



## Concours Mathématiques et Physique Epreuve de Physique

Date : Lundi 04 Juin 2018 Heure : 8 H Durée : 4 H Nombre de pages : 8

Barème : Problème 1: 7 pt , Problème 2: 13 pts

L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé.

L'épreuve comporte deux problèmes indépendants, le candidat peut les résoudre dans l'ordre qui lui convient, en respectant néanmoins la numérotation des questions.

Un candidat peut toujours se servir d'un résultat fourni par l'énoncé pour continuer sa composition.

### Données

$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$	$\sin a - \sin b = 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$
$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$	$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{ F m}^{-1}$	$1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J} ; 1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$
$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	$c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$	$i^2 = -1$

### Problème 1 : Optique ondulatoire

Le rôle d'un dispositif interférentiel est de dédoubler une source primaire pour en donner dans la plupart des cas deux sources secondaires  $S_1$  et  $S_2$  pouvant aboutir à des interférences constructives ou destructives.

#### I- Etude des trous d'Young

- 1- Expliquer la raison pour laquelle il faut partir d'une seule source primaire  $S$  et non de deux sources indépendantes  $S_1$  et  $S_2$ .
- 2- On s'intéressera dans ce qui suit au dispositif d'Young. S'agit-il d'un dispositif à division de front d'ondes ou à division d'amplitudes ? Justifier.
- 3- Comme le montre la figure 1 qui se trouve dans le plan  $xOz$ , on dispose d'une source primaire  $S$ , supposée monochromatique et ponctuelle de longueur d'onde  $\lambda$  et de deux trous  $S_1$  et  $S_2$  symétriques par rapport à  $O'$  tel que  $S_1S_2 = a$  ; l'axe  $Oy$  étant perpendiculaire au plan de la figure 1.

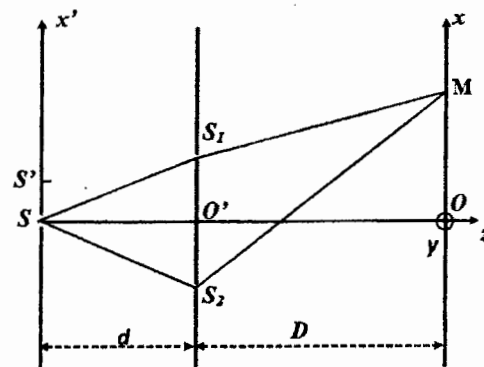


Figure 1

On observe le phénomène d'interférences en un point M repéré par son abscisse  $x$  sur un écran situé dans le plan  $xOy$  à une distance  $D=OO'$ . Dans tout le problème, on se place dans le cas où  $a \ll D$  et  $|x| \ll D$ .

Les deux vibrations scalaires issues de  $S_1$  et  $S_2$  s'écrivent en notation complexe :

$$\underline{S}_1 = S_0 e^{i(\omega t - \varphi_1)} \text{ et } \underline{S}_2 = S_0 e^{i(\omega t - \varphi_2)}$$

- a- Calculer la vibration résultante  $\underline{S}$  au point M en fonction de  $S_0$ ,  $\omega$ ,  $\varphi_2$  et  $\varphi$ , où  $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  est le déphasage entre les deux ondes.
  - b- En déduire l'intensité  $I = \underline{S} \cdot \underline{S}^*$  en fonction de  $\varphi$  et  $I_0 = S_0^2$ .
  - c- Exprimer la différence de marche  $\delta$  au point M entre les deux ondes en fonction de  $a$ ,  $x$  et  $D$ . En déduire l'expression de  $\varphi$ .
  - d- Quelle est la nature des franges d'interférences observées sur l'écran et indiquer leur direction ? Justifier votre réponse.
  - e- Déterminer les positions des franges brillantes et des franges obscures.
  - f- Exprimer l'interfrange  $i$ . Calculer  $i$  pour  $a = 0,5 \text{ mm}$ ,  $D = 1 \text{ m}$  et  $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$ .
  - g- Déterminer la position de la frange centrale et préciser si elle est brillante ou obscure.
- 4- On déplace la source S parallèlement à  $Oy$  d'une faible distance par rapport à  $D$ . Que devient la figure d'interférences ? Commenter.
  - 5- On remplace la source S par une fente fine parallèle à  $Oy$ , décrire la nouvelle figure d'interférences.
  - 6- On déplace maintenant la source S parallèlement à  $Ox$  jusqu'au point S' repéré par son abscisse  $x'$  tel que  $|x'| \ll d$  avec  $d = SO'$  (figure 1).
    - a- Calculer la nouvelle différence de marche  $\delta'$  entre les deux ondes au point M en fonction de  $x$ ,  $x'$ ,  $a$ ,  $D$  et  $d$ . Déterminer la nouvelle position  $x_0$  de la frange centrale.
    - b- Exprimer la nouvelle interfrange  $i'$ . Expliquer ce qui se passe au niveau de la figure d'interférences.

## II- Influence de la largeur de la fente source : Cohérence spatiale

On remplace maintenant la source S par une fente source fine F parallèle à  $Oy$  de largeur  $\ell$ , et on remplace également les trous d'Young  $S_1$  et  $S_2$  par deux fentes fines  $F_1$  et  $F_2$  parallèles entre elles et parallèles à  $Oy$ .

La fente F est située dans le plan médiateur de  $F_1$  et  $F_2$ . La largeur  $\ell$  peut varier moyennant une vis micrométrique.

- 7- L'intensité élémentaire  $dI$  en un point M de l'écran émise par une fente élémentaire de largeur  $dx'$  repérée par son abscisse  $x'$  (figure 2) s'écrit :

$$dI = 2I_0 (1 + \cos \varphi) \frac{dx'}{\ell}$$

- a- Justifier l'expression de  $dI$ . Exprimer  $\varphi$  en fonction de  $x$  et  $x'$ .

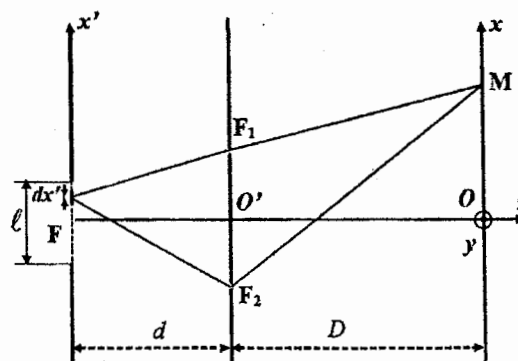


Figure 2

- b- En déduire l'intensité totale  $I$  au point M. Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$I = 2I_0 [1 + V(\ell) \cdot \cos \varphi]$$

Exprimer  $V(\ell)$ . Quel nom donne-t-on à cette fonction ?

- c- Quelle est la valeur de  $V(\ell)$  quand  $\ell \rightarrow 0$  ? Conclure.  
d- Donner les valeurs de  $\ell$  qui annulent  $V(\ell)$  et tracer son allure.  
e- En déduire la longueur de cohérence spatiale  $L_s$  en fonction de  $\lambda$ ,  $d$  et  $a$ . Calculer sa valeur pour  $\lambda = 500 \text{ nm}$ ,  $d = 50 \text{ cm}$  et  $a = 0,5 \text{ mm}$ .  
f- Décrire qualitativement la figure d'interférences pour  $\ell = L_s$ .

### III- Influence de la largeur spectrale de la source : Cohérence temporelle.

On agit de nouveau sur le dispositif de fentes d'Young pour retrouver la fente fine de la partie (I) ; F étant toujours dans le plan médiateur de  $F_1$  et  $F_2$ .

- 8- On éclaire F à l'aide d'une source polychromatique de profil spectral rectangulaire  $I_\nu(\nu)$  et de largeur  $\Delta\nu$  comme l'indique la figure 3, où  $\nu$  est la fréquence de l'onde dans l'intervalle  $[\nu_1, \nu_2]$ . On pose  $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$  et  $\nu_0 = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}$ . Soit  $d\nu$  une largeur spectrale élémentaire dans cet intervalle. L'intensité élémentaire au point M créée par  $d\nu$  s'écrit sous la forme :  $dI = 2I_0 (1 + \cos \varphi) \frac{d\nu}{\Delta\nu}$

- a- En déduire que l'intensité totale au point M peut s'écrire sous la forme :

$$I = 2I_0 [1 + V(\beta') \cdot \cos \varphi]$$

Exprimer  $V(\beta')$ , où  $\beta'$  est à écrire en fonction de  $\Delta\nu$ .

- b- Que devient l'expression de  $I$  quand  $\Delta\nu \rightarrow 0$  ?

Commenter.

- c- Déterminer les valeurs de  $\beta'$  qui annulent  $V(\beta')$  et tracer son allure.

- d- En déduire la longueur de cohérence temporelle

$L_t$  en fonction de  $c$  et  $\Delta\nu$ .

- e- Calculer  $L_t$  pour la lumière blanche d'intervalle spectral  $0,4 - 0,75 \mu\text{m}$ , et pour un laser de largeur spectrale  $100 \text{ MHz}$ . Commenter.

- f- On dispose maintenant d'une fente de largeur  $\ell$  et d'une raie de largeur  $\Delta\nu$ . Quelles sont les conditions sur ces grandeurs pour observer des franges d'interférences ?

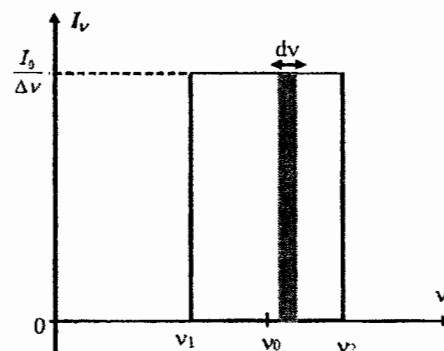


Figure 3

## Problème 2 : Evolution d'une particule quantique dans un potentiel

### I- Partie Préliminaire

On s'intéresse dans ce problème à une particule quantique de masse  $m$  astreinte à se déplacer suivant l'axe  $Ox$  de vecteur unitaire  $\vec{u}_x$ . A cette particule on associe une fonction d'onde  $\Psi(x,t)$  qui décrit son état à l'instant  $t$ .

Lorsque la particule possède une énergie potentielle  $V(x)$ , la fonction d'onde  $\Psi(x,t)$  est solution de l'équation de Schrödinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x) \Psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t}$$

- 1- On pose  $\rho(x) = |\Psi(x,t)|^2$ . Que représente cette grandeur ? Pourquoi doit-on avoir  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx = 1$  ? En déduire la dimension de  $|\Psi(x,t)|$ .
- 2- Dans tout le problème on cherchera des fonctions d'ondes relatives à des états stationnaires d'énergie  $E$  définies par :

$$\Psi(x,t) = \varphi(x) e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$$

- a- Pourquoi un tel état est appelé "état stationnaire" ? Déterminer l'équation de Schrödinger indépendante du temps vérifiée par  $\varphi(x)$ .
- b- En considérant le cas où  $V(x) = V_0$ , avec  $V_0$  est une constante réelle, trouver les solutions possibles  $\varphi(x)$  en comparant  $E$  à  $V_0$ .

### II- Particule Libre

Considérons une particule libre de masse  $m$ , d'impulsion  $p$  évoluant suivant  $Ox$ .

- 3- Montrer que son énergie s'écrit :  $E = \frac{p^2}{2m}$ .
- 4- Montrer que la fonction d'onde  $\Psi(x,t)$  de la particule libre s'écrit sous la forme :

$$\Psi(x,t) = A e^{-i(\omega t - kx)} + B e^{-i(\omega t + kx)}$$

$A$  et  $B$  sont deux constantes complexes ;  $\omega$  et  $k$  deux constantes positives à exprimer en fonction de  $E$ ,  $\hbar$  et  $m$ .

- 5- Interpréter la forme générale de  $\Psi(x,t)$ . Ecrire la relation de dispersion exprimant  $\omega$  en fonction de  $k$ . En déduire la relation entre la longueur d'onde  $\lambda$  associée à cette particule et son impulsion  $p$ . Commenter.
- 6- Sachant qu'on peut écrire les constantes complexes  $A$  et  $B$  sous la forme suivante :  $A = \sqrt{\rho_1} e^{i\theta_1}$  et  $B = \sqrt{\rho_2} e^{i\theta_2}$  avec  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont des constantes réelles. Montrer que :

$$\rho(x) = \rho_1 + \rho_2 + 2\sqrt{\rho_1\rho_2} \cos(2kx + \theta_1 - \theta_2).$$

- 7- Tracer l'allure de  $\rho(x)$  et interpréter.
- 8- Pourquoi la solution  $\Psi(x,t)$  trouvée dans la question (4) ne décrit pas la réalité ? Que peut-on proposer ?

- 9- En réalité l'état quantique de la particule libre est décrit par un paquet d'ondes défini par :

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{-i(\omega(k)t - kx)} dk \quad \text{avec} \quad g(k) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k_2 - k_1}} & \text{pour } k_1 < k < k_2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- a- On pose  $k_0 = \frac{k_1 + k_2}{2}$  et  $\Delta k = k_2 - k_1$ , déterminer  $\Psi(x,0)$ .
- b- En déduire la densité de probabilité  $\rho(x) = |\Psi(x,0)|^2$ . Déterminer les valeurs qui annulent  $\rho(x)$  et tracer ensuite la courbe  $\frac{\rho(x)}{\rho_0}$  où  $\rho_0 = \rho(x=0)$ .
- c- Montrer que  $\Psi(x,0)$  représente bien l'état d'une particule libre à l'instant  $t=0$ .

On donne :  $\int_0^{+\infty} \left( \frac{\sin u}{u} \right)^2 du = \frac{\pi}{2}$

- d- On pose  $\Delta x = x_1 - x_{-1}$  où  $x_1$  et  $x_{-1}$  sont les premières valeurs de  $x$  qui annulent  $\rho(x)$  de part et d'autre de l'origine des abscisses. Calculer le produit  $\Delta x \cdot \Delta k$ . En déduire l'expression de  $\Delta x \cdot \Delta p$ . Quel nom donne-t-on à cette relation ? Commenter.

- 10- En utilisant la relation de dispersion, déterminer la vitesse de groupe  $v_g$  et la vitesse de phase  $v_\phi$ . Quelle est la relation entre  $v_g$  et l'impulsion  $p$  ? Conclure.

### III- Effet tunnel

La particule d'énergie  $E$  venant de la région I ( $x < 0$ ) évolue dans un potentiel  $V(x)$  défini par (figure 4) :

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{si } 0 < x < a \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On suppose que  $0 < E < V_0$  et on cherche les états stationnaires de cette particule dans les trois régions (région I :  $x < 0$ , région II :  $0 < x < a$  et région III :  $x > a$ ).

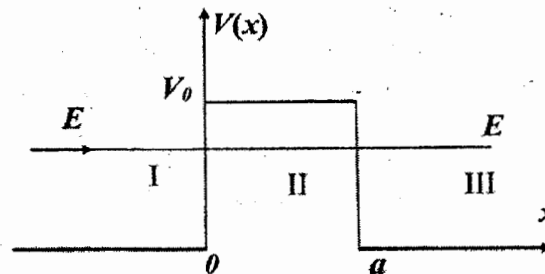


Figure 4

- 11- On pose  $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$  et  $q = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$ . Trouver les solutions  $\varphi(x)$  dans chaque région. On introduira les constantes d'intégration  $A_I, B_I, A_{II}, B_{II}$  et  $A_{III}$  correspondant respectivement aux régions I, II et III.
- 12- En appliquant les conditions aux limites aux interfaces  $x=0$  et  $x=a$ , écrire un système de quatre équations dont les inconnus sont  $A_I, B_I, A_{II}, B_{II}$  et  $A_{III}$ . Quelle condition supplémentaire permet d'établir une cinquième équation ?

13- On définit les coefficients  $R = \frac{\|\vec{j}_r\|}{\|\vec{j}_i\|}$  et  $T = \frac{\|\vec{j}_t\|}{\|\vec{j}_i\|}$ , où  $\vec{j}_i$ ,  $\vec{j}_r$  et  $\vec{j}_t$  sont les vecteurs

densité de courant de probabilité liés respectivement à l'onde incidente, réfléchie dans la région (I) et transmise dans la région III.

On rappelle que le vecteur densité de courant de probabilité d'une onde plane de vecteur d'onde  $\vec{k}$  s'écrit :

$$\vec{j} = |\Psi(x,t)|^2 \frac{\hbar \vec{k}}{m}$$

Exprimer  $R$  et  $T$  en fonction des constantes d'intégration. Que représentent ces coefficients? Pourquoi doit-on avoir  $R+T=1$  ?

14- La résolution du système d'équations précédent donne :

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \sinh^2(qa)}$$

Calculer  $T$  dans le cas d'une barrière de potentiel atomique de hauteur  $V_0 = 2,00 \text{ eV}$  et de largeur  $a = 0,1 \text{ nm}$  pour les particules suivantes :

- Un électron d'énergie  $E = 1,00 \text{ eV}$  et de masse  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ Kg}$ .
- Un proton d'énergie  $E = 1,00 \text{ eV}$  de masse  $m_p \approx 2000 m_e$ .

Commenter.

15- Une barrière est dite épaisse si  $a \gg \delta = \frac{1}{q}$ .

a- Montrer que dans ce cas on a :  $T \approx T_0 e^{-2qa}$  avec  $T_0 = 16 \frac{E(V_0 - E)}{V_0^2}$ .

b- Tracer l'allure de  $T_0(E)$  et discuter les cas limites  $E=0$  et  $E=V_0$ . Calculer la valeur moyenne de  $T_0$  définie par :

$$\langle T_0 \rangle = \frac{1}{V_0} \int_0^{V_0} T_0(E) dE$$

c- En supposant que pour  $E \neq 0$  et  $E \neq V_0$ ,  $\ln T_0 \approx \ln \langle T_0 \rangle$ , montrer que  $\ln T \approx -2qa$ .

#### IV- Radioactivité $\alpha$

L'exemple le plus célèbre de l'effet tunnel est celui de l'émission des particules  $\alpha$  ( ${}^4_2\text{He}$ ) de masse  $m_\alpha = 6,64 \times 10^{-27} \text{ kg}$  par des noyaux lourds radioactifs dont l'interprétation a été proposée par le physicien russe Georges Gamow. Ces particules sont émises avec une énergie  $4 \leq E \leq 9 \text{ MeV}$ .

A l'intérieur du noyau de rayon  $r_0$  la particule  $\alpha$  est soumise à l'interaction nucléaire forte de courte portée modélisée par un puits de potentiel de profondeur  $V_0 > 0$  (figure 5).

Une fois que la particule a quitté le noyau ( $r > r_0$ ), son énergie potentielle se réduit uniquement à son énergie potentielle coulombienne :  $V(r) = \frac{K}{4\pi\epsilon_0 r}$  où  $K = 2(Z-2)e^2 \cdot Z$  est le numéro atomique de l'atome radioactif.

Dans la suite on se place dans le cas unidimensionnel suivant  $\vec{u}_r$ . La particule  $\alpha$  est représentée par la fonction d'onde  $\Psi(r, t)$  qui vérifie l'équation de Schrödinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(r, t)}{\partial r^2} + V(r) \Psi(r, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(r, t)}{\partial t}$$

- 16- **1<sup>er</sup> cas** : La particule est piégée dans le puits de potentiel et possède une énergie  $E < 0$ . On se propose de déterminer les niveaux d'énergie et les états liés de cette particule.

On suppose que ce puits est tel que :

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{si } 0 < r < r_0 \\ +\infty & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- a- Sachant que la fonction d'onde de la particule hors du puits est nulle, montrer que la solution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps pour  $0 < r < r_0$  est :

$\varphi(r) = D \sin(kr)$ , où  $D$  est une constante à exprimer. Exprimer  $k$  en fonction de  $E$  et  $V_0$ .

- b- Montrer que  $k_n = \frac{n\pi}{r_0}$ , où  $n$  est un entier positif. En déduire l'expression de l'énergie  $E_n$  correspondante. Commenter.

- 17- **2<sup>ème</sup> cas** : La particule  $\alpha$  possède maintenant une énergie  $E > 0$ ,

- a- Justifier qu'elle a la possibilité de franchir la barrière de potentiel située entre A et B (Figure 5).

- b- Pour l'uranium  $^{238}_{92}\text{U}$  de rayon  $r_0 = 3,50 \times 10^{-15} \text{ m}$ , l'énergie  $E$  des particules émises est de 4,00 MeV. Calculer en MeV la hauteur  $V_{\max}$  de la barrière.

- c- Déterminer le rayon  $r_1$  correspondant au point B.

- 18- Etant donné que la barrière de potentiel n'a pas la forme simple que celle étudiée dans la section III, on peut, pour  $r_0 < r < r_1$ , approcher la fonction  $V(r)$  par une succession de barrières rectangulaires de hauteur  $V(r)$  et de largeur  $dr$  suffisamment épaisses pour que l'approximation de la question 15-c soit valable (figure 6).

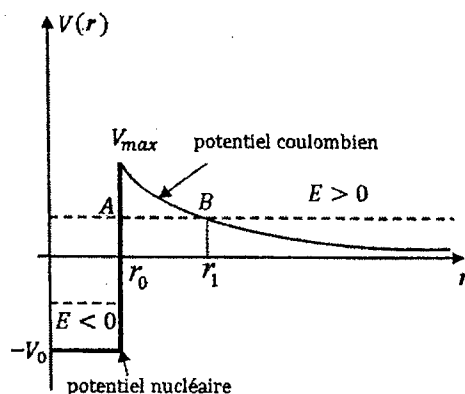


Figure 5

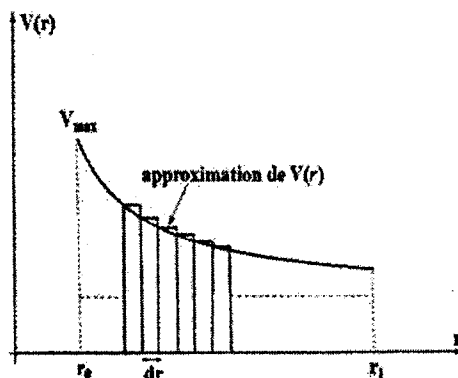


Figure 6

a- Montrer que :  $\ln(T(r+dr)) \approx \ln(T(r)) - 2qdr$ .

b- En déduire la relation suivante :  $\ln T = -\frac{2}{\hbar} \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{2m_\alpha \left( \frac{K}{4\pi\epsilon_0 r} - E \right)} dr$

c- On admet que :  $\int_{r_0}^{r_1} \sqrt{\left( \frac{r_1}{r} - 1 \right)} dr = r_1 \left( \frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{r_0}{r_1}} \right)$ , en déduire que :

$$\ln T = a - \frac{b}{\sqrt{E}} \quad (\text{Loi de Gamow}).$$

Exprimer  $a$  et  $b$  en fonction des données du problème.

19- Typiquement, pour le noyau d'uranium  ${}^{238}_{92}\text{U}$ , on trouve  $T \approx 2 \times 10^{-39}$ . Par ailleurs, la particule  $\alpha$  effectue des allers-retours (oscillations) dans le puits de potentiel nucléaire de largeur  $r_0$  à une vitesse moyenne  $v$ .

a- En négligeant l'énergie potentielle de la particule devant son énergie cinétique, montrer que :  $v = \sqrt{\frac{2E}{m_\alpha}}$ . Calculer sa valeur.

b- Montrer que la durée moyenne entre deux rebonds successifs de la particule sur la barrière s'écrit :  $t_m = r_0 \sqrt{\frac{2m_\alpha}{E}}$ . En déduire le nombre  $n$  de rebonds par unité de temps. Calculer sa valeur numérique.

c- Montrer que la probabilité par unité de temps d'émission d'une particule  $\alpha$  est :  $\beta = n \cdot T$  avec  $\beta$  est la constante radioactive de l'élément radioactif.

20- Soit  $N(t)$  le nombre de noyaux radioactifs à l'instant  $t$ , et  $N_0$  ce nombre à  $t=0$ .

a- Justifier que :  $\frac{dN}{dt} = -\beta N(t)$ .

b- Calculer la valeur de  $\beta$  pour l'uranium  ${}^{238}_{92}\text{U}$ . Comparer cette valeur à celle mesurée  $\beta_{\text{exp}} = 5 \times 10^{-18} \text{ s}$ . Commenter.

c- Le temps de demi-vie  $t_{1/2}$  (ou période radioactive) de l'élément radioactif est défini par :  $N(t_{1/2}) = \frac{N_0}{2}$ . Exprimer  $t_{1/2}$  en fonction de  $\beta$ .

d- En déduire en utilisant la loi de Gamow que :  $\ln \left( \frac{t_{1/2}}{t_m} \right) = \ln(\ln 2) - a + \frac{b}{\sqrt{E}}$ .

Commenter ce résultat.

**Fin de l'épreuve**