	Convergencia
0	5	-6.07828648691064e-11	0.553827036644513
2	5	2.99385800835569e-08	1.63852841997036

Cuadro 3: Tabla de resultados de la convergencia de las raíces mediante el método de Newton Raphson.

```
-------------------------------------------------------
x_k                  f(x_k)               Error est.
-------------------------------------------------------
 0.466942206924260  0.128167007561179  0.466942206924260
 0.549818624686229  0.005632524944027  0.082876417761969
 0.553817140317387  0.000013871704625  0.003998515631158
 0.553827036583731  0.000000000085199  0.000009896266344
 0.553827036644513  0.000000000000000  0.000000000060783
-------------------------------------------------------
```

Figura 7: Datos obtenidos con un valor inicial de 0

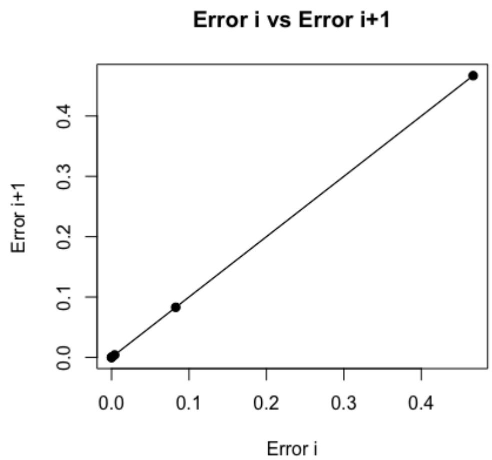

Figura 8: gráfica datos de errores con un valor inicial de 0

x_k	f(x_k)	Error est.
1.739639715330777	0.230051777332846	0.260360284669223
1.649553990748803	0.022431284790263	0.090085724581974
1.638681196532592	0.000306529279421	0.010872794216211
1.638528449908944	0.000000060056682	0.000152746623648
1.638528419970364	0.000000000000002	0.000000029938580

Figura 9: Datos obtenidos con un valor inicial de 2

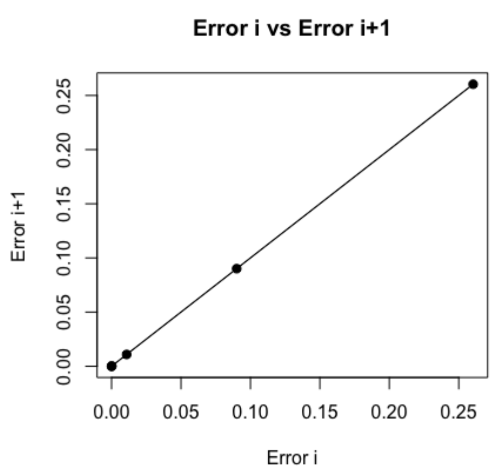

Figura 10: gráfica datos de errores con un valor inicial de 0

2.4. Método de la Secante

Aunque el método de la secante es anterior2 al método de Newton, a veces se hace una derivación de este método basado en la iteración de Newton cambiando la derivada f'(x k) por una aproximación, lo cual puede ser muy bueno pues para algunas funciones, como las definidas por integrales o una serie, en los casos en los que la derivada no es fácil de obtener. Aquí vamos a proceder igual que antes, con una idea geométrica. El método de la secante tiene orden de convergencia de al menos p = 1.61803 pero en un sentido que haremos más preciso al final de esta sección, este método es más rápido que el método de Newton. Iniciando con dos aproximaciones iniciales x0 y x1, en el paso k + 1, xk+1 se calcula, usando xk y xk−1, como la intersección con el eje X de la recta (secante) que pasa por los puntos (xk−1, f (xk−1)) y (xk , f (xk))

2.4.1. Entradas

- Función: w(x)= $e^x - \pi x$
- Tolerancia: $1 * 10^{-8}$
- Intervalo: [0,2]

2.4.2. Resultados

Intervalo	Iteraciones	Tolerancia	Convergencia
[0,1]	7	7.02431890431399e-10	0.553827037
[1,2]	9	4.65014693418198e-10	1.638528420

Cuadro 4: Tabla de resultados de la convergencia de las raíces mediante el método de la secante.

```
-------------------------------
# Convergencia    Error est.
-------------------------------
1  0.702587223     0.297412777
2  0.464348981     0.238238242
3  0.562618238     0.098269257
4  0.554280374     0.008337864
5  0.553824541     0.000455833
6  0.553827037     0.000002496
7  0.553827037     0.000000001
error:  7.02431890431399e-10
```

Figura 11: Datos obtenidos en un intervalo de [0,1]

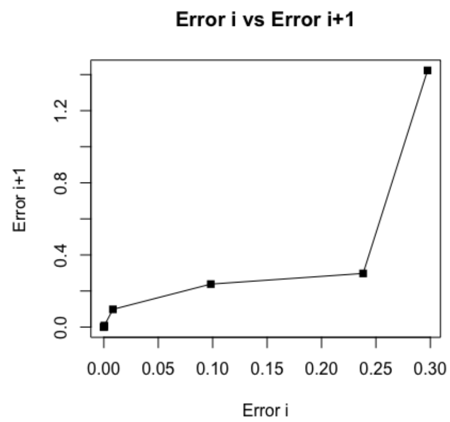

Figura 12: gráfica datos de errores en un intervalo de [0,1]

```
-------------------------------
# Convergencia    Error est.
-------------------------------
1  1.276821811     0.723178189
2  1.477940587     0.201118776
3  1.790355934     0.312415347
4  1.607247876     0.183108058
5  1.633070815     0.025822939
6  1.638755382     0.005684568
7  1.638526823     0.000228559
8  1.638528420     0.000001597
9  1.638528420     0.000000000
error:  4.65014693418198e-10
```

Figura 13: Datos obtenidos en un intervalo de [1,2]

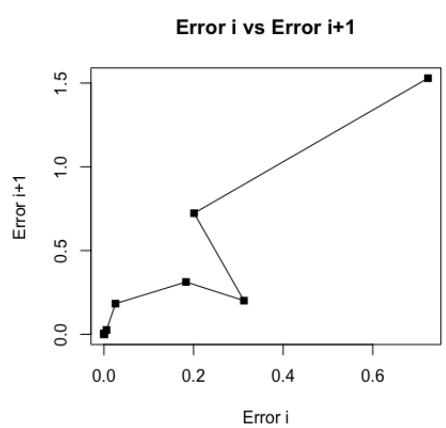

Figura 14: gráfica datos de errores en un intervalo de [1,2]

2.5. Posición Falsa

La idea de este método es calcular la recta secante que une los puntos extremos (a1, f (a1)) y (b1, f (b1)). Luego se determina el punto m en que esta recta corta el eje x y este valor entra a jugar el papel que en el método de bisección jugaba el punto medio.

2.5.1. Entradas

- Función: w(x)= $e^x - \pi x$
- Tolerancia: $1 * 10^{-8}$
- Intervalo: [0,2]

2.5.2. Resultados

Intervalo	Iteraciones	Tolerancia	Convergencia
[0,1]	13	2.72757685405631e-09	0.553827039372091
[1,2]	18	7.39949501091201e-09	1.63852841257087

Cuadro 5: Tabla de resultados de la convergencia de las raíces mediante el método de posición falsa.

```
X= 0.70258722293364       E= 0.167708437092978
X= 0.59126732621515       E= 0.0383766545319525
X= 0.56244485009856       E= 0.00866467559494639
X= 0.555767448382797      E= 0.00194275725681139
X= 0.554261749082225      E= 0.000434829820754687
X= 0.553924315414411      E= 9.72846442180168e-05
X= 0.553848799899232      E= 2.17635486910542e-05
X= 0.553831905254154      E= 4.86862435208939e-06
X= 0.553828125776584      E= 1.08913280641655e-06
X= 0.553827280288055      E= 2.43643578386279e-07
X= 0.55382709114859       E= 5.4504078237406e-08
X= 0.553827048837301      E= 1.21927874869434e-08
X= 0.553827039372091      E= 2.72757685405631e-09
```

Figura 15: Datos obtenidos en un intervalo de [0,1]

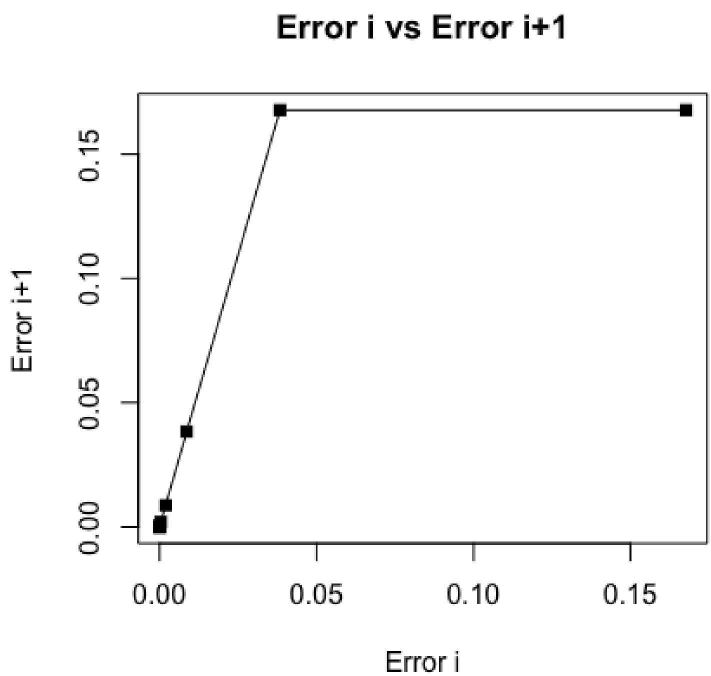

Figura 16: gráfica datos de errores en un intervalo de [0,1]

```
X= 1.27682181139081      E= 0.960310863646013
X= 1.47794058724269      E= 0.208625908911694
X= 1.57706291781133      E= 0.0669591534929373
X= 1.61651576318062      E= 0.022661573853673
X= 1.63084288787761      E= 0.00776244236430144
X= 1.63586936984279      E= 0.00266816806412726
X= 1.63761135290607      E= 0.00091814800827757
X= 1.63821248405964      E= 0.000316064055951438
X= 1.63841961906694      E= 0.000108816094846196
X= 1.63849095638146      E= 3.74653898186912e-05
X= 1.63851552065221      E= 1.28995316501368e-05
X= 1.63852397859566      E= 4.44140001276765e-06
X= 1.63852689076518      E= 1.52920818764434e-06
X= 1.63852789345225      E= 5.26518466504167e-07
X= 1.6385282386859       E= 1.81284508375531e-07
X= 1.63852835755266      E= 6.24177068071363e-08
X= 1.63852839847945      E= 2.14909166285933e-08
X= 1.63852841257087      E= 7.39949501091201e-09
```

Figura 17: Datos obtenidos en un intervalo de [1,2]

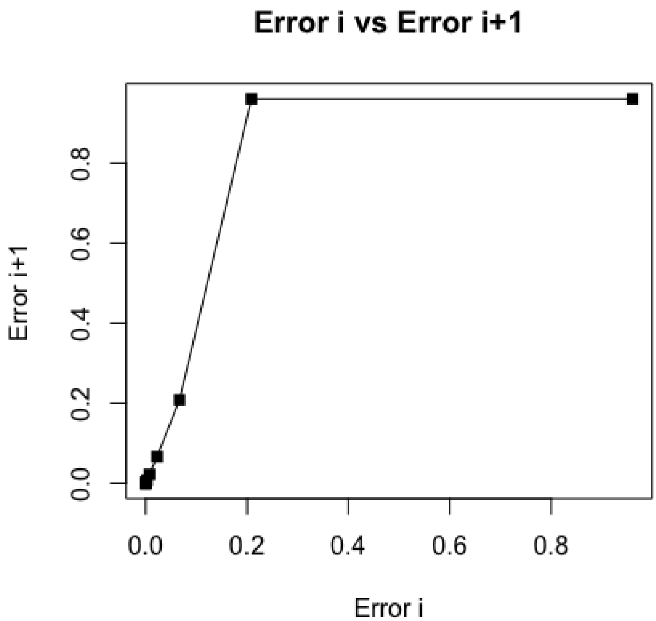

Figura 18: gráfica datos de errores en un intervalo de [1,2]

3. Conclusiones

Método	Iteraciones	Tolerancia	Convergencia
Punto Fijo	28	9.743394758e-09	0.5538270246
Bisección	26	7.450580597e-09	0.5538270324
Newton raphson	5	-6.07828648691064e-11	0.5538270366
Secante	7	7.02431890431399e-10	0.553827037
Posición Falsa	13	2.72757685405631e-09	0.5538270394

Cuadro 6: comparación de resultados obtenidos para la primera raíz.

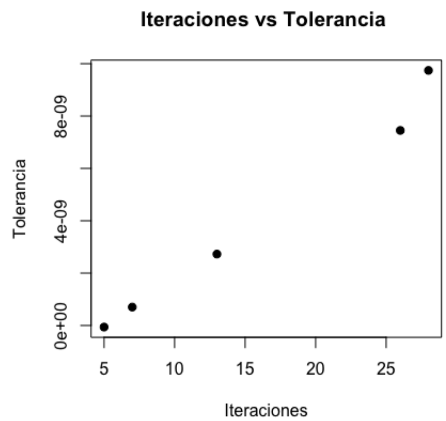

Figura 19: Gráfica comparativa de datos obtenidos para la primera raíz de los diferentes métodos

Método	Iteraciones	Tolerancia	Convergencia
Punto Fijo	28	9.743394758e-09	1.638528422
Bisección	26	7.450580597e-09	1.638528422
Newton raphson	5	2.99385800835569e-08	1.638528420
Secante	9	4.65014693418198e-10	1.638528420
Posición Falsa	18	7.39949501091201e-09	1.638528413

Cuadro 7: comparación de resultados obtenidos para la segunda raíz.

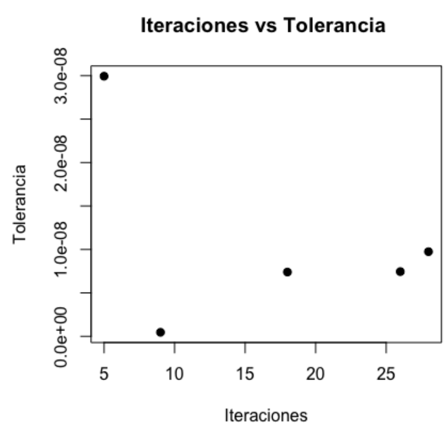

Figura 20: Gráfica comparativa de datos obtenidos para la segunda raíz de los diferentes métodos

- Basándose en las tablas comparativas y de los gráficos comparativos su puede concluir que el método menos volátil según iteraciones vs Tolerancia es el método de la secante porque necesita de menos iteraciones para converger a un valor teniendo una tolerancia baja rrespecto a otros.

4. Referencias

[1]Mora Flores, Walter, Introducción a los métodos numéricos. Implementaciones en R, 1ra ed.Escuela de Matemática, 2015.