



## Concours Mathématiques et Physique Epreuve de Mathématiques I

Session 2020	Date : 16/07/2020	Heure : 8H	Durée : 4 heures
--------------	-------------------	------------	------------------

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

### Exercice (4,5 points)

On note  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $GL_n(\mathbb{R})$  le groupe des matrices inversibles de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $I_n$  la matrice identité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .  
On considère l'ensemble  $\mathcal{D}$  des matrices  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifiant

$$a_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad \text{pour tout } i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

1. Pour  $p \in \{1, 2, \dots, n\}$ , on considère l'application  $f_p$  définie par

$$f_p: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \longmapsto a_{pp} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n |a_{pj}|$$

- (a) Montrer que, pour tout  $p \in \{1, 2, \dots, n\}$ , l'application  $f_p$  est continue sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .  
(b) En déduire que  $\mathcal{D}$  est un ouvert de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
2. Soit  $A \in \mathcal{D}$  et  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  tels que  $AX = 0$ . Montrer que  $X = 0$ . (On pourra considérer la composante de valeur absolue maximale du vecteur  $X$ ). En déduire que  $\mathcal{D} \subset GL_n(\mathbb{R})$ .
3. Montrer que  $\mathcal{D}$  est une partie convexe de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
4. Montrer que l'application

$$\det: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$A \longmapsto \det(A)$$

est continue.

5. En déduire que  $\det(A) > 0$ , pour tout  $A \in \mathcal{D}$ .

6. Soit  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que :  $a_{ii} \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$ , pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Montrer que  $\det(A + \varepsilon I_n) > 0$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ . En déduire que  $\det(A) \geq 0$ .

## Problème

Dans ce problème, on désigne par  $\Phi$  la fonction définie sur  $] -\infty, 1[$  par

$$\Phi(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} + \frac{1}{\ln(1-t)} & \text{si } t \neq 0. \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

### Partie 1 (1,5 points) : Préliminaires

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

- Montrer que la suite  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par  $\gamma_n = -\ln(n) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , est convergente. On note  $\gamma$  sa limite.
- On pose pour tout  $x > 0$ ,  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ .
  - Montrer que  $\Gamma$  est bien définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  et que, pour tout  $x > 0$ ,  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ .
  - En déduire que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\Gamma(k+1) = k!$ .

### Partie 2 (5 points) : Etude d'une intégrale

- Montrer que  $\Phi$  est une fonction continue sur  $] -\infty, 1[$ .
  - Montrer que  $\int_0^1 \Phi(t) dt$  converge. On note  $J = \int_0^1 \Phi(t) dt$ .
- Soit  $\varepsilon > 0$ .
  - Montrer que, pour tout  $\alpha > 0$ , l'intégrale  $\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t}}{t} dt$  converge et
 
$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t}}{t} dt = \int_{\varepsilon\alpha}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du.$$
  - En déduire que, pour tout  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ , l'intégrale  $\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} dt$  converge et
 
$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} dt = \int_{\varepsilon\alpha}^{\varepsilon\beta} \frac{e^{-u}}{u} du.$$
- Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels strictement positifs.
  - Montrer, à l'aide d'un encadrement, que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon\alpha}^{\varepsilon\beta} \frac{e^{-u}}{u} du = \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ .

(b) En déduire que  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-\beta t}}{t} dt$  converge et déterminer sa valeur.

4. Montrer que  $J = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1 - e^{-u}} h(u) du$ , où  $h(u) = 1 - \frac{1 - e^{-u}}{u}$ , pour tout  $u > 0$ .

Indication : On pourra effectuer le changement de variable  $u = -\ln(1 - t)$ .

5. (a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $\psi_n : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u \mapsto h(u) e^{-nu}$ .  
Montrer que  $\psi_n$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ . Et que

$$\int_0^{+\infty} |\psi_n(u)| du = \frac{1}{n} + \ln(n) - \ln(n+1).$$

(b) En déduire que  $J = \gamma$ .

### Partie 3 (3 points) : Développement en série entière de $\Phi$

On considère la suite de fonctions définies sur  $[0, 1]$  par

$$u_0(x) = x \text{ et } \forall n \geq 1, u_n(x) = \frac{x(1-x) \cdots (n-x)}{(n+1)!}, \text{ pour tout } x \in [0, 1].$$

1. Montrer que, pour tout  $x \in [0, 1]$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq u_n(x) \leq \frac{1}{n+1}$ .

En déduire que la suite de fonctions  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $[0, 1]$ .

2. Montrer que, pour tout  $t \in ]-1, 1[$ ,

$$1 - \int_0^1 (1-t)^x dx = t\Phi(t).$$

3. (a) Soit  $x \in [0, 1]$ . Justifier que, pour tout  $t \in ]-1, 1[$ ,

$$(1-t)^x = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n-1}(x) t^n.$$

(b) En déduire que, pour tout  $t \in ]-1, 1[$ ,

$$\Phi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n, \text{ où } a_n = \int_0^1 u_n(x) dx.$$

4. Montrer que  $\gamma = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}$ . (On pourra considérer une primitive de  $\Phi$  sur  $] -1, 1[$ ).

### Partie 4 (6 points) : Formule de type Taylor et applications

Dans toute la suite, on considère une fonction  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant la propriété

$$\exists A > 0 \text{ et } \beta \in \mathbb{R} \text{ tels que } \forall t \in \mathbb{R}^+ : |f(t)| \leq A e^{\beta t}.$$

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .



- (a) Montrer que, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , la série  $\sum_{k \geq 0} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nt)^k}{k!}$  converge absolument.

On pose alors, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ ,

$$f_n(t) = e^{-nt} \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nt)^k}{k!}.$$

- (b) Montrer que la fonction  $f_n$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ .
2. On fixe  $x$  un réel strictement positif, on considère une suite  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  de variables aléatoires indépendantes sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$  et on suppose qu'elles suivent toutes la loi de Poisson de paramètre  $x$ .  
Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ .

(a) Montrer que  $S_n$  suit la loi de Poisson de paramètre  $nx$ .

(b) Déterminer l'espérance  $E\left(\frac{S_n}{n}\right)$  de  $\frac{S_n}{n}$  et en déduire que  $E\left(\left(\frac{S_n}{n} - x\right)^2\right) = \frac{x}{n}$ .

(c) Montrer que  $f\left(\frac{S_n}{n}\right)$  admet une espérance finie donnée par  $E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = f_n(x)$ .

3. Dans cette question, on fixe  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x$  un réel strictement positif. On suppose que  $\beta \leq 0$  et que  $f$  est continue en  $x$ .

(a) Soit  $\varepsilon > 0$ .

i) Montrer qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ ,

$$|f(t) - f(x)| \leq 2 \frac{A}{\alpha^2} (t - x)^2 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

ii) En déduire que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq 2 \frac{A}{\alpha^2} \frac{x}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

(b) Montrer alors que

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-nx} \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!}.$$

4. Dans cette question on fixe  $n \in \mathbb{N}^*$  et on suppose que la série  $\sum_{k \geq 0} f\left(\frac{k}{n}\right)$  converge absolument.

Montrer que

$$\int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Dans la suite, on suppose que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$  et que  $\beta < 0$ .

5. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la série  $\sum_{k \geq 0} f\left(\frac{k}{n}\right)$  converge absolument.

6. Montrer qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n(e^{\frac{\beta}{n}} - 1) \leq \frac{\beta}{2}, \forall n \geq n_0$ . En déduire que

$$|f_n(x)| \leq A e^{\frac{\beta}{2}x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \geq n_0.$$

7. Montrer alors que  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$  et que

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

8. En appliquant le résultat de la question précédente à une fonction  $f$  bien choisie, montrer que

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \ln(1 - e^{-\frac{1}{n}}) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n(e^{\frac{k}{n}} - 1)} \right).$$

**Fin de l'énoncé**