



Concours Mathématiques et Physique Epreuve de Mathématiques I

Date: Lundi 10 Juin 2019 Heure: 8H Durée : 4H Nbre de pages : 4

Barème : Exercice 1 : 3 points, Exercice 2 : 5 points, Problème : 12 points.

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Exercice 1

Soit p un entier naturel non nul. On note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ la \mathbb{R} -algèbre des matrices carrées d'ordre p à coefficients dans \mathbb{R} et I_p la matrice identité d'ordre p .

1. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, les applications

$$d_A : \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_p(\mathbb{R}), N \longmapsto NA \quad \text{et} \quad g_A : \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_p(\mathbb{R}), N \longmapsto AN,$$

sont continues.

Dans toute la suite, on fixe une matrice $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que la suite $(M^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n M^k = \frac{1}{n+1} (I_p + M + \cdots + M^n).$$

2. Montrer que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet au moins une valeur d'adhérence dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$MU_n = U_n M = U_n + \frac{1}{n+1} (M^{n+1} - I_p).$$

4. Soit $L \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une valeur d'adhérence de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
(a) Montrer que $ML = LM = L$.
(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n L = L U_n = L$.
5. Soient $L_1, L_2 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ deux valeurs d'adhérence de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Montrer que $L_1 = L_2$.
6. Montrer, alors, que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 2

On considère une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{N} et on pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_k = P(X = k)$. On suppose, par ailleurs, que

$$0 < p_0 < 1 \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, p_{k+1} = \left(\mu + \frac{\lambda}{k+1} \right) p_k,$$

où μ, λ sont deux constantes réelles.

1. Montrer que $\mu + \lambda > 0$.
2. On suppose, dans cette question, que $\mu = 0$.

- (a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, p_k = \frac{\lambda^k}{k!} p_0$.
- (b) Exprimer $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k$ en fonction de λ et de p_0 .
- (c) En déduire que X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.
- (d) Donner, alors, son espérance $E(X)$ et sa variance $V(X)$.

On suppose dans la suite que $\mu \neq 0$ et on pose $\alpha = -1 - \frac{\lambda}{\mu} = -\frac{\mu + \lambda}{\mu}$.

3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$p_k = p_0 \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} (-\mu)^k.$$

4. On suppose, dans cette question, que $\alpha \in \mathbb{N}$.

- (a) Montrer que $\mu < 0$.
- (b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$p_k = \begin{cases} p_0 C_{\alpha}^k (-\mu)^k & \text{si } k \leq \alpha, \\ 0 & \text{si } k > \alpha. \end{cases}$$
- (c) Calculer $\sum_{k=0}^{\alpha} p_k$ en fonction de p_0, μ et α . En déduire que $p_0 = (1 - \mu)^{-\alpha}$.
- (d) Montrer alors que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(\alpha, \frac{-\mu}{1-\mu}\right)$.
- (e) Donner son espérance $E(X)$ et sa variance $V(X)$.

5. On suppose, dans cette question, que $\alpha \notin \mathbb{N}$.

On note $G : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} p_k t^k$ la fonction génératrice de X .

- (a) Montrer que G est bien définie et continue sur $[-1, 1]$.
- (b) Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum p_k z^k$ est $\frac{1}{|\mu|}$ et que

$$\forall t \in \left] \frac{-1}{|\mu|}, \frac{1}{|\mu|} \right[, \sum_{k=0}^{+\infty} p_k t^k = p_0 (1 - \mu t)^{\alpha}.$$

- (c) En déduire que $\mu \in [-1, 1[$ et que $p_0 = (1 - \mu)^{-\alpha}$.
- (d) Montrer que G est deux fois dérivable en 1.
- (e) En déduire que X admet une espérance finie $E(X)$ et une variance finie $V(X)$ que l'on déterminera.

Problème

Partie 1

Pour x réel, on pose

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

1. Montrer que g est continue, bornée et paire sur \mathbb{R} .
2. Calculer $g(0)$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.
3. Montrer que g est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et donner l'expression de sa dérivée en fonction de l'intégrale de Gauss $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.
4. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{\pi}{2} - 2I \int_0^{|x|} e^{-u^2} du.$$

5. En déduire la valeur de I .
6. La fonction g est-elle dérivable en 0?
7. Tracer l'allure de la courbe de g dans un repère orthonormé.

Partie 2

Pour tout entier naturel non nul n , on pose

$$u_n = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{t}{t+n} dt \quad \text{et} \quad \gamma_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n.$$

1. Calculer u_n , $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est convergente. On note γ sa somme.
3. Exprimer $\sum_{k=1}^n u_k$ en fonction de γ_n et en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n = \gamma$.
4. Montrer que $\forall k \geq 2, \frac{1}{2k(k+1)} \leq u_k \leq \frac{1}{2k(k-1)}$.
5. En déduire que pour tout entier naturel non nul $n, \frac{1}{2n+2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq \frac{1}{2n}$.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \gamma - S_n \leq \frac{1}{2n(n+1)}$, où $S_n = \sum_{k=1}^n u_k + \frac{1}{2(n+1)}$.
7. Déterminer un entier $N \in \mathbb{N}^*$ pour lequel S_N est une valeur approchée de γ à 10^{-3} près.

Partie 3

Pour tout réel x , on pose

$$G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{-itx} dt.$$

1. Montrer que G est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et exprimer ses dérivées successives sous forme intégrale.
2. Montrer que G satisfait une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1.
3. Résoudre l'équation différentielle obtenue et en déduire que $G(x) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{x^2}{4}}$, $x \in \mathbb{R}$.
4. En développant G en série entière sur \mathbb{R} , montrer que $\forall m \in \mathbb{N}$, $G^{(2m)}(0) = \sqrt{\pi} \frac{(-1)^m (2m)!}{m! 4^m}$.
5. Soit $m \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que la fonction $t \mapsto t^{2m} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n}$ est intégrable sur \mathbb{R} si et seulement si $n > m$.

(b) Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé. En étudiant les variations de $g_t : x \mapsto -x \ln(1 + \frac{t^2}{x})$ sur $[1, +\infty[$, montrer que la suite $((1 + \frac{t^2}{n})^{-n})_{n \geq 1}$ est décroissante.

(c) Montrer, alors, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2m} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n} dt = \frac{\sqrt{\pi} (2m)!}{m! 4^m}$.

On énoncera avec précision le théorème du cours utilisé.

6. Montrer que pour tout $n > m \geq 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2m} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n} dt = n^{m+\frac{1}{2}} J_{n;m}$, où

$$J_{n;m} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^{2m}}{(1+u^2)^n} du.$$

7. Montrer que pour tout $n > m \geq 0$, $J_{n+1;m} = (1 - \frac{2m+1}{2n}) J_{n;m}$.
8. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $J_{m+1;m} = \frac{2m-1}{2m} J_{m;m-1}$.
9. En déduire une expression simplifiée de $J_{m+1;m}$, $m \in \mathbb{N}$, à l'aide des factorielles.
10. Montrer, alors, que pour tout $n > m+1$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2m} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n} dt = n^{m+\frac{1}{2}} \frac{\pi (2m)!}{4^m (m!)^2} \prod_{k=m+1}^{n-1} \left(1 - \frac{2m+1}{2k}\right).$$

11. Donner le développement en série entière de $f(t) = \ln(1-t)$ et préciser l'intervalle de validité.
12. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(\pi) = 2\ln(m!) + (2m+1) \left(\gamma - \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \right) + 2 \sum_{k=m+1}^{+\infty} \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(m+\frac{1}{2})^p}{pk^p}.$$

13. Montrer que $\ln(\pi) = \gamma + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{\zeta(p)}{p 2^{p-1}}$, où $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, $s > 1$.

Fin de l'énoncé