

CORRIGE DU CONCOURS MP 2020

Problème 1 : Diffusion de Rayleigh-Mesure de largeur d'une raie spectrale.

Partie I : Diffusion de Rayleigh.

1°/ $\vec{E}(M, t) = E_0 e^{j(\omega t - kx)} \vec{e}_z$, $\vec{B}(M, t) = \frac{k \vec{e}_x}{\omega} \wedge \vec{E}(M, t) = -\frac{E_0}{c} e^{j(\omega t - kx)} \vec{e}_y$

2°/

$$u_{em} = u_e + u_m = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) + \frac{1}{2\mu_0} \frac{E_0^2}{c^2} \cos^2(\omega t - kx) = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx)$$

$$\langle u_{em} \rangle = \epsilon_0 E_0^2 \langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}$$

3°/

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}(M, t) &= \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z \wedge -\frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kx) \vec{e}_x \\ &= \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) c \vec{e}_x = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) \vec{v}_e \end{aligned}$$

→ $v_e = c$: la vitesse de propagation de l'énergie électromagnétique est la vitesse c .

4°/ $\phi = \iint_S \vec{\Pi}(M, t) \cdot d\vec{S} = \epsilon_0 c E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) S$, avec $S = 1m^2$

$$I = \langle \phi \rangle = \frac{\epsilon_0 c}{2} E_0^2 = \frac{1}{2\mu_0 c} E_0^2$$

Champ rayonné par un dipôle.

5°/ Approximation dipolaire : $r \gg a$, a : dimension du dipôle et $r = OM$.

Zone de rayonnement : $r \gg \lambda$

6°/ Le plan contenant l'axe OZ et le vecteur \vec{r} est un plan de symétrie paire pour les sources.

Le vecteur champ magnétique \vec{B} est un vecteur axial, donc il est perpendiculaire à ce plan, il sera porté par \vec{e}_φ .

$$\vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0 \sin(\theta)}{4\pi r c} \frac{d^2 \underline{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{dt^2} \vec{e}_\varphi$$

On a $\underline{p}(t) = p_0 e^{j\omega t} \vec{e}_z \rightarrow \frac{d \underline{p}(t)}{dt} = j\omega p_0 e^{j\omega t} \vec{e}_z \rightarrow \frac{d^2 \underline{p}(t)}{dt^2} = -\omega^2 p_0 e^{j\omega t} \vec{e}_z$

$$\rightarrow \vec{B}(M, t) = -\frac{\mu_0 \sin(\theta)}{4\pi r c} \omega^2 p_0 e^{j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)} \vec{e}_\varphi$$

7°/ $\vec{E} = -c^2 \frac{\vec{k} \wedge \vec{B}}{\omega} = -c \vec{e}_r \wedge -\frac{\mu_0 \sin(\theta)}{4\pi r c} \omega^2 p_0 e^{j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)} \vec{e}_\varphi = -\frac{\mu_0 \sin(\theta)}{4\pi r} \omega^2 p_0 e^{j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)} \vec{e}_\theta$

8°/

$$\begin{aligned}\vec{\Pi}(M, t) &= \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \left(-\frac{\mu_0 \sin(\theta)}{4\pi r} \omega^2 p_0 \cos(\omega t - kr) \right) \vec{e}_\theta \wedge \left(-\frac{\mu_0 \sin(\theta)}{4\pi rc} \omega^2 p_0 \cos(\omega t - kr) \right) \vec{e}_\varphi \\ &= \mu_0 \frac{\sin^2(\theta)}{16\pi^2 r^2 c} \omega^4 p_0^2 \cos^2(\omega t - kr) \vec{e}_r \\ \langle \vec{\Pi} \rangle &= \mu_0 \frac{\sin^2(\theta)}{16\pi^2 r^2 c} \omega^4 p_0^2 \langle \cos^2(\omega t - kr) \rangle \vec{e}_r = \frac{\mu_0 p_0^2 \sin^2(\theta)}{32\pi^2 r^2 c} \omega^4 \vec{e}_r\end{aligned}$$

9°/

$$\begin{aligned}P_r &= \iint_S \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S} = \iint_S \mu_0 \frac{\sin^2(\theta)}{32\pi^2 r^2 c} \omega^4 p_0^2 r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi = \mu_0 \frac{\omega^4 p_0^2}{32\pi^2 c} \int_0^\pi \sin^3(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \mu_0 \frac{\omega^4 p_0^2}{32\pi^2 c} \cdot \frac{4}{3} \cdot 2\pi = \frac{\mu_0 p_0^2}{12\pi c} \omega^4 = \frac{p_0^2}{12\pi \epsilon_0 c^3} \omega^4\end{aligned}$$

10°/ La masse des noyaux est très grande devant ma masse du nuage électronique : on néglige le mouvement des noyaux.

On a : $\frac{F_m}{F_e} = \frac{v.B}{E} = \frac{v.B}{cB} = \frac{v}{c} \ll 1$ (particule non relativiste) $\rightarrow F_m \ll F_e$: l'effet de la force magnétique peut être négligé.

Le terme spatial est négligeable : $k.x \approx k.OA = \frac{2\pi}{\lambda}.OA \ll 1 \rightarrow OA \ll \lambda \rightarrow \vec{E}_i$ est uniforme :

$$\vec{E}_i \approx E_0 e^{j\omega t} \vec{e}_z$$

$$\begin{aligned}11^\circ / \text{RFD : } \vec{F}_e + \vec{F}_r + \vec{F}_f &= m_e \frac{d^2 \vec{OA}}{dt^2} \rightarrow qE_0 e^{j\omega t} \vec{e}_z - m_e \omega_0^2 \vec{OA} - \frac{m_e}{\tau} \frac{d\vec{OA}}{dt} = m_e \frac{d^2 \vec{OA}}{dt^2} \\ \rightarrow qE_0 e^{j\omega t} \vec{e}_z - m_e \omega_0^2 \vec{OA} - \frac{m_e}{\tau} \frac{d\vec{OA}}{dt} &= m_e \frac{d^2 \vec{OA}}{dt^2}\end{aligned}$$

$$\text{En régime forcé : } \frac{d\vec{OA}}{dt} = j\omega \vec{OA} \text{ et } \frac{d^2 \vec{OA}}{dt^2} = -\omega^2 \vec{OA}$$

$$\rightarrow qE_0 e^{j\omega t} \vec{e}_z - m_e \omega_0^2 \vec{OA} - \frac{m_e}{\tau} j\omega \vec{OA} = -m_e \omega^2 \vec{OA} \rightarrow \left(-m_e \omega^2 + \frac{m_e}{\tau} j\omega + m_e \omega_0^2 \right) \vec{OA} = qE_0 e^{j\omega t} \vec{e}_z$$

$$\rightarrow \vec{OA} = \frac{qE_0 e^{j\omega t} \vec{e}_z}{m_e \left(-\omega^2 + \frac{j\omega}{\tau} + \omega_0^2 \right)}$$

$$12^\circ / \vec{p} = q\vec{OA} = \vec{p}_0 e^{j\omega t} \rightarrow \vec{p} = q \frac{qE_0 e^{j\omega t} \vec{e}_z}{m_e \left(-\omega^2 + \frac{j\omega}{\tau} + \omega_0^2 \right)} = \vec{p}_0 e^{j\omega t} \rightarrow \vec{p}_0 = \frac{q^2 E_0 \vec{e}_z}{m_e \left(-\omega^2 + \frac{j\omega}{\tau} + \omega_0^2 \right)}$$

$$\rightarrow p_0 = |\vec{p}_0| = \frac{q^2 E_0}{m_e \sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2 \right)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}}$$

Dans le visible : $\omega \sim 10^{15}$ rd/s et pour $\omega_0 = 2.10^{16}$ rd/s $\rightarrow \omega^2 \ll \omega_0^2$ et $\frac{\omega}{\tau} \ll \omega_0^2 \rightarrow p_0 \approx \frac{q^2 E_0}{m_e \omega_0^2}$

$$13^\circ / \text{D'après } 9^\circ : P_r = \mu_0 \frac{\omega^4 p_0^2}{12\pi c} \rightarrow P_r = \mu_0 \frac{\omega^4}{12\pi c} \left(\frac{q^2 E_0}{m_e \omega_0^2} \right)^2 = \frac{\mu_0 q^4 E_0^2}{12\pi c m_e^2 \omega_0^4} \omega^4$$

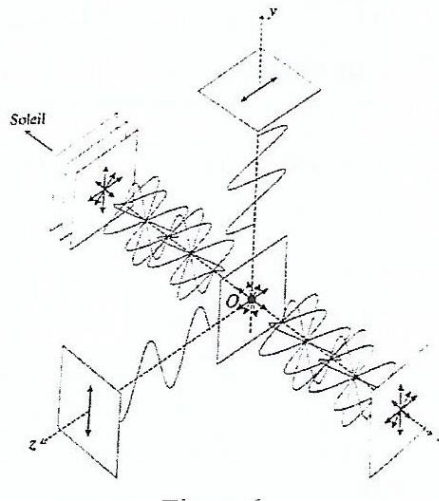
Pour le rouge : $P_r(\text{rouge}) = \frac{\mu_0 q^4 E_0^2}{12\pi c m_e^2 \omega_0^4} \omega_r^4$

Pour le bleu : $P_r(\text{bleu}) = \frac{\mu_0 q^4 E_0^2}{12\pi c m_e^2 \omega_0^4} \omega_b^4$

$$\frac{P_r(\text{bleu})}{P_r(\text{rouge})} = \frac{\mu_0 q^4 E_0^2 \omega_b^4}{12\pi c m_e^2 \omega_0^4} \cdot \frac{12\pi c m_e^2 \omega_0^4}{\mu_0 q^4 E_0^2 \omega_r^4} = \frac{\omega_b^4}{\omega_r^4} = \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_b}\right)^4 = \left(\frac{0,8}{0,4}\right)^4 = 16$$

La puissance rayonnée dans le bleu est 16 fois plus grande que celle rayonnée dans le rouge, c'est pourquoi le ciel est bleu.

14°/ L'onde électromagnétique diffusée dans une direction perpendiculaire au Soleil est polarisée rectilignement. En effet la lumière solaire incidente non polarisée, présente toutes les directions de polarisation perpendiculaires à son vecteur de propagation que l'on suppose ici être \vec{e}_x . Ainsi elle induit des dipôles vibrants dans toutes ces directions. Mais on sait qu'un dipôle oscillant n'envoie pas de rayonnement dans sa propre direction. Ainsi, la composante p_y ne donne pas d'onde dans la direction \vec{e}_y . Dans cette direction le champ électrique est uniquement dû à la composante p_z du dipôle : ce champ est polarisé rectilignement suivant \vec{e}_z .



15°/ D'après la question 4°/ : $P_i = \frac{\epsilon_0 c}{2} E_0^2 S$

On a $E_0^2 = \frac{2P_i}{\epsilon_0 c S}$, donc P_r devient : $P_r = \frac{\mu_0 q^4}{6\pi \epsilon_0 c^2 m_e^2 S} \frac{\omega^4}{\omega_0^4} P_i = \frac{\mu_0^2 q^4}{6\pi m_e^2 S} \frac{\omega^4}{\omega_0^4} P_i$

16°/ Soit $P_i(x)$ la puissance qui entre dans le volume en x et $P_i(x+dx)$ la puissance sortante en $x+dx$.

La puissance diffusée par les molécules d'air de ce volume est : $P_r \cdot NSdx$

Donc : $P_i(x) = P_i(x+dx) + P_r \cdot NSdx \rightarrow P_i(x+dx) - P_i(x) = -P_r \cdot NSdx$

$$\rightarrow \frac{dP_i}{dx} dx = -\frac{\mu_0^2 q^4}{6\pi m_e^2 S} \frac{\omega^4}{\omega_0^4} P_i \cdot NSdx \rightarrow \frac{dP_i}{dx} = -\frac{\mu_0^2 q^4}{6\pi m_e^2} \frac{\omega^4}{\omega_0^4} P_i \cdot N = -\frac{P_i}{l}, \text{ avec } l = \frac{6\pi m_e^2}{\mu_0^2 q^4 N} \frac{\omega_0^4}{\omega^4}$$

17°/ $\frac{dP_i}{dx} = -\frac{P_i}{l} \rightarrow \frac{dP_i}{P_i} = -\frac{dx}{l}$, par intégration : $\ln(P_i) = -\frac{x}{l} + Cte \rightarrow P_i(x) = P_0 e^{-\frac{x}{l}}$

l : distance caractéristique de l'atténuation de l'onde, $l = \frac{6\pi m_e^2}{\mu_0^2 q^4 N} \frac{\omega_0^4}{\omega^4} = \frac{6\pi m_e^2}{\mu_0^2 q^4 N} \frac{\lambda^4}{\lambda_0^4}$ si λ augmente aussi l augmente.

$l(\text{rouge}) = 200 \text{ km}$ et $l(\text{bleu}) = 24 \text{ km}$: $l(\text{rouge}) > l(\text{bleu}) \rightarrow$ les courtes longueurs d'ondes (bleu) sont plus absorbées par l'atmosphère que les longues longueurs d'ondes (rouge).

Au coucher du Soleil, l'onde traverse une couche atmosphérique épaisse, le bleu est très atténué alors que le rouge l'est beaucoup moins. La lumière arrivant directement du Soleil couchant est donc rouge.

Partie II : Elargissement Doppler.

18°/ On a : $dP(v_z) = A \exp\left(-\frac{mv_z^2}{2k_B T}\right) dv_z$

La somme de toutes les probabilités est égale à 1 et la composante v_z varie entre $-\infty$ et $+\infty$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dP(v_z) = 1 \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} A \exp\left(-\frac{mv_z^2}{2k_B T}\right) dv_z = 1 \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{mv_z^2}{2k_B T}\right) dv_z = \frac{1}{A} = \sqrt{\frac{\pi}{\frac{m}{2k_B T}}} = \sqrt{\frac{2\pi k_B T}{m}}$$

$$\rightarrow A = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}}$$

19°/ a) On a : $v = v_0 \left(1 + \frac{v_z}{c}\right) \rightarrow v_z = c \left(\frac{v}{v_0} - 1\right) \rightarrow dv_z = \frac{c}{v_0} dv$

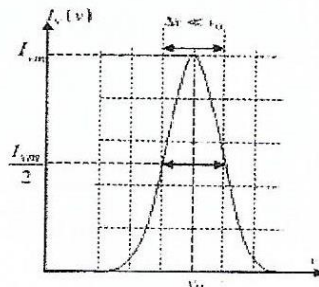
La probabilité devient :

$$dP(v) = A \exp\left(-\frac{m}{2k_B T} c^2 \left(\frac{v}{v_0} - 1\right)^2\right) \frac{c}{v_0} dv = A \frac{c}{v_0} \exp\left(-\frac{mc^2}{2k_B T v_0^2} (v - v_0)^2\right) dv$$

b) $I_\nu(v) \sim A \frac{c}{v_0} \exp\left(-\frac{mc^2}{2k_B T v_0^2} (v - v_0)^2\right) = I_{vm} \exp\left(-\frac{(v - v_0)^2}{a^2}\right)$

Par identification : $I_{vm} = A \frac{c}{v_0} = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \frac{c}{v_0}$ et $\frac{mc^2}{2k_B T v_0^2} = \frac{1}{a^2} \rightarrow a = \sqrt{\frac{2k_B T v_0^2}{mc^2}}$

c) Représentation graphique de $I_\nu(v)$:



d) $I_\nu\left(v_0 + \frac{\Delta \nu}{2}\right) = \frac{I_{vm}}{2} = I_{vm} \exp\left(-\frac{\left(v_0 + \frac{\Delta \nu}{2} - v_0\right)^2}{a^2}\right) = I_{vm} \exp\left(-\frac{\Delta \nu^2}{4a^2}\right) \rightarrow \frac{1}{2} = \exp\left(-\frac{\Delta \nu^2}{4a^2}\right)$

$$\rightarrow \frac{\Delta \nu^2}{4a^2} = \ln(2) \rightarrow \Delta \nu = 2a\sqrt{\ln(2)} = \sqrt{\frac{8k_B T \ln(2)}{m}} \frac{v_0}{c}$$

On a $M = m \cdot N_A \rightarrow m = \frac{M}{N_A}$

$$\rightarrow \Delta \nu = \sqrt{\frac{8k_B T \ln(2)}{\frac{M}{N_A}}} \frac{v_0}{c} = \sqrt{\frac{8k_B N_A T \ln(2)}{M}} \frac{v_0}{c}, \text{ or } k_B N_A = R \text{ et } \lambda_0 = cT_0 = \frac{c}{v_0} \rightarrow \frac{v_0}{c} = \frac{1}{\lambda_0} \rightarrow$$

$$\Delta \nu = \sqrt{\frac{8RT \ln(2)}{M}} \frac{1}{\lambda_0}$$

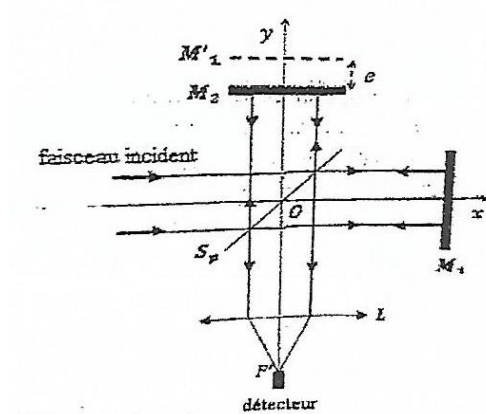
e) AN : $\Delta \nu = \sqrt{\frac{8,8,31.300.0,693}{29.10^{-3}}} \frac{10^9}{589} = 1,17.10^9 \text{ Hz}$

Partie III : Mesure de la largeur d'une raie spectrale.

A/ 1^{ère} Méthode : Interférences à deux ondes.

20°/ L'image de M_1 par la séparatrice est M'_1 qui est parallèle à M_2 , c'est pourquoi l'interféromètre est utilisé dans la configuration lame d'air d'épaisseur e .

La différence de marche : $\delta = 2e$



21°/ Lumière monochromatique : $I = 2 \frac{I_0}{4} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right) \right) = \frac{I_0}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{4\pi e}{\lambda}\right) \right)$

22°/ a) $dI = \frac{dI_0}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right) \right)$, or $\lambda = \frac{c}{\nu} \rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} \rightarrow dI = \frac{I_0}{2\Delta\nu} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta\nu}{c}\right) \right) d\nu$

b) $I = \int_{\nu_1}^{\nu_2} dI \rightarrow$

$$I = \int_{\nu_1}^{\nu_2} \frac{I_0}{2\Delta\nu} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta\nu}{c}\right) \right) d\nu = \frac{I_0}{2\Delta\nu} \int_{\nu_1}^{\nu_2} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta\nu}{c}\right) \right) d\nu = \frac{I_0}{2\Delta\nu} \left[\nu + \frac{c}{2\pi\delta} \sin\left(\frac{2\pi\delta\nu}{c}\right) \right]_{\nu_1}^{\nu_2}$$

$$= \frac{I_0}{2\Delta\nu} \left[(\nu_2 - \nu_1) + \frac{c}{2\pi\delta} \left(\sin\left(\frac{2\pi\delta\nu_2}{c}\right) - \sin\left(\frac{2\pi\delta\nu_1}{c}\right) \right) \right]$$

Rappel : $\sin(p) - \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$

$$I = \frac{I_0}{2\Delta\nu} \left[(\nu_2 - \nu_1) + \frac{c}{2\pi\delta} 2 \sin\left(\frac{2\pi\delta(\nu_2 - \nu_1)}{2c}\right) \cos\left(\frac{2\pi\delta(\nu_2 + \nu_1)}{2c}\right) \right]$$

$$= \frac{I_0}{2} \left[1 + \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi\Delta\nu}{c}\delta\right) \cos\left(\frac{2\pi\nu_0}{c}\delta\right) \right] = \frac{I_0}{2} \left[1 + \operatorname{sinc}\left(\pi \frac{1}{L_c}\delta\right) \cos\left(\frac{2\pi\nu_0}{c}\delta\right) \right]$$

Par identification : $L_c = \frac{c}{\Delta\nu}$

On a : $\lambda = \frac{c}{\nu} \rightarrow d\lambda = -c \frac{d\nu}{\nu^2} \rightarrow \Delta\lambda = c \frac{\Delta\nu}{\nu^2} = c \left(\frac{\lambda}{c}\right)^2 \Delta\nu = \frac{\lambda^2}{c} \Delta\nu \rightarrow \Delta\nu = c \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} \sim c \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2}$

$$\rightarrow L_c = \frac{c}{\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2}} = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}$$

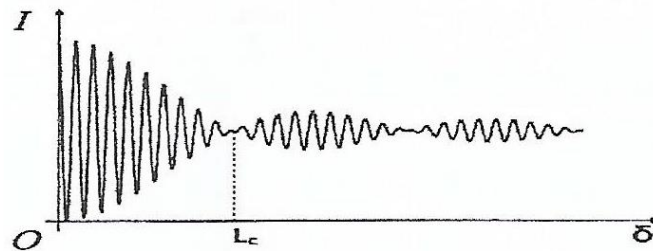
Le contraste : $C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$

$$I_{\max} = \frac{I_0}{2} \left(1 + \left| \operatorname{sinc}\left(\pi \frac{\delta}{L_c}\right) \right| \right) \text{ obtenue pour } \cos\left(\frac{2\pi\nu_0}{c}\delta\right) = 1$$

$$I_{\min} = \frac{I_0}{2} \left(1 - \left| \operatorname{sinc}\left(\pi \frac{\delta}{L_c}\right) \right| \right) \text{ obtenue pour } \cos\left(\frac{2\pi\nu_0}{c}\delta\right) = -1$$

$$\rightarrow C = \left| \operatorname{sinc}\left(\pi \frac{\delta}{L_c}\right) \right|$$

23°/



Pour $\delta = L_c \rightarrow C = 0$: les franges d'interférences disparaissent.

24°/ $p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{\delta}{c} \nu \rightarrow dp = \frac{\delta}{c} d\nu$

La variation de l'ordre d'interférence entre le centre du spectre ν_0 et l'extrémité $\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}$ est

$$\Delta p = \frac{\delta}{2c} \Delta\nu.$$

Les franges restent visibles si $\Delta p < \frac{1}{2}$

$$\rightarrow \frac{\delta}{2c} \Delta\nu < \frac{1}{2} \rightarrow \delta < \frac{c}{\Delta\nu} = L_c$$

L_c : longueur de cohérence temporelle, elle représente la longueur du train d'onde.

Pour $\delta > L_c$ le contraste devient faible et les franges disparaissent.

Pour une onde monochromatique $L_c \sim \infty$.

25°/ Brouillage ($C = 0$) : $L_c = \delta = 2e$

$$\rightarrow e = \frac{L_c}{2} = \frac{4,047}{2} = 2,0235 \text{ mm}$$

$$\rightarrow \Delta \nu = \frac{c}{L_c} = \frac{3.10^8}{4,047.10^{-3}} = 74,13 \text{ GHz}$$

$$\rightarrow \Delta \lambda = \frac{\lambda_0^2}{L_c} = \frac{(486,2)^2}{4,047.10^6} = 0,058 \text{ nm}$$

B/ 2^{ème} Méthode : Interférences à ondes multiples.

26°/ Différence de marche : $\delta = a. \sin(\theta)$

$$\text{Déphasage : } \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta = \frac{2\pi}{\lambda} a. \sin(\theta)$$

27°/

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \underline{A}_1 + \underline{A}_2 + \underline{A}_3 + \dots + \underline{A}_N = A_0 + A_0 e^{-j\varphi} + A_0 e^{-j2\varphi} + \dots + A_0 e^{-j(N-1)\varphi} \\ &= A_0 \left(1 + e^{-j\varphi} + e^{-j2\varphi} + \dots + e^{-j(N-1)\varphi} \right) = A_0 \frac{1 - e^{-jN\varphi}}{1 - e^{-j\varphi}} \end{aligned}$$

$$\underline{A} = A_0 \frac{1 - e^{-jN\varphi}}{1 - e^{-j\varphi}} \frac{e^{j\frac{N}{2}\varphi}}{e^{j\frac{N}{2}\varphi}} \frac{e^{j\frac{\varphi}{2}}}{e^{j\frac{\varphi}{2}}} = A_0 \frac{e^{j\frac{N}{2}\varphi} - e^{-j\frac{N}{2}\varphi}}{e^{j\frac{\varphi}{2}} - e^{-j\frac{\varphi}{2}}} \frac{e^{j\frac{\varphi}{2}}}{e^{j\frac{N}{2}\varphi}} = A_0 e^{j\frac{\varphi}{2}(1-N)} \frac{\sin\left(\frac{N}{2}\varphi\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

$$\textbf{28°/ } I(\varphi) = \underline{A} \cdot \underline{A}^* = A_0 e^{j\frac{\varphi}{2}(1-N)} \frac{\sin\left(\frac{N}{2}\varphi\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} A_0 e^{-j\frac{\varphi}{2}(1-N)} \frac{\sin\left(\frac{N}{2}\varphi\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = A_0^2 \frac{\sin^2\left(\frac{N}{2}\varphi\right)}{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N}{2}\varphi\right)}{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

29°/ $I(\varphi)$ est périodique de période 2π .

Interférences constructives : $I(\varphi) = I_{\max}$ est obtenue pour $\varphi = m.2\pi$ ou $\delta = m.\lambda$, $m \in \mathbb{Z} \rightarrow$

$$a. \sin(\theta_{\max}) = m\lambda \rightarrow \sin(\theta_{\max}) = m \frac{\lambda}{a}$$

Interférences destructives : $I(\varphi) = 0 \rightarrow \sin\left(\frac{N}{2}\varphi\right) = 0$ et $\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \neq 0 \rightarrow \frac{N}{2}\varphi = n\pi \rightarrow \varphi = \frac{2n\pi}{N}$

$$\rightarrow \sin(\theta_{\min}) = \frac{2n\lambda}{a}, \quad n \text{ non multiple de } N.$$

30°/ Maximum principal : $I(0) = I_{\max} = N^2 I_0$

Les maximums secondaires sont obtenus pour : $\varphi = \frac{(2n+1)\pi}{N}$, $n \in \mathbb{Z}^*$

1^{er} maximum secondaire : $\varphi = \frac{3\pi}{N} \rightarrow$

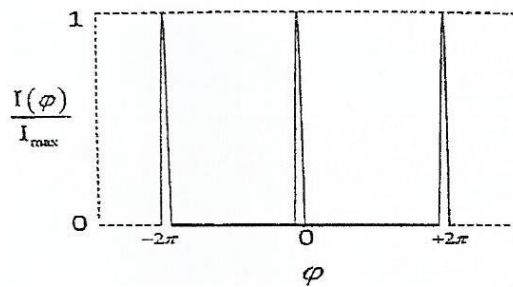
$$I_1' = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N}{2} \frac{3\pi}{N}\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2} \frac{3\pi}{N}\right)} = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{3\pi}{2N}\right)} = \frac{I_0}{\frac{9\pi^2}{4N^2}} = \frac{4}{9\pi^2} N^2 I_0 = 0,045 I_{\max} \rightarrow \frac{I_1'}{I_{\max}} = 0,045 \ll 1$$

2^{ème} maximum secondaire : $\varphi = \frac{5\pi}{N} \rightarrow$

$$I_1'' = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N}{2} \frac{5\pi}{N}\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2} \frac{5\pi}{N}\right)} = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{5\pi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{5\pi}{2N}\right)} = \frac{I_0}{\frac{25\pi^2}{4N^2}} = \frac{4}{25\pi^2} N^2 I_0 = 0,016 I_{\max} \rightarrow \frac{I_1''}{I_{\max}} = 0,016 \ll 1$$

Les maximums secondaires sont négligeables devant I_{\max} .

31°/ Pour N assez grand, on observe des pics étroits de largeur : $\frac{4\pi}{N}$



32°/ Lorsque la lumière est polychromatique, toutes les longueurs d'onde sont regroupées à l'ordre zéro (pic central polychromatique). Aux ordres supérieurs, les différentes longueurs d'ondes qui composent la lumière sont d'autant plus déviées que les ordres augmentent : on observe différents groupes de pics colorés pour chaque ordre d'interférence.

33°/ a) Pour un pic donné : $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta$ et $\delta = m\lambda$

Différentielle : $d\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d\delta$ et $d\delta = m d\lambda \rightarrow d\varphi = 2\pi m \frac{d\lambda}{\lambda}$

Pour les faibles variations : $d\varphi = \Delta\varphi$ et $d\lambda = \Delta\lambda \rightarrow \Delta\varphi = 2\pi m \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$

b) Critère de Rayleigh : $\Delta\varphi \geq \frac{2\pi}{N} \rightarrow \Delta\lambda \geq \frac{\lambda}{mN} \rightarrow \Delta\lambda_{\min} = \frac{\lambda}{mN}$

c) $N = \frac{\lambda}{m\Delta\lambda_{\min}}$, à l'ordre $m=1 \rightarrow N = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_{\min}} = \frac{486,2}{10^{-1}} = 4862$

d) On retrouve le même ordre de grandeur pour $\Delta\lambda_{\min}$. Mais le réseau est plus efficace pour la mesure de la largeur spectrale. Le pouvoir de résolution du réseau peut augmenter lorsque N et m augmentent, alors que le pouvoir de résolution du Michelson est limité.

Problème 2 : Un pas vers la thermique des bâtiments.

1°/ On distingue trois modes de transfert thermique :

Conduction thermique : à lieu à travers un milieu matériel macroscopiquement immobile.

Convection thermique : met en jeu un fluide en mouvement macroscopique.

Rayonnement thermique : passe par l'intermédiaire d'une onde électromagnétique.

2°/ a) $j_{th}(z, t)$ en Wm^{-2}

Loi de Fourier : elle donne la relation entre la variation de la température et le vecteur densité de courant thermique : $\vec{j}_{th} = -\lambda \vec{grad}(T)$

Avec λ (coefficient positif) est la conductivité thermique et exprimée en $Wm^{-1}K^{-1}$.

A une dimension : $\vec{j}_{th} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \vec{e}_z$

b) Le transfert thermique isobare (pression constante) s'écrit (1^{er} Principe) :

$$dU = \delta Q = CdT = (dm)cdT = (\rho d\tau)cdT = \rho cdTSdz$$

$$\text{Or on a : } \phi(z, t) - \phi(z + dz, t) = j_{th}(z, t)S - j_{th}(z + dz, t)S = -\frac{\partial j_{th}}{\partial z} Sdz = \frac{\delta Q}{dt}$$

$$\rightarrow \rho cdTSdz = -\frac{\partial j_{th}}{\partial z} Sdzdt \text{ or } \frac{\partial j_{th}}{\partial z} = -\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial^2 z} \rightarrow \rho cdT = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial^2 z} dt \rightarrow \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial^2 z}$$

3°/ a) Régime stationnaire : $\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial^2 z} = 0 \rightarrow T(z) = A.z + B$, A et B deux constantes d'intégration.

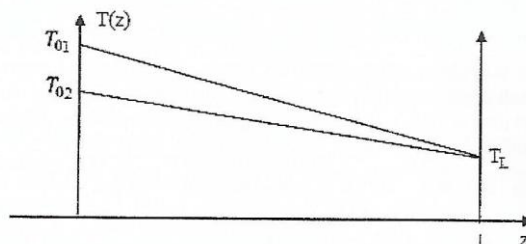
$$\text{On a : } \phi(0) = j_{th}(0)S = -\lambda \frac{dT}{dz} S = -\lambda AS = \phi_0 \rightarrow A = -\frac{\phi_0}{\lambda S}$$

$$\text{En } z = L, T(z = L) = T_L = A.L + B \rightarrow B = T_L - A.L = T_L + \frac{\phi_0 L}{\lambda S}$$

$$\rightarrow T(z) = -\frac{\phi_0}{\lambda S} .z + T_L + \frac{\phi_0 L}{\lambda S} = \frac{\phi_0}{\lambda S} (L - z) + T_L$$

$$\text{b) Pour } T_L \text{ fixe : } T_1(0) = T_{01} = \frac{\phi_{01} L}{\lambda S} + T_L \text{ et } T_2(0) = T_{02} = \frac{\phi_{02} L}{\lambda S} + T_L$$

$$T_{01} - T_{02} = \frac{\phi_{01} L}{\lambda S} + T_L - \frac{\phi_{02} L}{\lambda S} - T_L = \frac{L}{\lambda S} (\phi_{01} - \phi_{02}) > 0, \text{ car } \phi_{01} > \phi_{02} \rightarrow T_{01} > T_{02}$$



4°/ Le flux de chaleur se propage suivant z , et la température intérieure : $T(z) = C.z + D$, en régime stationnaire.

Conditions aux limites : $T(z) = \frac{T_e - T_0}{e} \cdot z + T_0$

$$\rightarrow \vec{j}_{th}(z) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \vec{e}_z = \lambda \frac{T_0 - T_e}{e} \vec{e}_z \text{ et } \phi(z) = j_{th}(z)S = \lambda S \frac{T_0 - T_e}{e}$$

Le flux de chaleur ne dépend pas de z , le flux entrant est égal au flux sortant : conservation du flux est vérifiée en absence de dissipation.

5°/ a) En $z = e^-$, on a : $\phi(e^-) = \lambda S \frac{T_0 - T_e}{e}$

En $z = e^+$, on a : $\phi(e^+) = hS(T_e - T_\infty)$

La continuité du flux thermique : $\phi(e^-) = \phi(e^+) \rightarrow \lambda \frac{T_0 - T_e}{e} = h(T_e - T_\infty) \rightarrow \left(h + \frac{\lambda}{e}\right)T_e = hT_\infty + \frac{\lambda}{e}T_0$

$$\text{b) 1}^{\text{ère}} \text{ Méthode : } \phi = hS(T_e - T_\infty) = hS \left(\frac{hT_\infty + \frac{\lambda}{e}T_0}{h + \frac{\lambda}{e}} - T_\infty \right) = hS \left(\frac{hT_\infty + \frac{\lambda}{e}T_0 - \left(h + \frac{\lambda}{e}\right)T_\infty}{h + \frac{\lambda}{e}} \right)$$

$$\rightarrow \phi = \frac{hS \frac{\lambda}{e}(T_0 - T_\infty)}{h + \frac{\lambda}{e}} = \frac{T_0 - T_\infty}{\frac{e}{\lambda S} + \frac{1}{hS}}$$

2^{ème} Méthode : $\phi = hS(T_e - T_\infty) = \lambda S \frac{T_0 - T_e}{e} \rightarrow T_e - T_\infty = \frac{\phi}{hS}$ et $T_0 - T_e = \frac{e\phi}{\lambda S}$

La somme : $T_0 - T_\infty = \phi \left(\frac{1}{hS} + \frac{e}{\lambda S} \right) \rightarrow \phi = \frac{T_0 - T_\infty}{\frac{1}{hS} + \frac{e}{\lambda S}}$

c) D'après 4°/ : $T(z) = \frac{T_e - T_0}{e} \cdot z + T_0$, avec $T_0 - T_e = \frac{e\phi}{\lambda S}$

$$\rightarrow T(z) = -\frac{\phi}{\lambda S} \cdot z + T_0 = -\frac{(T_0 - T_\infty)}{e + \frac{\lambda}{h}} z + T_0$$

6°/ a) $\phi_1 = \phi_2 = \dots = \phi_i = \dots = \phi_n = \phi$: le flux se conserve.

D'après 4°/ le flux qui traverse le mur i est $\phi_i = \lambda_i S \frac{T_{i-1} - T_i}{e_i} \rightarrow T_{i-1} - T_i = \frac{e_i}{\lambda_i S} \phi_i$

Pour tous les murs : $T_0 - T_1 = \frac{e_1}{\lambda_1 S} \phi$, $T_1 - T_2 = \frac{e_2}{\lambda_2 S} \phi$, ..., $T_{n-1} - T_n = \frac{e_n}{\lambda_n S} \phi$

La somme : $T_0 - T_n = \phi \sum_{i=1}^n \frac{e_i}{\lambda_i S} \rightarrow \phi = \frac{T_0 - T_n}{\sum_{i=1}^n \frac{e_i}{\lambda_i S}}$

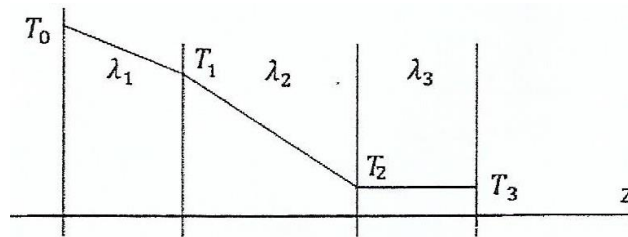
b) D'après 4°/, la distribution de température dans chaque tronçon de mur est :

$$T_i(z) = -\frac{T_i - T_{i-1}}{e_i} z + T_{i-1}$$

c) On a : $T_i - T_{i-1} = -\frac{\phi}{\lambda_i S} z$

Le profil de température est linéaire, avec (flux de chaleur fixe) une pente d'autant plus petite que λ_i est grande.

Pour la représentation ci-dessous : $\lambda_1 > \lambda_2$ et $\lambda_3 \rightarrow \infty$ (bon conducteur), on remarque que $T_3 \rightarrow T_2$

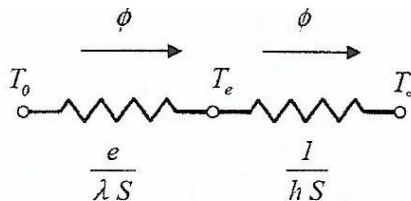


7°/ On a : $\phi = \frac{T_0 - T_\infty}{\frac{1}{hS} + \frac{e}{\lambda S}}$

La résistance du conducteur mur + fluide est : $R_{th} = \frac{1}{hS} + \frac{e}{\lambda S} = R_{th1} + R_{th2}$

$R_{th1} = \frac{e}{\lambda S}$: la résistance thermique du mur

$R_{th2} = \frac{1}{hS}$: la résistance thermique de l'interface mur-fluide.



8°/ a) $\phi = \frac{T_\infty^{int} - T_\infty^{ext}}{R_{th}}$ et $R_{th} = \frac{1}{h_{int}S} + \frac{e_c}{\lambda_c S} + \frac{1}{h_{ext}S}$

AN : $\phi = 80W$ et $R_{th} = 0,35 KW^{-1}$

b) $\phi = -h_{int}S(T_{int} - T_\infty^{int}) \rightarrow T_{int} = -\frac{\phi}{h_{int}S} + T_\infty^{int}$, AN : $T_{int} = 10^\circ C$

Même si l'air dans la pièce se trouve à $26^\circ C$, la température ressentie par une personne sera beaucoup plus basse, dû aux échanges de chaleur par rayonnement entre le corps et les murs.

c) $R'_{th} = R_{th} + \frac{e_{iso}}{\lambda_{iso}S} = 0,35 + 2,5 = 2,85 KW^{-1}$

$\phi' = \frac{T_\infty^{int} - T_\infty^{ext}}{R'_{th}} = \frac{28}{2,85} = 9,82W$

d) $\phi' = -h_{int}S(T_{int} - T_\infty^{int}) \rightarrow T_{int} = -\frac{\phi'}{h_{int}S} + T_\infty^{int}$, AN : $T_{int} = 24^\circ C$

Avec la couche d'isolant on améliore l'isolation thermique de la cabane : la température de la face interne du mur se rapproche de celle de la pièce.