Concours Nationaux d'Entrée aux
Cycles de Formations d'Ingénieurs
Session: Juin 2015

Concours en Mathématiques Physique

Correction de l'Épreuve de Mathématiques I

Exercice:

1. **Montrer que, pour tout $x > 0$, $t \longmapsto \dfrac{\ln t}{x+t}$, est intégrable sur $]0,1]$.**

1 Soit $x > 0$. L'application $t \longmapsto \dfrac{\ln t}{x+t}$, est continue par morceaux sur $]0,1]$ et

2 $$\lim_{t \mapsto 0^+} \sqrt{t}\frac{\ln t}{x+t} = 0,$$

donc elle est intégrable sur $]0,1]$.

2. **Montrer que l'application f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.**

On pose
$$h : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[\times]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \dfrac{\ln t}{x+t}. \end{array}$$
L'application h est continue sur $]0,+\infty[\times]0,1]$ et elle admet une dérivée partielle première par rapport à x,

1 $$\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -\frac{\ln t}{(x+t)^2},$$

qui est continue sur $]0,+\infty[\times]0,1]$.
Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$ et $x \in [a,b]$. On a

1 $$|h(x,t)| \leq \frac{|\ln t|}{a+t} = \varphi_1(t) \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{|\ln t|}{(a+t)^2} = \varphi_2(t).$$

L'application φ_1 est intégrable sur $]0,1]$ et l'application φ_2 est continue par morceaux sur $]0,1]$ et est intégrable puisque,

1 $$\lim_{t \mapsto 0^+} \sqrt{t}\frac{|\ln t|}{(a+t)^2} = 0.$$

Donc f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

3. **Montrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{\ln(1+x) - \ln x}{x}$.**

On a
$$f'(x) = -\int_0^1 \frac{\ln t}{(x+t)^2}\,dt.$$

On intègre par parties,

$$\left|\begin{array}{lll} u = \ln t & \longrightarrow & u' = \dfrac{1}{t} \\ v' = -\dfrac{1}{(x+t)^2} & \longrightarrow & v = \dfrac{1}{x+t} - \dfrac{1}{x} = -\dfrac{t}{x(x+t)}. \end{array}\right.,$$

On obtient,

$$f'(x) = \underbrace{\left[\frac{t\ln t}{x(x+t)}\right]_0^1}_{=0} + \int_0^1 \frac{dt}{x(x+t)} = \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{dt}{x+t} = \frac{\ln(x+1) - \ln x}{x}.$$

---

4. **Montrer que, pour tout $x > 0$,**

$$f(x) + f(\frac{1}{x}) = -\frac{1}{2}(\ln x)^2 + 2f(1).$$

- - - - - - - - - - - - -

On pose $g(x) = f(x) + f(\frac{1}{x}) + \frac{1}{2}(\ln x)^2$. L'application g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et on a:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{1}{x^2}f'(\frac{1}{x}) + \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln(1+x) - \ln x}{x} - \frac{\ln(1+\frac{1}{x}) - \ln\frac{1}{x}}{x} + \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Donc g est constante sur $]0,+\infty[$, elle vaut alors sa valeur en 1, c'est à dire $2f(1)$.

---

5. (a) **Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer l'intégrale $I_k = \int_0^1 t^k \ln t\, dt$.**

- - - - - - - - - - - - -

On intègre par parties:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad I_k = \underbrace{\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\ln t\right]_0^1}_{=0} - \frac{1}{k+1}\int_0^1 t^k dt = -\frac{1}{(k+1)^2}.$$

(b) **Montrer que, pour tout $x \geq 1$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\frac{1}{x^n}$.**

- - - - - - - - - - - - -

Pour tout $x \geq 1$ et $t \in]0,1[$, on a $0 < \frac{t}{x} < 1$, donc

$$\frac{1}{x+t} = \frac{1}{x(1+\frac{t}{x})} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^n}{x^{n+1}}.$$

On obtient,

$$f(x) = \int_0^1 \ln t \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^n}{x^{n+1}}\, dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^n\ln t}{x^{n+1}}\, dt.$$

On pose $f_n(t) = (-1)^n\frac{t^n \ln t}{x^{n+1}}$. On a

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux et est intégrable sur $]0,1[$.
- La série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $]0,1[$.
- La série $\sum_{n\geq 0}\int_0^1 |f_n|$ est convergente puisque:

$$\int_0^1 \left|(-1)^n\frac{t^n\ln t}{x^{n+1}}\right| dt = \frac{1}{x^{n+1}}\int_0^1 t^n \ln t\, dt = \frac{1}{(n+1)^2x^{n+1}} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Par intégration terme à terme, on obtient

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}\int_0^1 t^n\ln t\,dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+1}}\frac{1}{(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x^n}\frac{1}{n^2}.$$

(c) **Montrer que $f(x)\underset{x\mapsto+\infty}{\sim}-\frac{1}{x}$.**

La série de fonctions $\sum_{n\geq1}\frac{(-1)^n}{x^{n-1}}\frac{1}{n^2}$ converge normalement sur $[1,+\infty[$ puisque

$$\forall x\geq1,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \left|\frac{(-1)^n}{x^n}\frac{1}{n^2}\right|\leq\frac{1}{n^2}.$$

En utilisant le théorème de la double limite et puisque

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{(-1)^n}{x^{n-1}}\frac{1}{n^2}=\begin{cases}-1 & si\quad n=1\\ 0 & si\quad n\geq2\end{cases},$$

on aura, $\lim_{x\mapsto+\infty}xf(x)=-1$. Ainsi, $f(x)\underset{x\mapsto+\infty}{\sim}-\frac{1}{x}$.

(d) **En déduire un équivalent simple de f au voisinage de 0^+.**

On a $f(x)=-f(\frac{1}{x})-\frac{1}{2}(\ln x)^2+2f(1)$, et puisque $\lim_{x\mapsto0^+}f(\frac{1}{x})=0$, donc

$$\lim_{x\mapsto0^+}\frac{-f(\frac{1}{x})-\frac{1}{2}(\ln x)^2+2f(1)}{-\frac{1}{2}(\ln x)^2}=1.$$

D'où

$$f(x)\underset{x\mapsto0^+}{\sim}-\frac{1}{2}(\ln x)^2.$$

Problème I:

Partie I:

---

1. **Soit $z\in\mathbb{C}^*$. Montrer que la série $\sum_{n\geq0}(n+1)a_{n+1}z^n$ converge absolument.**

Soit $r>|z|$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(n+1)a_{n+1}z^{n+1}=a_{n+1}r^{n+1}\left(\frac{z}{r}\right)^{n+1}\frac{n+1}{z}$.
Comme $\left|\frac{z}{r}\right|<1$ alors $\left(\frac{z}{r}\right)^{n+1}\frac{n+1}{z}\underset{n\to+\infty}{\to}0$ et donc $|(n+1)a_{n+1}z^{n+1}|=o\left(|a_{n+1}r^{n+1}|\right)$.
Le rayon de convergence de $\sum_{n\geq0}a_nz^n$ étant infini, la série $\sum_{n\geq0}|a_{n+1}r^{n+1}|$ converge.
Le théorème de comparaison des séries à termes positifs permet alors de conclure que la série $\sum_{n\geq0}|(n+1)a_{n+1}z^{n+1}|$ converge, c'est à dire $\sum_{n\geq0}(n+1)a_{n+1}z^{n+1}$ converge absolument.

---

2. **En déduire que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq0}(n+1)a_{n+1}z^n$ est infini.**

D'après la question précédente $\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}z^{n+1}$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}^*$.

On en déduit que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}z^{n}$ est infini.

---

3. (a) **Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.**

- - - - - - - - - - - - -

L'application S est continue sur $\mathbb{C}$ et l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, $(r,\theta) \mapsto z_0 + re^{i\theta}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Donc $f = S \circ \varphi$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

(b) **Montrer que f admet une dérivée partielle première par rapport à r donnée par:**

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta) = e^{i\theta}S_1\left(z_0 + re^{i\theta}\right).$$

- - - - - - - - - - - - -

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $r \mapsto a_n\left(z_0 + re^{i\theta}\right)^n$. Alors

(i) $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ (car le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est infini).

(ii) Les f_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, $f_0' = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n' : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, r \mapsto na_ne^{i\theta}\left(z_0 + re^{i\theta}\right)^{n-1}.$$

(iii) Soit $a > 0$. Pour tout $r \in [-a,a]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|f_n'(r)| = \left|na_ne^{i\theta}\left(z_0 + re^{i\theta}\right)^{n-1}\right| \leq |na_n|\left(|z_0| + |r|\right)^{n-1} \leq |na_n|\left(|z_0| + a\right)^{n-1}.$$

Comme la série entière $\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}z^n$ a un rayon de convergence infini alors la série $\sum_{n\geq 1}|na_n|\left(|z_0| + a\right)^{n-1}$ converge. Il s'ensuit que $\sum_{n\geq 0} f_n'$ converge normalement et donc uniformément sur $[-a,a]$. Donc $\sum_{n\geq 0} f_n'$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Les points (i), (ii) et (iii) permettent de conclure que la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.

Donc l'application $r \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(r) = f(r,\theta)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est l'application

$$r \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(r) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_ne^{i\theta}\left(z_0 + re^{i\theta}\right)^{n-1} = e^{i\theta}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}\left(z_0 + re^{i\theta}\right)^n = e^{i\theta}S_1\left(z_0 + re^{i\theta}\right).$$

On en déduit que f admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial r}$ donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta) = e^{i\theta}S_1\left(z_0 + re^{i\theta}\right), \quad (r,\theta) \in \mathbb{R}^2.$$

(c) **Montrer que f admet une dérivée partielle première par rapport à θ donnée par:**

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(r,\theta) = ire^{i\theta}S_1\left(z_0 + re^{i\theta}\right).$$

$- - - - - - - - - - - -$

Soit $r \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\theta \mapsto a_n\left(z_0 + re^{i\theta}\right)^n$. Alors

(i) $\sum\limits_{n\geq 0} g_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ (car le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ est infini).

(ii) Les g_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, $g_0' = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$g_n' : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ \theta \mapsto na_n rie^{i\theta}\left(z_0 + re^{i\theta}\right)^{n-1}.$$

(iii) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|g_n'(\theta)| = \left|na_n ire^{i\theta}\left(z_0 + re^{i\theta}\right)^{n-1}\right| \leq |na_n r|\left(|z_0| + |r|\right)^{n-1}.$$

Comme la série entière $\sum\limits_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}z^n$ a un rayon de convergence infini alors la série $\sum\limits_{n\geq 1}|na_n r|\left(|z_0| + |r|\right)^{n-1}$ converge. Il s'ensuit que $\sum\limits_{n\geq 0} g_n'$ converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$. Donc $\sum\limits_{n\geq 0} g_n'$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Les points (i), (ii) et (iii) permettent de conclure que la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} g_n$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} g_n\right)' = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} g_n'$. Donc l'application $\theta \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} g_n(\theta) = f(r,\theta)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est l'application

$$\theta \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} g_n'(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n ire^{i\theta}\left(z_0 + re^{i\theta}\right)^{n-1} = ire^{i\theta}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}\left(z_0 + re^{i\theta}\right)^n = ire^{i\theta}S_1\left(z_0 + re^{i\theta}\right).$$

On en déduit que f admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}$ donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(r,\theta) = ire^{i\theta}S_1\left(z_0 + re^{i\theta}\right), \quad (r,\theta) \in \mathbb{R}^2.$$

(d) **En déduire que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et vérifie l'équation aux dérivées partielles:**

$$r\frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta) + i\frac{\partial f}{\partial \theta}(r,\theta) = 0.$$

$- - - - - - - - - - - -$

D'aprés les questions 3)b) et 3)c) la fonction f admet des dérivées partielles premières $\dfrac{\partial f}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}$ données par

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta) = e^{i\theta}S_1\left(z_0 + re^{i\theta}\right) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial \theta}(r,\theta) = ire^{i\theta}S_1\left(z_0 + re^{i\theta}\right), \quad (r,\theta) \in \mathbb{R}^2.$$

En procédant comme dans 3)a) on prouve que l'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, $(r,\theta) \mapsto S_1\left(z_0 + re^{i\theta}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Comme de plus les fonctions $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, $(r,\theta) \mapsto e^{i\theta}$ et $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, $(r,\theta) \mapsto ire^{i\theta}$ sont continues alors les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Maintenant, f admet des dérivées partielles premières $\dfrac{\partial f}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}$ qui sont continues sur $\mathbb{R}^2$, donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

La formule $r\dfrac{\partial f}{\partial r}(r,\theta) + i\dfrac{\partial f}{\partial \theta}(r,\theta) = 0$ se déduit facilement des expressions de $\dfrac{\partial f}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}$.

Partie II

1. **Montrer que, pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$,**

$$f(r,\theta) = u_0(r) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(u_n(r) e^{in\theta} + u_{-n}(r) e^{-in\theta} \right).$$

Soit $r \in \mathbb{R}$. La fonction $f_r : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \theta \mapsto f(r,\theta)$ est 2π-périodique et de classe C^1, donc sa série de Fourier converge normalement sur $\mathbb{R}$ et sa somme est f_r.
Puisque, de plus, $u_n(r) = c_n(f_r)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on en déduit que

$$f(r,\theta) = f_r(\theta) = u_0(r) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(u_n(r) e^{in\theta} + u_{-n}(r) e^{-in\theta} \right).$$

2. **Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, l'application $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $r \mapsto u_n(r)$, est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $r \in \mathbb{R}$,**

$$u_n'(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta) e^{-in\theta} d\theta.$$

On pose $\varphi : [0,2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $(r,\theta) \mapsto \frac{1}{2\pi} f(r,\theta) e^{-in\theta}$. Alors
(i) φ est continue sur $[0,2\pi] \times \mathbb{R}$,
(ii) φ admet une dérivée partielle première $\frac{\partial \varphi}{\partial r} : [0,2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $(r,\theta) \mapsto \frac{1}{2\pi} \frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta) e^{-in\theta}$,
(iii) $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ est continue sur $[0,2\pi] \times \mathbb{R}$.
D'après le théorème de dérivation des intégrales dépendants d'un paramètre, u_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout $r \in \mathbb{R}$,

$$u_n'(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta) e^{-in\theta} d\theta.$$

3. (a) **Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que, pour tout $r \in \mathbb{R}$,**

$$r u_n'(r) - n u_n(r) = 0.$$

Soit $r \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} r u_n'(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r \frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta) e^{-in\theta} d\theta = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i \frac{\partial f}{\partial \theta}(r,\theta) e^{-in\theta} d\theta, \ (I.P.P) \\ &= -\frac{i}{2\pi} \left[f(r,\theta) e^{-in\theta} \right]_0^{2\pi} + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r,\theta)(-in) e^{-in\theta} d\theta \\ &= \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r,\theta) e^{-in\theta} d\theta \\ &= n u_n(r). \end{aligned}$$

Donc $r u_n'(r) - n u_n(r) = 0$.

(b) **En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe $a_n \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$,**

$$u_n(r) = a_n r^n.$$

La fonction u_n vérifie l'équation différentielle $y' - \frac{n}{r} y = 0$ sur $\mathbb{R}^{*+}$. En utilisant la primitive $r \mapsto n \ln r$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ de $r \mapsto \frac{n}{r}$, on peut conclure qu'il existe $a_n \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $r \in \mathbb{R}^{*+}$, $u_n(r) = a_n e^{n \ln r} = a_n r^n$.

(c) **Montrer alors que, pour tout $r \in \mathbb{R}_+$,**

$$u_n(r) = \begin{cases} a_n r^n & \text{si } n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

\- - - - - - - - - - - - -

En faisant tendre r vers 0, on obtient : $\lim_{r \to 0} u_n(r) = \lim_{r \to 0} a_n r^n$.
Comme u_n est continue en 0, alors $\lim_{r \to 0} u_n(r) = u_n(0)$. Donc $\lim_{r \to 0} a_n r^n = u_n(0)$.
Il vient que, pour $n < 0$, $a_n = 0$, et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n(r) = a_n r^n$ pour tout $r \in \mathbb{R}^+$. Donc pour tout $r \in \mathbb{R}^+$: $u_n(r) = 0$ si $n < 0$ et $u_n(r) = a_n r^n$ si $n \in \mathbb{N}$.

(d) **En déduire que, pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$,**

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta}.$$

\- - - - - - - - - - - - -

En utilisant la question II-1, pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} f(r,\theta) &= u_0(r) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(u_n(r) e^{in\theta} + u_{-n}(r) e^{-in\theta} \right) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta}. \end{aligned}$$

Partie III

Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes.

$(i) \Longrightarrow (ii)$

\- - - - - - - - - - - - -

Supposons que la fonction f est de classe C^1 et vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$r \frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta) + i \frac{\partial f}{\partial \theta}(r,\theta) = 0.$$

En utilisant la question II-3-d, on obtient, pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, $f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta}$.
Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors il existe $(r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ tel que $z = re^{i\theta}$. Donc

$$F(z) = F\left(re^{i\theta}\right) = f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(re^{i\theta}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

$(ii) \Longrightarrow (iii)$

Supposons qu'il existe une suite complexe $(a_n)_n$ telle que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}, (r,\theta) \mapsto F\left(z_0 + re^{i\theta}\right)$. On peut conclure à l'aide de la question I-3-d que g vérifie l'équation aux dérivées partielles $r\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + i\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = 0$. En utilisant la question II-3-d, il existe une suite $(b_n)_n$ de nombres complexes telle que pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, $g(r,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n r^n e^{in\theta}$.

Si $z \in \mathbb{C}$, alors il existe $(r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ tel que $z = z_0 + re^{i\theta}$. Donc

$$F(z) = F\left(z_0 + re^{i\theta}\right) = g(r,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n r^n e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \left(re^{i\theta}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n.$$

$(iii) \Longrightarrow (i)$

Supposons que pour tout complexe $z_0 \in \mathbb{C}$, il existe une suite complexe $(b_n)_n$ telle que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n.$$

En particulier pour $z_0 = 0$, il existe une suite complexe $(b_n)_n$ telle que $\forall z \in \mathbb{C},\ F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$.

D'après la question I-3-d, la fonction f est de classe C^1 et vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$r\frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta) + i\frac{\partial f}{\partial \theta}(r,\theta) = 0.$$

Problème II

Partie I

---

1. **Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,**

$$\| x_{n+1} - x_n \| \leq k^n \| x_1 - x_0 \|.$$

On procède par récurrence. Pour $n = 0$, l'inégalité est vérifiée. Supposons que pour un certain entier n on a $\| x_{n+1} - x_n \| \leq k^n \| x_1 - x_0 \|$. On a

$$\| x_{n+2} - x_{n+1} \| = \| f(x_{n+1}) - f(x_n) \| \leq k \| x_{n+1} - x_n \| \leq k^{n+1} \| x_1 - x_0 \|.$$

D'où l'inégalité est vérifiée pour $n + 1$.

---

2. **Montrer alors que la série $\sum_{n \geq 0} (x_{n+1} - x_n)$ est convergente.**

D'après la question précédente, et puisque $k \in]0,1[$ et par comparaison, la série $\sum_{n \geq 0} \|x_{n+1} - x_n\|$ est convergente.

L'espace E étant de dimension finie, donc la convergence absolue entraîne la convergence. On en déduit que la série $\sum_{n\geq 0}(x_{n+1}-x_n)$ est convergente.

---

3. **En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est convergente. On note ℓ sa limite.**

La série $\sum_{n\geq 0}(x_{n+1}-x_n)$ est convergente, donc la suite des sommes partielles
$S_n := \sum_{k=1}^{n-1}(x_{k+1}-x_k) = x_n - x_0$ est convergente. Ainsi, la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

---

4. **Montrer que $\ell \in A$ et que $f(\ell)=\ell$.**

L'application f est contractante donc continue et la suite $(x_n)_n$ est convergente vers ℓ et vérifie $x_{n+1}=f(x_n)$. Donc, en passant à la limite, $\ell = f(\ell)$.

---

5. **On suppose que f admet deux points fixes ℓ et ℓ'. Montrer que $\ell=\ell'$.**

Soient ℓ et ℓ' deux points fixes de f.
On a $\| f(\ell)-f(\ell') \| \leq k \| \ell-\ell' \|$. Donc, $\| \ell-\ell' \| \leq k \| \ell-\ell' \|$. D'où $\ell=\ell'$.

---

6. **Montrer que, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\| x_n-\ell \| \leq \frac{k^n}{1-k} \| x_1-x_0 \|$.**

Soit $n\in\mathbb{N}$ et $N>n$. D'après la première question:

$$\|x_N-x_n\| = \left\|\sum_{p=n+1}^{N}(x_p-x_{p-1})\right\| \leq \sum_{p=n+1}^{N}\|x_p-x_{p-1}\| \leq \|x_1-x_0\|\sum_{p=n+1}^{N}k^{p-1} = \|x_1-x_0\|\frac{k^n-k^N}{1-k}.$$

En faisant tendre $N\longmapsto+\infty$, on aura $\| x_n-\ell \| \leq \frac{k^n}{1-k} \| x_1-x_0 \|$.

---

7. (a) **Montrer que les applications sinus et arctangente sont 1-lipschitziennes sur $\mathbb{R}$.**

L'application $f_1 : t\longmapsto \sin t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f_1'(t)=\cos t$.
On a, $\forall t\in\mathbb{R}$, $|f_1'(t)|\leq 1$, donc d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\quad |\sin x-\sin y|\leq |x-y|.$$

D'où f_1 est 1-lipschitzienne.
De même la fonction arctangente est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée, $x\longmapsto \frac{1}{1+x^2}$ est bornée par 1, donc 1-lipschitzienne.

(b) **Montrer que le système**

$$\begin{cases} 4x &= \sin(x+y)\\ 3y &= 3+2\arctan(x-y),\end{cases}$$

admet une unique solution dans $\mathbb{R}^2$.

Le système donné est équivalent au système: $\begin{cases} x &= \frac{1}{4}\sin(x+y)\\ y &= 1+\frac{2}{3}\arctan(x-y),\end{cases}$

On introduit, ainsi, la fonction $f : \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ (x,y) & \longmapsto & \left(\frac{1}{4}\sin(x+y),\ 1+\frac{2}{3}\arctan(x-y)\right)\end{array}$

Soient (x,y), $(x_1,y_1) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned}
\|f(x,y) - f(x_1,y_1)\| &= \left\|\left(\frac{1}{4}\sin(x+y) - \frac{1}{4}\sin(x_1+y_1), \frac{2}{3}\arctan(x-y) - \frac{2}{3}\arctan(x_1-y_1)\right)\right\| \\
&\leq \frac{1}{4}\left|\sin(x+y) - \sin(x_1+y_1)\right| + \frac{2}{3}\left|\arctan(x-y) - \arctan(x_1-y_1)\right| \\
&\leq \frac{1}{4}|x+y-x_1-y_1| + \frac{2}{3}|x-y-x_1+y_1| \\
&\leq \frac{1}{4}|x-x_1| + \frac{1}{4}|y-y_1| + \frac{2}{3}|x-x_1| + \frac{2}{3}|y-y_1| \\
&\leq \frac{11}{12}\|(x,y)-(x_1,y_1)\|.
\end{aligned}$$

On conclut que f est $\frac{11}{12}$-contractante sur $\mathbb{R}^2$, qui est fermé de lui même, donc f admet un unique point fixe et par suite le système donné admet une unique solution.

---

8. **Soit $g : A \longrightarrow A$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que g^p soit contractante. Montrer que g admet un unique point fixe.**

L'application g^p est contractante sur A, donc elle admet un unique point fixe $a \in A$, $g^p(a) = a$.
On applique g à l'égalité précédente, on obtient $g^{p+1}(a) = g(a)$, ce qui entraîne, $g^p(g(a)) = g(a)$, par unicité du point fixe de g^p, on conclut que $g(a) = a$.
Ce point fixe est unique puisque tout point fixe de g est un point fixe de g^p.

Partie II

---

1. **Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur A.**

Pour tous $x \in A$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\|f_n(x) - f(x)\| = \frac{1}{n}\|f(x)\| \leq \frac{1}{n}$.
Donc la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur A.

---

2. **Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique élément x_n de A vérifiant $f_n(x_n) = x_n$.**

Pour $n = 1$, f_1 est l'application nulle, 0 est l'unique point fixe de f_1.

Soit $n \geq 2$. Pour tout $x,y \in A$, $\|f_n(x) - f_n(y)\| = \left(1-\frac{1}{n}\right)\|f(x) - f(y)\| \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)\|x-y\|$.

Donc f_n est $\left(1-\frac{1}{n}\right)$-lipschitzienne et la partie A est un fermé de E.

De plus, $\forall x \in A$, $\|f_n(x)\| = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\|f(x)\| \leq 1$, donc $f_n(A) \subset A$.

Ainsi, f_n admet un unique point fixe dans A qu'on note x_n.

---

3. **En déduire que l'application f admet un point fixe.**

On considère la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ des éléments de A formée par les points fixes de fonctions f_n, $n \geq 1$.
La boule unité fermée est compacte, donc la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ admet une sous suite convergente dans A. On la note $(x_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ et on désigne par ℓ sa limite. On a

$$\forall n \geq 1, \quad f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) = \left(1 - \frac{1}{\varphi(n)}\right) f(x_{\varphi(n)}) = x_{\varphi(n)}.$$

Par récurrence, on peut vérifier que $\forall n \geq 1$, $\varphi(n) \geq n$, donc $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \varphi(n) = +\infty$.

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité, $x_{\varphi(n)} = \left(1 - \frac{1}{\varphi(n)}\right) f(x_{\varphi(n)})$, et par continuité de f, on obtient $f(\ell) = \ell$. Donc l'application f admet un point fixe.

---

4. **À-t-on, nécessairement, l'unicité du point fixe de f.**

On n'a pas nécessairement, l'unicité du point fixe de f.
Il suffit de choisir $f(x) = x$. Cette application est 1-lipschitzienne sur la boule unité fermée et admet une infinité des points fixes.

Partie III

---

1. **Montrer que, pour tout entier non nul n, $g_n(A) \subset A$.**

Soit $x \in A$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|f^k(x)\| \leq \|x\|$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\|g_n(x)\| &= \frac{1}{n}\left\|x + f(x) + f^2(x) + \cdots + f^{n-1}(x)\right\| \\
&\leq \frac{1}{n}\left(\|x\| + \|f(x)\| + \cdots + \|f^{n-1}(x)\|\right) \\
&\leq \frac{1}{n}\underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_{n \text{ fois}} = 1
\end{aligned}$$

Donc $g_n(A) \subset A$.

---

2. **Montrer que**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall y \in g_n(A), \ \| f(y) - y \| \leq \frac{2}{n}.$$

Soit $y \in g_n(A)$, donc il existe $a \in A$ tel que $y = g_n(a)$.
k On remarque que $u(f^{k-1}(a)) = f^k(a) - b$, $k = 2, \ldots, n$. D'où

$$\begin{aligned}
\|f(y) - y\| &= \|f(g_n(a)) - g_n(a)\| = \|u(g_n(a)) + b - g_n(a)\| \\
&= \left\|\frac{1}{n}\left(u(a) + u(f(a)) + \cdots + u(f^{n-1}(a))\right) + b - \frac{1}{n}\left(a + f(a) + \cdots + f^n(a)\right)\right\| \\
&= \left\|\frac{1}{n}\left(f(a) - b + f^2(a) - b + \cdots + f^n(a) - b\right) + b - \frac{1}{n}\left(a + f(a) + \cdots + f^n(a)\right)\right\| \\
&= \frac{1}{n}\|(f^n(a) - a)\| \\
&\leq \frac{1}{n}(\|f^n(a)\| + \|a\|) \leq \frac{2}{n}
\end{aligned}$$

---

3. **Soit $a \in A$. Montrer que la suite $(f(g_n(a)) - g_n(a))_{n \geq 1}$ converge vers 0.**

D'après la question précédente et en choisissant $y = g_n(a)$, on aura

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \|f(g_n(a)) - g_n(a)\| \leq \frac{2}{n}.$$

On en déduit que la suite $(f(g_n(a)) - g_n(a))_{n \geq 1}$ converge vers 0.

---

4. **En déduire que l'application f admet un point fixe.**

La suite $(g_n(a))_n$ est une suite du compact A, donc elle admet une sous suite convergente dans A. On note $(g_{\varphi(n)}(a))_n$ cette suite et ℓ sa limite.
On sait que la suite $(f(g_n(a)) - g_n(a))_{n \geq 1}$ converge vers 0. Donc la suite $\left(f\left(g_{\varphi(n)(a)}\right) - g_{\varphi(n)(a)}\right)_{n \geq 1}$ converge vers 0. Or l'application f est continue comme somme d'une application linéaire (donc continue) et d'une application constante. On en déduit que la suite $\left(f\left(g_{\varphi(n)(a)}\right) - g_{\varphi(n)(a)}\right)_{n \geq 1}$ converge vers $f(\ell) - \ell$. Par unicité de la limite, $f(\ell) - \ell = 0$. Ainsi ℓ est un point fixe de f.

---

5. **Montrer que si x est un point fixe de f, alors x est un point fixe de g_n, pour tout $n \geq 1$.**

Soit x un point fixe de f, alors, pour tout $n \geq 1$,

$$g_n(x) = \frac{1}{n}\left(x + f(x) + f^2(x) + \cdots + f^{n-1}(x)\right) = \frac{1}{n}\left(x + x + x + \cdots + x\right) = x.$$

---

6. **En déduire que l'ensemble $S_f = \bigcap_{n\geq 1} g_n(A)$ est non vide.**

L'application f admet au moins un point fixe x dans A, qui est aussi un point fixe de g_n. Donc $\forall n \geq 1$, $x = g_n(x) \in g_n(A)$, et par suite $x \in \bigcap_{n\geq 1} g_n(A)$.

---

7. **Montrer que S_f est exactement l'ensemble des points fixes de f .**

D'une part, tout point fixe de f est un élément de S_f. D'autre part, si $x \in S_f$, alors pour tout entier non nul n, $x \in g_n(A)$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \parallel f(x) - x \parallel \leq \frac{2}{n}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $f(x) = x$.

$f'(x) = \dfrac{\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x} = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{2x^3} + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$ au $V(+\infty)$

$\lim_{+\infty} f(x) = 0$

$f(x) = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{4x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$