



Concours Mathématiques et Physique Corrigé de l'épreuve de Mathématiques I

Exercice 1

1. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, les applications

$$d_A : \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_p(\mathbb{R}), N \longmapsto NA \quad \text{et} \quad g_A : \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_p(\mathbb{R}), N \longmapsto AN,$$

sont continues.

Comme d_A et g_A sont des applications linéaires sur l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ alors elles sont continues.

2. Montrer que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet au moins une valeur d'adhérence dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

La suite $(M^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée donc il existe $c > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|M^n\| \leq c$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|U_n\| = \frac{1}{n+1} \left\| \sum_{k=0}^n M^k \right\| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \|M^k\| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n c = c.$$

Donc la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans l'espace vectoriel normé de dimension finie $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Cela permet alors de conclure que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet au moins une valeur d'adhérence dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$MU_n = U_n M = U_n + \frac{1}{n+1} (M^{n+1} - I_p).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On voit que U_n est un polynôme en M . Donc $MU_n = U_n M$. D'autre part

$$\begin{aligned} MU_n &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n M^{k+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} M^k = \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^n M^k + M^{n+1} - I_p \right) \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n M^k + \frac{1}{n+1} (M^{n+1} - I_p) = U_n + \frac{1}{n+1} (M^{n+1} - I_p). \end{aligned}$$

D'où le résultat demandé.

4. (a) Montrer que $ML = LM = L$.

Comme L est une valeur d'adhérence de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ alors on peut en extraire une sous suite $(U_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers L . D'après la question précédente, pour

tout $n \in \mathbb{N}$,

$$MU_{\varphi(n)} = U_{\varphi(n)}M = U_{\varphi(n)} + \frac{1}{\varphi(n) + 1} (M^{\varphi(n)+1} - I_p). \quad (*)$$

Observons maintenant que

- ⊙ $MU_{\varphi(n)} = g_M(U_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g_M(L) = ML$ car g_M est continue et $U_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L$.
- ⊙ $U_{\varphi(n)}M = d_M(U_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} d_M(L) = ML$ car d_M est continue et $U_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L$.
- ⊙ Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\varphi(n) + 1} (M^{\varphi(n)+1} - I_p) \right\| &= \frac{1}{\varphi(n) + 1} \left\| (M^{\varphi(n)+1} - I_p) \right\| \\ &\leq \frac{1}{\varphi(n) + 1} (\|M^{\varphi(n)+1}\| + \|I_p\|) \\ &\leq \frac{1}{\varphi(n) + 1} (c + \|I_p\|). \end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{\varphi(n)+1} (c + \|I_p\|) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ alors $\frac{1}{\varphi(n)+1} (M^{\varphi(n)+1} - I_p) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans (*), on obtient $ML = LM = L$.

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n L = L U_n = L$.

On montre, par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, que $M^k L = L M^k = L$. Donc

$$\begin{aligned} U_n L &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n M^k L = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n L = L \text{ et} \\ L U_n &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n L M^k = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n L = L. \end{aligned}$$

5. Montrer que $L_1 = L_2$.

Comme L_1 est une valeur d'adhérence de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ alors on peut en extraire une sous suite $(U_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers L_1 .

Comme L_2 est une valeur d'adhérence de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ alors, en utilisant la question précédente, $U_n L_2 = L_2 U_n = L_2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier

$$U_{\varphi(n)} L_2 = L_2 U_{\varphi(n)} = L_2. \quad (**)$$

Vu que $U_{\varphi(n)} L_2 = d_{L_2}(U_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} d_{L_2}(L_1) = L_1 L_2$ (car d_{L_2} est continue et $U_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L_1$) et que $L_2 U_{\varphi(n)} = g_{L_2}(U_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g_{L_2}(L_1) = L_2 L_1$ (car g_{L_2} est continue et $U_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L_1$) alors le passage à la limite dans (**) montre que $L_1 L_2 = L_2 L_1 = L_2$.

En permutant les rôles de L_1 et L_2 on obtient aussi $L_2 L_1 = L_1 L_2 = L_1$. Il s'en suit que $L_1 = L_2$.

6. Montrer alors que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Les questions 2) et 5) montrent que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une seule valeur d'adhérence dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Comme de plus elle est bornée alors elle converge.

Exercice 2

1. **Montrer que** $\mu + \lambda > 0$.

On a $p_1 = (\mu + \lambda) p_0$ donc $\mu + \lambda = \frac{p_1}{p_0} \geq 0$. Si $\mu + \lambda = 0$ alors $p_1 = 0$ et donc, en utilisant la relation de récurrence, $p_k = 0$ pour tout $k \geq 1$. Il vient que $1 = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k = p_0 \in]0, 1[$ ce qui est absurde. Donc $\mu + \lambda > 0$.

2. (a) **Montrer que** $\forall k \in \mathbb{N}, p_k = \frac{\lambda^k}{k!} p_0$.
Récurrence sur k .

- (b) **Exprimer** $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k$ **en fonction de** λ **et de** p_0 .

La série $\sum_{k \geq 0} p_k$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = p_0 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = p_0 e^\lambda$.

- (c) **En déduire que** X **suit la loi de Poisson** $\mathcal{P}(\lambda)$.

On a $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = 1$ donc $p_0 e^\lambda = 1$ et $p_0 = e^{-\lambda}$. On en déduit que, pour tout $k \geq 0$, $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$. Donc X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

- (d) **Donner alors son espérance et sa variance.**

Comme X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ alors $E(X) = V(X) = \lambda$.

3. **Montrer que pour tout** $k \in \mathbb{N}^*$,

$$p_k = p_0 \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} (-\mu)^k.$$

Récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$.

4. (a) **Montrer que** $\mu < 0$.

$\alpha = -\frac{\mu+\lambda}{\mu} \in \mathbb{N}$ donc $-\frac{\mu+\lambda}{\mu} \geq 0$. Comme $\mu + \lambda > 0$ alors $-\mu > 0$ et $\mu < 0$.

- (b) **Montrer que, pour tout** $k \in \mathbb{N}$,
$$p_k = \begin{cases} p_0 C_\alpha^k (-\mu)^k & \text{si } k \leq \alpha, \\ 0 & \text{si } k > \alpha. \end{cases}$$

Pour tout $k \leq \alpha$,

$$p_k = p_0 \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} (-\mu)^k = p_0 C_\alpha^k (-\mu)^k.$$

Pour $k > \alpha$

$$\begin{aligned} p_k &= p_0 \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} (-\mu)^k \\ &= p_0 \frac{(-\mu)^k}{k!} \underbrace{\prod_{i=0}^{k-1} (\alpha-i)}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

(c) Calculer $\sum_{k=0}^{\alpha} p_k$ en fonction de p_0, μ et α . En déduire que $p_0 = (1-\mu)^{-\alpha}$.

On a $\sum_{k=0}^{\alpha} p_k = p_0 \sum_{k=0}^{\alpha} C_{\alpha}^k (-\mu)^k = p_0 (1-\mu)^{\alpha}$.

D'autre part $\sum_{k=0}^{\alpha} p_k = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$ donc $p_0 (1-\mu)^{\alpha} = 1$ d'où $p_0 = (1-\mu)^{-\alpha}$.

(d) Montrer alors que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(\alpha, \frac{-\mu}{1-\mu}\right)$.

On a $X(\Omega) = \{0, 1, \dots, \alpha\}$ et, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, \alpha\}$,

$$\begin{aligned} P(X=k) &= p_0 C_{\alpha}^k (-\mu)^k \\ &= C_{\alpha}^k (-\mu)^k (1-\mu)^{-\alpha} \\ &= C_{\alpha}^k \left(\frac{-\mu}{1-\mu}\right)^k \left(1 - \frac{-\mu}{1-\mu}\right)^{\alpha-k}. \end{aligned}$$

Donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(\alpha, \frac{-\mu}{1-\mu}\right)$.

(e) Donner son espérance et sa variance.

Comme X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(\alpha, \frac{-\mu}{1-\mu}\right)$ alors

$$E(X) = \alpha \frac{-\mu}{1-\mu} = \frac{\mu + \lambda}{1-\mu} \text{ et } V(X) = \alpha \frac{-\mu}{1-\mu} \left(1 - \frac{-\mu}{1-\mu}\right) = \frac{\mu + \lambda}{(1-\mu)^2}.$$

5. (a) Montrer que G est bien définie et continue sur $[-1, 1]$.

On pose, pour tout $k \geq 0$, $f_k : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto p_k t^k$. Les f_k sont continues sur $[-1, 1]$. De plus, pour tout $t \in [-1, 1]$, $|f_k(t)| \leq p_k$ et $\sum_{k \geq 0} p_k$ converge. On en déduit que la série

de fonctions $\sum_{k \geq 0} f_k$ converge normalement et donc uniformément sur $[-1, 1]$. D'après

le théorème de continuité $G = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ est bien définie et continue sur $[-1, 1]$.

(b) Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum p_k z^k$ est $\frac{1}{|\mu|}$ et que

$$\forall t \in \left] \frac{-1}{|\mu|}, \frac{1}{|\mu|} \right[, \sum_{k=0}^{+\infty} p_k t^k = p_0 (1 - \mu t)^{\alpha}.$$

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors $\left| \frac{p_{k+1}z^{k+1}}{p_k z^k} \right| = \left| \mu + \frac{\lambda}{k+1} \right| |z| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} |\mu| |z|$. D'après la règle de d'Alembert

Si $|z| < \frac{1}{|\mu|}$ alors $|\mu| |z| < 1$ et donc $\sum p_k z^k$ converge absolument et

Si $|z| > \frac{1}{|\mu|}$ alors $|\mu| |z| > 1$ et donc $\sum p_k z^k$ diverge grossièrement.

On en déduit que le rayon de convergence de la série entière $\sum p_k z^k$ est $\frac{1}{|\mu|}$.

Si $t \in \left] \frac{-1}{|\mu|}, \frac{1}{|\mu|} \right[$ alors $|\mu t| < 1$ et

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} p_k t^k &= p_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} p_0 \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} (-\mu t)^k \\ &= p_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} (-\mu t)^k \right) \\ &= p_0 (1 - \mu t)^\alpha. \end{aligned}$$

(c) **Déduire que $\mu \in [-1, 1[$ et que $p_0 = (1 - \mu)^{-\alpha}$.**

La série entière $\sum p_k z^k$ converge pour $z = 1$, donc son rayon de convergence $\frac{1}{|\mu|} \geq 1$.

Donc $|\mu| \leq 1$. Supposons que $\mu = 1$. Alors

$$\forall t \in]-1, 1[: G(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k t^k = p_0 (1 - t)^\alpha.$$

Comme G est continue en 1 alors

$$1 = G(1) = \lim_{t \rightarrow 1} p_0 (1 - t)^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0. \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$$

ce qui est absurde. Donc $\mu \in [-1, 1[$. De plus

$$\forall t \in]-1, 1[: G(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k t^k = p_0 (1 - \mu t)^\alpha.$$

et par continuité en 1

$$1 = G(1) = \lim_{t \rightarrow 1} p_0 (1 - \mu t)^\alpha = p_0 (1 - \mu)^\alpha.$$

On en déduit que $p_0 = (1 - \mu)^{-\alpha}$.

(d) **Montrer que G est deux fois dérivable en 1.**

On a

$$\forall t \in]-1, 1[: G(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k t^k = p_0 (1 - \mu t)^\alpha.$$

qui se prolonge par continuité au segment $[-1, 1]$:

$$\forall t \in [-1, 1] : G(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k t^k = p_0 (1 - \mu t)^\alpha.$$

Donc G est deux fois dérivable en 1.

- (e) **En déduire que X admet une espérance finie $E(X)$ et une variance finie $V(X)$ qu'on déterminera.**

Comme G est deux fois dérivable en 1 alors X admet une espérance finie $E(X)$ et une variance finie $V(X)$ données par

$$\begin{aligned} E(X) &= G'(1) \text{ et} \\ V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 \\ &= G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2. \end{aligned}$$

D'autre part $\forall t \in [-1, 1]$

$$\begin{aligned} G'(t) &= -\mu p_0 \alpha (1 - \lambda t)^{\alpha-1} = (\mu + \lambda) p_0 (1 - \mu t)^{\alpha-1}. \\ G''(t) &= -\mu (\mu + \lambda) (\alpha - 1) p_0 (1 - \mu t)^{\alpha-2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} G'(1) &= (\mu + \lambda) p_0 (1 - \mu)^{\alpha-1} = \frac{\mu + \lambda}{1 - \mu}. \\ G''(1) &= -\mu (\mu + \lambda) (\alpha - 1) p_0 (1 - \mu)^{\alpha-2} = \frac{(\mu + \lambda) (2\mu + \lambda)}{(1 - \mu)^2}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{\mu + \lambda}{1 - \mu}. \\ V(X) &= G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2 \\ &= \frac{(\mu + \lambda) (2\mu + \lambda)}{(1 - \mu)^2} + \frac{\mu + \lambda}{1 - \mu} - \left(\frac{\mu + \lambda}{1 - \mu} \right)^2 \\ &= \frac{(\mu + \lambda) (2\mu + \lambda) + (\mu + \lambda) (1 - \mu) - (\mu + \lambda)^2}{(1 - \mu)^2} \\ &= \frac{(\mu + \lambda) (2\mu + \lambda + 1 - \mu - \mu - \lambda)}{(1 - \mu)^2} \\ &= \frac{(\mu + \lambda)}{(1 - \mu)^2}. \end{aligned}$$

Problème

Partie 1

1. Montrer que g est continue, bornée et paire sur \mathbb{R} .

On pose $f(x, t) = \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$, $(x, t) \in \mathbb{R}^2$.

La fonction f est continue sur \mathbb{R}^2 et vérifie pour tout (x, t) , $0 \leq f(x, t) \leq \frac{1}{1+t^2}$, or la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue et est intégrable sur \mathbb{R} puisque $f(t) \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$. Donc f est continue sur \mathbb{R} .

On a pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, $0 \leq \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$0 \leq g(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = M$. Donc g est bornée sur \mathbb{R} .

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $g(-x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(-x)^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt = g(x)$. Ainsi g est paire.

2. Calculer $g(0)$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

On a d'une part, $g(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$. D'autre part, pour tout réel x ,

$$0 \leq g(x) = e^{-x^2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2 t^2}}{1+t^2} dt \leq e^{-x^2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} e^{-x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

3. Montrer que g est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et donner l'expression de sa dérivée en fonction de l'intégrale de Gauss $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

— Pour tout $x > 0$, $t \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est intégrable sur \mathbb{R} et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et on a pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}_+ \times]0, +\infty[$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -2xe^{-x^2(1+t^2)}$.

— Pour tout $x > 0$, $t \mapsto -2xe^{-x^2(1+t^2)}$ est continue par morceaux sur \mathbb{R}_+ .

— Soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = 2xe^{-x^2(1+t^2)} \leq 2be^{-a^2 t^2}$: intégrable sur \mathbb{R}_+ .

Donc g est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et on a :

$$g'(x) = -2x \int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+t^2)} dt = -2xe^{-x^2} \int_0^{+\infty} e^{-x^2 t^2} dt \underset{u=xt}{=} -2e^{-x^2} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = -2Ie^{-x^2}.$$

4. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{\pi}{2} - 2I \int_0^{|x|} e^{-u^2} du.$$

On a pour tout $x > 0$, $g'(x) = -2Ie^{-x^2}$, donc $g(x) = c - 2I \int_0^x e^{-u^2} du$, $c \in \mathbb{R}$.

Comme g est continue en 0 et $g(0) = \frac{\pi}{2}$, alors $c = \frac{\pi}{2}$.

D'où, pour tout réel positif x , $g(x) = \frac{\pi}{2} - 2I \int_0^x e^{-u^2} du$.

Par parité, on aura $g(x) = \frac{\pi}{2} - 2I \int_0^{|x|} e^{-u^2} du$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

5. En déduire la valeur de I .

La fonction $u \mapsto e^{-u^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, donc

$$0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{\pi}{2} - 2I^2. \text{ Ainsi, par positivité de } I, \text{ on aura } I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

6. La fonction g est-elle dérivable en 0 ?

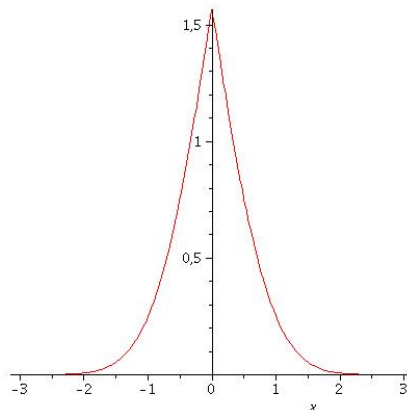
La fonction g est continue sur \mathbb{R}_+ et dérivable sur $]0, +\infty[$.

De plus $\lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = -2I = -\sqrt{\pi}$.

De même, g est continue sur \mathbb{R}_- et, par parité, dérivable sur $] -\infty, 0[$ et sa dérivée vaut $2Ie^{-x^2}$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x) = 2I = \sqrt{\pi}$.

On conclut que g est dérivable à droite et à gauche en 0 et que $g'_d(0) = -\sqrt{\pi}$ et $\sqrt{\pi} = g'_g(0)$. La fonction g est donc non dérivable en 0.

7. Tracer l'allure de la courbe de g dans un repère orthonormé.



Partie 2

1. Calculer u_n , $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{t+n-n}{t+n} dt = \frac{1}{n} \int_0^1 \left(1 - \frac{n}{t+n}\right) dt = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

2. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est convergente. On note γ sa somme.

$$\text{On a } u_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, on aura la convergence de $\sum_{n \geq 1} u_n$.

3. Exprimer $\sum_{k=1}^n u_k$ en fonction de γ_n et déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n = \gamma$.

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) = \gamma_n - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Donc $(\gamma_n)_n$ est convergente et sa limite est γ .

4. Montrer que $\forall k \geq 2, \frac{1}{2k(k+1)} \leq u_k \leq \frac{1}{2k(k-1)}$.

$$\text{Soit } k \geq 2 \text{ et } t \in [0, 1]. \text{ On a } k \leq t+k \leq 1+k \Rightarrow \frac{t}{k+1} \leq \frac{t}{t+k} \leq \frac{t}{k}.$$

$$\text{On intègre sur } [0, 1] \text{ et on multiplie par } \frac{1}{k}, \text{ on obtient } \frac{1}{2k(k+1)} \leq u_k \leq \frac{1}{2k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}.$$

5. En déduire que pour tout entier non nul n , $\frac{1}{2n+2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq \frac{1}{2n}$.

Le deux séries $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{2k(k+1)}$ et $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k(k-1)}$ sont convergentes et on a

$$\forall k \geq 2, \quad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

$$\text{Soit } n \geq 1 \text{ et } N > n. \text{ On a } \sum_{k=n+1}^N \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} \text{ et } \sum_{k=n+1}^N \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{N}.$$

On effectue la somme de $k = n+1$ à $k = N$ dans l'encadrement de la question précédente,

on obtient :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1}\right) \leq \sum_{k=n+1}^N u_k \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N}\right).$$

On fait tendre N vers $+\infty$, on aura : $\frac{1}{2(n+1)} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} u_k \leq \frac{1}{2n}$.

6. **Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \gamma - S_n \leq \frac{1}{2n(n+1)}$, où $S_n = \sum_{k=1}^n u_k + \frac{1}{2(n+1)}$.**

On remplace $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ par $\gamma - \sum_{k=1}^n u_k$ et on retranche $\frac{1}{2n+2}$, de l'encadrement de la question 5., on obtient :

$$0 \leq \gamma - \sum_{k=1}^n u_k - \frac{1}{2(n+1)} \leq \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2n(n+1)}.$$

7. **Déterminer un entier $N \in \mathbb{N}^*$ pour lequel S_N est une valeur approchée de γ à 10^{-3} près.**

Pour que S_N réalise une approximation de γ à 10^{-3} près, il suffit que $\frac{1}{2N(N+1)} \leq 10^{-3}$ donc $N(N+1) \geq 500$. L'entier $N = 22$ convient.

Partie 3

1. **Montrer que G est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et exprimer ses dérivées successives sous forme intégrale.**

On pose $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C} \ (t, x) \mapsto e^{-t^2} e^{-itx}$.

- la fonction F admet des dérivées partielles par rapport à x à tout ordre dont l'expression est $\frac{\partial^n F}{\partial x^n}(t, x) = (-it)^n F(t, x)$.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto \frac{\partial^n F}{\partial x^n}(t, x)$ est continue sur \mathbb{R} .
- Pour tout $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, $t \mapsto \frac{\partial^n F}{\partial x^n}(t, x)$ est continue par morceaux sur \mathbb{R} .
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, $\left| \frac{\partial^n F}{\partial x^n}(t, x) \right| = |t|^n e^{-t^2}$ et $t \mapsto |t|^n e^{-t^2}$ est continue par morceaux et intégrable sur \mathbb{R} car négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ au voisinage de $\pm\infty$.

Donc, G est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et ses dérivées successives sont données par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad G^{(n)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-it)^n e^{-t^2} e^{-itx} dt.$$

2. **Montrer que G satisfait une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1.**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} -ite^{-t^2} e^{-itx} dt \underset{\text{I.P.P.}}{=} \left[\frac{i}{2} e^{-t^2} e^{-itx} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-t^2} e^{-itx} dt = -\frac{x}{2} G(x),$$

puisque $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left| \frac{i}{2} e^{-t^2} e^{-itx} \right| = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2} e^{-t^2} = 0$.

3. **Résoudre l'équation différentielle obtenue et déduire que $G(x) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{x^2}{4}}$.**

La fonction G est solution, \mathbb{R} de l'équation différentielle $y' = -\frac{x}{2}y$, dont la solution générale est $y(x) = \lambda e^{-\int_0^x \frac{t}{2} dt} = \lambda e^{-\frac{x^2}{4}}$. Comme $G(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$, d'après la première partie. On conclut que $G(x) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{x^2}{4}}$.

4. En développant G en série entière sur \mathbb{R} , montrer que $\forall m \in \mathbb{N}, G^{(2m)}(0) = \sqrt{\pi} \frac{(-1)^m (2m)!}{m! 4^m}$.

Le développement en série entière sur \mathbb{R} est donné par : $G(x) = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{4^n n!}$.

Donc $\forall m \in \mathbb{N}, \frac{G^{(2m)}(0)}{(2m)!} = \sqrt{\pi} \frac{(-1)^m}{m! 4^m}$

5. (a) Montrer que la fonction $t \mapsto t^{2m} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n}$ est intégrable sur \mathbb{R} si et seulement si $n > m$.

La fonction $t \mapsto t^{2m} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n}$ est continue par morceaux sur \mathbb{R} pour tout $n \geq 1$ et on a $t^{2m} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n} \underset{t \rightarrow \pm\infty}{\sim} \frac{1}{n^n} \frac{1}{t^{2n-2m}}$. Cette dernière fonction est intégrable au voisinage de $\pm\infty$ si, et seulement si, $2n - 2m > 1$.

Donc $t \mapsto t^{2m} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n}$ est intégrable sur \mathbb{R} si et seulement si $n > m$.

- (b) Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé. En étudiant les variations de $g_t : x \mapsto -x \ln(1 + \frac{t^2}{x})$ sur $[1, +\infty[$, montrer que la suite $\left((1 + \frac{t^2}{n})^{-n} \right)_{n \geq 1}$ est décroissante.

Soit $t \in \mathbb{R}$. La fonction g_t est indéfiniment dérivable sur $[1, +\infty[$ et on a :

$$g'_t(x) = \frac{t^2}{x+t^2} - \ln(1 + \frac{t^2}{x}) \text{ et } g''_t(x) = \frac{t^4}{x(x+t^2)^2}.$$

Comme $g''_t \geq 0$ sur $[1, +\infty[$, donc g'_t est croissante sur $[1, +\infty[$, de plus sa limite en $+\infty$ est 0 donc elle est négative et par suite g_t est décroissante sur $[1, +\infty[$.

En particulier, pour tout entier non nul n , on a $g_t(n+1) \leq g_t(n)$, donc $e^{g_t(n+1)} \leq e^{g_t(n)}$.

La suite $\left((1 + \frac{t^2}{n})^{-n} \right)_{n \geq 1}$ est donc décroissante.

- (c) Montrer alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2m} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n} dt = \frac{\sqrt{\pi} (2m)!}{m! 4^m}$.

On énoncera avec précision le théorème du cours utilisé.

La suite des fonctions continues par morceaux $\left(t^{2m} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n} \right)_n$ converge simplement sur \mathbb{R} vers la fonction $t \mapsto t^{2m} e^{-t^2}$ qui est continue par morceaux.

De plus pour tout entier $n \geq m+1$, $0 \leq t^{2m} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n} \leq \phi_m(t) = t^{2m} (1 + \frac{t^2}{m+1})^{-m-1}$.

La fonction ϕ_m est continue par morceaux sur \mathbb{R} et est intégrable au voisinage de $\pm\infty$ car équivalente à $\frac{1}{(m+1)^{m+1}} \frac{1}{t^2}$ au voisinage de $\pm\infty$.

D'après le théorème de la convergence dominée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2m} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2m} e^{-t^2} dt = (-1)^m G_{2m}(0) = \sqrt{\pi} \frac{(2m)!}{m! 4^m}.$$

Énoncé T.C.D. : Soit $(f_n)_{n \geq n_0}$ une suite des fonctions de I vers \mathbb{K} . Si

— Les fonctions f_n sont continues par morceaux sur I .

— La suite $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I .

— Il existe une fonction ϕ continue par morceaux et intégrable sur I et telle que $\forall n \geq n_0, |f_n(t)| \leq \phi(t), \forall t \in I$.

Alors f et f_n sont intégrables et on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n = \int_I f$.

6. Montrer que pour tout $n > m \geq 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2m} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n} dt = n^{m+\frac{1}{2}} J_{n,m}$, où

$$J_{n,m} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^{2m}}{(1+u^2)^n} du.$$

On a $\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2m} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n} dt \underset{u=\frac{t}{\sqrt{n}}}{=} n^{m+\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^{2m} (1 + u^2)^{-n} du = n^{m+\frac{1}{2}} J_{n;m}.$

7. **Montrer que pour tout** $n > m \geq 0$, $J_{n+1;m} = (1 - \frac{2m+1}{2n}) J_{n;m}.$

Pour $n > m \geq 0$, on a $J_{n+1;m} - J_{n;m} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^{2m+2}}{(1+u^2)^{n+1}} du$. On effectue une intégration par parties dans la dernière intégrale en posant, $X = u^{2m+1}$, $Y' = \frac{u}{(1+u^2)^{n+1}}$, on obtient :

$$J_{n+1;m} - J_{n;m} = \underbrace{\left[\frac{1}{2n} \frac{u^{2m+1}}{(1+u^2)^n} \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \frac{2m+1}{2n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^{2m}}{(1+u^2)^n} du = -\frac{2m+1}{2n} J_{n;m}.$$

8. **Montrer que pour tout** $m \in \mathbb{N}^*$, $J_{m+1;m} = \frac{2m-1}{2m} J_{m;m-1}.$

On effectue une intégration par parties dans l'intégrale $J_{m+1;m} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^{2m}}{(1+u^2)^{m+1}} du$, en posant $X' = \frac{u}{(1+u^2)^{m+1}}$ et $Y = u^{2m-1}$, on obtient :

$$J_{m+1;m} = \underbrace{\left[\frac{1}{2m} \frac{u^{2m-1}}{(1+u^2)^m} \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + \frac{2m-1}{2m} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^{2m-2}}{(1+u^2)^m} du = \frac{2m-1}{2m} J_{m;m-1}.$$

9. **En déduire une expression simplifiée de** $J_{m+1;m}$, $m \in \mathbb{N}$, **à l'aide des factorielles.**

Soit $m \in \mathbb{N}$, on a

$$J_{m+1;m} = \frac{2m-1}{2m} J_{m;m-1}$$

$$J_{m;m-1} = \frac{2m-3}{2m-2} J_{m-1;m-2}$$

\vdots

$$J_{2;1} = \frac{1}{2} J_{1;0}.$$

Donc $J_{m+1;m} = \frac{(2m-1)(2m-3)\dots 3 \cdot 1}{2m(2m-2)\dots 4 \cdot 2} J_{1;0} = \frac{(2m)!}{(2^m m!)^2} J_{1;0}$. Or $J_{1;0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \pi$.

D'où, $J_{m+1;m} = \frac{(2m)!}{(2^m m!)^2} \pi$.

10. **Montrer alors que pour tout** $n > m + 1$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2m} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n} dt = n^{m+\frac{1}{2}} \frac{\pi (2m)!}{4^m (m!)^2} \prod_{k=m+1}^{n-1} \left(1 - \frac{2m+1}{2k} \right).$$

Soit $n > m + 1$. Pour m fixé, on réitère l'égalité de la question 8. de $k = m + 1$ jusqu'à $k = n$,

$$J_{n;m} = (1 - \frac{2m+1}{2(n-1)}) J_{n-1;m}$$

$$J_{n-1;m} = (1 - \frac{2m+1}{2(n-2)}) J_{n-2;m}$$

\vdots

$$J_{m+2;m} = (1 - \frac{2m+1}{2(m+1)}) J_{m+1;m}.$$

Par multiplication terme à terme, on obtient : $J_{n;m} = J_{m+1;m} \prod_{k=m+1}^{n-1} (1 - \frac{2m+1}{2k})$.

D'après la question précédente, on aura : $J_{n;m} = \pi \frac{(2m)!}{(2^m m!)^2} \prod_{k=m+1}^{n-1} (1 - \frac{2m+1}{2k})$.

La formule demandée découle de la question 6.

11. Donner le développement en série entière de $f(t) = \ln(1-t)$ et préciser l'intervalle de validité.

$$\ln(1-t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}, \quad t \in]-1, 1[.$$

12. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(\pi) = 2\ln(m!) + (2m+1)\left(\gamma - \sum_{k=1}^m \frac{1}{k}\right) + 2 \sum_{k=m+1}^{+\infty} \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(m+\frac{1}{2})^p}{pk^p}.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2m} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n} dt = \frac{\sqrt{\pi}(2m)!}{m!4^m}$; donc d'après les questions précédentes, on aura

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n^{m+\frac{1}{2}} \prod_{k=m+1}^{n-1} (1 - \frac{2m+1}{2k}) \right) = \frac{m!}{\sqrt{\pi}}$, donc, en appliquant le logarithme, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left((2m+1) \ln n + 2 \sum_{k=m+1}^{n-1} \ln(1 - \frac{m+\frac{1}{2}}{k}) \right) = 2\ln m! - \ln \pi.$$

Or $\forall k \geq m+1$, $\ln(1 - \frac{m+\frac{1}{2}}{k}) = -\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(m+\frac{1}{2})^p}{pk^p}$ puisque $\frac{m+\frac{1}{2}}{k} \in]0, 1[$. D'où,

$$\begin{aligned} 2\ln m! - \ln \pi &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left((2m+1) \ln n - 2 \sum_{k=m+1}^{n-1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(m+\frac{1}{2})^p}{pk^p} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left((2m+1) \ln n - 2 \sum_{k=m+1}^{n-1} \frac{m+\frac{1}{2}}{k} - 2 \sum_{k=m+1}^{n-1} \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(m+\frac{1}{2})^p}{pk^p} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left((2m+1) \left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \gamma_n + \frac{1}{n} \right) - 2 \sum_{k=m+1}^{n-1} \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(m+\frac{1}{2})^p}{pk^p} \right) \\ &= (2m+1) \left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \gamma \right) - 2 \sum_{k=m+1}^{+\infty} \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(m+\frac{1}{2})^p}{pk^p}. \end{aligned}$$

13. Montrer que

$$\ln(\pi) = \gamma + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{\zeta(p)}{p2^{p-1}}, \quad \text{où } \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s > 1.$$

L'égalité de la question 10. est valable pour $m = 0$, on obtient, en passant à la limite :

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{n} \pi \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \frac{1}{2k}) \right), \quad \text{ce qui donne, } \ln \pi = \gamma + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p2^p k^p}.$$

La famille $\left(\frac{1}{p2^p k^p} \right)_{k \geq 1, p \geq 2}$ est sommable puisque à termes positifs, la série

$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{p2^p k^p} = \frac{1}{p2^p} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^p}$ est convergente ($p \geq 2$), sa somme vaut $\frac{\zeta(p)}{p2^p}$ et la série $\sum_{p \geq 2} \frac{\zeta(p)}{p2^p}$ est convergente puisque $0 \leq \frac{\zeta(p)}{p2^p} \leq \frac{\zeta(2)}{p2^p}$: terme général d'une série convergente.

Ainsi, par permutation des sommes :

$$\ln \pi = \gamma + 2 \sum_{p=2}^{+\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p2^p k^p} = \gamma + \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p2^{p-1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = \gamma + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{\zeta(p)}{p2^{p-1}}.$$