



Concours Mathématiques et Physique
Epreuve de Physique

Date : Jeudi 05 Juin 2014

Heure : 8 H

Durée : 4 H

Nbre pages : 8

Barème : Partie I : 10/20;

Partie II : 5/20;

Partie III : 5/20

L'usage d'une calculatrice (non programmable) est autorisé.

L'épreuve comporte trois parties indépendantes. Le candidat peut les résoudre dans l'ordre qui lui convient en respectant néanmoins la numérotation des questions. Un candidat peut toujours se servir d'un résultat fourni par l'énoncé pour continuer sa composition.

Partie I : Electromagnétisme.

L'espace est rapporté à un repère $R ((Oxyz))$. Un point M de l'espace peut être repéré soit par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) de base orthonormée directe $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ soit par ses coordonnées cylindriques (r, φ, z) de base orthonormée directe $(\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z)$.

On donne :

$$\overline{\text{rot}(\text{rot} \vec{A})} = \overline{\text{grad}(\text{div} \vec{A})} - \Delta \vec{A}$$

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ SI}$$

I-A) Phénomène d'induction.

On considère un petit cadre conducteur, de côté a , centré sur l'axe (Oz) , de forme carrée, attaché à l'extrémité d'un long pendule isolant supposé sans masse, de longueur $\ell = OO'$ tournant autour de l'axe $(O'z)$ (Figure I-1). Le cadre conducteur est constitué d'un seul enroulement de fil de cuivre de conductivité γ .

Ce système baigne dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B \vec{u}_z$.

I-A-1-Détermination du potentiel vecteur.

On suppose que \vec{B} dérive d'un potentiel vecteur \vec{A} défini par : $\vec{B} = \overline{\text{rot} \vec{A}}$; que le vecteur \vec{A} est orienté suivant \vec{u}_φ et qu'il ne dépend que de la coordonnée r .

I-A-1-1- Ecrire la circulation de \vec{A} le long d'un cercle de rayon r centré en O et d'axe (Oz) .

Trouver à l'aide du théorème de Stokes, l'expression de \vec{A} .

I-A-1-2- En passant en coordonnées cartésiennes, montrer que les composantes de \vec{A} sont données par :

$$\begin{cases} A_x = -B \frac{y}{2} \\ A_y = B \frac{x}{2} \\ A_z = 0 \end{cases}$$

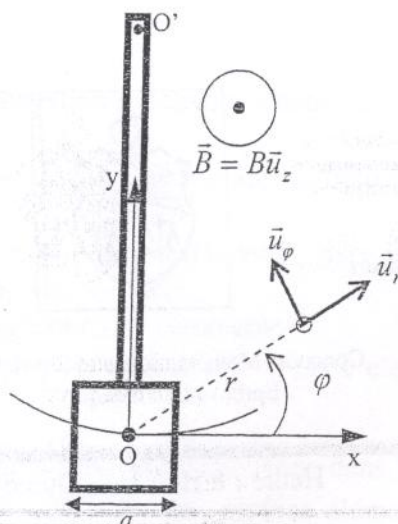


Figure I-1

I-A-2-Champ variable.

On suppose que le cadre est maintenu immobile mais que le champ magnétique varie au cours du temps suivant la loi : $\vec{B}(t) = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$ où B_0 est une constante positive.

I-A-2-1- Expliquer comment en pratique, on peut créer un tel champ magnétique dépendant du temps.

I-A-2-2- Trouver le flux de \vec{B} à travers la surface du cadre. En déduire la force électromotrice e induite dans le cadre. Ce résultat est-il conforme à la loi de Lenz que l'on rappellera.

I-A-2-3- Application numérique : $B_0 = 0,02 \text{ T}$, $\omega = 2\pi f$ avec $f = 50 \text{ Hz}$, $a = 1 \text{ cm}$, calculer l'amplitude de e .

I-A-2-4- Retrouver l'expression de e à l'aide du champ électrique induit \vec{E}_m .

I-A-2-5- Calculer $\text{rot } \vec{E}_m$ et commenter le résultat.

I-A-3-Chauffage par induction.

On remplace le cadre par un cube métallique, homogène, de conductivité γ et de côté a , dont on suppose qu'il obéit à la loi d'Ohm locale. Ce cube qui est ici immobile, est soumis au champ variable $\vec{B}(t)$.

I-A-3-1- Rappeler la définition microscopique du vecteur densité de courant \vec{j} régnant dans le cube.

I-A-3-2- Ecrire \vec{j} en fonction de \vec{E}_m et γ .

I-A-3-3- Exprimer la puissance totale dissipée par effet Joule dans le cube de cuivre.

I-A-3-4- On assimile le champ électrique \vec{E} au champ \vec{E}_m . Trouver le vecteur densité de courant de déplacement \vec{j}_D .

I-A-3-5- Calculer le rapport des amplitudes de \vec{j}_D et de \vec{j} et commenter le résultat.

On donne : $\gamma = 10^8 \text{ SI}$ et $f = 50 \text{ Hz}$.

I-A-4- Circuit mobile et champ fixe

On suppose désormais que le champ \vec{B} est constant mais que le cube de cuivre supposé indéformable est mobile, de vitesse \vec{V} que l'on supposera parallèle à Ox pour les petites oscillations du pendule.

I-A-4-1- Donner l'expression du champ électromoteur \vec{E}_m dans ce cas.

I-A-4-2- Ecrire l'expression microscopique de la force de Laplace en fonction de \vec{j} et \vec{B} .

I-A-4-3- En déduire dans ce cas, la force $d\vec{F}$ s'exerçant sur un élément de volume $d\tau$ du cube, puis la force totale s'exerçant sur le cube.

I-A-4-4- Commenter le phénomène physique.

I-B) Effet de peau.

Un milieu conducteur homogène, isotrope et globalement neutre, occupe le demi-espace $y > 0$. On appelle γ (constante positive) sa conductivité. Dans l'autre demi-espace, qui est le vide, se propage suivant l'axe $y'y$, une onde électromagnétique plane de pulsation ω , polarisée rectilignement suivant Oz , de vecteur d'onde \vec{k} dirigé dans la direction des $y > 0$. Le champ électrique s'écrit alors : $\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - k y)} \vec{u}_z$, avec $i^2 = -1$ et E_0 une constante positive.

I-B-1- Écrire les équations de Maxwell dans le conducteur. En déduire l'équation de propagation du champ électrique de l'onde, dans ce milieu. La réduire compte tenu des invariances du problème.

I-B-2- En posant $E_z = f(y) e^{i\omega t}$, trouver l'équation différentielle vérifiée par la fonction $f(y)$.

I-B-3- La pulsation de l'onde dans le vide vérifie la condition $\omega \ll \frac{\gamma}{\epsilon_0}$. Réduire encore cette équation et l'intégrer.

I-B-4- En déduire l'expression de E_z en supposant qu'on néglige l'onde réfléchie vers le vide par la surface du métal. Donner la vitesse de phase de l'onde dans le conducteur et l'amplitude de son champ électrique. On notera $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$.

I-B-5- Les expressions trouvées à la question précédente, mettent en évidence deux phénomènes physiques. Les indiquer.

I-B-6- Un tuyau d'axe $y'y$, infiniment long dans la partie $y > 0$, de dimensions, a suivant (Ox) , et b suivant (Oz) , est constitué du métal précédent de conductivité γ . On admet que l'expression du champ électrique trouvée précédemment reste valable ici. Trouver la puissance moyenne P dissipée par effet Joule.

I-C) Propagation guidée entre deux plans.

On considère deux plans métalliques parfaitement conducteurs placés en $x = 0$ et $x = a$ (Figure I-2). On se propose d'étudier la propagation dans le vide qui règne entre ces deux plans, d'une onde électromagnétique de pulsation ω dont le champ électrique est donné en

notation complexe par : $\vec{E} = E_0 \cdot \sin \frac{\pi x}{a} e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_y$. Où E_0 est une constante positive.

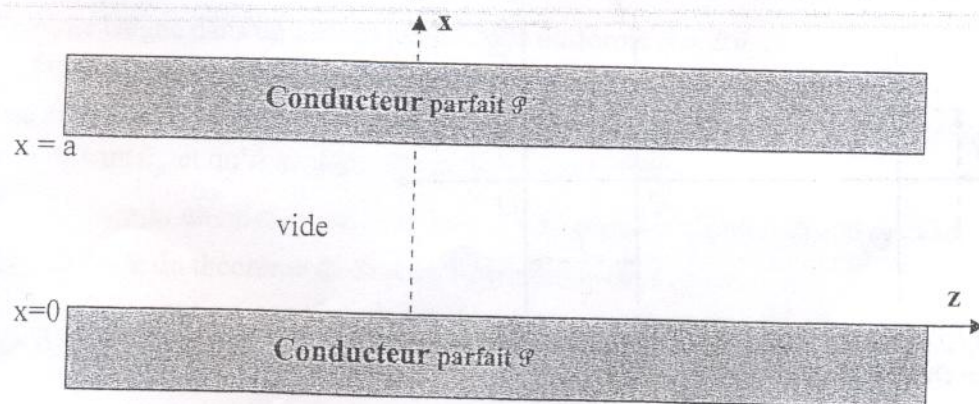


Figure I-2

I-C-1-1- Trouver à partir de l'équation de propagation du champ électrique, la relation entre ω , k , a et c (vitesse de la lumière dans le vide).

I-C-1-2- En déduire la condition de propagation de cette onde entre les deux plans. Donner la fréquence de coupure.

I-C-2- Écrire la vitesse de phase V_ϕ de cette onde. Le milieu est-il dispersif? Justifier et comparer cette vitesse à la vitesse de la lumière dans le vide c .

I-C-3- Déterminer la vitesse de groupe V_g , comparer à c et commenter?

I-C-4- Déterminer le champ magnétique \vec{B} . Est-il transversal? L'onde électromagnétique associée à (\vec{E}, \vec{B}) est-elle plane? Justifier.

I-C-5- Écrire le vecteur de Poynting $\vec{R}(z, t)$ ainsi que sa valeur moyenne dans le temps.

I-C-6- On rappelle que la force élémentaire exercée sur une surface élémentaire ds d'un conducteur est, en notation réelle, donnée par : $d\vec{F} = \frac{1}{2}(\sigma \vec{E} + \vec{j}_s \wedge \vec{B}) ds$

I-C-6-1- Proposer une explication du facteur $\frac{1}{2}$?

I-C-6-2- Déterminer les densités surfaciques de charges σ et σ' qui apparaissent sur les deux plans conducteurs, situés respectivement en $x = 0$ et $x = a$.

I-C-6-3- Déterminer les densités surfaciques de courant \vec{j}_s et \vec{j}'_s qui apparaissent sur les deux plans conducteurs situés respectivement en $x = 0$ et $x = a$.

I-C-6-4- Écrire les forces $d\vec{F}(x = 0)$ et $d\vec{F}'(x = a)$. Conclure.

I-C-6-5 En déduire que l'onde exerce sur chacun des plans conducteurs une pression P que l'on déterminera. Qu'appelle t-on cette pression?

Partie II : Interférences Lumineuses.

On donne $\cos(a) + \cos(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

II-A) Dispositif interférentiel des trous d'Young.

Le dispositif interférentiel des trous d'Young est schématisé sur la figure II-1 : il comporte une source lumineuse S ponctuelle et monochromatique, placée au foyer objet d'une lentille convergente L_0 , de distance focale $f'_0 = 2,6 m$. La lumière diffractée par les trous O_1 et O_2 est reçue par une lentille convergente L de distance focale $f' = 1,5 m$. Dans le plan focal de L , on place un écran d'observation E . On désigne par $\lambda_0 = 579,1 nm$ la longueur d'onde dans le vide de la lumière émise par la source et par $d = 5,0 mm$ la distance des deux trous. L'ensemble du dispositif est plongé dans l'air dont l'indice de réfraction est $n_0 = 1$.

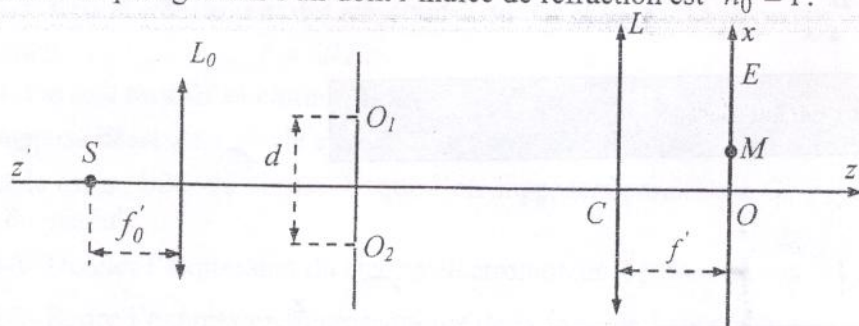


Figure II- 1 Le dispositif des trous d'Young. L'axe $z'Oz$ est l'axe optique des lentilles L_0 et L . Le point O est le foyer image de la lentille L .

II-A-1- Reprenez ce schéma sur votre copie et effectuer la construction géométrique des deux rayons issus de S qui arrivent au point M du plan focal image de la lentille L.

II-A-2- On note x l'abscisse du point M. Déterminer en fonction de x, d et f' la différence de marche δ des deux ondes qui interfèrent au point M.

II-A-3- Décrire brièvement le phénomène observé sur l'écran E occupant le plan focal image Oxy de la lentille L. On donnera en particulier la position de la frange brillante d'ordre p .

Calculer littéralement et numériquement l'interfrange i .

II-A-4- On rappelle que l'intensité lumineuse au point M est donnée par :

$$I(x) = 2I_0(1 + \cos \varphi)$$

où φ est le déphasage entre les deux ondes qui interfèrent au point M.

Exprimer φ en fonction de x et i .

Tracer la courbe représentative de $I(x)$ en fonction de x .

II-A-5- On suppose que la longueur d'onde dans le vide de la lumière émise est $\lambda'_0 = 576,9 \text{ nm}$ au lieu de λ_0 . Calculer la valeur numérique du nouvel interfrange i' .

II-A-6- La source lumineuse est maintenant dichromatique : la lumière émise est composée des deux rayonnements monochromatiques envisagés ci-dessus et dont les longueurs d'onde dans le vide sont λ_0 et λ'_0 . Ces deux composantes monochromatiques ont la même puissance d'émission I_0 . Leurs longueurs d'onde étant très voisines, elles paraissent de la même couleur (jaune) sans que l'œil puisse distinguer l'une de l'autre.

On appelle ordre d'interférence de la composante de longueur d'onde λ_0 (respectivement λ'_0)

le rapport $p = \frac{\delta}{\lambda_0}$ (respectivement $p' = \frac{\delta}{\lambda'_0}$).

II-A-6-1- En quels points de l'écran les ordres d'interférence p et p' sont-ils égaux?

En quels points de l'écran les ordres d'interférence p et p' diffèrent-ils de $\frac{1}{2}$?

En quels points de l'écran les ordres d'interférence p et p' diffèrent-ils de 1?

Dans chacun des cas demandés, on exprimera les abscisses des points de l'écran en fonction de i et i' et on calculera leurs valeurs numériques. On donnera également les valeurs numériques des ordres d'interférence p et p' .

II-A-6-2- On observe les interférences sur l'écran E.

Exprimer l'intensité lumineuse $I_1(x)$ au point M en fonction de x, i, i' et de sa valeur maximale I_{\max} .

Tracer $I_1(x)$ en fonction de x . Donner une interprétation sommaire de cette courbe.

II-A-6-3- Que se passe-t-il au voisinage des points de l'écran où les ordres d'interférence p et p' diffèrent de $\frac{1}{2}$?

Que se passe-t-il au voisinage des points de l'écran où les ordres d'interférence p et p' diffèrent de 1?

II-B) Mesure de la distance angulaire entre les deux composantes d'une étoile double.

On utilise le dispositif de la figure II-2 pour observer une étoile double assimilée à deux sources lumineuses ponctuelles de même puissance d'émission I_0 mutuellement incohérentes S et S'. La distance angulaire entre les étoiles est égale à α .

Le point S' est à l'infini sur l'axe optique du système, le point S est dans le plan Oxz et placé de telle sorte que les rayons qu'il émet sont inclinés d'un angle α avec l'axe optique du système (Figure II-2). On se place dans le cas où le système ne reçoit qu'une radiation de longueur d'onde λ_0 .

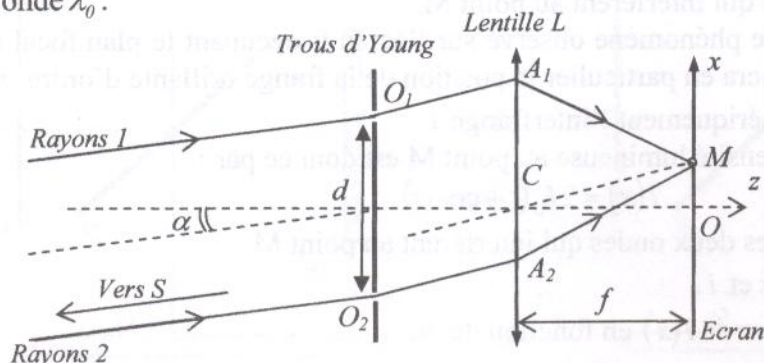


Figure II-2

II-B-1- Déterminer l'intensité lumineuse produite au point M par chacune des composantes de l'étoile double. En déduire l'intensité totale $I_t(x)$ produite par l'étoile double.

II-B-2- Montrer que pour certaines valeurs particulières de la distance d l'intensité devient uniforme.

II-B-3- Déterminer la plus petite de ces valeurs, notée d_0 , en fonction de λ_0 et α .

A. N. Pour $\lambda_0 = 580 \text{ nm}$, on mesure $d_0 = 1,32 \text{ m}$. En déduire α en seconde d'arc.

Partie III : Principes de base de l'Holographie.

La réalisation d'un hologramme est constituée de deux étapes. La première, l'enregistrement, consiste à garder une trace de la phase d'un objet par interférométrie en utilisant une onde de référence. La seconde, la restitution, permet de récupérer la phase en éclairant le film de l'enregistrement par la même onde de référence.

III-A) Enregistrement.

On considère une source ponctuelle monochromatique (Laser) de longueur d'onde λ_0 que l'on place au foyer objet d'une lentille convergente de focale f' (voir Figure III-1). Le faisceau émergent arrive sur un interféromètre de Michelson réglé en coin d'air. Par rapport à la position des miroirs correspondant au contact optique, le miroir M_2 est incliné d'un angle α . S_p correspond à la séparatrice qui divise le faisceau en deux sans apporter de modification dans le chemin optique : on suppose donc que la séparatrice n'introduit aucun déphasage supplémentaire.

L'air a le même indice que le vide $n_0 = 1$.

III-A-1- Quelle est la nature de l'onde à la sortie de la lentille convergente \mathcal{L} , parallèle à M_1 ? Dans le repère orthogonal $Oxyz$ tel que l'axe Oy est confondu avec l'arête du coin d'air, déterminer les composantes des vecteurs d'ondes des deux faisceaux issus du Michelson et qui interfèrent, en fonction de la longueur d'onde λ_0 . Que vaut le déphasage en O ?

III-A-2- Déterminer le déphasage $\Delta\phi$ entre l'onde qui s'est réfléchiée sur M_2 et celle qui s'est réfléchiée sur M_1 en un point M quelconque du champ d'interférences.

III-A-3- Montrer que l'intensité lumineuse, en un point M situé sur l'écran dans le plan $z = D$ est donnée par l'expression :

$$I(x) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} (-x \sin(2\alpha) + D(1 - \cos(2\alpha))) \right) \right]$$

III-A-4- Les interférences sont-elles localisées ou non localisées? Justifier votre réponse.

III-A-5- Préciser la nature des franges observées. En déduire l'expression de l'interfrange i puis sa valeur numérique.

Données : $\lambda_0 = 632,8 \text{ nm}$; $\alpha = 1^\circ$.

III-A-6- On intercale maintenant entre la lame séparatrice S_P et le miroir M_1 , une lame de verre à faces parallèles d'épaisseur e et d'indice n (représentée en pointillés sur la **Figure III-2**). Cette lame est disposée parallèlement à M_1 . On néglige les phénomènes de réflexion sur cette lame.

Quel déphasage supplémentaire cela implique-t-il pour un rayon traversant deux fois cette lame de verre ? Cette lame occasionne-t-elle une avance ou un retard de phase ? La lame atténue l'amplitude de l'onde incidente et celle-ci, qui valait A_0 avant le passage dans la lame, vaut εA_0 après deux passages, avec $\varepsilon \ll 1$.

III-A-7- Déterminer l'amplitude résultante au même point M que précédemment.

III-A-8- Trouver l'expression de l'intensité lumineuse. Simplifier en tenant compte de la très faible valeur de ε (on pourra faire un développement à l'ordre 1).

III-A-9- Donner l'expression du nouvel interfrange et comparer avec la valeur précédente.

Quelle est l'influence de la lame sur la figure d'interférences ?

III-A-10- On enregistre cette figure d'interférences sur une plaque photographique de hauteur L dans une direction perpendiculaire aux franges, disposée sur l'écran précédent. Combien voit-on, à une frange près, de franges brillantes sur cette plaque ?

On donne : $L = 2,0 \text{ cm}$.

III-B) Restitution.

Si l'on choisit convenablement le temps de pause, la plaque photographique a un facteur de transparence (ou transmittance) $t(x) = a + b I(x)$, avec a et b deux constantes réelles, et I l'intensité lumineuse au niveau de la plaque, que l'on a précédemment déterminée en présence de la lame de verre.

III-B-1- Déterminer la transmittance $t(x)$ de ce film développé que l'on appelle également hologramme. On retire maintenant la plaque photographique du dispositif précédent et on la place au niveau d'un trou percé dans un écran opaque (**Figure III-3**). Les dimensions du trou rectangulaire sont L et h avec $h \gg L \gg \lambda_0$. On éclaire ensuite ce trou par une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ_0 , en incidence normale, identique à la source utilisée pour l'enregistrement.

III-B-2- Rappeler en quelques mots la signification physique du principe d'Huygens-Fresnel.

III-B-3- Pourquoi peut-on se contenter d'étudier la diffraction selon une direction parallèle à Ox ?

III-B-4 Justifier précisément que l'amplitude diffractée à l'infini dans la direction faisant un angle θ petit par rapport à l'axe Oz (**Figure III-4**) peut s'écrire :

$$\underline{A}(\theta) = h A_0(\theta) \int_{-L/2}^{L/2} t(x) e^{-i \frac{2\pi}{\lambda_0} x \sin \theta} dx.$$

III-B-5- En écrivant le cosinus intervenant dans l'expression du facteur de transparence sous forme de deux exponentielles complexes, montrer que cette amplitude diffractée à l'infini s'exprime comme la superposition de trois termes dont on donnera l'amplitude et la direction du maximum de chacun.

III-B-6- À quelle condition ces trois termes sont-ils séparés deux à deux ?

III-B-7- Montrer que l'un de ces trois termes reconstitue l'onde initiale réfléchi par le miroir M_1 . Comment peut-on alors justifier la sensation de relief ?

III-B-8- Un autre terme est souvent nommé « onde jumelle ». Justifier également une telle appellation.

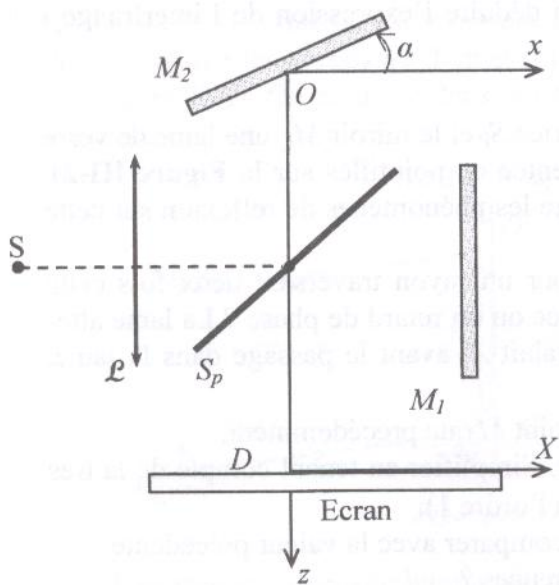


Figure III-1

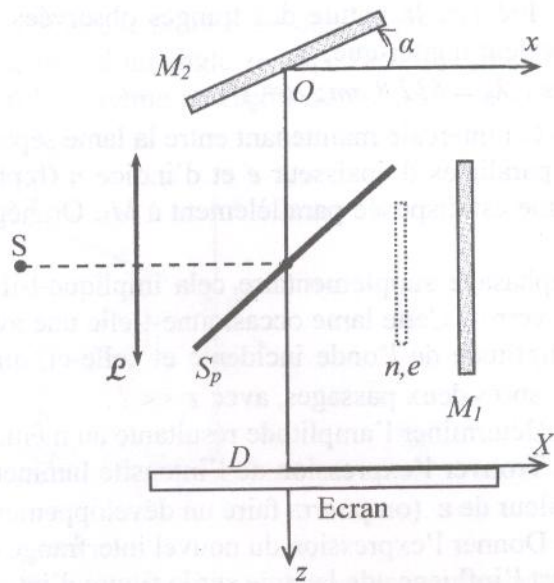


Figure III-2

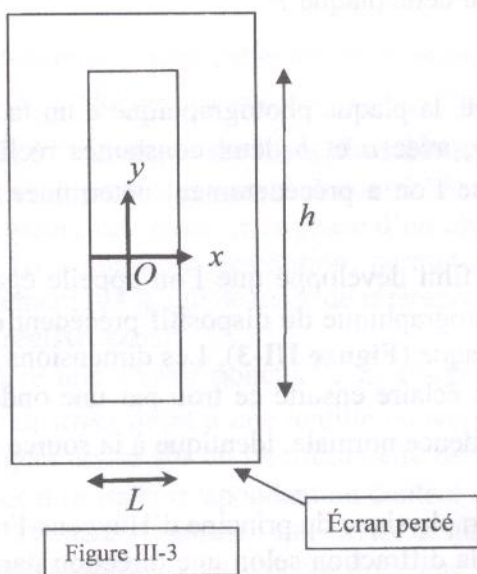


Figure III-3

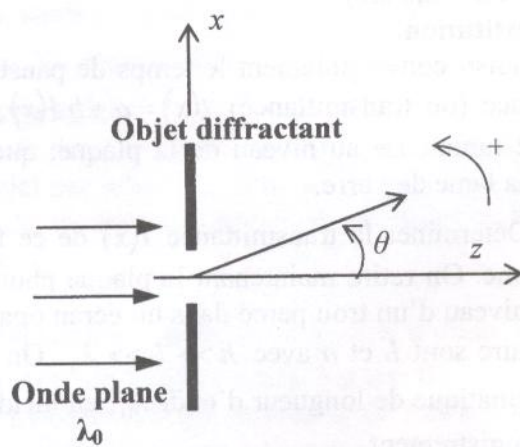


Figure III-4