

Reto Mortero Valenciano con Curvas de Bezier

William Baquero y Federico Torres

Octubre 2019

1. Marco Teorico

1.1. Curvas y Superficies de Bezier

Las curvas de Bezier, un instrumento matematico para la modelizacion de curvas y superficies, nacieron como una aplicacion concreta en el seno de la industria automovilistica. Las curvas Bezier pueden ser utiles para interpolar movimiento cuando el objeto exhibe formas de movimiento curvilíneo (Long 2015).

Una curva de Bezier de grado n se especifica por una secuencia de $n + 1$ puntos P_0, \dots, P_n y R_1, R_2, R_3 que se conocen como puntos de control (dados por el escaneo). El polígono que se obtiene al unir los puntos de control con segmentos de línea se denomina polígono de control.

1.2. Mortero Valenciano

Utensilio de cerámica utilizado para machacar diferentes alimentos, además este mortero se caracteriza por tener 4 puntas alrededor de la circunferencia central del mortero.

1.3. Autocad

Software de diseño asistido por computadora utilizado para dibujo 2D y modelado 3D.

1.4. RStudio

Para modelar el mortero valenciano se usó el IDE RStudio que está basado en el software libre R que resulta útil para este tipo de proyectos porque permite computar datos numéricos y utilizar herramientas matemáticas y gráficos 3D para representarlos adecuadamente en el espacio.

2. Modelo de Referencia(Autocad)

Las siguientes imagenes mostraran nuestra ilustracion de referencia de un mortero valenciano creado con la herramienta de software AutoCad con la cual nos guiamos para obtener una puntos de control con una precision de 4 cifras significativas y asi poder graficar con menos margen de error las curvas de bezier.

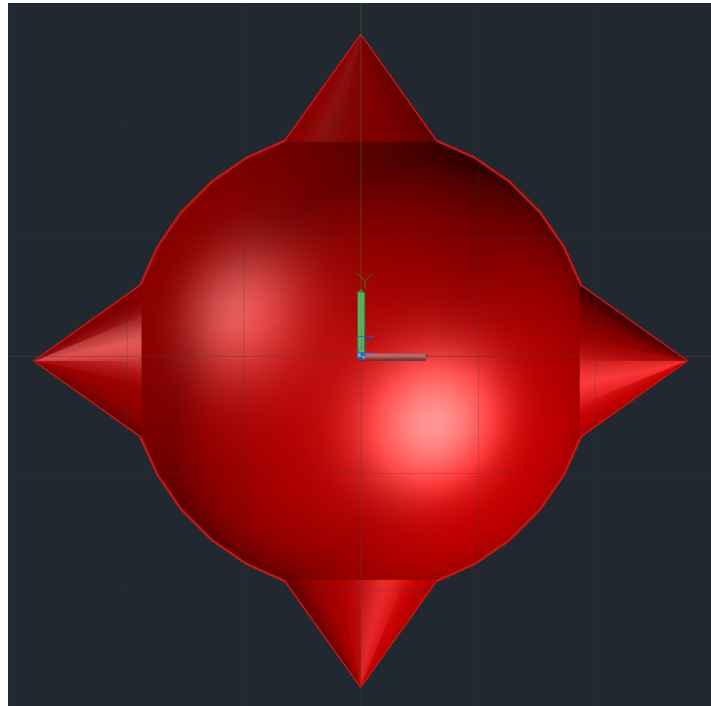


Figura 1: Vista desde arriba del modelo del mortero valenciano

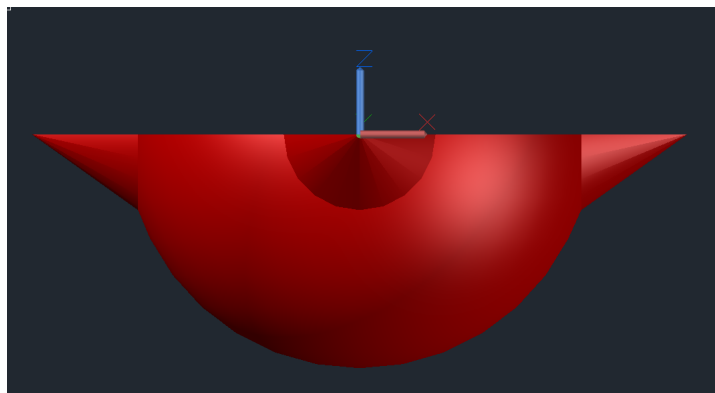


Figura 2: Vista lateral del modelo del mortero valenciano

3. Modelo con planos en el espacio y curvas de Bezier

Las librerías principales utilizadas en RStudio fueron `bezier` para trazar las curvas mas complicadas y `alphashape3D` junto con `rgl` y `geometry` para graficar las figuras en el espacio. La librería `rgl` hace uso de la API proporcionada por OpenGL que es una aplicación de terceros utilizada para generar graficos interactivos en 2D y 3D. Como se mencionó previamente los datos de entrada se basaron en el modelo 3D realizado en Autocad y teneindo en cuenta las principales vistas en perspectiva que ofrece la herramienta de diseño.

Para graficar la base y la estructura principal del mortero valenciano en RStudio se usó la función `persp3D()` para graficar en tres dimensiones un plano con una curvatura determinada por la función:

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (1)$$

Esta función es posteriormente acotada entre $x = [-1, 1]$, $y = [-1, 1]$ y $z = [-1.5, -0.5]$ para garantizar que la estructura fundamental del mortero valenciano adquiriera una forma hueca que no sea del todo esférica ni del todo cilíndrica. Está figura tiene un radio máximo de $r = 0.75$ en su parte superior y una altura $h=1$.

Posteriormente se hizo uso de la librería `bezier` para graficar las puntas del mortero valenciano de acuerdo al modelo. Lo primero fue establecer los valores paramétricos de 0 a 1 como punto de referencia para trazar las curvas de bezier y posteriormente se establecieron los puntos del espacio por donde habrían de pasar las curvas del mortero. Los datos se organizaron en matrices 5x3 donde cada fila indica las 3 coordenadas en el espacio de los 5 puntos necesarios para trazar cada una de las tres curvas de bezier que definirían la forma general de las puntas del mortero valenciano. Posteriormente, se procedió a proyectar las dos curvas superiores a lo largo del eje z utilizando un ciclo `for` que garantizara que las curvas trazadas siguieran la forma previamente definida de las puntas del mortero en el modelo definido en autocad.

Finalmente, se define el color para la superficie y las curvas de bezier teniendo en cuenta que cada vez que se grafica una nueva curva se debe añadir el parametro `add = TRUE` en cada función para garantizar que las nuevas curvas sean añadidas en el mismo espacio generado inicialmente con la función `open3D()` de la librería `rgl`. El resultado obtenido se puede observar en las siguientes figuras:

4. Área y volumen del mortero valenciano

Para calcular el área del mortero valenciano se dividió la figura en dos polígonos principales cuya área y volumen resultara fácil de calcular: una semiesfera y cuatro pirámides. El área del sólido se calculó hallando el área de medio cascarón

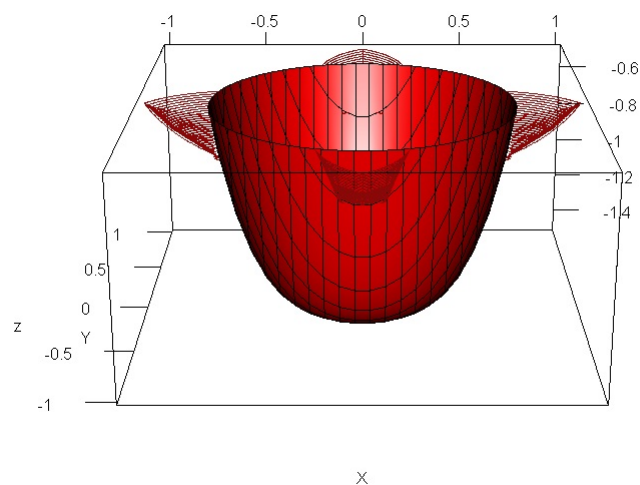


Figura 3: Vista frontal del modelo del mortero valenciano.

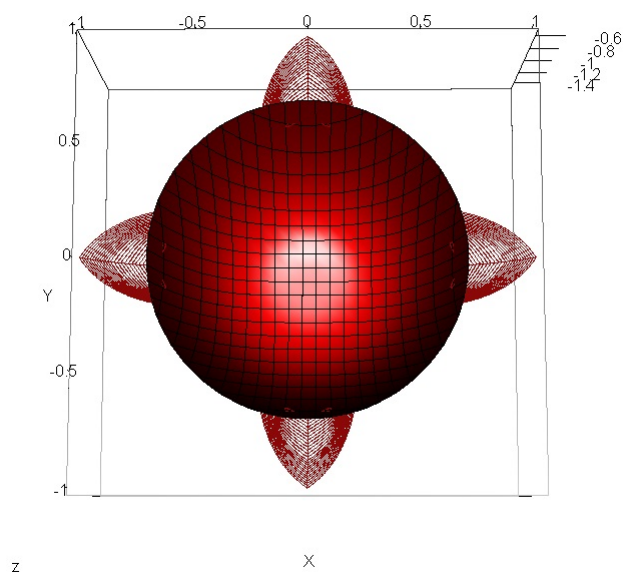


Figura 4: Vista desde arriba del modelo del mortero valenciano.

esférico de una esfera de radio $r=1$ y el área de las pirámides calculando el área de una de sus caras y multiplicando el resultado por 4. Una vez sumados estos valores se obtiene el siguiente resultado para el área del mortero en unidades

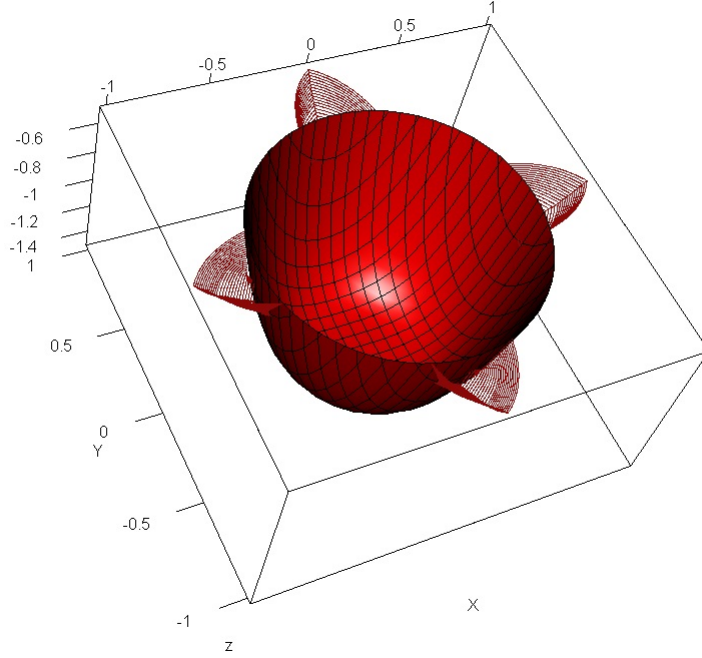


Figura 5: Vista en perspectiva del mortero valenciano.

cuadradas:

$$\acute{A}rea = 6,8231 \quad (2)$$

Para calcular el volumen del mortero valeciano, se calculó el volumen de media esfera de radio $r=1$ y se le restó el volumen de una esfera de $r=0.99$ de tal forma que quedara el volumen de un cascarón esférico de grosor $g=0.01$. Posteriormente, se le sumó el volumen de las cuatro pirámides huecas calculando el volumen de una pirámide de lado $l=0.30$ y luego restndole otra pirámide de radio $r=0.29$. El resultado obtenido para el volumen total del mortero valenciano en unidades cúbicas es:

$$Volumen = 6,41 \times 10^{-2} \quad (3)$$

El error relativo y el error abosluto se obtienen al comparar los datos experimentales obtenidos mediante RStudio con los datos arrojados por Autocad que vendrían a ser los datos reales. Los resultados de los errores se muestran a continuación:

$$ERRORRELATIVO : |6,32 \times 10^{-2} - 6,41 \times 10^{-2}| = 0,0009 \text{ unidades} \quad (4)$$

$$ERRORABSOLUTO : (0,0009/6,32 \times 10^{-2}) \times 100 = 1,424 \quad (5)$$

Referencias

- [1] The R Foundation. The r project for statistical computing.
[1]