# Números y aritmética

Arquitectura de Computadores – IIC2343

2021-1 Yadran Eterovic

Cuando se trata de números, las personas pensamos en base 10 —números decimales:

- diez símbolos diferentes —0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9— llamados dígitos decimales, o simplemente, dígitos

… y los representamos muy convenientemente en lo que llamamos la *notación posicional*:

- el verdadero valor de un dígito en un número de varios dígitos depende no sólo del dígito mismo

  … sino también de su posición dentro del número

P.ej., cuando escribimos 421, en realidad estamos hablando del número (o valor numérico) que es el resultado de la siguiente operación:

$$4 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 1 \times 10^0$$

Pero los números pueden ser representados en cualquier base, usando la misma notación posicional

… en particular, en **base 2** (*números binarios*):

- sólo dos símbolos diferentes —0, 1— llamados dígitos binarios o *bits*

P.ej., el número 421 en base 2 se representa así:

$$1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1$$

… ya que (ver diap. #5):

$$1 \times 2^8 + 1 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 421$$

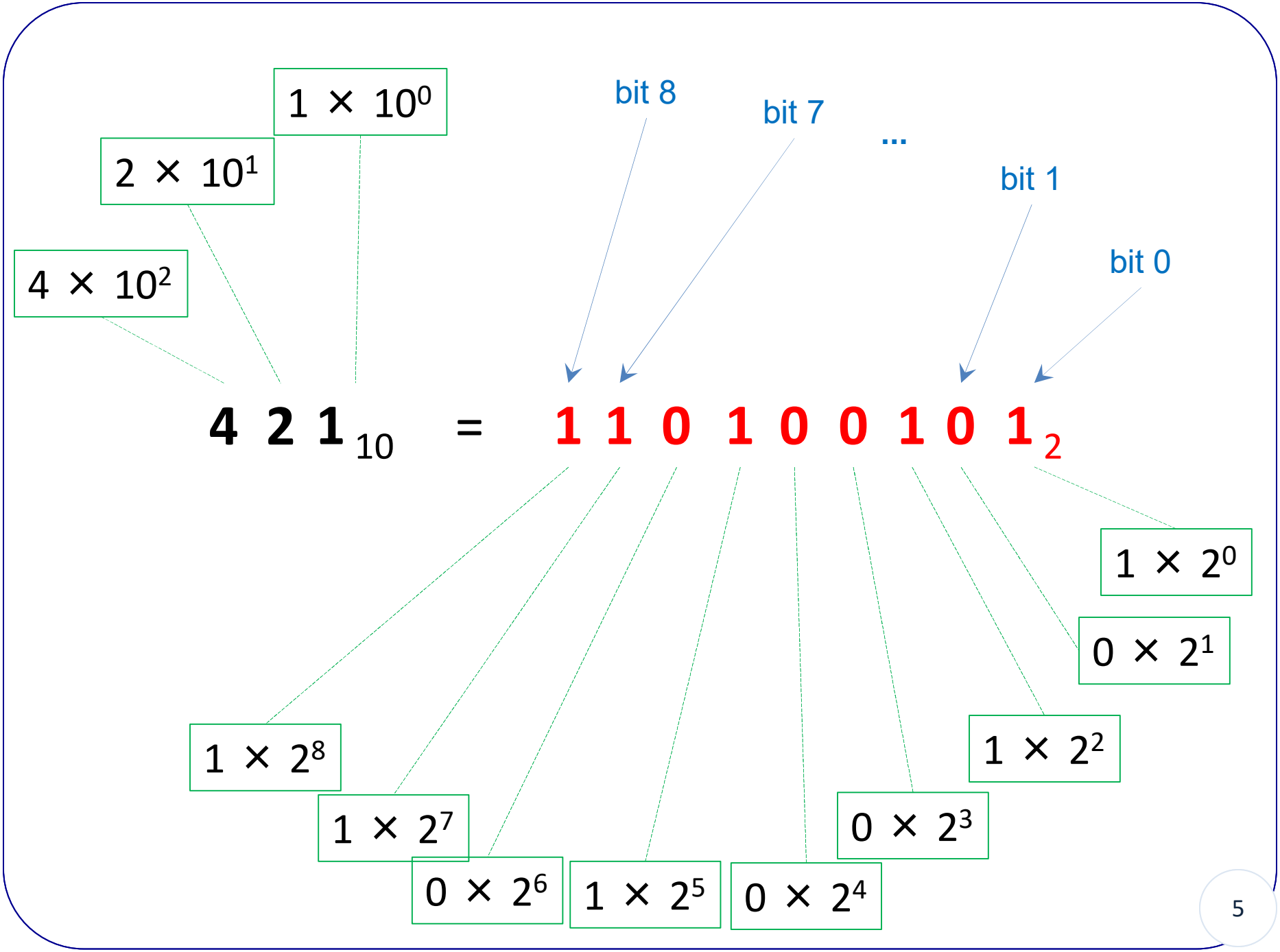
Los bits son los “átomos” de la computación:

- toda información en formato “computacional” se compone de bits

Para poder referirnos a ellos de una manera precisa, numeramos los bits de un número binario —el bit 0, el bit 1, el bit 2, el bit 3, …— de derecha a izquierda:

- es decir, desde el bit menos significativo —el que va multiplicado por $2^0$—

  … al bit más significativo —el que va multiplicado por $2^{n-1}$, si el número de bits es $n$


1 × 10^0
2 × 10^1
4 × 10^2
bit 8
bit 7
...
bit 1
bit 0
4 2 1 10 = 1 1 0 1 0 0 1 0 1 2
1 × 2^0
0 × 2^1
1 × 2^2
0 × 2^3
1 × 2^5
0 × 2^4
0 × 2^6
1 × 2^7
1 × 2^8

Tanto en base 10 como en base 2, un número (un valor numérico) tiene una única representación

… es decir, si cambiamos cualquier dígito de 421, el nuevo número va a tener un valor numérico distinto de 421

… y lo mismo con 1 1 0 1 0 0 1 0 1: si cambiamos cualquiera de los 1's por 0's o cualquiera de los 0's por 1's, el valor numérico del número binario resultante va a ser distinto de 421

La cantidad de bits disponible para representar un número queda fija al momento de diseñar el computador:

**números de precisión finita**

Y esto tiene consecuencias

**(** Esta no es una limitación de la base 2, sino de que la memoria al interior del computador —independientemente de la tecnología que se use para implementarla— es finita **)**

P.ej., consideremos el conjunto de números enteros positivos representables mediante tres dígitos decimales, sin punto decimal ni signo:

000, 001, 002, …, 999

En este caso, es imposible representar ciertos números:

- mayores que 999, negativos, fracciones, irracionales, complejos

Además, el conjunto no es cerrado con respecto a las operaciones aritméticas básicas:

- 600 + 600 = 1200 → muy grande
- 050 x 050 = 2500 → muy grande

003 – 005 = –2 → negativo

007 / 002 = 3.5 → no es un entero

Finalmente, el álgebra de los números de precisión finita es diferente del álgebra "normal":

- p.ej., la ley de asociatividad $a + (b - c) = (a + b) - c$ no se cumple si $a = 700$, $b = 400$ y $c = 300$, porque al calcular $a + b$ en el lado derecho produce *overflow*

Estas mismas limitaciones o problemas se dan al representar números enteros positivos (en base 2) mediante, p.ej., 32 bits —típico en un computador moderno … bueno, casi moderno

Obviamente, no es que los computadores sean inadecuados para hacer aritmética, sino que

> **… es importante entender cómo funcionan** (lo que vamos a ver a continuación)

**(** En las próximas diapos, vamos a emplear el subíndice 10 cuando escribamos números en base 10, y el subíndice 2 cuando escribamos números en base 2; p.ej., $421_{\mathbf{10}}$ y $110100101_{\mathbf{2}}$ **)**

En computadores en que las palabras tienen 32 bits, podemos representar $2^{32}$ patrones diferentes de bits

… los números desde el 0 hasta el $2^{32} - 1 = 4{,}294{,}967{,}295_{10}$

Así, con 32 bits, el valor del número representado como

$$x_{31}x_{30}\ldots x_1x_0$$

… es

$$(x_{31} \times 2^{31}) + (x_{30} \times 2^{30}) + (x_{29} \times 2^{29}) + \ldots + (x_1 \times 2^1) + (x_0 \times 2^0)$$

Estos números positivos se llaman **números sin signo** (*unsigned numbers*)

Pero también tenemos que representar números negativos

P.ej., podríamos agregar un signo, representado en un bit:

$0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1_2 = 421_{10}$ $\qquad$ $1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1_2 = -421_{10}$

… esta representación se llama ***signo y magnitud***

Problemas:

- el bit de signo, ¿es el de más a la derecha o el de más a la izquierda?
- al sumar, se necesita un paso adicional para saber el valor de este bit
- hay dos ceros —uno positivo y otro negativo ( $00\ldots00_2$ y $10\ldots00_2$ )

Hay otras opciones, todas con sus pros y sus contras

No habiendo una mejor opción obvia

… los arquitectos computacionales eligieron finalmente la representación llamada ***complemento de 2*** que hacía más simple el hardware:

- 0s a la izquierda significa positivo
- 1s a la izquierda significa negativo

Veámoslo para 32 bits (próx. diap.)

**[** muchos computadores hoy día usan 64 bits y en el pasado se usaban 16 bits —la representación en complemento de 2 es independiente del número de bits: básicamente, lo único que se ve afectado es el rango de números representados **]**

$0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000_2 = 0_{10}$

$0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0001_2 = 1_{10}$

$0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0010_2 = 2_{10}$

$\vdots$

$0111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1101_2 = 2{,}147{,}483{,}645_{10}$

$0111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1110_2 = 2{,}147{,}483{,}646_{10}$

$0111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1111_2 = 2{,}147{,}483{,}647_{10}$

$1000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000_2 = -2{,}147{,}483{,}648_{10}$

$1000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0001_2 = -2{,}147{,}483{,}647_{10}$

$1000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0010_2 = -2{,}147{,}483{,}646_{10}$

$\vdots$

$1111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1101_2 = -3_{10}$

$1111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1110_2 = -2_{10}$

$1111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1111_2 = -1_{10}$

En 32 bits (diap. anterior):

- la mitad positiva, de 0 a $2{,}147{,}483{,}647_{10}$ ($= 2^{31} - 1$) usa la misma representación que antes
- el patrón de bits que sigue ( $1000\ldots0000_2$ ) representa el número más negativo, $-2{,}147{,}483{,}648_{10}$ ($= -2^{31}$)

  … el cual (en esta representación y para 32 bits) no tiene un número positivo correspondiente
- y luego viene una secuencia de números negativos de magnitud decreciente, desde $-2{,}147{,}483{,}647_{10}$ ($= 1000\ldots001_2$) hasta $-1_{10}$ ($= 1111\ldots111_2$)

Todo computador hoy en día, y desde 1965, usa complemento de 2 para representar **números con signo** (*signed numbers*)

| string | unsigned | sign & magnitude | 1's complement | 2's complement |
|---|---|---|---|---|
| 0000 | 0 | 0 | 0 | **0** |
| 0001 | 1 | 1 | 1 | **1** |
| 0010 | 2 | 2 | 2 | **2** |
| 0011 | 3 | 3 | 3 | **3** |
| 0100 | 4 | 4 | 4 | **4** |
| 0101 | 5 | 5 | 5 | **5** |
| 0110 | 6 | 6 | 6 | **6** |
| 0111 | 7 | 7 | 7 | **7** |
| 1000 | 8 | –0 | –7 | **–8** |
| 1001 | 9 | –1 | –6 | **–7** |
| 1010 | 10 | –2 | –5 | **–6** |
| 1011 | 11 | –3 | –4 | **–5** |
| 1100 | 12 | –4 | –3 | **–4** |
| 1101 | 13 | –5 | –2 | **–3** |
| 1110 | 14 | –6 | –1 | **–2** |
| 1111 | 15 | –7 | –0 | **–1** |

En complemento de 2, todos los números negativos —y sólo los números negativos— tienen un 1 en el bit más significativo (el de más a la izquierda):

- *bit de signo*, aunque no es un bit que pueda realmente separarse de la magnitud del número (como se explica en la próx. diap.)

  p.ej., en 4 bits (diap. anterior), $1001_2 = -7_{10}$ , pero $001_2 \neq 7_{10}$

- basta examinar este bit para saber si un número es positivo o negativo (0 se considera positivo)

Así, con 32 bits en complemento de 2, el valor del número representado como

$$x_{31}x_{30}\ldots x_1x_0$$

… es

$$(x_{31} \times -2^{31}) + (x_{30} \times 2^{30}) + (x_{29} \times 2^{29}) + \ldots + (x_1 \times 2^1) + (x_0 \times 2^0)$$

Notar la diferencia en la interpretación del valor del bit 31 con respecto al caso de los números sin signo (diap. #10)

**Complemento de 2**

**8 bits**

$00000000_2 = 0_{10}$
$00000001_2 = 1_{10}$
$00000010_2 = 2_{10}$
$00000011_2 = 3_{10}$
⋮
$01111100_2 = 124_{10}$
$01111101_2 = 125_{10}$
$01111110_2 = 126_{10}$
$01111111_2 = 127_{10}$
$10000000_2 = -128_{10}$
$10000001_2 = -127_{10}$
$10000010_2 = -126_{10}$
$10000011_2 = -125_{10}$
⋮
$11111100_2 = -4_{10}$
$11111101_2 = -3_{10}$
$11111110_2 = -2_{10}$
$11111111_2 = -1_{10}$

$$\begin{array}{rll} & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1_2 & (=3_{10}) \\ + & 0\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,0_2 & (=124_{10}) \\ \hline & 0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1_2 & (=127_{10}) \end{array}$$

$$\begin{array}{rll} & 1\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1_2 & (=-125_{10}) \\ + & 1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1_2 & (=-1_{10}) \\ \hline & 1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0_2 & (=-126_{10}) \end{array}$$

$$\begin{array}{rll} & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0_2 & (=2_{10}) \\ + & 0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1_2 & (=127_{10}) \\ \hline & 1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1_2 & (=-127_{10}) \end{array}$$

$$\begin{array}{rll} & 1\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1_2 & (=-125_{10}) \\ + & 1\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,0_2 & (=-4_{10}) \\ \hline & 1\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1_2 & (=127_{10}) \end{array}$$

En complemento de 2, ocurre *overflow* (como en las dos últimas sumas de la diap. anterior) cuando el resultado de la operación produce un bit de signo incorrecto (bits rojos):

- un 0 (en el bit de más a la izquierda) cuando el número es negativo
- un 1 (en el bit de más a la izquierda) cuando el número es positivo

¿ Cómo determinamos el inverso aditivo de un número binario $Y$ de $n$ bits en complemento de 2 ?

Si miramos la diap. #13 (o la última columna de la diap. #15), vemos que $Y + \bar{Y}$ (invertimos cada bit de $Y$) = $111...111_2 = -1$

… es decir, $Y + \bar{Y} = -1 \Rightarrow$ $\boldsymbol{-Y = \bar{Y} + 1}$

Por lo tanto, el inverso aditivo $\boldsymbol{-Y}$ se obtiene así:

primero, invertimos cada bit de $Y$ (0 → 1, 1 → 0), lo que nos da $\bar{Y}$

y luego, sumamos 1 al resultado

**(** por otra parte, si no tomamos en cuenta el signo, $Y + \bar{Y} = 111...111_2 = 2^n - 1 \Rightarrow Y + \bar{Y} + 1 = 2^n \Rightarrow Y + (-Y) = 2^n$; de aquí el nombre "complemento de 2" **)**

# ¿Qué sabemos?

**Números enteros con signo:**

Los representamos en *complemento de 2*

**Suma:**

Los números son sumados bit a bit de derecha a izquierda —lo mismo que en el caso de base 10

… y la reserva (*carry*) se va pasando al próximo par de bits a la izquierda

**Resta:**

Hace uso de la suma,

… sólo que el sustraendo es convertido a su inverso aditivo antes de ser sumado al minuendo

***Overflow*** es cuando el resultado de una operación no puede ser representado con el número de bits disponible:

- p.ej., si en 32 bits con complemento de 2, el resultado de una operación fuera un número positivo mayor que $2^{31}–1$ (éste es el positivo más grande)

  … o un número negativo de magnitud mayor que $2^{31}$ ($–2^{31}$ es el negativo más grande)

…

…

No puede ocurrir *overflow* cuando sumamos operandos con diferentes signos —uno positivo y el otro negativo:

- ya que la suma no puede ser más grande que uno de los operandos

… ni cuando restamos operandos con el mismo signo —ambos positivos o ambos negativos:

- ya que primero convertimos el sustraendo a su inverso aditivo (es decir, le cambiamos el signo) y luego sumamos

…

…

Cuando ocurre *overflow*, es porque falta un bit para representar el resultado

… entonces el bit de signo —el bit más significativo o más a la izquierda— recibe el valor del resultado

… en lugar de recibir el signo correspondiente al resultado:

- si sumamos dos números positivos y el resultado es negativo, es porque ocurrió overflow

  … o si sumamos dos números negativos y el resultado es positivo, es porque ocurrió overflow

Es responsabilidad del lenguaje de programación, del sistema operativo y del programa determinar qué hacer en caso de *overflow*:

- el hardware no tiene cómo saber qué conviene hacer en este caso

## Multiplicación

Los operandos se llaman *multiplicando* y *multiplicador*

… y el resultado, *producto*

P.ej., multipliquemos 123 (multiplicando) por 45 (multiplicador):

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | × | 4 | 5 |
| | | 6 | 1 | 5 | | | —producto intermedio de 123 × 5 |
| + | 4 | 9 | 2 | | | | —producto intermedio de 123 × 4 |
| = | 5 | 5 | 3 | 5 | | | —suma de los productos intermedios |

**Algoritmo del colegio** ( versión informal, ver ej. en diap. anterior ):

Tomamos los dígitos del multiplicador uno a uno de derecha a izquierda —es decir, desde el dígito menos significativo al dígito más significativo

… para cada dígito del multiplicador, multiplicamos el multiplicando por ese dígito (→ *producto intermedio*)

… y escribimos este producto intermedio, desplazado un dígito a la izquierda con respecto al producto intermedio anterior

Finalmente, sumamos los productos intermedios, respetando el desplazamiento de cada uno

Si restringimos los dígitos a 0 y 1 (como es siempre el caso con los números binarios),

… cada paso de la multiplicación es simple

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 1 | 0 | 1 | 0 | × | 1 | 0 | 0 | 1 | |
| | | | | 1 | 0 | 1 | 0 | | — = 1010 × 1 | | | | |
| | | | 0 | 0 | 0 | 0 | | | — = 1010 × 0 | | | | |
| | | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | — = 1010 × 0 | | | | |
| + | 1 | 0 | 1 | 0 | | | | | — = 1010 × 1 | | | | |
| = | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | | —suma | | | | |

**Algoritmo de multiplicación binaria** ( versión informal, ver ej. en diap. anterior ):

Colocar una copia del multiplicando en el lugar correcto*, si el dígito del multiplicador es 1 ( = 1 × multiplicando )

… o bien colocar 0 en el lugar correcto*, si el dígito del multiplicador es 0 ( = 0 × multiplicando )

* en cada nueva iteración, se escribe desplazándolo un dígito a la izquierda

**Hardware necesario para multiplicación**

El número de dígitos en el producto es mayor ( ¿cuánto mayor? ) que el número de dígitos en cualquiera de los operandos → posibilidad de overflow

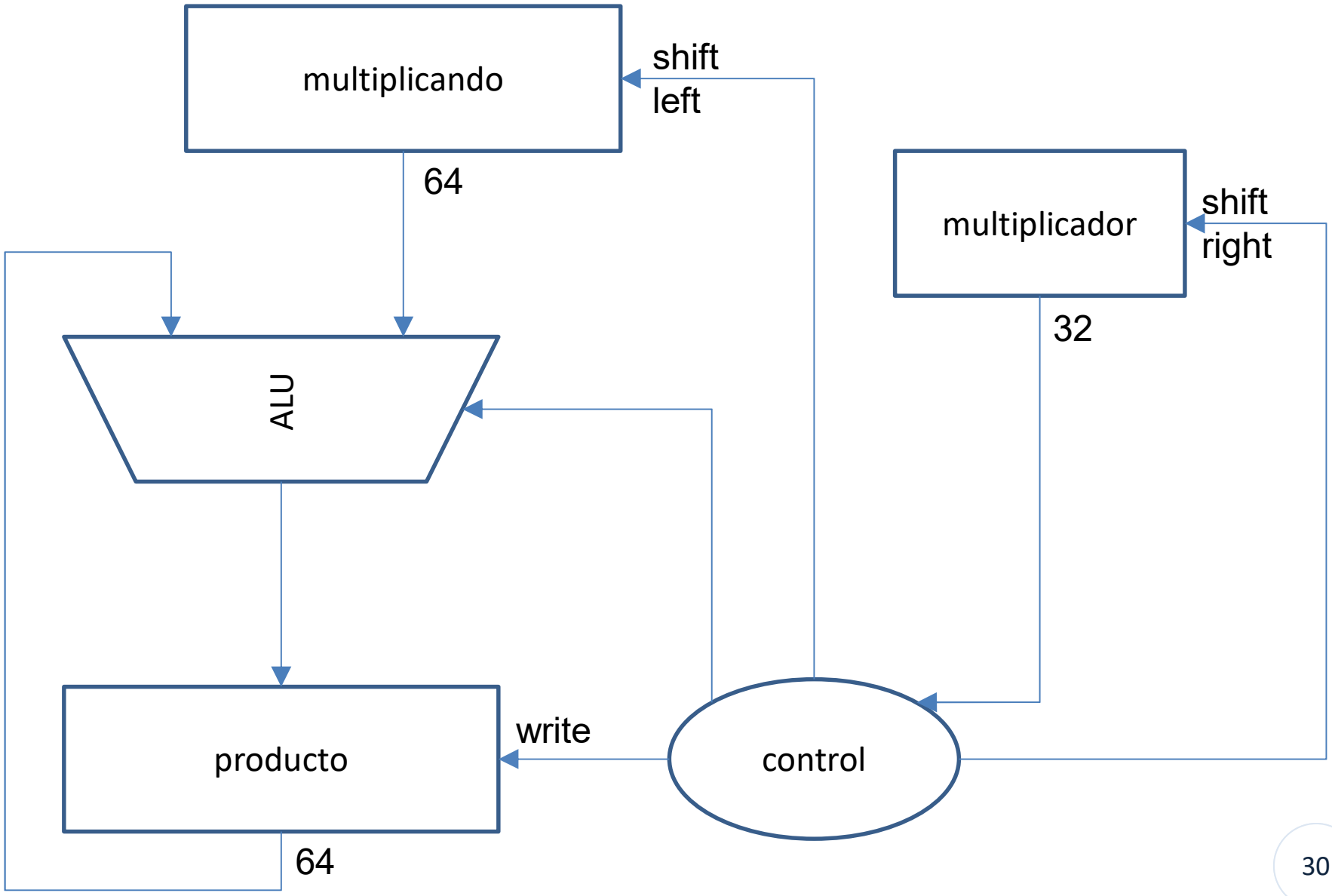
Necesitamos registros para

… el multiplicando (con capacidad de *shift* a la izquierda, ¿con cuántos bits?)

… el multiplicador (con capacidad de *shift* a la derecha, ¿por qué?) y

… el producto (con el doble de bits que los operandos)

# Hardware para multiplicación ( versión secuencial )



## Algoritmo de multiplicación de números de 32 bits sin signo, usando el hardware anterior

Partir

1. Examinar el dígito de más a la derecha del multiplicador

1a. Si es 1, sumar el multiplicando al producto y poner el resultado en el registro del producto

2. Desplazar (*shift*) el registro del multiplicando a la izquierda un bit

3. Desplazar (*shift*) el registro del multiplicador a la derecha un bit

4. Verificar si los pasos 1, 2 y 3 se han repetido 32 veces

4a. Si aún faltan repeticiones, ir a 1

Terminar

## Números reales

Los lenguajes de programación también permiten manejar números con fracciones —*números reales*, en matemáticas:

3.14159265…

2.71828…

0.000000001 (lo que dura un nanosegundo —una mil millonésima de segundo— en segundos)

… o números más grandes que el que puede ser representado mediante un entero con signo en 32 ( o 16 o 64 ) bits:

3,155,760,000 (el número de segundos en un siglo) > 2,147,483,647 (el número positivo más grande en 32 bits con signo)

**(** Si bien habitualmente realizamos operaciones aritméticas mezclando número enteros con números reales —números con fracciones, incluso irracionales—

… computacionalmente los números enteros y los números reales son dos tipos de datos muy diferentes, como vamos a ver,

… desde la forma en que los representamos (p.ej., en 32 bits)

… y hasta cómo ejecutamos las operaciones aritméticas con ellos **)**

Los lenguajes de programación también permiten manejar números con fracciones:

3.14159265…

2.71828…

0.000000001 = **$1.0 \times 10^{-9}$**

**notación científica normalizada**

… o números más grandes que el que puede representarse mediante un entero con signo en 32 ( o 16 o 64 ) bits:

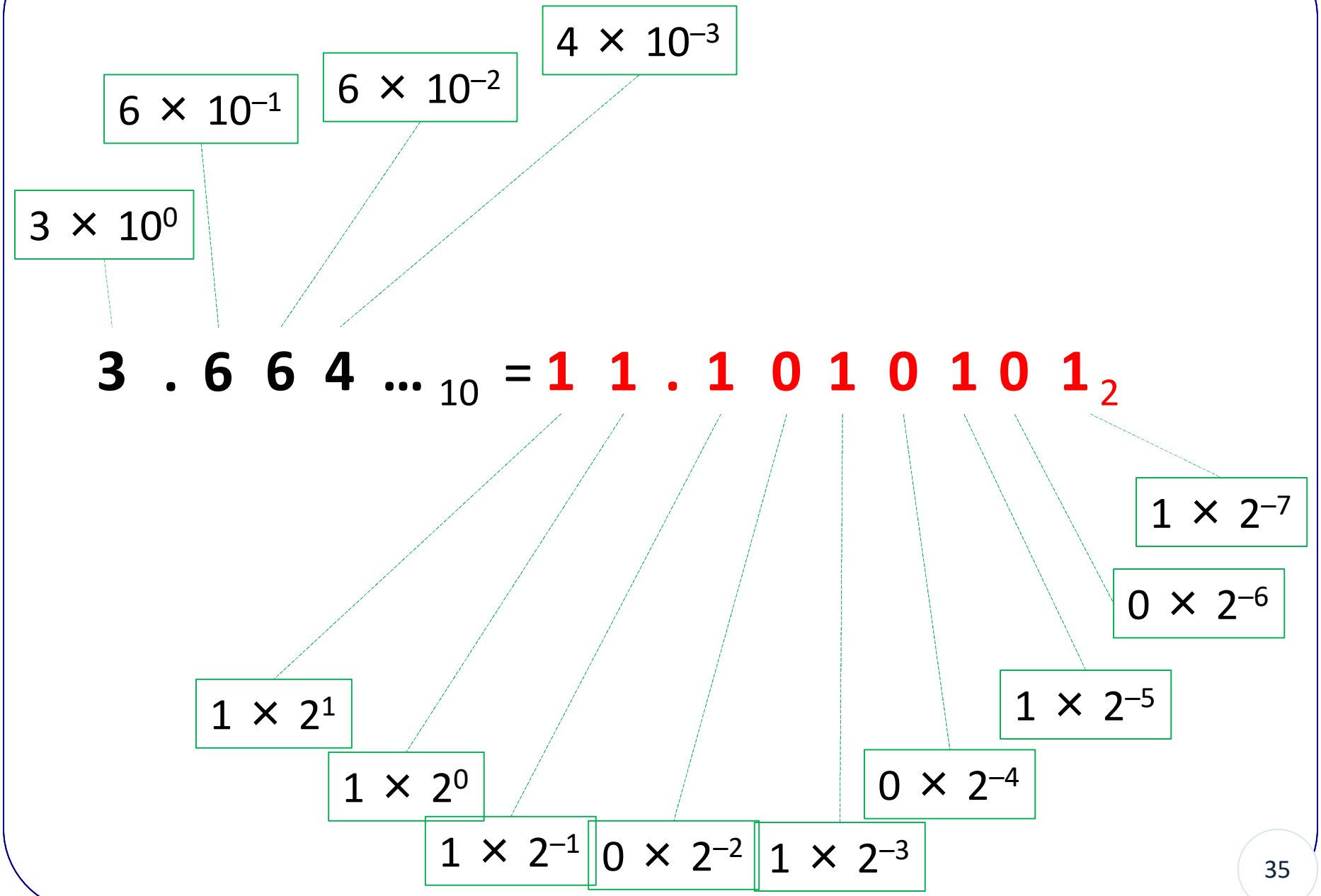
3,155,760,000 = **$3.15576 \times 10^{9}$**

**Notación científica** :

un único dígito a la izquierda del punto decimal —un mismo número puede representarse de varias maneras distintas en notación científica

**… normalizada** :

ese único dígito es ≠ 0 —un número tiene una única representación en notación científica normalizada


4 × 10−3
6 × 10−2
6 × 10−1
3 × 100
3 . 6 6 4 … 10 = 1 1 . 1 0 1 0 1 0 1 2
1 × 2−7
0 × 2−6
1 × 2−5
0 × 2−4
1 × 2−3
0 × 2−2
1 × 2−1
1 × 20
1 × 21

También podemos escribir números binarios en notación científica:

p.ej., 11.1010101 (= 11.1010101 x $2^0$) = **1.11010101 x $2^1$**

La aritmética computacional correspondiente se llama *de punto flotante*:

maneja números en los que la posición del punto decimal (o *punto binario*) no está fija

en el lenguaje C, el tipo de datos correspondiente se llama **`float`**

Los números son representados a partir de un único dígito ≠ 0 a la izquierda del punto:

$1.xxxxxxxx_2 \times 2^{yyy}$

Ventajas:

- simplifica el intercambio de datos
- simplifica los algoritmos para la aritmética de punto flotante
- aumenta la exactitud de los números que pueden almacenarse en una palabra —los 0s iniciales innecesarios son reemplazados por dígitos reales a la derecha del punto

## Representación de números de punto flotante

Compromiso entre el tamaño (el número de bits) de la fracción —o *mantisa*— y el tamaño del exponente:

- el número total de bits para representar al número es fijo (p.ej., 32) → hay que quitarle un bit a la fracción para agregárselo al exponente, y viceversa

… es decir, entre *precisión* y *rango*:

- a mayor tamaño de la fracción, mayor precisión de la fracción
- a mayor tamaño del exponente, mayor rango de los números representables

P.ej., en el caso de 32 bits:

un bit para el *signo* del número (0 → positivo, 1 → negativo)

23 bits para la *fracción*

8 bits para el *exponente* (un número entero: positivo, negativo , o 0)

| 1 | 10000001 | 01000000000000000000000 |

| *signo* | *exponente* | *fracción* |
|---|---|---|
| un bit | 8 bits | 23 bits |

Representación *signo y magnitud*: el signo es un bit separado del resto del número

El valor de un número así representado es

$$(-1)^{signo} \times fracción \times 2^{exponente}$$

## Propiedades de la representación

1) Gran rango de números representables:

aproximadamente, desde $2.0 \times 10^{-38}$ hasta $2.0 \times 10^{38}$

2) Buena precisión: $2^{-22}$

3) Ahora, además de overflow, puede ocurrir *underflow*:

**overflow** : cuando el exponente es demasiado grande para ser representado en 8 bits

**underflow** : cuando el exponente negativo es demasiado grande → el valor de la fracción es muy pequeño (por lo que 0 es una buena aproximación)

**…**

…

4) La recta de números reales queda dividida en 7 regiones ( próxima diap.):

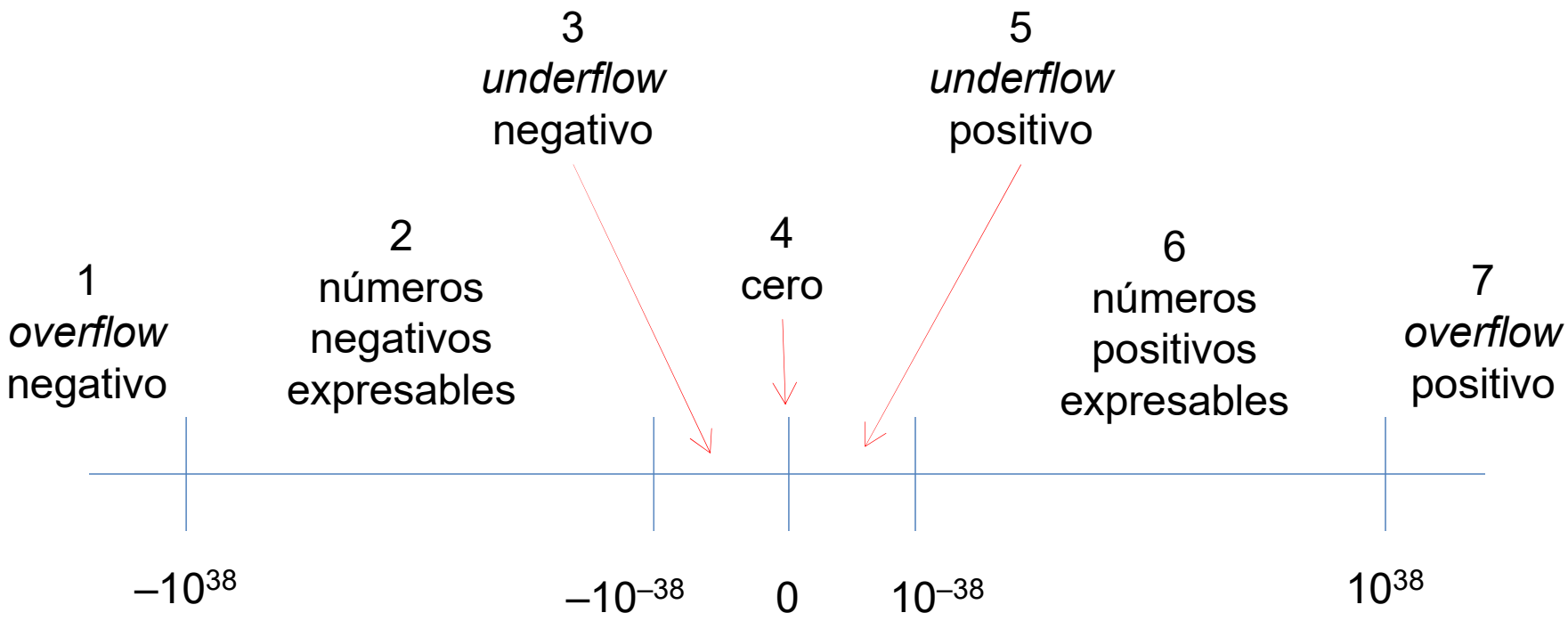
1: *overflow* negativo, 2: números negativos expresables, 3: *underflow* negativo, 4: cero, 5: *underflow* positivo, 6: números positivos expresables, y 7: *overflow* positivo

5) No todos los números reales en las regiones 2 y 6 pueden ser representados:

- p.ej., entre 1.00000000000000000000 y 1.11111111111111111111 hay sólo $2^{22}$ números distintos,

  … pero en la recta de números reales hay infinitos números entre 1.0 y 1.999999…

- → para representar los números que no se pueden representar exactamente, es necesario emplear redondeo


3
*underflow*
negativo
5
*underflow*
positivo
1
*overflow*
negativo
2
números
negativos
expresables
4
cero
6
números
positivos
expresables
7
*overflow*
positivo
$-10^{38}$
$-10^{-38}$
0
$10^{-38}$
$10^{38}$

## En la práctica, se usa el estándar *IEEE 754*

***fracción***:

- 23 bits —los 23 bits menos significativos (del 0 al 22) de la palabra
- el 1 a la izquierda del punto es implícito → el *significante* tiene 24 bits

***signo***:

- en el bit más significativo (bit 31) → facilita la comparación con 0

…

…

***exponente***:

8 bits —bits 23 al 30

inmediatamente a continuación del signo → facilita la ordenación usando instrucciones de comparación de números enteros

… siempre que todos los exponentes tengan el mismo signo:

en lugar de representarlos como números enteros en complemento de 2

… se los representa como números sin signo desfasados (*biased*) en 127

La forma de un número en punto flotante en el estándar IEEE 754 es

$$(-1)^{signo} \times (1+fracción) \times 2^{exponente-127}$$

P.ej., ¿cuál es el número decimal representado por el siguiente *float*?

11000000101000000000000000000000

Identifiquemos sus partes:

| 1 | 10000001 | 01000000000000000000000 |

*signo* → 1

*exponente* → 129

*fracción* → $1 \times 2^{-2} = 1/4 = 0.25$

Por lo tanto, el número es (ver fórmula en diapositiva anterior):

$$(-1)^1 \times (1 + 0.25) \times 2^{129-127} = -1 \times 1.25 \times 2^2$$

$$= -1.25 \times 4$$

$$= \mathbf{-5.0}$$

P.ej., ¿cuál es la representación en el estándar IEEE 754 de $-0.75_{10}$ ?

$$-0.75_{10} = -3/4_{10} = -3/2^2{}_{10} = -11_2/2^2{}_{10} = -0.11_2$$

$$= -0.11_2 \times 2^0 \qquad \text{(en notación científica)}$$

$$= -1.1_2 \times 2^{-1} \qquad \text{(en notación científica normalizada)}$$

Por lo tanto, *signo* = 1

*significante* = 1.1 → *fracción* = .1

*exponente* = –1 + 127 = 126

… y la representación es

1 01111110 10000000000000000000000

Combinaciones especiales de exponente y fracción:

**0** : *exponente* = 0 y *fracción* = 0

número no normalizado : *exponente* = 0 y *fracción* ≠ 0

**infinito** : *exponente* = 255 (o 2047) y *fracción* = 0

*NaN* (*not a number*): *exponente* = 255 (o 2047) y *fracción* ≠ 0

El estándar IEEE 754 tiene también un formato de 64 bits → *precisión doble*:

*exponente* de 11 bits, con desfase de 1023

*fracción* de 52 bits → *significante* de 53 bits

Rango de números representables:

$10^{-38}$ ($\approx 2^{-126}$) a $10^{38}$ ($\approx 2^{128}$), en precisión simple

$10^{-308}$ ($\approx 2^{-1022}$) a $10^{308}$ ($\approx 2^{1024}$), en precisión doble

## Ejemplo de suma de números de punto flotante

$9.999 \times 10^{1} + 1.610 \times 10^{-1} = \ldots$

suponemos significantes de 4 dígitos, y exponentes de dos

Primero, hay que alinear el punto decimal del número con el menor exponente:

$1.610 \times 10^{-1} = 0.1610 \times 10^{0} = 0.01610 \times 10^{1} \rightarrow \mathbf{0.016 \times 10^{1}}$

es decir, hicimos *shift* a la derecha del significante, aumentando el exponente en 1 cada vez, hasta quedar con el exponente correcto

… y recordamos que solo podemos representar 4 dígitos

**…**

…

Luego, sumamos los significantes, y normalizamos y redondeamos el resultado:

$9.999 + 0.016 = 10.015 \rightarrow 10.015 \times 10^1 = 1.0015 \times 10^2$
$\rightarrow \mathbf{1.002 \times 10^2}$

al normalizar, aumentando o disminuyendo el exponente, hay que revisar si se produce overflow o underflow

… y al redondear, hay que revisar si el resultado se mantiene normalizado, o si es necesario normalizarlo de nuevo

## Algoritmo de suma de punto flotante

1. comparar los exponentes; “shift” el número más pequeño a la derecha hasta que su exponente sea igual al exponente más grande

2. sumar los significantes

3. normalizar la suma, ya sea “shifting” a la derecha e incrementado el exponente, o “shifting” a la izquierda y decrementando el exponente

   ¿“overflow” o “underflow”? → *excepción*

4. redondear el significante al número apropiado de bits

   ¿está normalizado? → terminar

   volver al paso 3

## Algoritmo de multiplicación de punto flotante

1. sumar los exponentes desfasados y restar el desfase a la suma para obtener el nuevo exponente desfasado

2. multiplicar los significantes

3. normalizar el producto si es necesario, “shifting” a la derecha e incrementado el exponente

   ¿“overflow” o “underflow”? → excepción

4. redondear el significante al número apropiado de bits

   ¿está normalizado? → ir al paso 5

   volver al paso 3

5. poner el signo del producto en positivo si los signos de los operandos son iguales; en negativo, en caso contrario

   terminar

## Ejemplo de multiplicación de números de punto flotante

$1.000 \times 2^{-1} \times -1.110 \times 2^{-2} = \ldots$

Primero, sumamos los exponentes:

sin desfasarlos (sus verdaderos valores) → $-1 + (-2) = -3$

o desfasándolos (como quedan representados en el computador) → $(-1+127) + (-2+127) - 127 = -3 + 127 = 124$

Luego, multiplicamos los significantes y dejamos el producto en 4 bits:

$1.000 \times 1.110 = 1.110000 \rightarrow 1.110000 \times 2^{-3} \rightarrow 1.110 \times 2^{-3}$

…

…

Revisamos que el producto esté normalizado → lo está

… y que el exponente no haya producido overflow o underflow:

$127 \geq -3 \geq -126$ → no se produjo ninguno (con desfase: $254 \geq 124 \geq 1$)

Redondeamos el producto, sin efecto en este caso

… y finalmente hacemos que el signo del producto sea negativo:

$$\mathbf{-1.110 \times 2^{-3}}$$

## Sobre redondeos

El hardware necesita bits adicionales para hacer bien los redondeos

El estándar IEEE 754 mantiene dos bits adicionales (a la derecha del bit menos significativo —el de más a la derecha)

… y ofrece cuatro modos de redondeo:

- siempre redondear hacia arriba
- siempre redondear hacia abajo
- truncar
- redondear al par más cercano —el más comúnmente usado (p.ej., el que implementa Java)