



République Tunisienne

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR,  
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE ET DES  
TECHNOLOGIES DE L'INFORMATION  
ET DE LA COMMUNICATION

Signature des  
enseignants

**Concours Nationaux d'Entrée aux  
Cycles de Formation d'Ingénieurs**

Session : Juin 2014

Concours : Mathématiques et Physique  
&  
Physique et Chimie

Epreuve de : Sciences et Techniques de l'Ingénieur

Durée : 3 Heures

Nom : .....

Prénom .....

Date & lieu de naissance : .....

Etablissement d'origine : .....

N° C.I.N ou N° du Passeport pour les étrangers :

--	--	--	--	--	--	--	--	--

Série :

--	--	--

Identifiant :

--	--	--	--	--	--

NE RIEN ÉCRIRE ICI

Nombre de Cahiers remis
01

Nombre de Cahiers remis
01

NE RIEN ÉCRIRE ICI

# DOSSIER

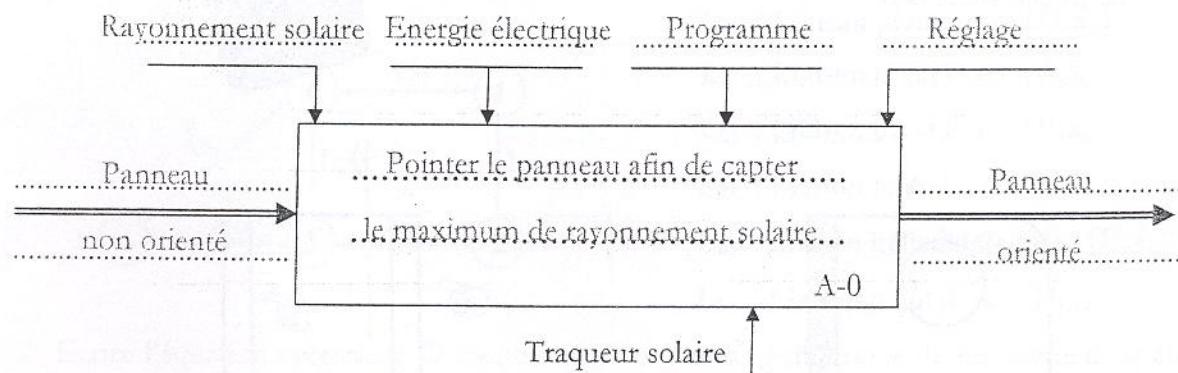
## DOCUMENT REONSES

- ✓ Ce dossier comporte 18 pages numérotées de 1 à 18
  - Partie A - Technologie de conception : Pages 1/18 à 2/18 ;
  - Partie B - Mécanique des solides indéformables : Pages 3/18 à 10/18 ;
  - Partie C - Automatique : Pages 11/18 à 18/18 ;
- ✓ Un seul dossier document réponses est fourni au candidat et doit être rendu, en totalité, même sans réponses à la fin de l'épreuve.
- ✓ Le renouvellement de ce dossier est interdit.

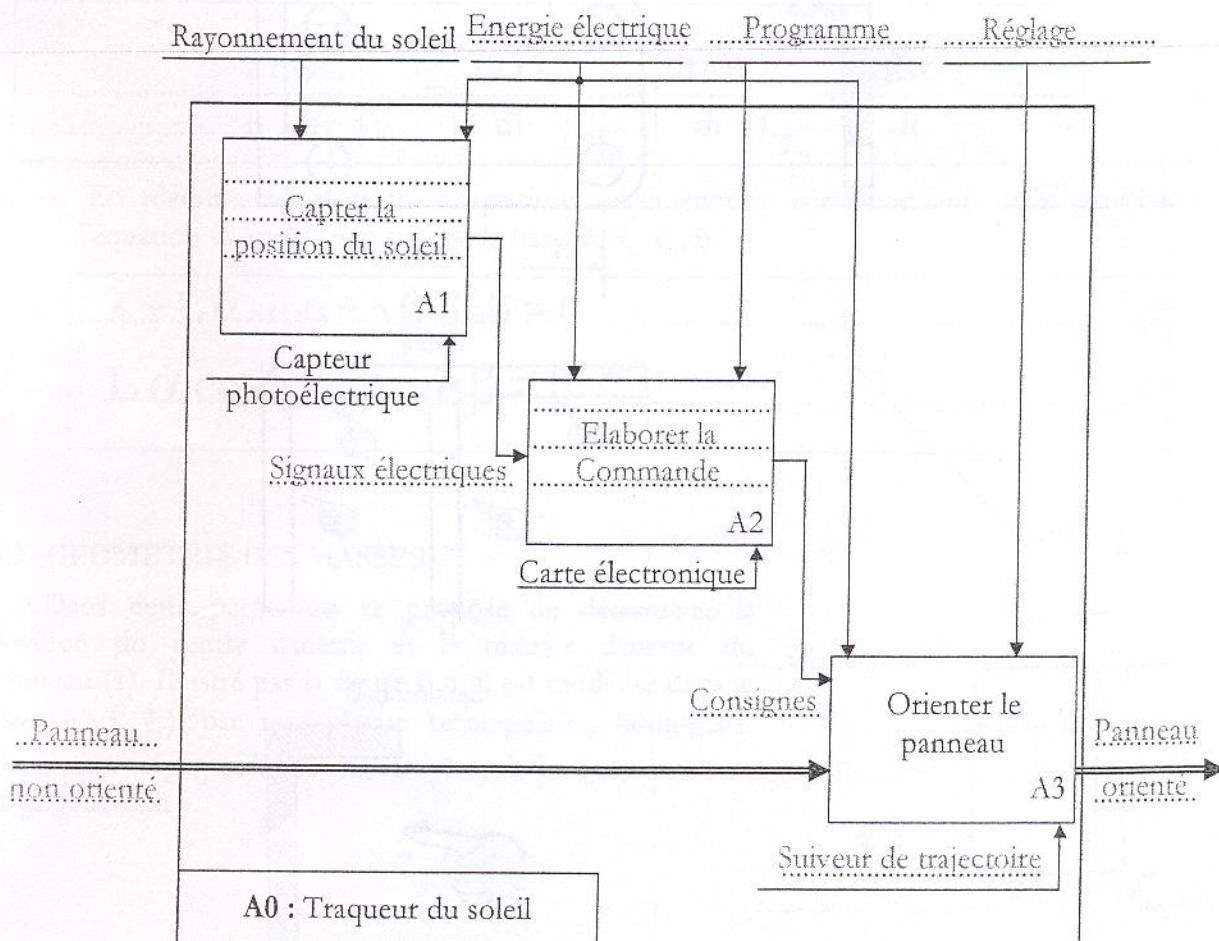
## PARTIE A : TECHNOLOGIE DE CONCEPTION

### A.1- ANALYSE FONCTIONNELLE

A.1.1- Indiquer, dans l'actigramme niveau A-0, la fonction globale du traqueur solaire.



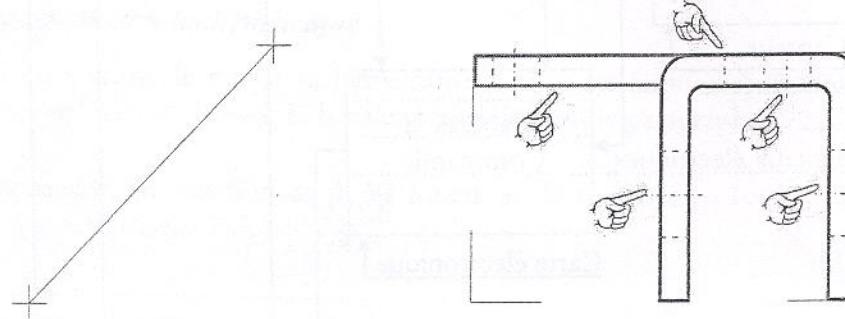
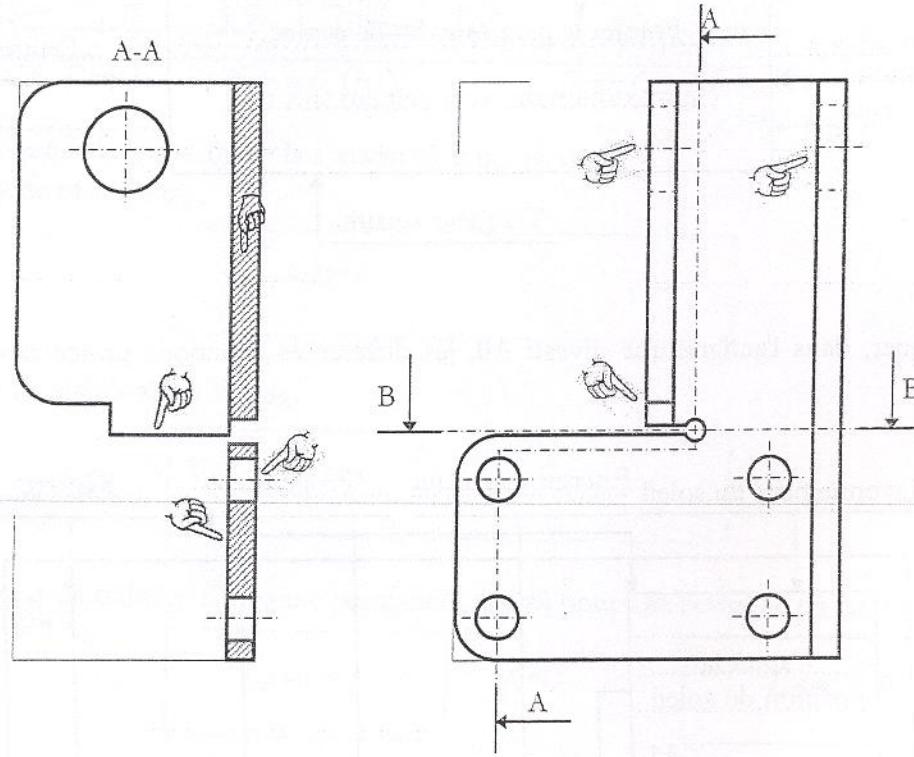
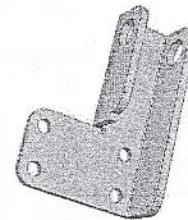
A.1.2- Indiquer, dans l'actigramme niveau A0, les différentes fonctions principales du traqueur solaire.



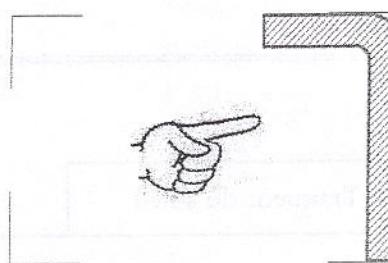
## A.2- ETUDE GRAPHIQUE

On donne le dessin en perspective de la chape du vérin en acier. Compléter le dessin de définition de cette pièce par :

- La vue de face ;
- La vue de dessus ;
- La vue de droite en coupe A-A ;
- La section sortie B-B.



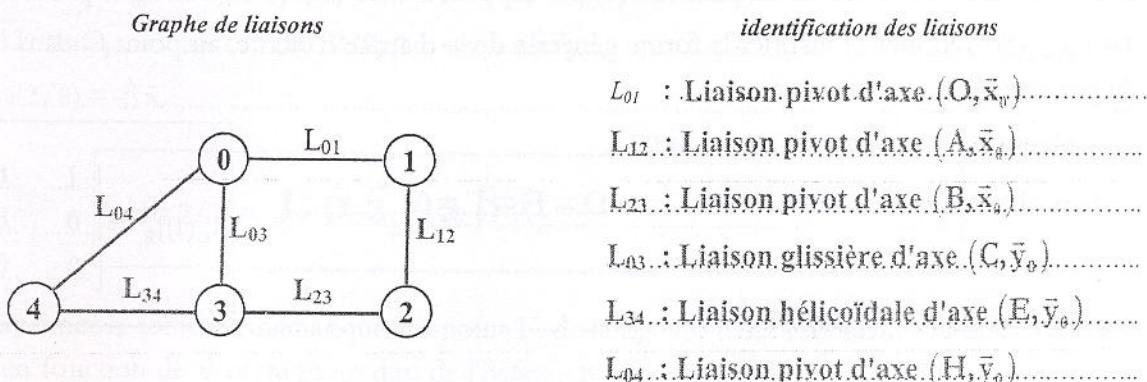
Section B-B



## PARTIE B : MECANIQUE DES SOLIDES INDEFORMABLES

### B.1- ETUDE DES CHAINES CINEMATIQUES

B.1.1- Compléter le graphe et identifier les liaisons du mécanisme.



B.1.2- Ecrire l'équation vectorielle ① traduisant la condition géométrique de fermeture de la chaîne cinématique (01230) :

$$\boxed{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO} = \vec{0}} \quad ①$$

B.1.3- La dérivée temporelle de l'équation ① par rapport au repère  $\mathcal{R}_0$  s'écrit :

$$\boxed{\left( \frac{d\overrightarrow{OC}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0} = \left( \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0} + \left( \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0} + \left( \frac{d\overrightarrow{BC}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0}} \quad ②$$

B.1.4- En déduire le système d'équations cinématiques correspondant à la projection de l'équation ② sur les vecteurs de la base  $\mathcal{R}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z})$ .

$$\boxed{\begin{cases} \lambda + L \dot{\alpha} \sin \alpha + a \dot{\beta} \sin \beta = 0 \\ L \dot{\alpha} \cos \alpha - a \dot{\beta} \cos \beta = 0 \end{cases}} \quad \begin{matrix} ③ \\ ④ \end{matrix}$$

### B.2- GEOMETRIE DES MASSES

Dans cette partie, on se propose de déterminer la position du centre d'inertie et la matrice d'inertie du panneau (1). Illustré par la figure B.6, il est modélisé dans le plan  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$  par une plaque rectangulaire, homogène, d'épaisseur négligeable, de masse « m », de longueur « L » et de largeur « 2h ».

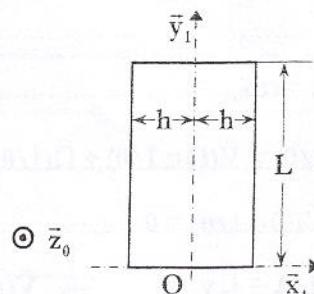


Figure B.6 : Modèle du panneau (1) dans le plan  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ .

B.2.1- Exprimer, dans la base  $\mathcal{B}_1$ , le vecteur position  $\overline{OG_1}$  du centre d'inertie  $G_1$  du panneau (1).

$$\overline{OG_1} = \dots \frac{\mathbf{L}}{2} \vec{\mathbf{y}}_1 \dots$$

B.2.2- Le moment d'inertie du panneau (1) par rapport à l'axe  $(O, \vec{x}_1)$  sera désigné par la lettre « I » :  $I = I_{(O, \vec{x}_1)}(1)$ . Donner et justifier la forme générale de la matrice d'inertie, au point O dans la base  $\mathcal{B}_1$ , du panneau (1).

...Les plans  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$  et  $(O, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  sont les.....

....deux plans de symétrie matérielle  $\Rightarrow D \equiv E \equiv F \equiv 0$ .....

.....

.....En plus :  $A \equiv I_{(O, \vec{x}_1)}(1) \equiv I$ .....

$$[I_O(1)]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$

B.2.3- Le panneau (1) est-il statiquement et dynamiquement équilibré par rapport à l'axe  $(O, \vec{x}_0)$  ? Justifier votre réponse.

Le panneau (1) est dynamiquement équilibré ssi :

\* (1) est statiquement équilibré c.à.d. que  $G_1$  appartient à l'axe de rotation  $(O, \vec{x}_0)$ .....

\* L'axe  $(O, \vec{x}_0)$  est un axe principal d'inertie.....

.....Or :  $G_1 \notin (O, \vec{x}_0) \Rightarrow (1)$  n'est ni statiquement ni dynamiquement équilibré.....

**en fonction de m et L**

B.2.4- Déterminer le moment d'inertie « I » du panneau (1) en fonction de m, L et h.

$$I = \int_{(1)} (y^2 + z^2) dm = \int_{(1)} y^2 dm$$

$$dm = \frac{m}{2hL} dx dy ; x \in [-h, h] \text{ et } y \in [0, L]$$

$$I = \frac{m L^2}{3}$$

$$I = \frac{m}{2hL} \int_{-h}^h dx \int_0^L y^2 dy = \frac{m L^2}{3}$$

### B.3- ETUDE CINÉMATIQUE

B.3.1- Déterminer le torseur cinématique, au point A, du panneau (1) dans son mouvement par rapport au support (0).

$$*\bar{\Omega}(1/0) = \dot{\alpha} \vec{x}_0$$

$$*\bar{V}(A \in 1/0) = \bar{V}(O \in 1/0) + \bar{\Omega}(1/0) \wedge \overline{OA}$$

$$\bar{V}(O \in 1/0) = \bar{0}$$

$$\overline{OA} = L \vec{y}_1 \Rightarrow \bar{V}(A \in 1/0) = L \dot{\alpha} \vec{z}_1$$

$$\bar{\Omega}(1/0) = \dot{\alpha} \vec{x}_0$$

$$\left\{ \mathcal{V}(1/0) \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha} \vec{x}_0 \\ L \dot{\alpha} \vec{z}_1 \end{array} \right\}_A$$

B.3.2- En déduire le vecteur vitesse du point B de la bielle (2) dans son mouvement par rapport au support (0) :  $\vec{V}(B \in 2/0)$ .

$$\dots \vec{V}(B \in 2/0) = \vec{V}(A \in 2/0) + \vec{\Omega}(2/0) \wedge \overline{AB} \dots \text{Or: } \vec{V}(A \in 2/0) = \vec{V}(A \in 2/1) + \vec{V}(A \in 1/0)$$

$$\dots \vec{V}(A \in 2/0) = L \dot{\alpha} \vec{z}_1$$

$$\dots \overline{AB} = a \vec{y}_2 \Rightarrow \vec{V}(B \in 2/0) = L \dot{\alpha} \vec{z}_1 + a \dot{\beta} \vec{z}_2$$

$$\dots \vec{\Omega}(2/0) = \gamma \dot{\beta} \vec{x}_0$$

$$\boxed{\vec{V}(B \in 2/0) = L \dot{\alpha} \vec{z}_1 + a \dot{\beta} \vec{z}_2}$$

B.3.3- Exprimer le torseur cinématique, au point E, de la tige (3) dans son mouvement par rapport à la vis (4) en fonction de  $\dot{\theta}$  et du pas réduit de l'hélice « p » (en mm/rad).

$$\dots * \vec{V}(E \in 3/4) = p \vec{\Omega}(3/4)$$

$$\dots * \vec{\Omega}(3/4) = \vec{\Omega}(3/0) - \vec{\Omega}(4/0)$$

$$\dots \vec{\Omega}(3/0) = \vec{0}$$

$$\dots \vec{\Omega}(4/0) = \dot{\theta} \vec{y}_0 \Rightarrow \vec{\Omega}(3/4) = -\dot{\theta} \vec{y}_0$$

$$\left\{ \mathcal{U}(3/4) \right\}_E = \begin{cases} -\dot{\theta} \vec{y}_0 \\ -p \dot{\theta} \vec{y}_0 \end{cases}_E$$

B.3.4- Déterminer le vecteur vitesse du point E de la tige (3) dans son mouvement par rapport au support (0) :  $\vec{V}(E \in 3/0)$ .

$$\dots \vec{V}(E \in 3/0) = \left( \frac{d \overline{OE}}{dt} \right)_{/R_0} = \left( \frac{d \overline{OC}}{dt} \right)_{/R_0} + \left( \frac{d \overline{CB}}{dt} \right)_{/R_0} + \left( \frac{d \overline{BE}}{dt} \right)_{/R_0}$$

$$\left( \frac{d \overline{OC}}{dt} \right)_{/R_0} = \left( \frac{d \overline{BE}}{dt} \right)_{/R_0} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \left( \frac{d \overline{CB}}{dt} \right)_{/R_0} = \lambda \vec{y}_0$$

$$\boxed{\vec{V}(E \in 3/0) = \lambda \vec{y}_0}$$

B.3.5- En déduire une relation entre les paramètres  $\lambda$  et  $\dot{\theta}$ .

$$\dots \vec{\Omega}(4/0) = \vec{0}$$

$$\dots \vec{\Omega}(4/0) \wedge \overline{HE} = \vec{0} \text{ car colinéaires} \Rightarrow \vec{V}(E \in 4/0) = \vec{0}$$

$$\dots \vec{V}(E \in 3/4) = p \dot{\theta} \vec{y}_0 = \vec{V}(E \in 3/0) + \vec{V}(E \in 4/0) = \lambda \vec{y}_0$$

$$\boxed{\lambda = p \dot{\theta}}$$

B.3.6- Déterminer le vecteur vitesse du point B de la tige (3) dans son mouvement par rapport au support (0):  $\vec{V}(B \in 3/0)$  en fonction du paramètre  $\lambda$ .

$\vec{V}(B \in 3/0) = \vec{V}(E \in 3/0)$  .... Car la tige (3) est en translation par rapport au support (0).

$$\vec{V}(B \in 3/0) = \dot{\lambda} \vec{y}_0$$

B.3.7- Ecrire la condition cinématique au centre B de la liaison pivot entre la bielle (2) et la tige (3) :

$$\vec{V}(B \in 3/2) = \vec{V}(B \in 3/0) - \vec{V}(B \in 2/0) = \vec{0}$$

Déduire, par projection dans la base  $\mathcal{B}_0$ , le système d'équations qui en découlent.

$$\vec{V}(B \in 3/0) - \vec{V}(B \in 2/0) = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}(B \in 3/0) = \vec{V}(B \in 2/0)$$

$$\Rightarrow \dot{\lambda} \vec{y}_0 = L \dot{\alpha} \vec{z}_1 + a \dot{\beta} \vec{z}_2$$

$$\begin{cases} \vec{z}_1 = -\sin \alpha \vec{y}_0 + \cos \alpha \vec{z}_0 \\ \vec{z}_2 = \sin \beta \vec{y}_0 + \cos \beta \vec{z}_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\lambda} + L \dot{\alpha} \sin \alpha + a \dot{\beta} \sin \beta = 0 \\ L \dot{\alpha} \cos \alpha + a \dot{\beta} \cos \beta = 0 \end{cases}$$

#### B.4- ETUDE CINEMATIQUE

B.4.1- Déterminer le torseur cinétique puis le torseur dynamique au point O du panneau (1) dans son mouvement par rapport au support (0).

$$*\vec{R}_c(1/0) = \vec{P}(1/0) = m \vec{V}(G_t/0) = \frac{m L \dot{\alpha}}{2} \vec{z}_t$$

$$*\vec{\alpha}_c(1/0) = [L_0(1)] \vec{\Omega}(1/0) = L \ddot{\alpha} \vec{x}_0$$

$$*\vec{R}_o(1/0) = m \vec{y}(G_t/0) = \frac{m L}{2} (\dot{\alpha} \vec{z}_t - \dot{\alpha}^2 \vec{y}_t)$$

$$*\vec{\delta}_o(1/0) = \left( \frac{d\vec{\alpha}_o(1/0)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_0} = L \ddot{\alpha} \vec{x}_0$$

$$\{\mathcal{C}(1/0)\}_O = \begin{Bmatrix} 0 & L \dot{\alpha} \\ -(m L \dot{\alpha}/2) \sin \alpha & 0 \\ (m L \dot{\alpha}/2) \cos \alpha & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}_0}^O$$

$$\{\mathcal{D}(1/0)\}_O = \begin{Bmatrix} 0 & L \ddot{\alpha} \\ -\frac{m L}{2} (\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha) & 0 \\ \frac{m L}{2} (\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha) & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}_0}^O$$

B.4.2- Déterminer le torseur cinétique puis le torseur dynamique au point B de la tige (3) dans son mouvement par rapport au support (0).

$$\begin{aligned} * \bar{R}_c(3/0) &\equiv \bar{P}(3/0) \equiv M \bar{V}(G_3/0) \equiv M \ddot{\lambda} \cdot \bar{y}_b \\ * \bar{\delta}_B(3/0) &\equiv \bar{0} \end{aligned}$$

$$\{\mathcal{C}(3/0)\}_B = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ M \ddot{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathcal{B}_0}$$

$$\begin{aligned} * \bar{R}_D(3/0) &\equiv M \bar{V}(G_3/0) \equiv M \ddot{\lambda} \cdot \bar{y}_b \\ * \bar{\delta}_B(3/0) &\equiv \left( \frac{d\bar{\delta}_B(3/0)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_0} + M \bar{V}(B/0) \wedge \bar{V}(G_3/0) \equiv \bar{0} \end{aligned}$$

Car  $\bar{V}(B/0)$  et  $\bar{V}(G_3/0)$  sont colinéaires

$$\{\mathcal{D}(3/0)\}_B = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ M \ddot{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathcal{B}_0}$$

B.4.3- En déduire le torseur dynamique au point O du système  $\{S\} = \{1, 2, 3, 4\}$  dans son mouvement par rapport au support (0).

$$* \bar{R}_D(S/0) \equiv m \bar{V}(G_1/0) + M \bar{V}(G_3/0) \equiv \frac{mL}{2} (\ddot{\alpha} \bar{x}_t - \dot{\alpha}^2 \bar{y}_t) + M \ddot{\lambda} \cdot \bar{y}_b = f_1 \bar{y}_b + f_2 \bar{x}_t$$

$$f_1 \equiv M \ddot{\lambda} - \frac{mL}{2} (\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha) \text{ et } f_2 \equiv \frac{mL}{2} (\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha)$$

$$* \bar{\delta}_O(3/0) \equiv \bar{\delta}_B(3/0) + M \bar{O} \bar{B} \wedge \bar{V}(G_3/0) \equiv \bar{0}$$

$$\bar{\delta}_O(S/0) \equiv \bar{\delta}_O(1/0) + \bar{\delta}_O(3/0) \equiv I \ddot{\alpha} \bar{x}_b$$

$$\{\mathcal{D}(S/0)\}_O = \begin{Bmatrix} 0 & I \ddot{\alpha} \\ f_1 & 0 \\ f_2 & 0 \end{Bmatrix}_O^{\mathcal{B}_0}$$

B.4.4- Déterminer l'énergie cinétique  $E_c(S/0)$  du système  $\{S\} = \{1, 2, 3, 4\}$  dans son mouvement par rapport au support (0).

$$E_c(S/0) \equiv E_c(1/0) + E_c(2/0) + E_c(3/0) + E_c(4/0)$$

\*  $E_c(2/0) \equiv E_c(4/0) \equiv 0$  car les deux solides sont de masses négligeables.

$$* E_c(1/0) \equiv \frac{1}{2} \{\mathcal{E}(1/0)\}_{f_O} \{\mathcal{U}(1/0)\}_{f_O} \equiv \frac{1}{2} I \dot{\alpha}^2$$

$$* E_c(3/0) \equiv \frac{1}{2} \{\mathcal{E}(3/0)\}_{B'} \{\mathcal{U}(1/0)\}_B \equiv \frac{1}{2} M \dot{\lambda}^2$$

$$E_c(S/0) = \frac{1}{2} I \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} M \dot{\lambda}^2$$

## B.5- MODELISATION DES ACTIONS MECANIQUES

B.5.1- Montrer que le torseur correspondant à l'action du vent sur le panneau (1) s'écrit, au point O,

sous la forme :  $\{\tau(\text{vent} \rightarrow 1)\}_O = \begin{Bmatrix} 0 & M_0 \\ F_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}^{\mathcal{B}_0}_O$ .

En déduire les composantes  $F_0$  et  $M_0$  en fonction de  $q$ ,  $L$  et  $\alpha$ .

$$\{\tau(\text{vent} \rightarrow 1)\}_O = \begin{Bmatrix} \bar{R}(\text{vent} \rightarrow 1) \\ \bar{M}_O(\text{vent} \rightarrow 1) \end{Bmatrix}_O$$

$$*\bar{R}(\text{vent} \rightarrow 1) = \int_{M \in (1)} \bar{f}_M(\text{vent} \rightarrow 1) d\ell \quad \text{et} \quad *\bar{M}_O(\text{vent} \rightarrow 1) = \int_{M \in (1)} \overline{OM} \wedge \bar{f}_M(\text{vent} \rightarrow 1) d\ell$$

Où :  $M$  un point quelconque du panneau (1) tel que :  $\overline{OM} = y \bar{y}_v$ ,  $d\ell = dy$  et  $\bar{f}_M(\text{vent} \rightarrow 1) = q \bar{y}_v$

$$*\bar{R}(\text{vent} \rightarrow 1) = \int_{M \in (1)} \bar{f}_M(\text{vent} \rightarrow 1) d\ell = \int_0^L (q \bar{y}_v) dy = q L \bar{y}_v$$

$$*\bar{M}_O(\text{vent} \rightarrow 1) = \int_{M \in (1)} \overline{OM} \wedge \bar{f}_M(\text{vent} \rightarrow 1) d\ell = q \sin \alpha \left( \int_0^L y dy \right) \bar{x}_0 = \frac{q L^2}{2} \sin \alpha \bar{x}_0$$

$$F_0 = \dots q L \dots$$

$$M_0 = \frac{q L^2}{2} \sin \alpha$$

B.5.2- La liaison entre (0) et (3) au point C est une liaison avec frottement de glissement de coefficient «  $f$  ». Enoncer la première loi de Coulomb en cas de glissement.

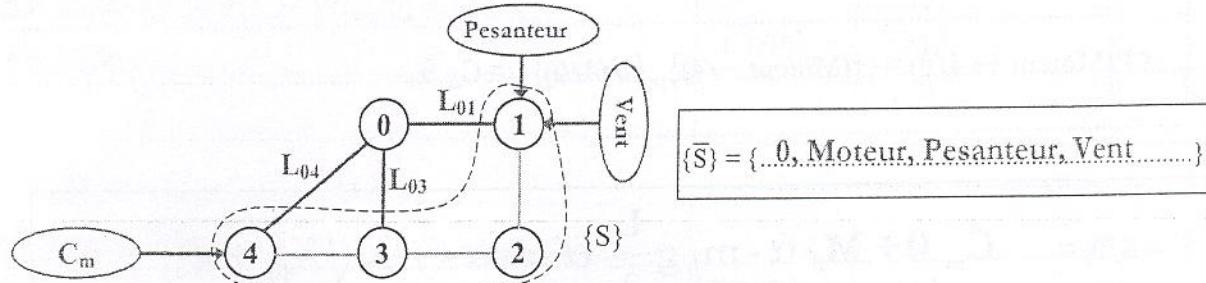
$\begin{cases} \bar{T}(0 \rightarrow 3) \wedge \bar{V}(C \in 3/0) = \bar{0} \\ \bar{T}(0 \rightarrow 3) \cdot \bar{V}(C \in 3/0) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$  La composante tangentielle et la vitesse de glissement sont colinéaires et de sens opposé.  
En plus :  $\|\bar{T}(0 \rightarrow 3)\| = f \|\bar{N}(0 \rightarrow 3)\|$   $f$  est le coefficient de frottement de glissement.

$\bar{V}(C \in 3/0) = \lambda \bar{y}_v$  Si la liaison glissière est parfaite  $\bar{R}(0 \rightarrow 3) = \bar{N}(0 \rightarrow 3) = X_{03} \bar{x}_0 + Z_{03} \bar{z}_0$   
Alors :  $\bar{T}(0 \rightarrow 3) = f \|\bar{N}(0 \rightarrow 3)\| \bar{y}_v = f \sqrt{X_{03}^2 + Z_{03}^2} \bar{y}_v$

En déduire le torseur :  $\{\tau(0 \rightarrow 3)\}_C$ .

$$\{\tau(0 \rightarrow 3)\}_C = \begin{Bmatrix} X_{03} & L_{03} \\ -f \sqrt{X_{03}^2 + Z_{03}^2} & M_{03} \\ Z_{03} & N_{03} \end{Bmatrix}^{\mathcal{B}_0}_C$$

B.5.3- Compléter le graphe d'interaction et faire l'inventaire des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur le système  $\{S\} = \{1, 2, 3, 4\}$ . Ecrire, au point O et dans la base  $\mathcal{B}_0(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ , le torseur des actions mécaniques extérieures exercées sur le système  $\{S\} = \{1, 2, 3, 4\}$  :  $\{\tau(\bar{S} \rightarrow S)\}_O$ .



$$*\{\tau(\bar{S} \rightarrow S)\}_O = \{\tau(0 \rightarrow S)\}_O + \{\tau(\bar{P}_t \rightarrow 1)\}_O + \{\tau(Vent \rightarrow 1)\}_O + \{\tau(Moteur \rightarrow 4)\}_O$$

$$\{\tau(Vent \rightarrow 1)\}_O = \begin{Bmatrix} 0 & M_0 \\ F_v & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O \quad \{\tau(\bar{P}_t \rightarrow 1)\}_{G_t} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -mg & 0 \end{Bmatrix}_{G_t} \quad \{\tau(Moteur \rightarrow 4)\}_O = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_m \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O$$

$$\{\tau(0 \rightarrow 1)\}_O = \begin{Bmatrix} X_{01} & 0 \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & N_{01} \end{Bmatrix}_O \quad \{\tau(0 \rightarrow 3)\}_C = \begin{Bmatrix} X_{03} & L_{03} \\ 0 & M_{03} \\ Z_{03} & N_{03} \end{Bmatrix}_C \quad \{\tau(0 \rightarrow 4)\}_H = \begin{Bmatrix} X_{04} & 0 \\ Y_{04} & M_{04} \\ Z_{04} & N_{04} \end{Bmatrix}_H$$

$$*\bar{M}_O(0 \rightarrow 3) = \bar{M}_C(0 \rightarrow 3) + \overline{OC} \wedge \bar{R}(0 \rightarrow 3) \quad *\bar{M}_O(\bar{P}_t \rightarrow 1) = \overline{OG_1} \wedge \bar{P}_t$$

$$*\bar{M}_O(0 \rightarrow 4) = \bar{M}_H(0 \rightarrow 3) + \overline{OH} \wedge \bar{R}(0 \rightarrow 4) \quad \text{On pose : } \overline{OC} = b_0 \bar{y}_0 \text{ et } \overline{OH} = b_1 \bar{y}_0$$

$$\{\tau(\bar{S} \rightarrow S)\}_O = \left\{ \begin{array}{l} X_{01} + X_{04} \dots L_{03} + L_{04} + M_{01} + b_1 Z_{03} + b_1 Z_{04} - \frac{mgL}{2} \sin \alpha \\ Y_{01} + Y_{04} + Y_{03} + F_v - f \sqrt{X_{03}^2 + Z_{03}^2} \dots M_{04} + M_{03} + C_m \\ Z_{01} + Z_{03} + Z_{04} - m \cdot g \dots N_{01} + N_{03} + N_{04} - b_1 X_{04} \end{array} \right\}_O$$

## B.6- EQUATIONS DYNAMIQUES

B.6.1- Déterminer la puissance développée par les actions mécaniques extérieures exercées sur le système  $\{S\} = \{1, 2, 3, 4\}$  dans son mouvement par rapport au support (0).

$$*\dot{P}(\bar{S} \rightarrow S/0) = P(0 \rightarrow S/0) + P(\bar{P}_t \rightarrow 1/0) + P(Vent \rightarrow 1/0) + P(Moteur \rightarrow 4/0)$$

$$*\dot{P}(0 \rightarrow S/0) = P(0 \rightarrow 1/0) + P(0 \rightarrow 4/0) = 0$$

En effet :  $P(0 \rightarrow 1/0) = P(0 \leftrightarrow 1) \cdot \cancel{P(1 \rightarrow 0/0)} = 0$  car la liaison  $L_{01}$  est parfaite.

$P(0 \rightarrow 4/0) = P(0 \leftrightarrow 4) \cdot \cancel{P(4 \rightarrow 0/0)} = 0$  car la liaison  $L_{04}$  est parfaite.

$$*\dot{P}(0 \rightarrow 3/0) = \{\tau(0 \rightarrow 3)\}_C \cdot \{\mathcal{V}(3/0)\}_C = -f \lambda \sqrt{X_{03}^2 + Z_{03}^2}$$

$$* P(\vec{P}_1 \rightarrow 1/0) = \{\tau(\vec{P}_1 \rightarrow 1)\}_{\text{o}} \cdot \{\mathcal{U}(1/0)\}_{\text{o}} = m_1 g \frac{L}{2} \dot{\alpha} \cos \alpha$$

$$* P(\text{Vent} \rightarrow 1/0) = \{\tau(\text{Vent} \rightarrow 1)\}_{\text{o}} \cdot \{\mathcal{U}(1/0)\}_{\text{o}} = M_0 \dot{\alpha}$$

$$* P(\text{Moteur} \rightarrow 4/0) = \{\tau(\text{Moteur} \rightarrow 4)\}_{\text{tr}} \cdot \{\mathcal{U}(4/0)\}_{\text{tr}} = C_m \dot{\theta}$$

$$P(\bar{S} \rightarrow S/0) = C_m \dot{\theta} + M_0 \dot{\alpha} - m_1 g \frac{L}{2} \dot{\alpha} \cos \alpha - f \lambda \sqrt{X_{03}^2 + Z_{03}^2}$$

B.6.2- Ecrire l'équation qui découle de l'application du théorème de l'énergie cinétique au système  $\{S\} = \{1, 2, 3, 4\}$  dans son mouvement par rapport au support (0).

$$\text{T.E.C. : } \frac{dE(S/0)}{dt} = P(\bar{S} \rightarrow S/0) + \mathcal{P}_{\text{int}}$$

$$* \mathcal{P}_{\text{int}} = P(1 \leftrightarrow 2) + P(2 \leftrightarrow 3) + P(3 \leftrightarrow 4) = 0 \text{ car les liaisons L}_2, L_3 \text{ et } L_4 \text{ sont parfaites.}$$

$$I \ddot{\alpha} \ddot{\alpha} + M \ddot{\lambda} \ddot{\lambda} = C_m \dot{\theta} + M_0 \dot{\alpha} - m_1 g \frac{L}{2} \dot{\alpha} \cos \alpha - f \lambda \sqrt{X_{03}^2 + Z_{03}^2}$$

B.6.3- En déduire l'expression du couple moteur  $C_m$  en fonction de  $F_0$  et les paramètres cinématiques.

$$\lambda = p \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = -\frac{\lambda}{p} \quad M_0 = \frac{-q L^2}{2} \sin \alpha; F_0 = q L \Rightarrow M_0 = \frac{-F_0 L}{2} \sin \alpha$$

$$I \ddot{\alpha} \ddot{\alpha} + M \ddot{\lambda} \ddot{\lambda} = \frac{-\lambda C_m}{p} - \frac{F_0 L}{2} \dot{\alpha} \sin \alpha - m_1 g \frac{L}{2} \dot{\alpha} \cos \alpha - f \lambda \sqrt{X_{03}^2 + Z_{03}^2}$$

$$C_m = \frac{p}{\lambda} \left( I \ddot{\alpha} \ddot{\alpha} + M \ddot{\lambda} \ddot{\lambda} + \frac{F_0 L}{2} \dot{\alpha} \sin \alpha + m_1 g \frac{L}{2} \dot{\alpha} \cos \alpha + f \lambda \sqrt{X_{03}^2 + Z_{03}^2} \right)$$

## PARTIE C : AUTOMATIQUE

### C.1- DISPOSITIF D'AFFICHAGE DE LA POSITION D'UN HELIOSTAT

#### C.1.1- Principe du décodeur optique

C.1.1.1- Etablir la table de vérité (Tableau.1) décrivant le fonctionnement de ce codeur optique.

C.1.1.2- Quelles sont les propriétés de ce code ?

C'est un code binaire réfléchi ou cyclique ou de Gray sans position d'arrêt.

#### C.1.2- Décodeur

C.1.2.1- Etablir la table de vérité (Tableau.2) décrivant l'état des LED (a, b, c, d, e, f et g) en fonction de  $(x_3, x_2, x_1, x_0)$ .

Position	Code				Etats des LED de l'afficheur						
	$x_3$	$x_2$	$x_1$	$x_0$	a	b	c	d	e	f	g
0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0
1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0
2	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1
3	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1
4	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
5	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1
6	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
8	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
9	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1

Tableau 1: Table de vérité du codeur optique.

Tableau 2 : Table de vérité de l'afficheur.

C.1.2.2- Déterminer les équations simplifiées des LED (a, b, c, d, e, f et g) à l'aide de minimum des portes.

$\begin{array}{c} \diagup x_3x_2 \\ \diagdown x_1x_0 \end{array}$	00	01	11	10	$a$	$\begin{array}{c} \diagup x_3x_2 \\ \diagdown x_1x_0 \end{array}$	00	01	11	10	
	00	0	1	$\emptyset$			00	1	0	$\emptyset$	$b$
01	$\emptyset$	1	1	$\emptyset$			01	1	0	$\emptyset$	
11	$\emptyset$	1	1	$\emptyset$			11	1	1	$\emptyset$	
10	1	0	1	1			10	1	1	1	

$a = \overline{x_2} + x_3 + x_0$

$b = \overline{x_3} + x_1$

$x_3x_2$	00	01	11	10	
$x_1x_0$	00	0	1	1	$\emptyset$
	01	0	1	1	$\emptyset$
	11	0	1	$\emptyset$	
	10	1	1	1	

*c*

$$c = x_3 + \overline{x_1} + \overline{x_0}$$
  

$x_3x_2$	00	01	11	10	
$x_1x_0$	00	0	0	1	$\emptyset$
	01	0	1	1	$\emptyset$
	11	0	1	0	$\emptyset$
	10	1	0	0	

*d*

$$d = \overline{x_2} + x_3 \cdot \overline{x_1} + (x_3 \oplus x_0)$$

$x_3x_2$	00	01	11	10	
$x_1x_0$	00	0	0	0	$\emptyset$
	01	0	1	$\emptyset$	
	11	0	1	$\emptyset$	
	10	1	0	0	

*e*

$$e = \overline{x_3} \cdot \overline{x_2} + x_3 \cdot x_2 \cdot x_1 \cdot \overline{x_0} + x_0 \cdot (x_3 \oplus x_1)$$
  

$x_3x_2$	00	01	11	10	
$x_1x_0$	00	0	1	1	$\emptyset$
	01	0	0	1	$\emptyset$
	11	0	0	0	$\emptyset$
	10	1	0	1	

*f*

$$f = \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_0} + x_3 \cdot (\overline{x_1} + \overline{x_0})$$

ou

$$f = \overline{x_2} + x_3 \cdot \overline{x_0} + \overline{x_1} \cdot (x_3 + \overline{x_0})$$

$x_3x_2$	00	01	11	10	
$x_1x_0$	00	0	1	1	$\emptyset$
	01	0	1	1	$\emptyset$
	11	0	1	0	$\emptyset$
	10	0	0	1	

*g*

$$g = \overline{x_1} + (x_3 \oplus x_0)$$

## C.2- ASSERVISSEMENT DE POSITION DE LA MONTURE D'UN HELIOSTAT

### C.2.1- Modélisation du moteur

C.2.1.1- Déterminer l'expression de la fonction de transfert du moteur  $M(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)}$ , la mettre sous forme canonique :  $M(p) = \frac{K_m}{1 + \tau_m p}$ .

$$U(p) = R I(p) + E(p) \quad (1)$$

$$E(p) = K_e \Omega_m(p) \quad (2)$$

$$C_m(p) = K_c I(p) \quad (3)$$

$$Jp\Omega_m(p) = C_m(p) \quad (4)$$

$$M(p) = \frac{K_c}{K_c K_e + RJ p} = \frac{\frac{1}{K_e}}{1 + \frac{RJ}{K_c K_e} p}$$

C.2.1.2- En déduire les expressions puis les valeurs de  $K_m$  et de  $\tau_m$ .

$$K_m = \frac{1}{K_e}$$

$$\tau_m = \frac{RJ}{K_c K_e}$$

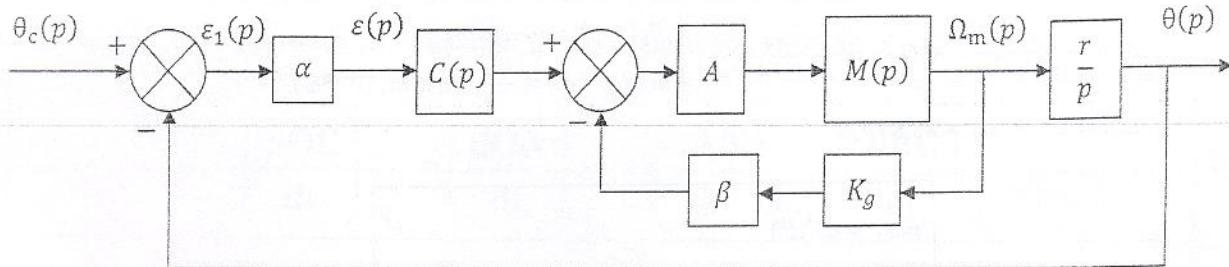
A.N :

$$K_m = 50$$

$$\tau_m = 10^{-2}s$$

### C.2.2- Asservissement de position de la monture de l'héliostat

C.2.2.1- Transformer le schéma fonctionnel de la figure C.4 sous forme d'un système à retour unitaire.



#### C.2.2.2- Sans correction tachymétrique

Dans un premier temps, on fixe  $\beta = 0$  ce qui revient à supprimer la correction par retour tachymétrique. On fixe  $A = 1$ .

Le correcteur proportionnel :  $C(p) = K$  avec  $K > 0$ .

C.2.2.2.1- Déterminer, en fonction de  $K$ , la fonction de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée notées respectivement  $H_o(p)$  et  $H_f(p)$ .

$$H_o(p) = \frac{\alpha \cdot r \cdot A \cdot K \cdot M(p)}{p} = \frac{\alpha \cdot r \cdot A \cdot K \cdot K_m}{p(1 + \tau_m p)}$$

A.N.

$$H_o(p) = \frac{0,1K}{p(1 + 10^{-2}p)}$$

$$H_f(p) = \frac{H_o(p)}{1 + H_o(p)}$$

A.N.

$$H_f(p) = \frac{10K}{p^2 + 100p + 10K}$$

C.2.2.2.2- Exprimer, en fonction de K, le gain statique ( $K_s$ ), le facteur d'amortissement (m) et la pulsation propre ( $\omega_0$ ) du système en boucle fermée.

$$H_f(p) = \frac{K_s \omega_0^2}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} K_s \omega_0^2 = 10K \\ 2m\omega_0 = 100 \\ \omega_0^2 = 10K \end{cases}$$

$$K_s = 1$$

$$m = \frac{50}{\sqrt{10K}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{10K}$$

C.2.2.2.3- Calculer la valeur de K garantissant une réponse indicielle en boucle fermée caractérisée par un facteur d'amortissement  $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

$$K = 500$$

C.2.2.2.4- Pour cette valeur de K, Déterminer :

- La marge de phase  $m\varphi_1$  ;

$$\begin{cases} |H_o(j\omega)| = 1 \\ m\varphi_1 = \pi + \arg H_o(j\omega_u) \end{cases} \Rightarrow \omega_u = ?$$

$$H_o(p) = \frac{50}{p(1+10^{-2}p)}, \quad H_o(j\omega) = \frac{50}{j\omega(1+j10^{-2}\omega)}, \quad \begin{cases} |H_o(j\omega)| = \frac{50}{\omega\sqrt{1+10^{-4}\omega^2}} \\ \arg H_o(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctan(10^{-2}\omega) \end{cases}$$

$$|H_o(j\omega)| = 1 \Rightarrow \omega_u = 45,5 \text{ rd/s}$$

$$m\varphi_1 = 65^\circ, 53$$

- Le temps de stabilisation approximatif  $T_{s1 \pm 5\%}$  ;

$$T_{s1} \approx \frac{3}{m\omega_0} \text{ et } \omega_0 = 70,71 \text{ rd/s}$$

$$T_{s1 \pm 5\%} \approx 0,06s$$

- L'erreur de traînage en régime permanent  $\varepsilon_{v1}(\infty)$  pour une consigne en rampe unitaire.

$$\begin{cases} H_o(p) \text{ est de classe 1} \\ \theta_c(p) = \frac{1}{p^2} \end{cases}$$

$$\varepsilon_{v1}(\infty) = \frac{\infty}{0,1K} \quad A.N. \quad \varepsilon_{v1}(\infty) = 0,2\%$$

Le correcteur est maintenant du type proportionnel intégral :  $C(p) = K_0(1 + \frac{1}{\tau_i p})$ .

C.2.2.2.5- Déterminer, en fonction de  $K_0$  et  $\tau_i$ , la fonction de transfert en boucle ouverte notée  $G_o(p)$ .

$$C(p) = K_0 \left( \frac{1 + \tau_i p}{\tau_i p} \right),$$

$$G_o(p) = \frac{\alpha \cdot r \cdot A \cdot C(p) \cdot M(p)}{p} = \frac{\alpha \cdot r \cdot A \cdot K_m \cdot K_0 (1 + \tau_i p)}{\tau_i p^2 (1 + \tau_m p)}$$

A.N.

$$G_o(p) = \frac{0.1 K_0 (1 + \tau_i p)}{\tau_i p^2 (1 + 10^{-2} p)}$$

C.2.2.2.6- En utilisant le critère de Routh, étudier la stabilité du système en boucle fermée en fonction de  $K_0$  et  $\tau_i$ .

L'équation caractéristique en boucle fermée :  $\tau_i \tau_m p^3 + \tau_i p^2 + \alpha \cdot r \cdot A \cdot K_m \cdot K_0 \tau_i p + \alpha \cdot r \cdot A \cdot K_m \cdot K_0 = 0$

1<sup>ère</sup> condition : Tous les  $a_i$  doivent être présents et de même signe  $\Rightarrow \tau_i > 0$  et  $K_0 > 0$

2<sup>ème</sup> condition : Tous les termes de la 1<sup>ère</sup> colonne de la table de Routh doivent être présents et de même signe.

Table de Routh :

$p^3$	$\tau_i \tau_m$	$\alpha \cdot r \cdot A \cdot K_m \cdot K_0 \tau_i$
$p^2$	$\tau_i$	$\alpha \cdot r \cdot A \cdot K_m \cdot K_0$
$p^1$	$\alpha \cdot r \cdot A \cdot K_m \cdot K_0 (\tau_i - \tau_m)$	
$p^0$	$\alpha \cdot r \cdot A \cdot K_m \cdot K_0$	

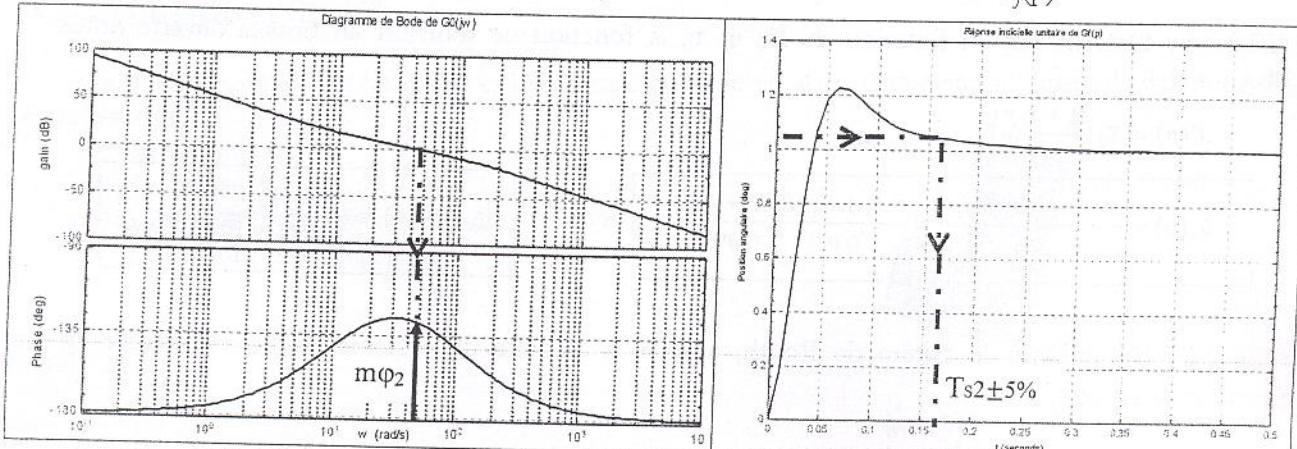
$$K_0 > 0$$

$$\tau_i > \tau_m$$

A.N.

$$\tau_i > 10^{-2} s$$

C.2.2.2.7- Pour  $K_0 = 500$  et  $\tau_i = 0.1s$ , on obtient les diagrammes de Bode (Figure C.5) de  $G_o(j\omega)$  et la réponse indicielle unitaire (Figure C.6) du système en boucle fermée notée  $G_f(p)$ .

Figure C.5 : Diagrammes de Bode de  $G_o(j\omega)$ .Figure C.6 : Réponse indicielle du système en boucle fermée de  $G_f(p)$ .

➤ Déterminer graphiquement (faire la construction nécessaire) :

- La marge de phase  $m\varphi_2$  ;

$$m\varphi_2 \approx 52^\circ, 9$$

- Le temps de stabilisation  $T_{s2\pm5\%}$  ;

$$T_{s2\pm5\%} \approx 0.16 s$$

➤ Calculer l'erreur de traînage en régime permanent  $\varepsilon_{v2}(\infty)$  pour une consigne en rampe unitaire.

$\left\{ \begin{array}{l} G_o(p) \text{ est de classe 2} \\ \theta_c(p) = \frac{1}{p^2} \end{array} \right.$

$$\varepsilon_{v2}(\infty) = 0$$

A.N.

$$\varepsilon_{v2}(\infty) = 0$$

### C.2.2.3- Avec correction tachymétrique

On prend en compte le retour tachymétrique  $\beta \neq 0$ , on impose  $A = 10$  et on considère un correcteur proportionnel :  $C(p) = K$  avec  $K$  la valeur trouvée dans le paragraphe C.2.2.2.3.

C.2.2.3.1- Déterminer, en fonction de  $\beta$ , les fonctions de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée notées respectivement  $T_o(p)$  et  $T_f(p)$ .

$$T_o(p) = \frac{\alpha \cdot r \cdot A \cdot K \cdot K_m}{p(1 + \beta \cdot A \cdot K_g \cdot K_m + \tau_m p)}$$

A.N.

$$T_o(p) = \frac{500}{p(1 + 50\beta + 10^{-2}p)}$$

$$T_f(p) = \frac{T_o(p)}{1 + T_o(p)}$$

A.N.

$$T_f(p) = \frac{5 \cdot 10^4}{p^2 + 100(1 + 50\beta)p + 5 \cdot 10^4}$$

C.2.2.3.2- Montrer qu'il est possible de déterminer le gain  $\beta$  de façon que la réponse indicielle en boucle fermée soit caractérisée par un facteur d'amortissement  $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

$$T_f(p) = \frac{K_s \omega_0^2}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2} \quad \text{Avec} \quad \begin{cases} K_s \omega_0^2 = 5 \cdot 10^4 \\ 2m\omega_0 = 100(1 + 50\beta) \\ \omega_0^2 = 5 \cdot 10^4 \end{cases} \quad \omega_0 = 223,61 \text{ rad/s}$$

$$\beta = 0,043$$

Pour cette valeur de  $\beta$ , on donne sur la figure C.7 les diagrammes de Bode du système en boucle ouverte  $T_o(j\omega)$ .

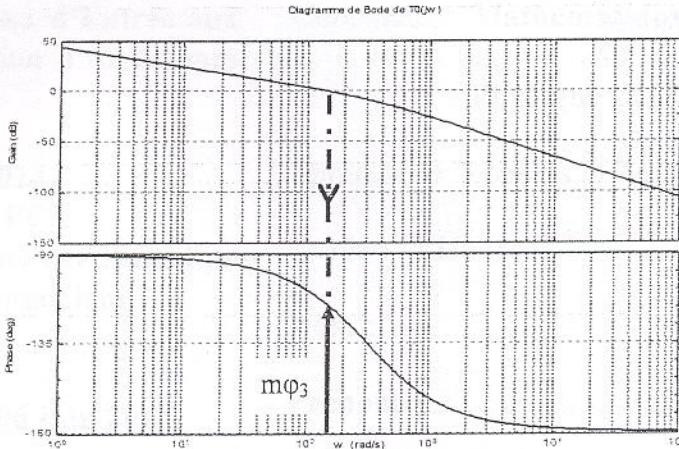


Figure C.7 : Diagrammes de Bode de  $T_o(j\omega)$ .

C.2.2.3.3- Déterminer, graphiquement, la marge de phase  $m\phi_3$  (faire la construction nécessaire).

$$m\phi_3 = 65^\circ, 2$$

C.2.2.3.4- Calculer :

- Le temps de stabilisation approximatif  $T_{s3 \pm 5\%}$  ;

$$T_{s3} \approx \frac{3}{m\omega_0} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = 223,61 \text{ rad/s}$$

$$T_{s3 \pm 5\%} \approx 0,02 \text{ s}$$

- l'erreur de traînage en régime permanent  $\varepsilon_{v3}(\infty)$  pour une consigne en rampe unitaire.

$$\begin{cases} T_o(p) \text{ est de classe 1} \\ \theta_c(p) = \frac{1}{p^2} \end{cases}$$

$$\varepsilon_{v3}(\infty) = \frac{\alpha(1+50\beta)}{500}$$

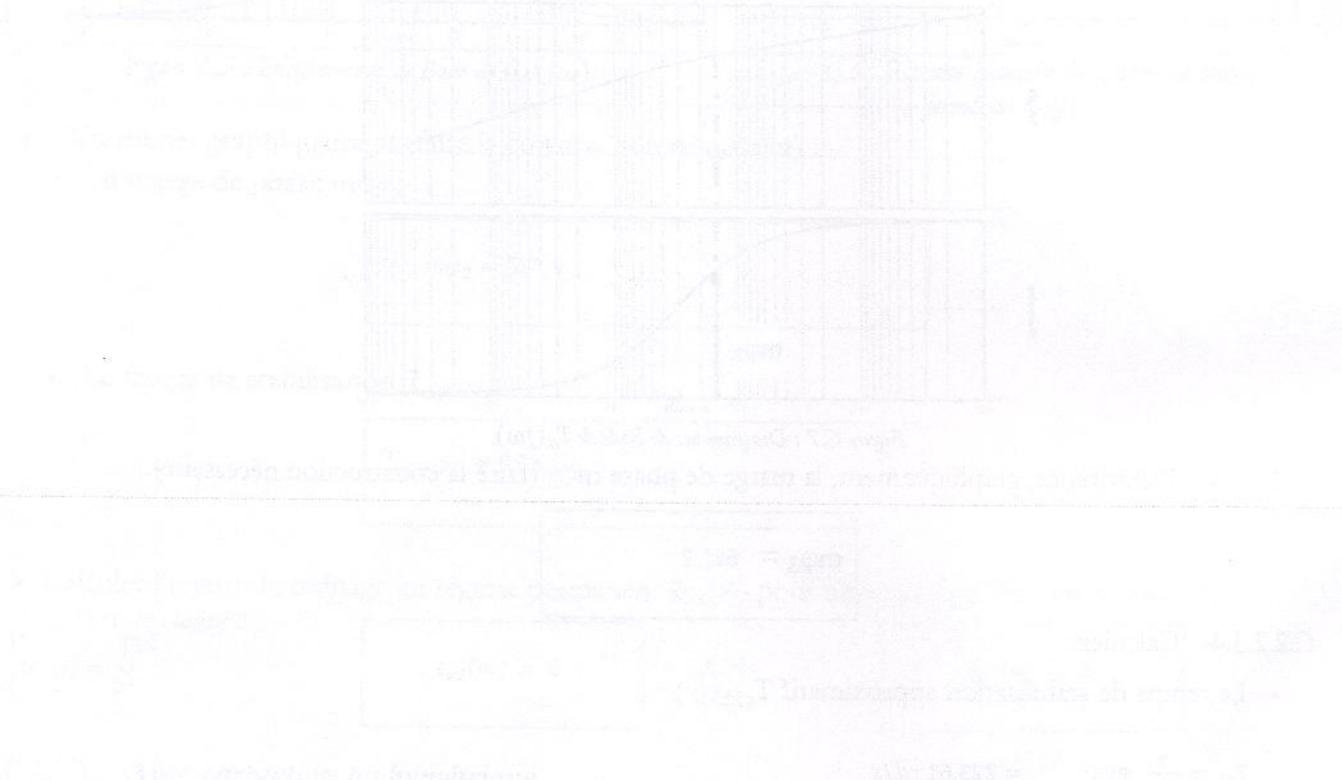
A.N.

$$\varepsilon_{v3}(\infty) = 0,06\%$$

C.2.2.4- Conclure quant aux performances assurées par les deux configurations sans et avec retour tachymétrique.

Performances	Critère	$\beta = 0$		$\beta \neq 0$
		P	P.I.	P
Stabilité	$m\varphi$	65°, 53	52°, 9	65°, 2
Précision	$\varepsilon_v(\infty)$ en %	0,2	0	0,06
Rapidité	$T_s \pm 5\%$ en s	0,06	0,16	0,02

La correction tachymétrique a un effet stabilisant tout en améliorant la précision et la rapidité du système en boucle fermée.



#### 3.3) Correction de l'erreur

On prend un couple de corde entre deux points d'un terrain pour déterminer l'écart relatif  $\delta l = l_2 - K l_1$  avec  $K$  la valeur moyenne des rapports de corde.

On peut écrire sur la forme générale des équations correctes de la géodésie :