



Concours Physique et Chimie
Epreuve de Mathématiques

Date: Lundi 10 juin 2019 Heure: 8H Durée : 4H Nbre de pages : 4
Barème : Problème 1 : 9 points Problème 2 : 11 points

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Problème 1

Partie I :

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = -\int_0^1 \ln(t) t^n dt$ et $I = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1} dt$.

- Justifier l'existence de I .
- Soit g la fonction définie sur $]0,1[$ par : $g(t) = \frac{t \ln(t)}{1-t^2}$. Montrer que g se prolonge par continuité sur $[0,1]$ et qu'il existe $M > 0$ tel que $|g(t)| \leq M$, pour tout $t \in]0,1[$.
- En déduire que pour tout entier naturel n , on a :

$$\left| I - \sum_{k=0}^n u_{2k} \right| \leq \frac{M}{2n+2}.$$

- Calculer u_n en fonction de n et en déduire que : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = I$.

Partie II.

Soit H la fonction définie pour $x > 1$ par : $H(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. On considère la fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{x}{t}\right)}{(1+t^2)} dt.$$

On rappelle que pour tout réel $t > 0$, on a : $\arctan(t) + \arctan\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\pi}{2}$.

- Justifier que F est définie et continue sur \mathbb{R} et calculer $F(1)$.
- Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et que pour tout réel $x > 0$ tel que $x \neq 1$ on a :

$$F'(x) = \frac{1}{1-x^2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{t^2+x^2} - \frac{t}{1+t^2} \right) dt.$$

3. En déduire que, pour tout réel $y \in]0, 1[$, on a : $F(y) = \int_0^y \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} dx$.
4. En déduire que $I = \frac{\pi^2}{8}$ et conclure que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
5. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $R = \frac{1}{X(X+1)^2}$.
6. En déduire que : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} = 2 - \frac{\pi^2}{6}$.

Partie III.

Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et (X, Y) un couple de variables aléatoires sur $\Omega \times \Omega$ à valeurs dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, vérifiant pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$,

$$P(X = n, Y = k) = \frac{\lambda}{(n+1)^{k+3}}.$$

1. Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n)$ et en déduire que $\lambda = \frac{1}{2 - \frac{\pi^2}{6}}$.
2. Justifier que X admet une espérance $E(X)$ et Calculer $E(X)$.
3. Justifier que X n'admet pas de variance.
4. Calculer pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k)$ en fonction de $H(k+3)$.
5. En déduire que $\sum_{k=2}^{+\infty} (H(k) - 1) = 1$.
6. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^x = 1$.
7. En déduire un équivalent de la suite de terme général $v_k = P(Y = k)$, quand $k \rightarrow +\infty$.
8. Montrer que Y admet une espérance et une variance.

Problème 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on note :

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre n et I_n sa matrice identité.
- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(A)$: le déterminant de A , tA : la transposée de A et $\text{Tr}(A)$: la trace de A .
- Pour tout réel λ et toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n)$.
- $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \det(A) \neq 0\}$.
- $S_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / {}^tA = A\}$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / {}^tA = -A\}$.
- $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / {}^tAA = I_n\}$ et $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) / \det(A) = 1\}$.
- $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \det(A) = 1\}$.
- Une matrice diagonale, dont les valeurs diagonales sont $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, est notée $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.
- \mathbb{R}^n est muni de la norme euclidienne associée au produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

On admet les deux résultats suivants :

L'inégalité arithmético-géométrique : Soit x_1, x_2, \dots, x_n , n réels strictement positifs. Alors :

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad (*)$$

De plus, il y a égalité si et seulement si $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

L'inégalité de Hadamard : Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et X_1, X_2, \dots, X_n les vecteurs colonnes de A . Alors

$$|\det(A)| \leq \|X_1\| \|X_2\| \dots \|X_n\|, \quad (**)$$

De plus, il y a égalité, si et seulement si, la famille (X_1, X_2, \dots, X_n) est orthogonale.

Partie I.

1. Montrer que si $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $\text{Tr}({}^t A A) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_{ij})^2$.

2. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $R_\theta =: \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. Justifier que $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta; \theta \in \mathbb{R}\}$.

3. Soient θ_1 et θ_2 deux réels. Calculer le produit : $R_{\theta_1} R_{\theta_2}$.

En déduire que, pour tout entier naturel k et $\theta \in \mathbb{R}$, on a : $(R_\theta)^k = R_{k\theta}$.

Partie II.

On considère l'application : $f : \mathcal{SL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$A \longmapsto \text{Tr}({}^t A A).$$

1. Dans cette question, on suppose que $n = 2$.

(a) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{SL}_2(\mathbb{R})$. Vérifier que $2ad \leq a^2 + d^2$ et $-2bc \leq b^2 + c^2$ et en déduire que $f(A) \in [2, +\infty[$.

(b) Montrer que $f(A) = 2$, si et seulement si, $A \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$.

(c) En utilisant la matrice $M_x = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$, justifier que $\text{Im} f = [2, +\infty[$.

2. Dans cette question, on suppose que $n \geq 2$. Soit $A \in \mathcal{SL}_n(\mathbb{R})$ et X_1, X_2, \dots, X_n les vecteurs colonnes de A .

(a) Vérifier que : $f(A) = \sum_{i=1}^n \|X_i\|^2$.

(b) En utilisant l'inégalité de Hadamard (**), montrer que $1 \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \|X_i\|^2}$.

(c) En déduire, par l'inégalité arithmético-géométrique (*), que $f(A) \geq n$.
Conclure que $\text{Im} f \subset [n, +\infty[$.

(d) Montrer que si $f(A) = n$, alors la famille $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ est orthonormale.

(e) Conclure que $f^{-1}(\{n\}) = \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

(f) Montrer que $\text{Im} f = [n, +\infty[$.

Partie III.

On considère l'application $h : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n(\mathbb{R}), M \longmapsto M^3$. On se propose de montrer que h est bijective.

1. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$.

(a) Justifier qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, où, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, telles que $A = P D P$.

(b) En déduire qu'il existe $M \in S_n(\mathbb{R})$ tel que $M^3 = A$. Conclure que h est surjective.

2. Soit M et $N \in S_n(\mathbb{R})$ tels que $h(M) = h(N) = A$. Soit $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$ l'ensemble des valeurs propres de M avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour $i \neq j$.

(a) Montrer que, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, on a : $E_{\lambda_i}(M) \subset E_{\lambda_i^3}(A)$.

(b) Justifier que :

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(M) = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i^3}(A).$$

(c) En déduire que, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, on a $E_{\lambda_i}(M) = E_{\lambda_i^3}(A)$.

(d) Justifier que, pour toute valeur propre α de N , on a : $E_\alpha(N) = E_{\alpha^3}(A)$, et que par la suite, α est une valeur propre de M .

(e) Montrer, alors, que $M = N$. Conclure.

3. Etude d'un exemple : Soit $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice $M = h^{-1}(A)$.

Partie IV.

On considère pour un entier $k \geq 2$, l'application : $g_k : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), M \longmapsto M^k$. On se propose de montrer que $\mathcal{A}_2(\mathbb{R}) \subset \text{Im}(g_k)$ et de déterminer $\mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \cap \text{Im}(g_k)$.

1. Soit $A \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$.

(a) Justifier qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $A = \lambda R_{\frac{\pi}{2}}$ ou $A = \lambda R_{-\frac{\pi}{2}}$.

(b) Montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $g_p(R_\theta) = R_{\frac{\pi}{2}}$.

(c) En déduire une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $g_k(M) = A$.

2. Pour λ_1 et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, on considère la matrice $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. On suppose dans cette question qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^{2k} = D$.

(a) Justifier que $MD = DM$.

(b) En déduire que si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors M est une matrice diagonale.

(c) Montrer que si $\lambda_1 < 0$, alors $\lambda_1 = \lambda_2$.

3. Pour tout réel positif α , calculer $\left(\alpha R_{\frac{\pi}{2}}\right)^2$. En déduire que si $D = \lambda_1 I_2$, avec $\lambda_1 < 0$, alors il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^{2k} = D$.

4. Soit $A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres λ_1 et λ_2 de A pour que $A \in \text{Im}(g_{2k})$.

Fin de l'épreuve

Remarque : On pourra généraliser le résultat de la partie IV. au cas $n \geq 2$. En effet, si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ alors il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(0, \dots, 0, A_1, \dots, A_s)$, avec $A_i \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ tels que $A = P D P^{-1}$, puis on utilise le résultat de la partie IV. On pourra ainsi en déduire qu'une matrice symétrique $A \in \text{Im}_{g_{2k}}$, si et seulement si, toute valeur propre négative λ , de A , est de multiplicité paire.

Fin de l'énoncé