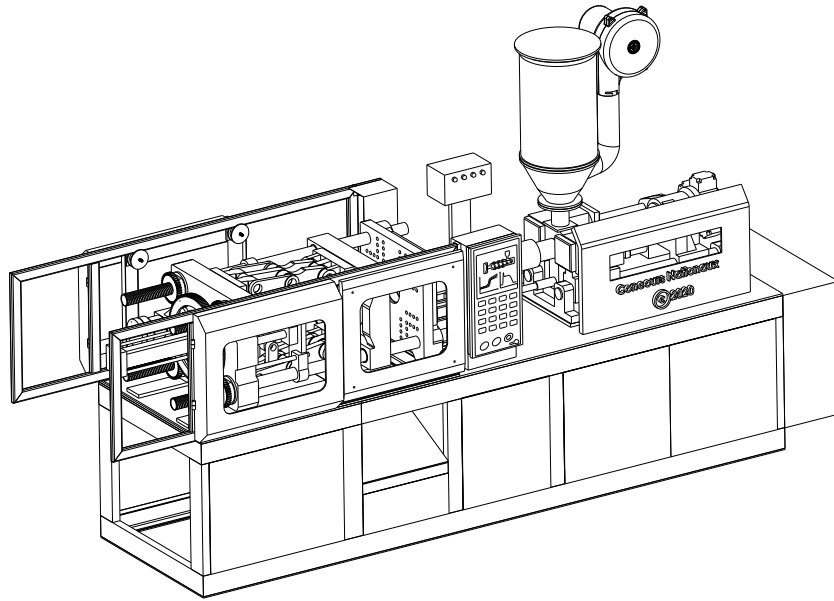




Concours Mathématiques-Physique & Physique-Chimie  
Epreuve de  
Systèmes Techniques Automatisés



Date : Samedi 18 Juillet 2020 Heure : 8 H Durée : 3 heures

L'épreuve comporte trois parties :

- |   |          |
|---|----------|
| A - Conception mécanique                | (03 pts) |
| B - Mécanique des solides indéformables | (09 pts) |
| C - Automatique                         | (08 pts) |

Le sujet de l'épreuve remis au candidat comporte trois dossiers :

- 1<sup>er</sup> : "Mise en situation, Données et Hypothèses",
- 2<sup>ème</sup> : Trois documents techniques DT-01, DT-02 et DT-03.
- 3<sup>ème</sup> : "Document Réponses" contenant les questions à traiter.

N.B.

- ★ Aucun autre document n'est autorisé.
- ★ Seules des calculatrices de poche non programmables sont autorisées.
- ★ Un **seul et unique** document réponses est fourni au candidat et doit être rendu en totalité, à la fin de l'épreuve, même sans réponses. **Aucune feuille du document réponses ne doit être supprimée** (cet acte est considéré comme étant une tentative de fraude).

---

# **Dossier**

## **Mise en situation, Données et Hypothèses**

---

Ce dossier comporte 10 pages :

- ★ Mise en situation : ..... pages de 1 à 4
- ★ Données et hypothèses partie A-Conception mécanique : .....page 4
- ★ Données et hypothèses partie B-MSI : .....pages 5 à 7
- ★ Données et hypothèses partie C-Automatique : ..... pages de 8 à 10

# PRESSE D'INJECTION DE MATIÈRE PLASTIQUE

## Mise en situation

Le système présenté par le document technique DT-01 est une "presse d'injection" 80 Tonnes qui permet l'obtention de pièces moulées par injection de la matière plastique (polymère).

Ce procédé de moulage s'effectue selon les trois étapes suivantes :

- chauffer et porter à l'état fondu la matière plastique,
- injecter, sous haute pression, cette matière fondue dans un moule comportant l'empreinte de la pièce désirée,
- refroidir rapidement le moule afin de ramener la matière plastique injectée à l'état solide.

Ces étapes, bien qu'elles peuvent paraître simples dans leur description, présentent des complexités sur le plan physico-technique. En effet, chaque type de matière plastique à injecter doit faire objet de consignes de chauffage, de pression et de vitesse de refroidissement en bonne adéquation. Cela permet d'éviter les défauts de fabrication et satisfaire les propriétés de résistance finales désirées.

Dans cette épreuve, nous proposons l'étude de la presse d'injection illustrée par la figure 1. Cette presse est constituée des sous-systèmes suivants :

- une unité d'alimentation en pression hydraulique,
- un automate programmable,
- une unité de plastification équipée d'un système de régulation de température,
- une unité de fermeture et de verrouillage du moule,
- un moule d'injection doté de système de refroidissement.

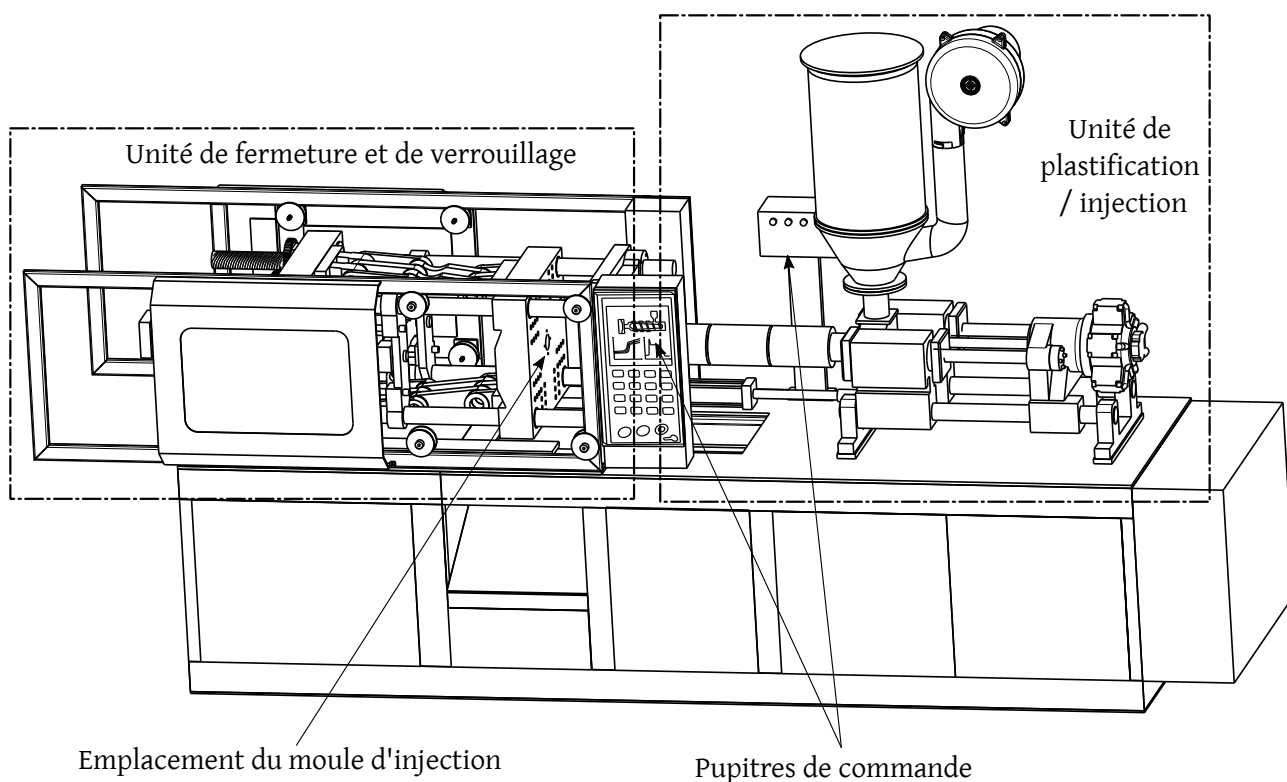


FIGURE 1 – Sous-systèmes de la presse d'injection

## Diagramme SADT

La figure 2 représente l'actigramme SADT niveau A-0 de la presse d'injection proposée à l'étude. Cet actigramme permet de cerner la fonction globale de la machine ainsi que les données de contrôle, les entrées et les sorties secondaires.

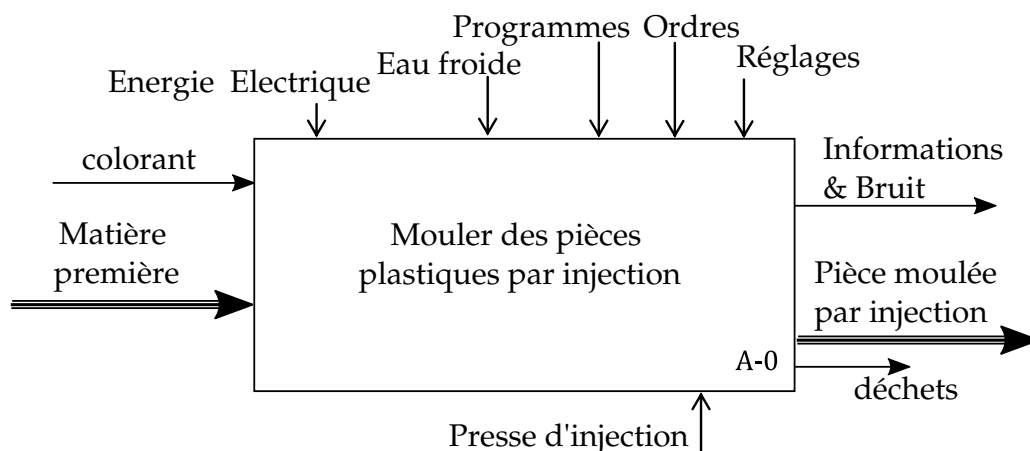


FIGURE 2 – Actigramme niveau (A-0) de la presse d'injection

## Description de l'unité de plastification

L'élément principal de cette presse d'injection est l'unité de plastification (voir figure 1). C'est le sous-système qui permet la préparation et l'injection de la matière plastique. Il se compose, comme l'indique la figure 3, d'une trémie de stockage de la matière première sous forme de poudre, de granulé ou de lentilles.

Cette matière passe en premier lieu dans un cylindre pour être emprisonnée entre la paroi de celui-ci et une longue vis ayant des filets à pas variable. La matière confinée sera chauffée et mise sous pression pour être ensuite prête à l'injection.

Durant le cycle d'injection, la vis en rotation avance sous l'action d'un vérin pour permettre l'injection de la matière fondue à travers une buse dans l'empreinte du moule .

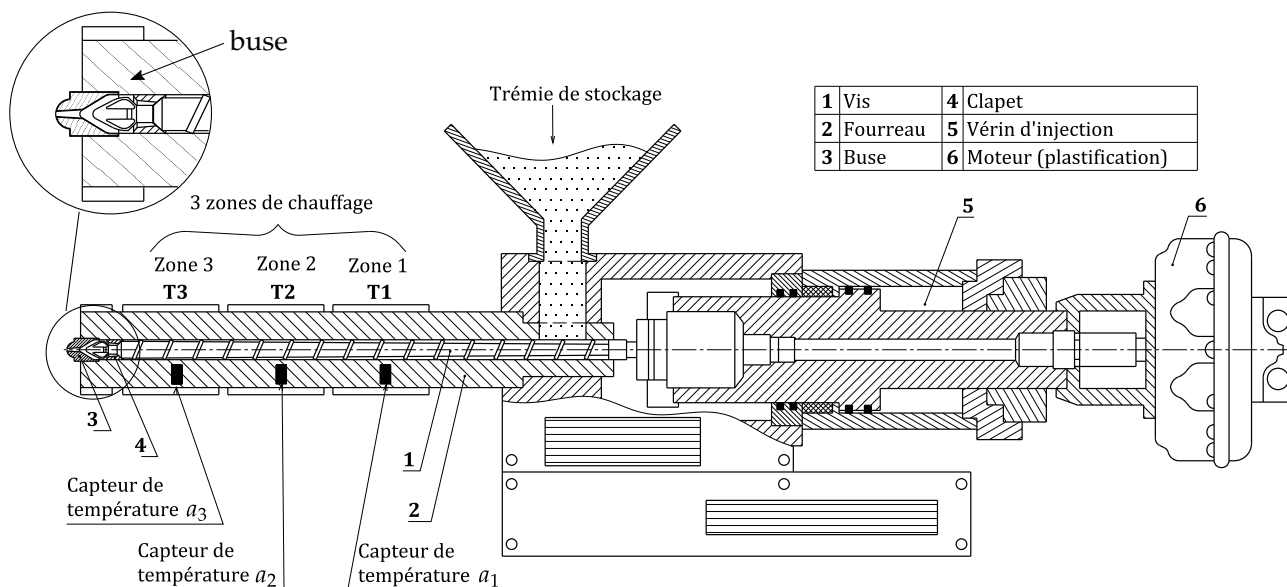


FIGURE 3 – Unité de plastification

La figure 4 présente le cycle d'injection développé en trois phases :

- accostage et dosage de la matière avec moule fermé (figure 4-a),
- remplissage de l'empreinte du moule et compactage de la matière plastique suivie d'un refroidissement (figure 4-b),
- ouverture du moule et éjection de la pièce finie accompagnée du recul de la vis pour reprendre un nouveau cycle d'injection.

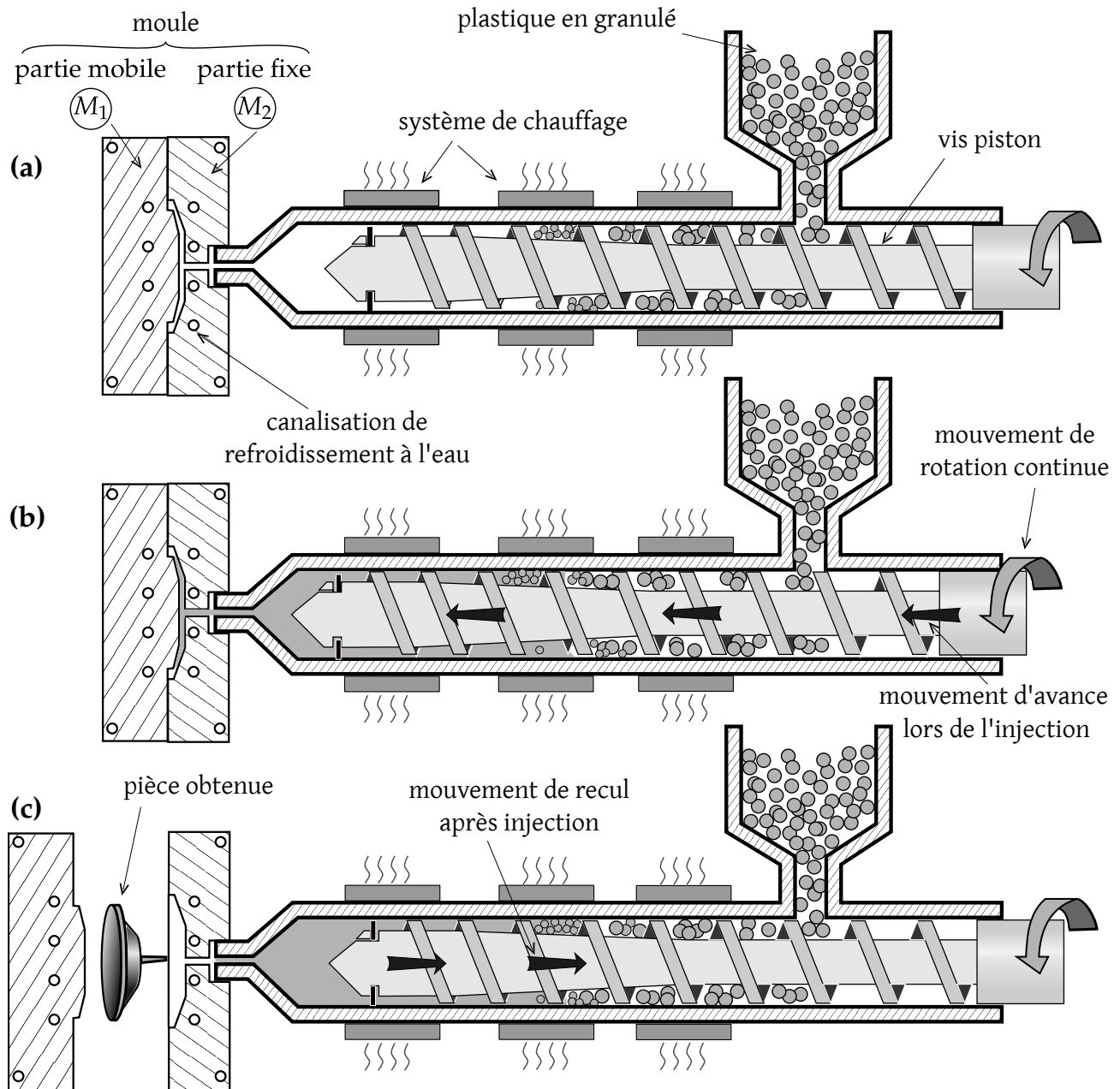


FIGURE 4 – Schématisation simplifiée des étapes d'injection

## Unité de fermeture et de verrouillage

L'unité de fermeture et de verrouillage est destinée au positionnement et à la fixation de moules pouvant avoir différentes tailles et d'en assurer ensuite le cycle de fermeture, de verrouillage et d'ouverture.

Cette unité est composée de deux plateaux, l'un est mobile (plateau mobile) et l'autre est fixe. La partie mobile se déplace en respectant un profil de vitesses bien déterminé au cours d'un cycle d'injection.

Cette unité sert aussi à appliquer la force de fermeture et à centrer les deux parties du moule lors de sa fermeture.

## Le moule et le système de refroidissement

Afin d'augmenter la cadence de production, le moule doit être refroidi rapidement pour solidifier en un minimum de temps la matière injectée dans l'empreinte.

Le refroidissement est assuré par une circulation d'eau froide à travers des canalisations percées à l'intérieur du moule.

## Partie A - Conception Mécanique : Système de réglage de l'unité de fermeture

La figure 5 présente le schéma cinématique simplifié du système de réglage de l'unité de fermeture et de verrouillage. Ce système permet le réglage de la position du sommier (9C) avant le démarrage de la production (*opération nécessaire lors d'un changement de moule*). Le mouvement de translation de ce sommier s'effectue à faible vitesse, il est produit par un moteur électrique rotatif (16C) et un mécanisme de transmission/transformation de mouvement.

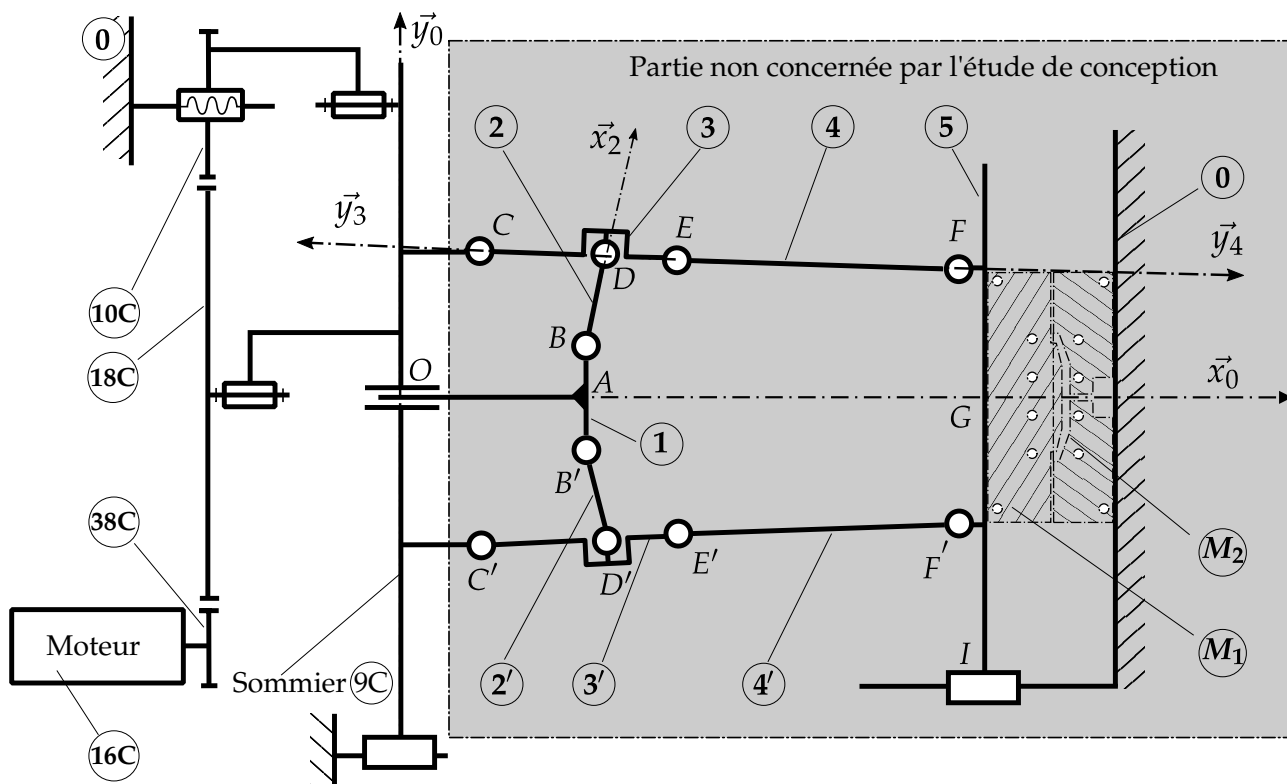


FIGURE 5 – schématisation du système de réglage de la position du sommier (9C)

Notons que ce sommier (9C) sera considéré fixe et solidaire du bâti dans la partie B de cette épreuve.

## Partie B - Mécanique des solides indéformables :

### Unité de fermeture et de verrouillage du moule

#### B.1 Présentation

L'étude porte sur l'unité de fermeture et de verrouillage mécanique à double genouillères illustrée par la figure 6. Cette unité est constituée d'un mécanisme permettant au moule d'occuper trois positions :

- position d'ouverture du moule (figure 6-a)
- position intermédiaire (figure 6-b)
- position de fermeture et de verrouillage (figure 6-c)

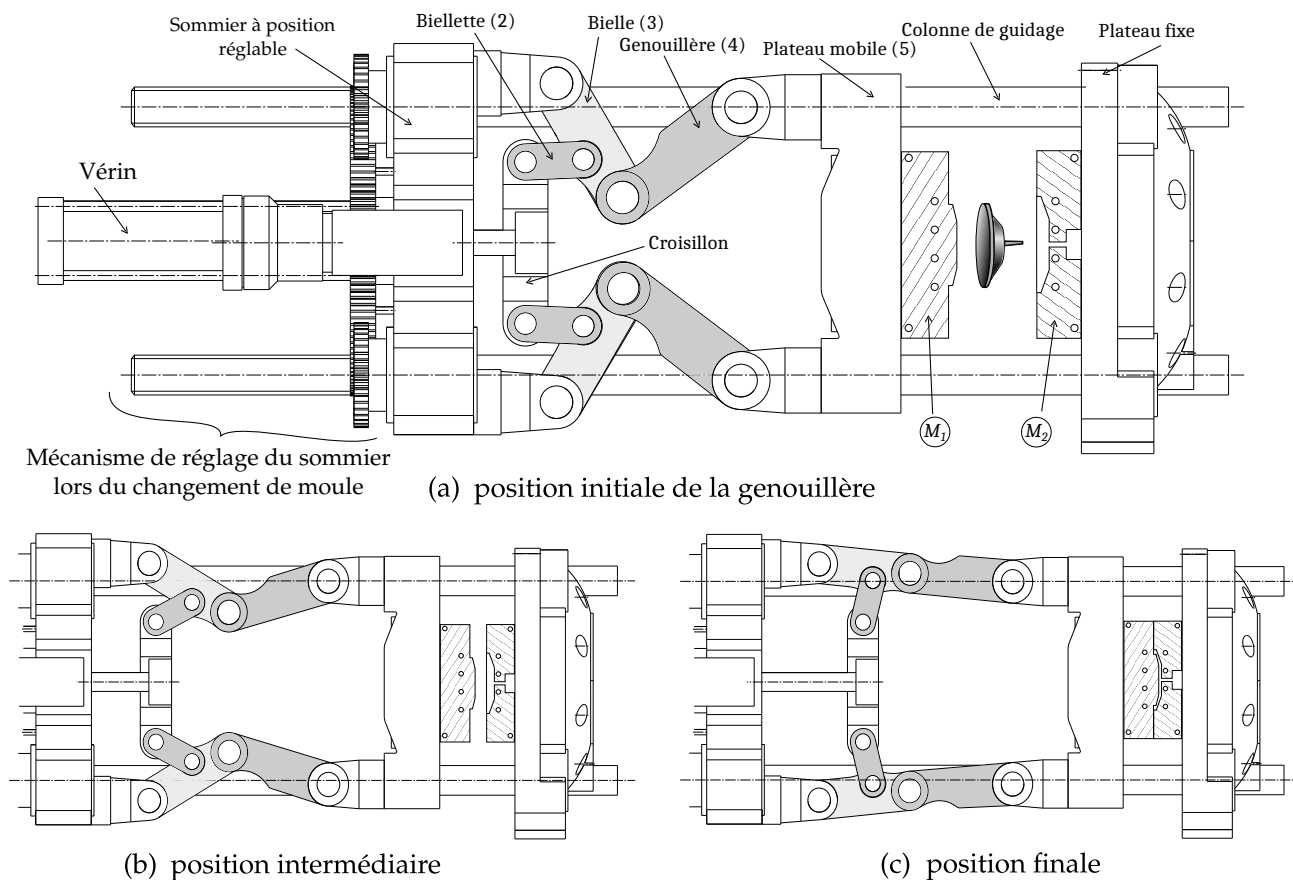


FIGURE 6 – Configurations possibles du mécanisme de verrouillage.  
(Pour une meilleure visibilité, des pièces en avant plan ont été cachées.)

#### B.2 Repères, paramètres et données

Le mécanisme de fermeture et de verrouillage de la presse d'injection représenté par le schéma cinématique minimal figure 7 est constitué de :

- un croisillon solidaire d'une tige de vérin hydraulique, formant le solide (1) en liaison pivot glissant d'axe  $(O, \vec{x}_0)$  avec le bâti (0).
- un plateau mobile (5) en liaison glissière d'axe  $(I, \vec{x}_0)$  avec le bâti (0) (cette liaison est équivalente à la liaison de (5) avec les quatre colonnes de guidage et la liaison appui plan avec (0)).
- deux sous-systèmes ( $S$ ) et ( $S'$ ) identiques de point de vue constituants et symétriques par rapport au plan  $(O, \vec{x}_0, \vec{z}_0)$ . Le sous-système ( $S$ ) est composé de :

- ★ deux billettes placées symétriquement par rapport au plan  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ . Cette symétrie permet de modéliser ces deux billettes par un seul solide (2) situé dans le plan de symétrie.
- ★ une bielle (3) située dans le plan  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ .
- ★ deux genouillères placées de part et d'autre du plan  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ . Elles seront modélisées par le solide (4) situé dans ce même plan.

Du point de vue liaisons :

- ★ le solide (2) est articulé au solide (1) au point  $B$ ,
- ★ la bielle (3) est articulée d'une part en  $C$  au bâti (0) et d'autre part en  $D$  au solide (2),
- ★ le solide (4) est articulé en  $F$  au plateau mobile (5) et en  $E$  à la bielle (3).

Le moule est composé de deux parties ( $M_1$ ) et ( $M_2$ ) fixées respectivement sur le plateau mobile (5) et le plateau fixe solidaire du bâti (0).

Les symétries que possède le mécanisme de fermeture et de verrouillage des moules, permettent de simplifier l'étude en ne traitant que le sous-système ( $S$ ).

On convient d'appeler équipage mobile l'ensemble  $(\Sigma_1)$  défini par :  $\Sigma_1 = \{(1), (2), (3), (4), (5)\}$

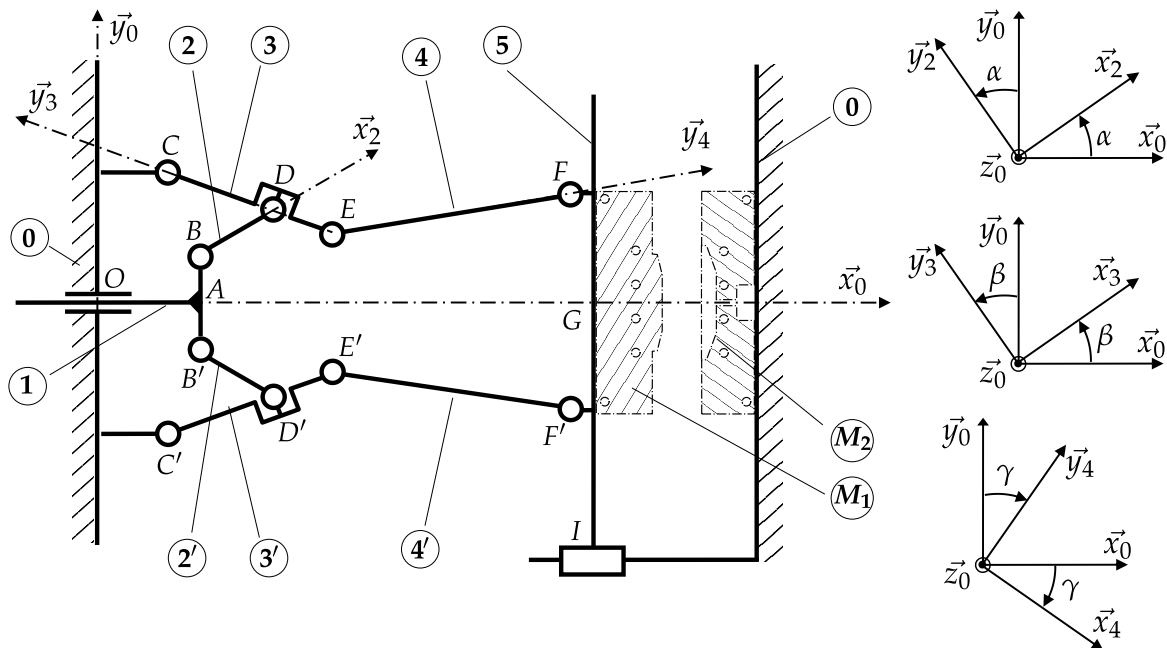


FIGURE 7 – Schéma cinématique du mécanisme de fermeture

Tous les mouvements des solides formants  $(\Sigma_1)$  sont définis par rapport au repère  $\mathcal{R}_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  lié au bâti (0) de la presse. Ce repère sera supposé galiléen ayant pour axe vertical ascendant  $(O, \vec{y}_0)$ .

Le mouvement de translation du solide (1) par rapport au bâti (0) est paramétré par  $\lambda$ .

Le mouvement de translation du plateau (5) par rapport au bâti (0), est paramétré par  $\mu$ .

On associe aux solides (2), (3) et (4) de l'équipage mobile  $(\Sigma_1)$ , les repères suivants :

- $\mathcal{R}_2(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$  lié au solide (2) tel que sa rotation par rapport au bâti (0) est définie par l'angle  $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$ .
- $\mathcal{R}_3(C, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$  lié à la bielle (3) tel que sa rotation par rapport au bâti (0) est définie par l'angle  $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_3) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3)$ .



- $\mathcal{R}_4(F, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_0)$  repère lié au solide (4) tel que sa rotation par rapport au bâti (0) est définie par l'angle :  $\gamma = (\vec{x}_0, \vec{x}_4) = (\vec{y}_0, \vec{y}_4)$ .

La Figure 8 représente de façon approximative le cycle de fermeture et de verrouillage du moule. Ce cycle s'effectue en quatre étapes I, II, III et IV. La fermeture du moule est réalisée avec une avance uniformément accélérée (étape I) suivie d'une avance à vitesse constante  $V$  (étape II); le mouvement d'approche est réalisé avec une avance uniformément décélérée (étape III); l'étape IV correspond à la phase de verrouillage et d'injection.

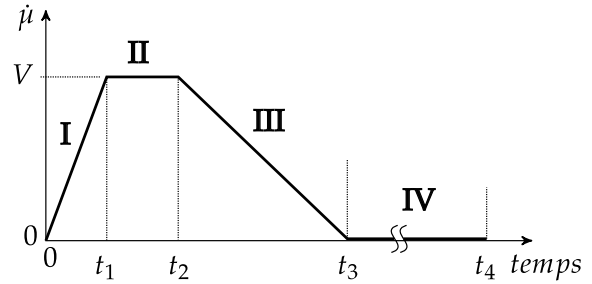


FIGURE 8 – Cycle de fermeture et de verrouillage

### Données du problème

Les paramètres et les données géométriques de l'équipage mobile sont définis par les relations vectorielles suivantes :

$$\vec{OA} = \lambda \vec{x}_0; \vec{OG} = \mu \vec{x}_0; \vec{AB} = a \vec{y}_0; \vec{BD} = R \vec{x}_2; \vec{DC} = d \vec{y}_3; \vec{ED} = c \vec{y}_3; \vec{EF} = h \vec{y}_4; \vec{IG} = L \vec{y}_0.$$

où

- $a, R, c, d, h$  et  $L$  sont des caractéristiques dimensionnelles (constantes) de l'équipage mobile,
- $\alpha, \beta, \gamma, \mu$  et  $\lambda$  sont les paramètres de l'équipage mobile (variables de configuration).

L'accélération de la pesanteur est définie par :  $\vec{g} = -g \vec{y}_0$ .

L'action du vérin sur (1), au point  $A$ , est modélisée par le torseur :

$$\{\mathcal{T}^{(\text{Vérin} \rightarrow 1)}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} F_v \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

### Hypothèses

- H<sub>1</sub>** La liaison équivalente entre le plateau (5) et le bâti (0) est une glissière d'axe  $(I, \vec{x}_0)$ . Cette liaison se caractérise aussi par un frottement de glissement de coefficient  $f$ , cela engendre une action mécanique représentée au point de contact  $I$  par le torseur :

$$\{\mathcal{T}^{(0 \rightarrow 5)}\}_I = \left\{ \begin{array}{cc} X_{05} & - \\ Y_{05} & - \\ - & N_{05} \end{array} \right\}_{\mathcal{B}_0}$$

Toutes les autres liaisons de l'équipage mobile seront supposées parfaites.

- H<sub>2</sub>** Compte tenu de l'importance de la masse  $M$  du plateau (5) devant les masses respectives des composants (1), (2), (3) et (4), celles-ci seront négligées. Les forces d'inerties associées à ces solides seront considérées négligeables par rapport aux forces transmissibles par les liaisons.

**N.B.** Il convient de retenir, pour ce problème plan, la notation :

$$\{\mathcal{T}^{(i \rightarrow j)}\}_Q = \left\{ \begin{array}{cc} X_{ij} & - \\ Y_{ij} & - \\ - & N_{ij} \end{array} \right\}_{\mathcal{B}_0}$$

pour représenter le torseur des actions mécaniques en un point  $Q$ , qu'exerce un solide  $(i)$  sur un solide  $(j)$  exprimé dans la base  $\mathcal{B}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .

## Partie C - Automatique : Étude du vérin d'injection

### C.1 Étude combinatoire du déplacement du vérin d'injection

Dans cette partie, on s'intéresse au système de mesure du déplacement linéaire du vérin d'injection. Une crémaillère est solidaire de la tige de ce vérin, entraîne en rotation l'axe d'un codeur incrémental par le biais d'un pignon qui lui est solidaire (Figure 9(a)).

Le codeur incrémental est à trois voies. Il produit trois signaux  $x$ ,  $y$  et  $z$  selon les positions des 3 pistes respectives A, B et C (Figure 9(b)). Ces signaux permettent de caractériser le sens de déplacement et les deux niveaux de vitesses (lente et rapide) du vérin d'injection.

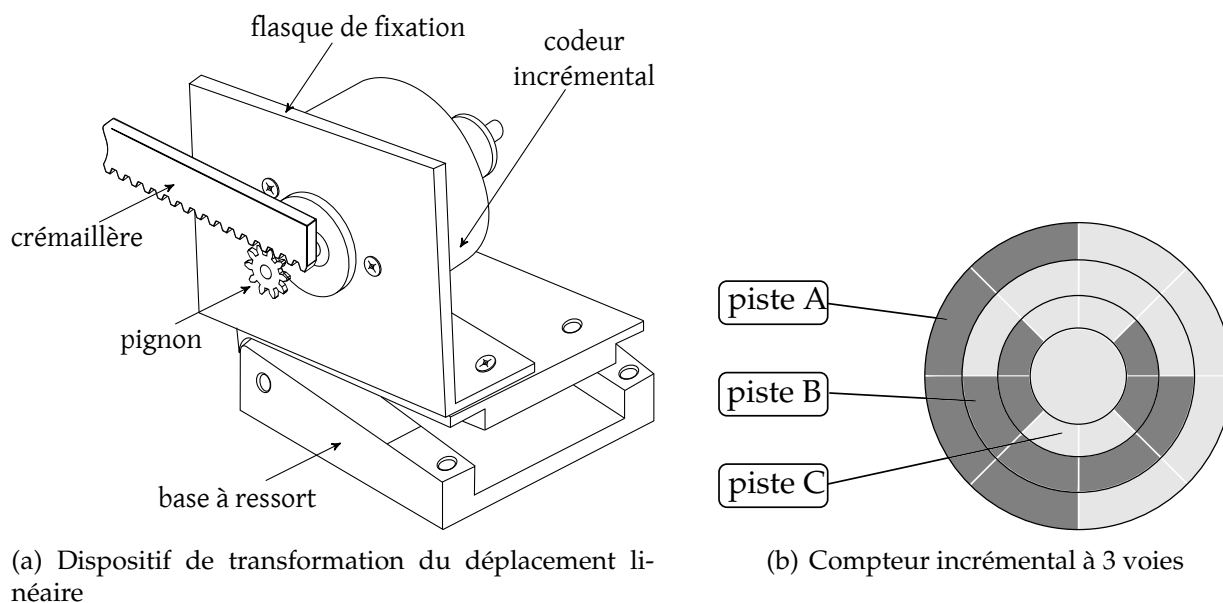


FIGURE 9 – Système de mesure de déplacement linéaire

Un système combinatoire placé à la sortie de la roue codeuse du codeur incrémental génère une fonction  $F(x, y, z)$  pour commander la servovalve via un calculateur. Dans notre cas les grandeurs binaires à l'entrée de ce système sont respectivement  $x$ ,  $y$  et  $z$  représentant les 3 bits de sortie de la roue codeuse (Figure 10).

Le fonctionnement du système combinatoire de la figure 10, ayant trois entrées binaires  $x$ ,  $y$  et  $z$  ainsi que la sortie  $F(x, y, z)$ , est représenté par le chronogramme figure 11 où  $x$  est le bit du poids fort alors que  $z$  est le bit du poids faible :

### C.2 Étude de l'asservissement électro-hydraulique du vérin d'injection

#### Mise en situation

L'objectif de cette partie est la modélisation et la commande en pression du vérin de la vis d'injection. En effet, les conditions thermodynamiques du matériau à l'injection doivent satisfaire des conditions strictes de pression, de température et de volume. C'est pour cela que le vérin d'injection doit être asservi en pression et qu'il est important de s'informer de sa vitesse de translation d'une manière continue.

Dans ce cadre, nous présentons sur la figure 12 la synoptique de la commande du système électro-hydraulique objet de l'étude.

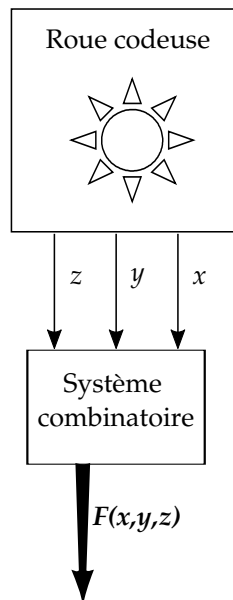


FIGURE 10 – Synoptique du système combinatoire

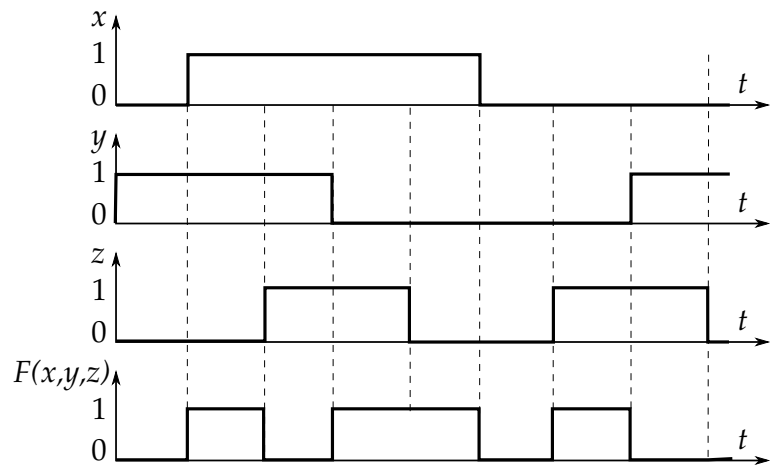


FIGURE 11 – Chronogramme de fonctionnement du système combinatoire

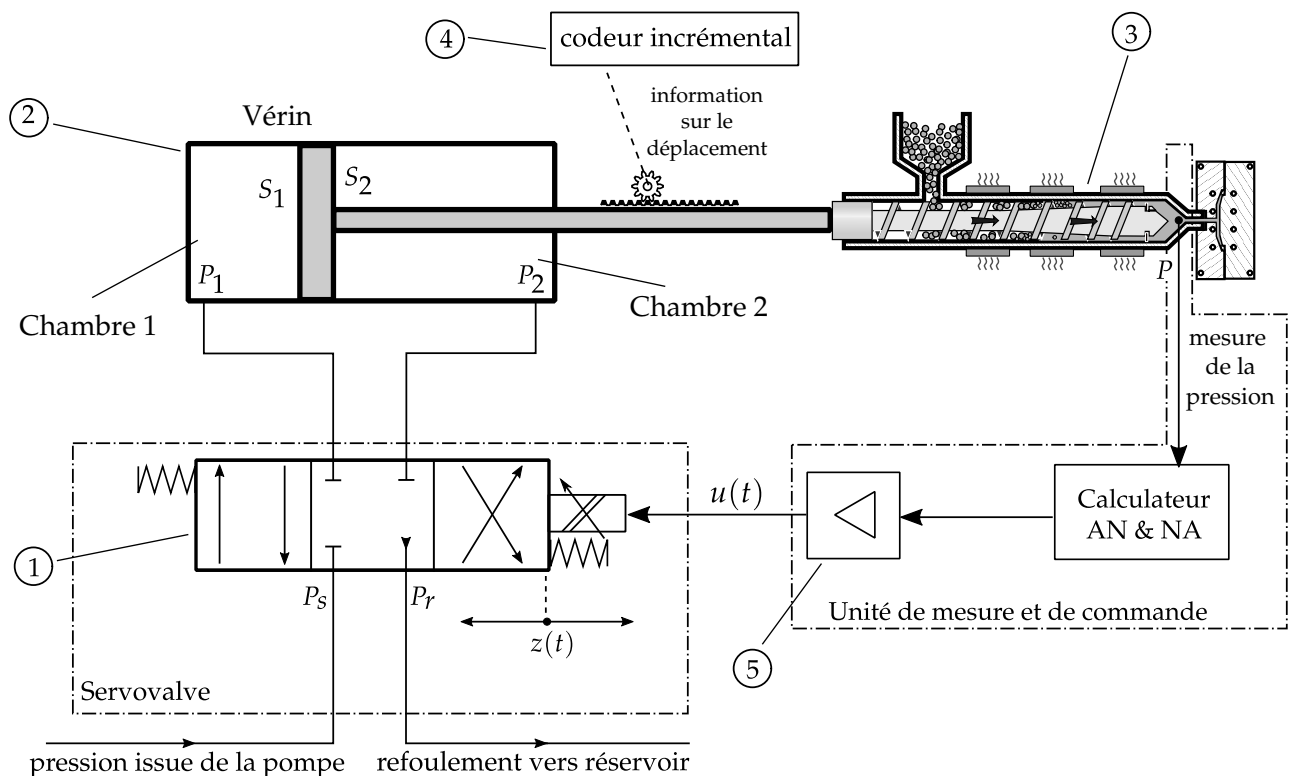


FIGURE 12 – Synoptique de la commande du système électro-hydraulique d'injection :

1. Distributeur proportionnel 4/3 (Servovalve proportionnelle électro-hydraulique à 3 étages);
2. Vérin hydraulique à double effet;
3. Vis d'injection;
4. Capteur de déplacement;
5. Amplificateur.

### Explication qualitative du fonctionnement

Par une commande de tension  $u(t)$ , une force électromagnétique  $F$  créée par le solénoïde permet de déplacer d'une distance  $z(t)$  le tiroir d'un distributeur. La pression  $P_1$  dans la chambre 1 du vérin va augmenter et la pression  $P_2$  dans la chambre 2 va diminuer (mise au refoulement de la chambre 2).

Cette pression  $P_1$  sera transmise à la vis de plastification et va générer une pression d'injection au niveau de la buse. La pression d'injection est mesurée d'une manière continue par un capteur de pression et l'information est systématiquement envoyée au calculateur afin de permettre sa régulation.

### Modélisation de la servovalve électro-hydraulique

Le schéma de principe de la servovalve électro-hydraulique à trois étages (dite aussi distributeur électro-hydraulique proportionnel 4/3) est donné par la figure 13. Le solénoïde, de résistance  $R$  et d'inductance  $L$ , engendre une force électromagnétique proportionnelle au courant  $i(t)$

$$F(t) = k_e \cdot i(t) \quad (1)$$

Cette force entraîne le déplacement  $z(t)$  du tiroir de la servovalve.

L'équation électrique décrivant le fonctionnement du solénoïde est donnée par :

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = u(t) \quad (2)$$

L'équation décrivant le mouvement du tiroir de la servovalve est donnée par :

$$m_s \frac{d^2z(t)}{dt^2} + f_s \frac{dz(t)}{dt} + k_s z(t) = F(t) \quad (3)$$

où  $m_s$  désigne la masse du tiroir de la servovalve,  $f_s$  le coefficient de frottement visqueux et  $k_s$  la raideur du ressort de rappel.

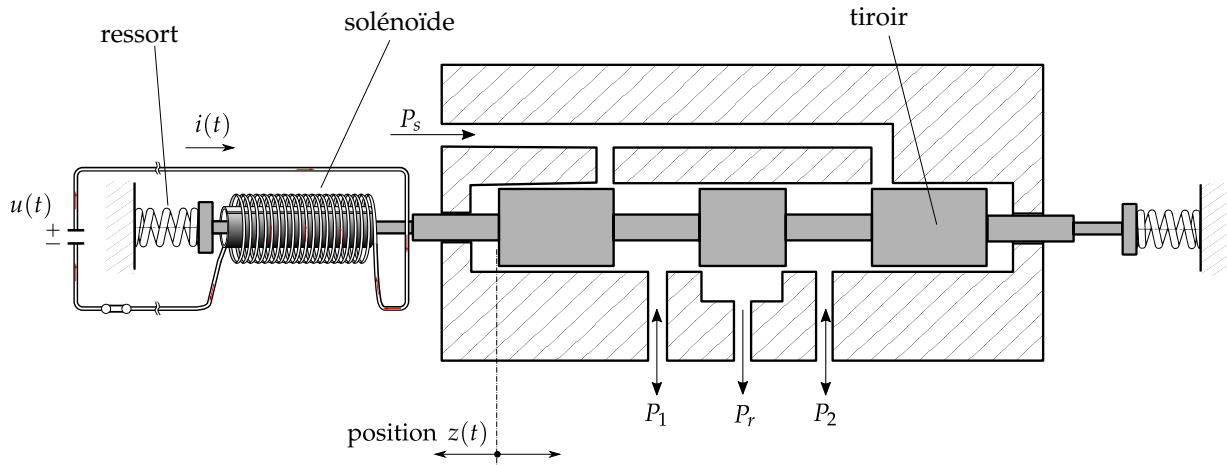


FIGURE 13 – Servovalve électro-hydraulique.

La pression  $P_1(t)$  au niveau de la chambre (1) du vérin est proportionnelle à la position  $z(t)$  du tiroir.

$$P_1(t) = k_v \cdot z(t) \quad (4)$$

De même, la pression au niveau de la buse  $P(t)$  est aussi proportionnelle à la pression du vérin :

$$P(t) = k_b \cdot P_1(t) \quad (5)$$



République Tunisienne

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT  
SUPERIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Signature des enseignants

**Concours Nationaux d'Entrée  
aux Cycles de Formation  
d'Ingénieurs**

**Concours Nationaux d'Entrée  
aux Cycles de Formation  
d'Ingénieurs**

Session : 2020

Concours : MP & PC

Epreuve de : **Systèmes Techniques  
Automatisés**

Date : **Samedi 18 Juillet 2020 à 8h**

Durée : **3 heures**

Session : 2020

Concours : **Mathématiques et Physique  
& Physique et Chimie**

Epreuve de : **Systèmes Techniques  
Automatisés**

Date : **Samedi 18 Juillet 2020 à 8h**

Durée : **3 Heures**

Nom : .....

Prénom : .....

Date & lieu de naissance : .....

Etablissement d'origine : .....

N° C.I.N ou N° du Passeport pour les étrangers :

--	--	--	--	--	--	--	--

Série :

--	--	--

Identifiant :

--	--	--	--	--	--

NE RIEN ÉCRIRE ICI

Nombre de  
cahiers remis

**01**

Nombre de  
cahiers remis

**01**

NE RIEN ÉCRIRE ICI

---

# Dossier

## DOCUMENT REPONSES

---

✱ Ce dossier comporte 22 pages numérotées de 1 à 22

▷ Partie A – Conception mécanique : ..... page 1

▷ Partie B – Mécanique des Solides Indéformables : .. pages de 2 à 16

▷ Partie C – Automatique : .....pages de 17 à 22

✱ Un seul dossier réponse est fourni au candidat et doit être rendu à la fin de l'épreuve, en totalité, même sans réponses.

✱ Le renouvellement ou la reproduction de ce dossier sont strictement interdits.

# Partie A : Conception Mécanique

**A.1:** Qu'appelle-t-on le type de transmission du mouvement entre (16C) et (10C) ?

Il s'agit d'une transmission par engrenage.

**A.2:** On considère les données suivantes :

nombre de dents du pignon du motoréducteur	$Z_{38C} = 10$ dents
nombre de dents de la grande roue	$Z_{18C} = 100$ dents
nombre de dents des quatre roues identiques	$Z_{10C} = 30$ dents
pas du système vis-écrou	$p = 3\text{mm}$
vitesse de rotation de l'arbre de sortie du motoréducteur	$N = 30\text{tr/min}$

Calculer la vitesse de translation du sommier (9C).

Le rapport de transmission :

$$r = \frac{Z_{38C} \times Z_{18C}}{Z_{18C} \times Z_{10C}} = \frac{Z_{38C}}{Z_{18C}} = \frac{10}{30} = 0.3$$

ainsi la vitesse de translation :

$$v = p.N.r = 3 \times 30 \times \frac{1}{3} = 30 \text{ mm/min} = .5 \text{ mm/s}$$

**A.3:** Le système de réglage contient quatre roues identiques (10C) avec quatre systèmes vis-écrou entre (10C) et (11C). Pourquoi le concepteur ne s'est-il pas limité à une seule roue et un seul système vis-écrou ?

Pour mieux répartir la charge transmise et limiter l'usure des roues d'engrenage

**A.4:** Si l'on se limite à un seul système vis-écrou (10C)-(11C) capable de transmettre l'effort nécessaire à la translation du sommier (9C) et on remplace les 3 autres par des paliers lisses, cette solution conduit à un inconvénient majeur, lequel ? Quel est alors le risque encouru ?

Blocage de l'ensemble par arc-boutement (coincement/blocage). On risque de casser les pièces impliquées dans cette transmission de mouvement.

**A.5:** Donner la fonction de la pièce (35C) dans le mécanisme de fermeture et de verrouillage ("Détail A" du DT-02). En se basant sur ses hachures, de quel matériau s'agit-il ?

Palier lisse, fonction : guidage en rotation. Il s'agit d'un alliage de cuivre.

# Partie B : Mécanique des Solides Indéformables

Nota : Les parties B.2 et B.3 peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

## B.1 Étude Cinématique

L'objectif de l'étude cinématique consiste à établir la loi entrée-sortie des vitesses (relation exprimant le rapport des vitesses  $(\dot{\mu}/\dot{\lambda})$  en fonction des paramètres géométriques du mécanisme).

**B.1:** Déterminer, dans la base  $\mathcal{B}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , les torseurs cinématiques, dans leur mouvement par rapport au bâti (0), des solides suivants :

a. le solide (1) au point A :

$$\{\mathcal{V}_{1/0}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \dot{\lambda} \vec{x}_0 \end{array} \right\}_A$$

$$\{\mathcal{V}_{1/0}\}_A = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & \dot{\lambda} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{\begin{array}{l} \mathcal{B}_0 \\ A \end{array}}$$

b. le solide (2) au point B, puis au point D :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{V}_{2/0}\}_B &= \left\{ \begin{array}{c} \dot{\alpha} \vec{z}_0 \\ \dot{\lambda} \vec{x}_0 \end{array} \right\}_B \\ \{\mathcal{V}_{2/0}\}_D &= \left\{ \begin{array}{c} \dot{\alpha} \vec{z}_0 \\ \dot{\lambda} \vec{x}_0 + \dot{\alpha} \vec{z}_0 \wedge R \vec{x}_2 = \dot{\lambda} \vec{x}_0 + R \dot{\alpha} \vec{y}_2 \end{array} \right\}_D \end{aligned}$$

$$\{\mathcal{V}_{2/0}\}_B = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & \dot{\lambda} \\ 0 & 0 \\ \dot{\alpha} & 0 \end{array} \right\}_{\begin{array}{l} \mathcal{B}_0 \\ B \end{array}}$$



$$\{\mathcal{V}_{2/0}\}_D = \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{array} & \begin{array}{c} \dot{\lambda} - R\dot{\alpha} \sin \alpha \\ R\dot{\alpha} \cos \alpha \\ 0 \end{array} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \mathcal{B}_0 \\ \\ D \end{array}$$

c. le solide (3) au point  $D$ , en passant par  $C$  :

$$\{\mathcal{V}_{3/0}\}_D = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\beta} \vec{z}_0 \\ \dot{\beta} \vec{z}_0 \wedge \overrightarrow{CD} = \dot{\beta} \vec{z}_0 \wedge (-d\vec{y}_3) = d\dot{\beta} \vec{x}_3 \end{array} \right\}_D$$

$$\{\mathcal{V}_{3/0}\}_D = \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta} \end{array} & \begin{array}{c} d\dot{\beta} \cos \beta \\ d\dot{\beta} \sin \beta \\ 0 \end{array} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \mathcal{B}_0 \\ \\ D \end{array}$$

**B.2:** En déduire :

a. la vitesse angulaire  $\dot{\alpha}$  en fonction de  $(\dot{\lambda}, R, \beta$  et  $(\alpha - \beta))$

$$\vec{V}_{D \in 2/3} = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}_{D \in 2/0} = \vec{V}_{D \in 3/0}$$

ainsi, par projection dans la base  $\mathcal{B}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  on en déduit :

$$\begin{cases} \dot{\lambda} - R\dot{\alpha} \sin \alpha = d\dot{\beta} \cos \beta \\ R\dot{\alpha} \cos \alpha = d\dot{\beta} \sin \beta \end{cases} \Rightarrow \tan \beta = \frac{R\dot{\alpha} \cos \alpha}{\dot{\lambda} - R\dot{\alpha} \sin \alpha}$$

$$\Rightarrow \dot{\alpha} = \frac{\dot{\lambda} \tan \beta}{R(\cos \alpha + \tan \beta \sin \alpha)} = \frac{\dot{\lambda} \sin \beta}{R \cos(\alpha - \beta)}$$

$$\dot{\alpha} = \frac{\dot{\lambda} \sin \beta}{R \cos(\alpha - \beta)}$$

b. la vitesse angulaire  $\dot{\beta}$  en fonction de  $(d, \alpha, (\alpha - \beta)$  et  $\dot{\lambda}$ )

$$\dot{\beta} = \frac{R\dot{\alpha} \cos \alpha}{d \sin \beta} = \frac{\dot{\lambda} \cos \alpha}{d \cos(\alpha - \beta)}$$

$$\dot{\beta} = \frac{\dot{\lambda} \cos \alpha}{d \cos(\alpha - \beta)}$$

**B.3:** Déterminer, dans la base  $\mathcal{B}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , les torseurs cinématiques, dans leur mouvements par rapport au bâti (0), des solides suivants :

a. le solide (3) au point E, en passant par C :

$$\{\mathcal{V}_{3/0}\}_E = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\beta} \vec{z}_0 \\ (c+d)\dot{\beta} \vec{x}_3 \end{array} \right\}_E$$

$$\{\mathcal{V}_{3/0}\}_E = \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta} \end{array} & \begin{array}{c} (c+d)\dot{\beta} \cos \beta \\ (c+d)\dot{\beta} \sin \beta \\ 0 \end{array} \end{array} \right\}_{\begin{array}{c} \mathcal{B}_0 \\ E \end{array}}$$

b. le solide (4) au point  $F$ , en passant par  $E$  :

$$\{\mathcal{V}_{4/0}\}_E = \left\{ \begin{array}{c} -\dot{\gamma}\vec{z}_0 \\ (c+d)\dot{\beta}\vec{x}_3 \end{array} \right\}_E$$

Au point  $F$  :

$$\vec{V}_{F \in 4/0} = \vec{V}_{E \in 4/0} + \vec{\Omega}_{4/0} \wedge \overrightarrow{EF} = (c+d)\dot{\beta}\vec{x}_3 - \dot{\gamma}\vec{z}_0 \wedge h\vec{y}_4 = (c+d)\dot{\beta}\vec{x}_3 + h\dot{\gamma}\vec{x}_4$$

$$\{\mathcal{V}_{4/0}\}_F = \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -\dot{\gamma} \end{array} & \begin{array}{c} (c+d)\dot{\beta} \cos \beta + h\dot{\gamma} \cos \gamma \\ (c+d)\dot{\beta} \sin \beta - h\dot{\gamma} \sin \gamma \\ 0 \end{array} \end{array} \right\}_{\substack{\mathcal{B}_0 \\ F}}$$

c. le solide (4) au point  $F$  en fonction de  $\dot{\gamma}$  et  $\dot{\mu}$  :

$$\vec{V}_{F \in 4/0} = \underbrace{\vec{V}_{F \in 4/5}}_{=\vec{0}} + \vec{V}_{F \in 5/0} = \vec{V}_{G \in 5/0} = \dot{\mu}\vec{x}_0$$

$$\{\mathcal{V}_{4/0}\}_F = \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -\dot{\gamma} \end{array} & \begin{array}{c} \dot{\mu} \\ 0 \\ 0 \end{array} \end{array} \right\}_{\substack{\mathcal{B}_0 \\ F}}$$

**B.4:** En déduire les relations exprimant :

a. la vitesse de translation,  $\dot{\mu}$ , du plateau mobile (5) par rapport au bâti (0) en fonction de  $(c, d, h, \beta, \dot{\beta}, \gamma$  et  $\dot{\gamma})$

Par projection de  $\vec{V}_{F \in 4/0}$  sur  $\vec{x}_0$  on en déduit :  $\dot{\mu} = (c+d)\dot{\beta} \cos \beta + h\dot{\gamma} \cos \gamma$

$$\dot{\mu} = (c + d)\dot{\beta} \cos \beta + h\dot{\gamma} \cos \gamma$$

b. l'accélération  $\ddot{\mu}$ , de (5) par rapport au bâti (0), en fonction de  $(\ddot{\beta}, \dot{\beta}, \beta, \ddot{\gamma}, \dot{\gamma}, \gamma, c, d \text{ et } h)$ .

Par dérivation par rapport au temps de la vitesse  $\dot{\mu} = (c + d)\dot{\beta} \cos \beta + h\dot{\gamma} \cos \gamma$  on aura :

$$\ddot{\mu} = (c + d) [\ddot{\beta} \cos \beta - \dot{\beta}^2 \sin \beta] + h [\ddot{\gamma} \cos \gamma - \dot{\gamma}^2 \sin \gamma]$$

$$\ddot{\mu} = (c + d) [\ddot{\beta} \cos \beta - \dot{\beta}^2 \sin \beta] + h [\ddot{\gamma} \cos \gamma - \dot{\gamma}^2 \sin \gamma]$$

c. la vitesse angulaire  $\dot{\gamma}$  en fonction de  $(c, d, h, \beta, \dot{\beta} \text{ et } \gamma)$

Par projection de  $\vec{V}_{F \in 4/0}$  sur  $\vec{y}_0$  on en déduit :  $0 = (c + d)\dot{\beta} \sin \beta - h\dot{\gamma} \sin \gamma$

$$\dot{\gamma} = \frac{(c + d) \sin \beta}{h \sin \gamma} \dot{\beta}$$

**B.5:** Dédurre le rapport des vitesses  $(\dot{\mu}/\dot{\lambda})$  en fonction de  $(c, d, \alpha, \beta, \text{ et } \gamma)$ .

On a :  $\dot{\mu} = (c + d)\dot{\beta} \cos \beta + h\dot{\gamma} \cos \gamma$  et  $\dot{\gamma} = \frac{(c + d) \sin \beta}{h \sin \gamma} \dot{\beta}$  ainsi :

$$\begin{aligned} \dot{\mu} &= (c + d)\dot{\beta} \cos \beta + h \cos \gamma \frac{(c + d) \sin \beta}{h \sin \gamma} \dot{\beta} = \frac{(c + d)}{\sin \gamma} [\cos \beta \sin \gamma + \cos \gamma \sin \beta] \dot{\beta} \\ &= \frac{(c + d) \sin(\beta + \gamma)}{\sin \gamma} \dot{\beta} \end{aligned}$$

$$\text{Or } \dot{\beta} = \frac{\dot{\lambda} \cos \alpha}{d \cos(\alpha - \beta)}. \text{ D'où : } \dot{\mu} = \frac{(c + d) \sin(\beta + \gamma) \cos \alpha}{d \sin \gamma \cos(\alpha - \beta)} \dot{\lambda} \Rightarrow \frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}} = \frac{(c + d) \sin(\beta + \gamma) \cos \alpha}{d \sin \gamma \cos(\alpha - \beta)}$$

$$\frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}} = \frac{(c + d) \sin(\beta + \gamma) \cos \alpha}{d \sin \gamma \cos(\alpha - \beta)}$$

**B.6:** Donner la relation entre les valeurs critiques  $\beta_c$  et  $\gamma_c$  (des angles  $\beta$  et  $\gamma$ ) réalisant l'alignement des points C, E et F (position de verrouillage du moule)

L'alignement des points C, E et F entraîne  $\vec{y}_3 = -\vec{y}_4 \Rightarrow \vec{y}_3 \wedge \vec{y}_4 = \vec{0} \Rightarrow$

$$\sin(\beta + \gamma) = 0 \Rightarrow \beta + \gamma = \pi$$

$$\beta_c + \gamma_c = \pi$$

**B.7:** Vérifier que, dans cette position de verrouillage, la vitesse de translation  $\dot{\mu}$  du plateau mobile (5) par rapport au bâti (0) est nulle ( $\dot{\mu} = 0$ )

$$\text{Pour cette situation : } \sin(\beta_c + \gamma_c) = 0 \Rightarrow \frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}} = 0$$

$$\text{il s'en suit : } \dot{\mu} = 0$$

## B.2 Étude dynamique

On se propose de déterminer les efforts transmissibles par l'équipage mobile pendant la phase de fermeture et de verrouillage, en considérant l'hypothèse **H<sub>2</sub>** page (7/10) du dossier "Mise en situation, Données et Hypothèses".

**B.8:** Les efforts extérieurs appliqués sur le solide (2) par le solide (1) en  $B$  et par le solide (3) en  $D$  sont notés respectivement par  $\vec{F}_B$  et  $\vec{F}_D$  :

- a. En appliquant le théorème de la résultante dynamique au solide (2) au cours de son mouvement par rapport au bâti (0), montrer que  $\vec{F}_B = -\vec{F}_D$

$$\vec{\mathcal{R}}_{(2 \rightarrow 2)} = \vec{0} = \vec{\mathcal{R}}_{(1 \rightarrow 2)} + \vec{\mathcal{R}}_{(3 \rightarrow 2)} \Rightarrow \vec{F}_B = -\vec{F}_D$$

- b. En appliquant le théorème du moment dynamique, au point  $B$ , au solide (2) au cours de son mouvement par rapport au bâti (0), déduire la ligne d'action des deux forces  $\vec{F}_B$  et  $\vec{F}_D$  ?

$$\vec{\mathcal{M}}_B(2 \rightarrow 2) = \vec{0} \Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_B(1 \rightarrow 2) + \vec{\mathcal{M}}_B(3 \rightarrow 2) = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{BD} \wedge \vec{F}_D = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{BD} // \vec{F}_D$$

Ainsi, la ligne d'action des deux forces  $\vec{F}_B$  et  $\vec{F}_D$  est la droite  $(BD)$

- c. Exprimer  $\vec{F}_B$  et  $\vec{F}_D$  dans la base  $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$  en fonction de  $F_B$  (intensité de  $\vec{F}_B$ ).

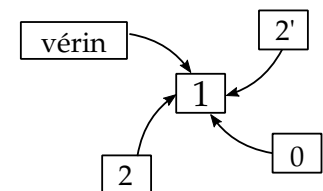
$$\text{D'après ce qui précède } \vec{F}_B = -\vec{F}_D = F_B \vec{x}_2$$

$$\vec{F}_B = F_B \vec{x}_2$$

$$\text{et } \vec{F}_D = -F_B \vec{x}_2$$

**B.9:** On cherche à déterminer l'intensité  $F_B$  de la force  $\vec{F}_B$ .

- a. En considérant le graphe ci-contre représentant le bilan des actions mécaniques extérieures appliquées au solide (1), écrire les torseurs associés à ces actions en leur point d'application. Les exprimer dans la base  $\mathcal{B}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .



$$\text{Action de (2) sur (1) en } B : \{ \mathcal{T}_{(2 \rightarrow 1)} \}_B = \left\{ \begin{array}{c} -F_B \vec{x}_2 \\ 0 \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} -F_B \cos \alpha \\ -F_B \sin \alpha \\ 0 \end{array} \middle| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}_B^{\mathcal{B}_0}$$

$$\text{Action de (2')} \text{ sur (1) en } B' : \{\mathcal{T}_{(2' \rightarrow 1)}\}'_B = \left\{ \begin{array}{c|c} -F_B \vec{x}'_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c|c} -F_B \cos \alpha & 0 \\ F_B \sin \alpha & 0 \end{array} \right\}_B^{\mathcal{B}_0}$$

$$\text{Action de (0) sur (1) en } A : \{\mathcal{T}_{(0 \rightarrow 1)}\}_A = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ Y_{01} & 0 \\ 0 & N_{01} \end{array} \right\}_A^{\mathcal{B}_0}$$

$$\text{Action du vérin sur (1) en } A : \{\mathcal{T}_{(\text{vérin} \rightarrow 1)}\}_A = \left\{ \begin{array}{c|c} F_v & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_A^{\mathcal{B}_0}$$

- b. Écrire les équations scalaires qui découlent du théorème de la résultante dynamique appliqué au solide (1) au cours de son mouvement par rapport au bâti (0). En déduire l'intensité  $F_B$  en fonction de l'intensité  $F_v$  de l'action du vérin sur (1) et de l'angle  $\alpha$ .

$$\vec{\mathcal{R}}_{(1 \rightarrow 1)} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\mathcal{R}}_{(2 \rightarrow 1)} + \vec{\mathcal{R}}_{(2' \rightarrow 1)} + \vec{\mathcal{R}}_{(0 \rightarrow 1)} + \vec{\mathcal{R}}_{(\text{vérin} \rightarrow 1)} = \vec{0}$$

Ainsi par projection sur  $\vec{x}_0$  :  $F_v - 2F_B \cos \alpha = 0 \Rightarrow F_B = \frac{F_v}{2 \cos \alpha}$

par projection sur  $\vec{y}_0$  :  $Y_{01} = 0$

$$F_B = \frac{F_v}{2 \cos \alpha}$$

**B.10:** Détermination de l'intensité  $F_E$  de l'action du solide (3) sur le solide (4) au point  $E$ . Par analogie avec l'étude précédente, on montre que l'expression vectorielle de l'effort  $\vec{F}_E$  s'exprime en fonction de son intensité par :  $\vec{F}_E = F_E \vec{y}_4$ .

- a. Donner l'expression de l'effort  $\vec{F}_F$  exercé au point  $F$  par le plateau mobile (5) sur le solide (4) en fonction de  $F_E$ .

$$\vec{\mathcal{R}}_{(4 \rightarrow 4)} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\mathcal{R}}_{(3 \rightarrow 4)} + \vec{\mathcal{R}}_{(5 \rightarrow 4)} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F}_E + \vec{F}_F = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_F = -\vec{F}_E = -F_E \vec{y}_4$$

$$\vec{F}_F = -F_E \vec{y}_4$$

- b. Écrire les torseurs des actions mécaniques extérieures appliquées au plateau mobile (5) en leur point d'application. Les exprimer dans la base  $\mathcal{B}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .

$$\begin{aligned} \text{Action de (4) sur (5) en } F : \{\mathcal{T}_{(4 \rightarrow 5)}\}_F &= \left\{ \begin{array}{c|c} F_E \vec{y}_4 & \vec{0} \\ \hline F_E \sin \gamma & 0 \\ F_E \cos \gamma & 0 \end{array} \right\}_F^{\mathcal{B}_0} \\ \text{Action de (4') sur (5) en } F' : \{\mathcal{T}_{(4' \rightarrow 5)}\}_{F'} &= \left\{ \begin{array}{c|c} F_E \vec{y}'_4 & \vec{0} \\ \hline -F_E \sin \gamma & 0 \\ -F_E \cos \gamma & 0 \end{array} \right\}_{F'}^{\mathcal{B}_0} \\ \text{Action de (0) sur (5) en } I : \{\mathcal{T}_{(0 \rightarrow 5)}\}_I &= \left\{ \begin{array}{c|c} X_{01} & 0 \\ Y_{05} & 0 \\ 0 & N_{05} \end{array} \right\}_I^{\mathcal{B}_0} \\ \text{Action de la pesanteur sur (5) en } G : \{\mathcal{T}_{(g \rightarrow 5)}\}_G &= \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ -Mg & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_G^{\mathcal{B}_0} \end{aligned}$$

- c. Écrire les équations scalaires issues du théorème de la résultante dynamique appliqué au plateau mobile (5) au cours de son mouvement par rapport au bâti (0) en projection sur la base  $\mathcal{B}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{R}}_{(5 \rightarrow 5)} &= M\ddot{u}\vec{x}_0 \\ \text{par projection sur } \vec{x}_0 : 2F_E \sin \gamma + X_{05} &= M\ddot{u} \\ \text{par projection sur } \vec{y}_0 : Y_{05} &= Mg > 0 \end{aligned}$$

- d. Déduire l'expression de l'intensité  $F_E$  en fonction de  $(f, M, g, \gamma$  et  $\ddot{u})$ .

$$\text{On a : } 2F_E \sin \gamma + X_{05} = M\ddot{u} \Rightarrow 2F_E \sin \gamma = M\ddot{u} - X_{05}$$

Or d'après la loi de Coulomb pour le frottement de glissement :

$$X_{05} = -fY_{05} = -fMg$$

$$\text{On en déduit : } 2F_E \sin \gamma = M\ddot{\mu} + fMg \Rightarrow F_E = \frac{M(\ddot{\mu} + fg)}{2 \sin \gamma}$$

$$F_E = \frac{M(\ddot{\mu} + fg)}{2 \sin \gamma}$$

**B.11:** Détermination de l'intensité de l'effort  $\vec{F}_v$  transmis par la pression du vérin au solide (1).

a. Écrire les torseurs des actions mécaniques extérieures appliquées au solide (3) en leur point d'application. Les exprimer dans la base  $\mathcal{B}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .

$$\text{Action de (0) sur (3) en C : } \{\mathcal{T}_{(0 \rightarrow 3)}\}_C = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_C \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{03} & 0 \\ Y_{03} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_C^{\mathcal{B}_0}$$

Action de (2) sur (3) en C :

$$\{\mathcal{T}_{(2 \rightarrow 3)}\}_D = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\mathcal{R}}^{(2 \rightarrow 3)} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_D = \left\{ \begin{array}{c} -F_D \vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_D = \left\{ \begin{array}{c} F_B \vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_D = \left\{ \begin{array}{c|c} F_B \cos \alpha & 0 \\ F_B \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_D^{\mathcal{B}_0}$$

Action de (4) sur (3) en C :

$$\{\mathcal{T}_{(4 \rightarrow 3)}\}_E = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\mathcal{R}}^{(4 \rightarrow 3)} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_E = \left\{ \begin{array}{c} -F_E \vec{y}_4 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_E = \left\{ \begin{array}{c|c} -F_E \sin \gamma & 0 \\ -F_E \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_E^{\mathcal{B}_0}$$

b. En appliquant le théorème de la résultante dynamique au solide (3) au cours de son mouvement par rapport au bâti (0), déterminer en fonction  $F_E$ ,  $F_v$  et  $\alpha$ , l'expression vectorielle de  $\vec{F}_C$  (effort exercé par le bâti (0) sur le solide (3) au point C :  $\vec{F}_C = \vec{F}_{03}$ )

$$\vec{\mathcal{R}}^{(3 \rightarrow 3)} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_C = -F_B \vec{x}_2 + F_E \vec{y}_4 \quad \text{avec } F_B = \frac{F_v}{2 \cos \alpha}$$



d'où

$$\vec{F}_C = -\frac{F_v}{2 \cos \alpha} \vec{x}_2 + F_E \vec{y}_4$$

Dans la base  $\mathcal{B}_0$  :

$$\vec{F}_C = \left[ -\frac{F_v}{2} + F_E \sin \gamma \right] \vec{x}_0 + \left[ -\frac{F_v}{2} \tan \alpha + F_E \cos \gamma \right] \vec{y}_0$$

$$\vec{F}_C = -\frac{F_v}{2 \cos \alpha} \vec{x}_2 + F_E \vec{y}_4$$

- c. Écrire l'équation scalaire qui découle du théorème du moment dynamique, au point C, appliqué au solide (3) au cours de son mouvement par rapport au bâti (0) qui exprime  $F_v$  en fonction de  $F_E$  et les paramètres  $(\alpha, \beta, \gamma, c$  et  $d)$ .

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_C(\vec{3} \rightarrow 3) = \vec{0} &\Rightarrow \frac{F_v}{2 \cos \alpha} \vec{x}_2 \wedge d\vec{y}_3 - F_E \vec{y}_4 \wedge (c + d)\vec{y}_3 = \vec{0} \\ &\Rightarrow \left[ \frac{d \cos(\beta - \alpha)}{2 \cos \alpha} F_v - (c + d) \sin(\beta + \gamma) F_E \right] \vec{z}_0 = \vec{0} \end{aligned}$$

on en déduit :

$$F_v = \frac{(c + d) 2 \cos \alpha \sin(\beta + \gamma)}{d \cos(\beta - \alpha)} F_E$$

$$F_v = \frac{(c+d)2 \cos \alpha \sin(\beta + \gamma)}{d \cos(\beta - \alpha)} F_E$$

d. Dédurre l'expression de  $F_v$  en fonction de  $(f, M, g, \ddot{\mu}, \alpha, \beta, \gamma, c$  et  $d)$ .

Nous avons :  $F_E = \frac{M(\ddot{\mu} + fg)}{2 \sin \gamma}$

en l'injectant dans la relation précédente on aura :

$$F_v = \frac{(c+d) \cos \alpha \sin(\beta + \gamma)}{d \sin \gamma \cos(\beta - \alpha)} M(\ddot{\mu} + fg)$$

$$F_v = \frac{(c+d) \cos \alpha \sin(\beta + \gamma)}{d \sin \gamma \cos(\beta - \alpha)} M(\ddot{\mu} + fg)$$

e. Dédurre de nouveau  $F_v$  en fonction de  $(f, M, g, \ddot{\mu})$  et du rapport des vitesses  $(\dot{\mu}/\dot{\lambda})$ .

D'après l'étude cinématique :  $\frac{(c+d) \cos \alpha \sin(\beta + \gamma)}{d \sin \gamma \cos(\beta - \alpha)} = \frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}}$

par suite :

$$F_v = \frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}} M(\ddot{\mu} + fg)$$

$$F_v = \frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}} M(\ddot{\mu} + fg)$$

- f. Pour les trois étapes I, II et III du cycle de fermeture du moule (Figure 7), donner l'expression de l'accélération  $\ddot{\mu}$  en fonction de la vitesse  $V$  et du temps.

Étape I

$$\ddot{\mu} = \frac{V}{t_1}$$

Étape II

$$\ddot{\mu} = 0$$

Étape III

$$\ddot{\mu} = -\frac{V}{t_3 - t_2}$$

**B.12:** Sachant que pendant la phase d'injection, l'action combinée de verrouillage et d'injection sur le plateau mobile (5) (notée  $P_i$ ), en son centre d'inertie  $G$ , est modélisée par le torseur :

$$\{\mathcal{T}_{(P_i \rightarrow 5)}\}_G = \left\{ \begin{array}{c} -F_i \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$$

donner l'expression de  $F_E$  en fonction de ( $F_i$  et  $\gamma$ ).

Au moment de l'opération d'injection, l'application du théorème de la résultante dynamique au solide (5) en équilibre par rapport au bâti (0) en projection sur  $\vec{x}_0$  donne :

$$2F_E \sin \gamma - F_i = 0$$

$$F_E = \frac{F_i}{2 \sin \gamma}$$

## B.3 Étude énergétique

Cette partie sera consacrée à l'étude de l'effet engendré par la prise en compte de la masse des genouillères (solides (4) et (4')) sur l'action développée par le vérin électro-hydraulique (17C) pendant le cycle de fermeture du moule tout en conservant l'hypothèse **H<sub>2</sub>** pour les autres solides.

Le solide (4) sera assimilé à une barre homogène de section constante, de longueur  $h$ , de masse  $m$  et de centre d'inertie  $G_4$ . On admettra que sa matrice centrale d'inertie a pour expression :

$$[I_{G_4}(4)] = \begin{bmatrix} \frac{mh^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mh^2}{12} \end{bmatrix}_{(\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_0)}$$

**B.13:** Déterminer la vitesse du centre d'inertie  $G_4$  du solide (4) par rapport au bâti, l'exprimer en fonction de  $(\dot{\mu}, \dot{\gamma}$  et  $h$ )

$$\vec{V}_{G_4 \in 4/0} = \vec{V}_{F \in 4/0} + \vec{\Omega}_{4/0} \wedge \overrightarrow{FG_4} = \dot{\mu}\vec{x}_0 - \dot{\gamma}\vec{z}_0 \wedge \left(-\frac{h}{2}\vec{y}_4\right) = \dot{\mu}\vec{x}_0 - \frac{h}{2}\dot{\gamma}\vec{x}_4$$

$$\vec{V}_{G_4/0} = \dot{\mu}\vec{x}_0 - \frac{h}{2}\dot{\gamma}\vec{x}_4$$

**B.14:** Déterminer l'expression de l'énergie cinétique du solide (4) au cours de son mouvement par rapport au bâti (0).

$$E_{c4/0} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}_{4/0} \\ \vec{V}_{G_4 \in 4/0} \end{matrix} \right\}_{G_4} \left\{ \begin{matrix} m \vec{V}_{G_4 \in 4/0} \\ \vec{\sigma}_{G_4}(4/0) \end{matrix} \right\}_{G_4} \text{ avec } \vec{\sigma}_{G_4}(4/0) = [I_{G_4}(4)] \vec{\Omega}_{4/0}$$

$$E_{c4/0} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} -\dot{\gamma}\vec{z}_0 \\ \dot{\mu}\vec{x}_0 - \frac{h}{2}\dot{\gamma}\vec{x}_4 \end{matrix} \right\}_{G_4} \left\{ \begin{matrix} m(\dot{\mu}\vec{x}_0 - \frac{h}{2}\dot{\gamma}\vec{x}_4) \\ -\frac{mh^2}{12}\dot{\gamma}\vec{z}_0 \end{matrix} \right\}_{G_4}$$

ainsi après simplification on aura :

$$E_{c4/0} = \frac{m}{2} \left[ \frac{h^2}{3} \dot{\gamma}^2 + \dot{\mu}^2 - h\dot{\mu}\dot{\gamma} \cos \gamma \right]$$

**B.15:** Déterminer l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble ( $E$ ) formé par le plateau mobile (5) et les deux solides (4) et (4') au cours de son mouvement par rapport au bâti (0).

$$Ec_{E/0} = Ec_{4/0} + Ec_{4'/0} + Ec_{5/0}$$

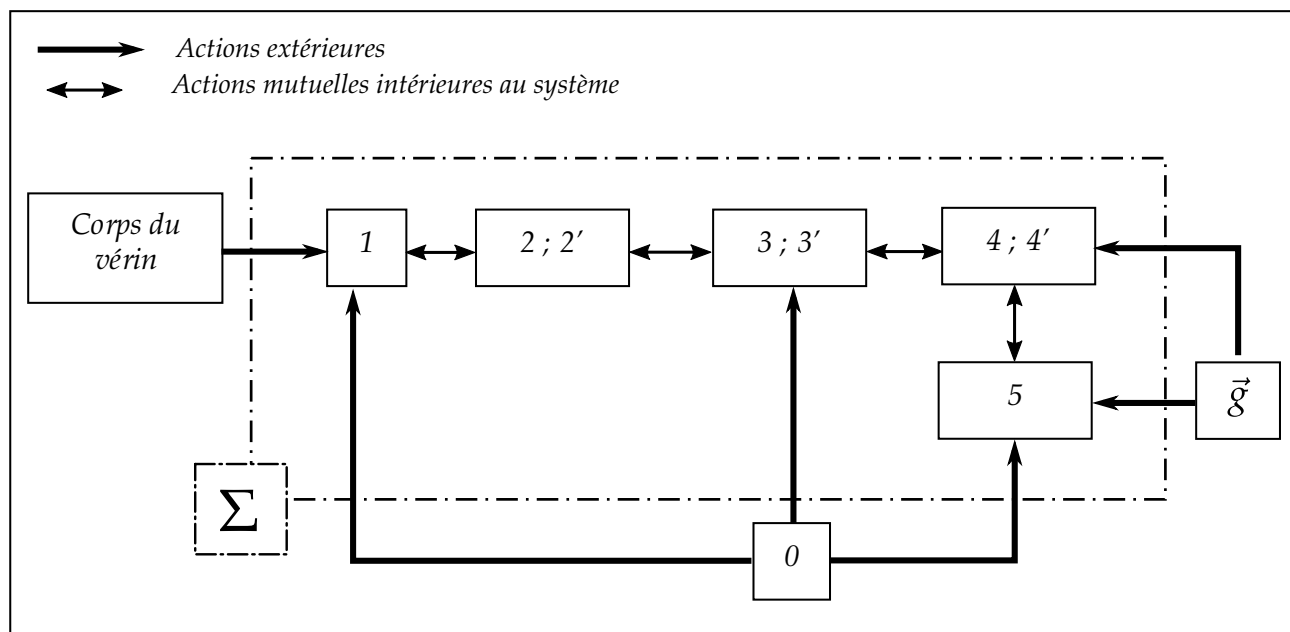
$$Ec_{4/0} = Ec_{4'/0} = \frac{m}{2} \left[ \frac{h^2}{3} \dot{\gamma}^2 + \dot{\mu}^2 - h\dot{\mu}\dot{\gamma} \cos \gamma \right] \text{ et } Ec_{5/0} = \frac{M}{2} \dot{\mu}^2$$

On en déduit

$$Ec_{E/0} = \left( \frac{M}{2} + m \right) \dot{\mu}^2 + \frac{mh^2}{3} \dot{\gamma}^2 - mh\dot{\mu}\dot{\gamma} \cos \gamma$$

$$Ec_{(E/0)} = \left( \frac{M}{2} + m \right) \dot{\mu}^2 + \frac{mh^2}{3} \dot{\gamma}^2 - mh\dot{\mu}\dot{\gamma} \cos \gamma$$

La figure ci-dessous schématise le graphe des actions mécaniques intérieures et extérieures s'exerçant sur les solides formant le système de fermeture du moule ( $\Sigma$ ).



**B.16:** Déterminer la puissance développée par les actions mécaniques extérieures et intérieures s'exerçant sur le système ( $\Sigma$ ) en mouvement par rapport au bâti (0).

$$\mathcal{P}_{(\Sigma \rightarrow \Sigma/0)} = \mathcal{P}_{(\text{vérin} \rightarrow 1/0)} + \mathcal{P}_{(0 \rightarrow 1/0)} + \mathcal{P}_{(0 \rightarrow 3/0)} + \mathcal{P}_{(0 \rightarrow 3'/0)} + \mathcal{P}_{(0 \rightarrow 5/0)} + \mathcal{P}_{(g \rightarrow 5/0)} + \mathcal{P}_{(g \rightarrow 4/0)} + \mathcal{P}_{(g \rightarrow 4'/0)}$$

avec :

$$\mathcal{P}_{(\text{vérin} \rightarrow 1/0)} = \dot{\lambda} F_v$$

$$\mathcal{P}_{(0 \rightarrow 1/0)} = \mathcal{P}_{(0 \rightarrow 3/0)} = \mathcal{P}_{(0 \rightarrow 3'/0)} = 0 \text{ liaisons parfaites}$$

$$\mathcal{P}_{(0 \rightarrow 5/0)} = -f M g \dot{\mu}$$

$$\mathcal{P}_{(g \rightarrow 5/0)} = -M g \vec{y}_0 \cdot \dot{\mu} \vec{x}_0 = 0$$

$$\mathcal{P}_{(g \rightarrow 4/0)} = \left( \dot{\mu} \vec{x}_0 - \frac{h}{2} \dot{\gamma} \vec{x}_4 \right) \cdot (-m g \vec{y}_0) = -m g \frac{h}{2} \dot{\gamma} \sin \gamma$$

$$\mathcal{P}_{(g \rightarrow 4'/0)} = \left( \dot{\mu} \vec{x}_0 + \frac{h}{2} \dot{\gamma} \vec{x}_4' \right) \cdot (-m g \vec{y}_0) = m g \frac{h}{2} \dot{\gamma} \sin \gamma$$

D'où :

$$\mathcal{P}_{(\tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma/0)} = \dot{\lambda} F_v - f M g \dot{\mu}$$

$\mathcal{P}_{\text{int}}(\Sigma) = 0$  car toutes les liaisons internes au système sont considérées parfaites.

$$\mathcal{P}_{(\tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma/0)} = \dot{\lambda} F_v - f M g \dot{\mu}$$

$$\mathcal{P}_{\text{int}}(\Sigma) = 0$$

**B.17:** En appliquant le théorème de l'énergie cinétique au système ( $\Sigma$ ) au cours de son mouvement par rapport au bâti (0), déduire l'expression de la force  $F_v$ . Que devient cette expression en négligeant la masse  $m$  du solide (4) ?

$$\frac{dE_{c\Sigma/0}}{dt} = \mathcal{P}_{(\tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma/0)} + \mathcal{P}_{\text{int}}(\Sigma)$$

$$2 \left( \frac{M}{2} + m \right) \dot{\mu} \ddot{\mu} + \frac{2}{3} m h^2 \dot{\gamma} \ddot{\gamma} - m h (\ddot{\mu} \dot{\gamma} \cos \gamma + \dot{\mu} \ddot{\gamma} \cos \gamma - \dot{\mu} \dot{\gamma}^2 \sin \gamma) = \dot{\lambda} F_v - f M g \dot{\mu}$$

$$F_v = \frac{1}{\dot{\lambda}} \left[ f M g \dot{\mu} + 2 \left( \frac{M}{2} + m \right) \dot{\mu} \ddot{\mu} + \frac{2}{3} m h^2 \dot{\gamma} \ddot{\gamma} - m h (\ddot{\mu} \dot{\gamma} \cos \gamma + \dot{\mu} \ddot{\gamma} \cos \gamma - \dot{\mu} \dot{\gamma}^2 \sin \gamma) \right]$$

Expression de  $F_v$  en tenant compte de  $m$

$$F_v = \frac{1}{\dot{\lambda}} \left[ f M g \dot{\mu} + 2 \left( \frac{M}{2} + m \right) \dot{\mu} \ddot{\mu} + \frac{2}{3} m h^2 \dot{\gamma} \ddot{\gamma} - m h (\ddot{\mu} \dot{\gamma} \cos \gamma + \dot{\mu} \ddot{\gamma} \cos \gamma - \dot{\mu} \dot{\gamma}^2 \sin \gamma) \right]$$

Expression de  $F_v$  en négligeant  $m$

$$F_v = \frac{\dot{\mu}}{\dot{\lambda}} M (f g + \ddot{\mu})$$

# Partie C : Automatique

## C.1 Étude du système combinatoire à la sortie du codeur

On désire caractériser le déplacement linéaire de la charge entraînée par le vérin électrohydraulique au moyen du codeur (figure 9(a)).

**C.1:** A partir de la figure 11, compléter la table de vérité relative à ce système combinatoire.

	$x$	$y$	$z$	$F(x, y, z)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

**C.2:** En déduire les deux expressions canoniques en somme de produits ( $\Sigma \Pi$ ) et en produit de sommes ( $\Pi \Sigma$ ) de la fonction  $F(x, y, z)$ .

$$F(x, y, z) = \bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z + xy\bar{z} = \Sigma(1, 4, 5, 6)$$

$$= (x + y + z)(x + \bar{y} + z)(x + \bar{y} + \bar{z})(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}) = \Pi(0, 2, 3, 7)$$

**C.3:** Compléter le tableau de Karnaugh de la fonction  $F(x, y, z)$ .

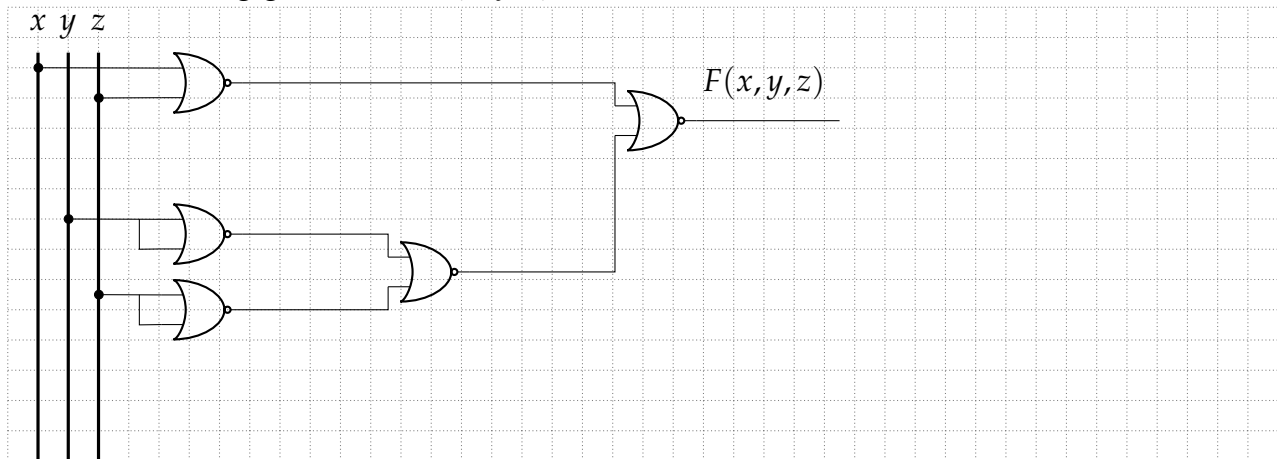
xy	00	01	11	10
z				
0	0	0	1	1
1	1	0	0	1

$F$

**C.4:** Déterminer l'expression simplifiée en produit de sommes de  $F(x, y, z)$

$$\bar{F}(x, y, z) = \bar{x}\bar{z} + yz \Rightarrow F(x, y, z) = (x + z)(\bar{y} + \bar{z})$$

**C.5:** Tracer le logigramme de  $F(x, y, z)$  en utilisant des NOR à 2 entrées.



## C.2 Étude de l'asservissement du vérin électro-hydraulique d'injection

**C.6:** Écrire les équations (1) et (2) décrivant le fonctionnement du solénoïde dans le domaine de Laplace.

$$(1) \Rightarrow F(p) = k_e I(p)$$

$$(2) \Rightarrow (R + Lp)I(p) = U(p)$$

**C.7:** En déduire la fonction de transfert  $G_1(p) = \frac{F(p)}{U(p)}$ .

$$G_1(p) = \frac{F(p)}{U(p)} = \frac{k_e}{R + Lp}$$

**C.8:** Écrire l'équation (3) décrivant le mouvement du tiroir de la servovalve dans le domaine de Laplace.

$$(3) \Rightarrow (m_s p^2 + f_s p + k_s)Z(p) = F(p)$$

**C.9:** En déduire la fonction de transfert  $G_2(p) = \frac{Z(p)}{F(p)}$ .

$$G_2(p) = \frac{Z(p)}{F(p)} = \frac{1}{m_s p^2 + f_s p + k_s}$$

**C.10:** Montrer que la fonction de transfert de l'ensemble {solénoïde, tiroir} est de la forme :

$$T_1(p) = \frac{Z(p)}{U(p)} = \frac{k_0 \omega_0^2}{(1 + \tau_e p)(p^2 + 2\xi \omega_0 p + \omega_0^2)}$$



$$T_1(p) = \frac{Z(p)}{F(p)} \cdot \frac{F(p)}{U(p)} = \frac{\frac{k_e}{Rm_s}}{(1 + \frac{L}{R}p)(p^2 + \frac{f_s}{m_s}p + \frac{k_s}{m_s})}$$

**C.11:** En déduire les expressions de  $(k_0, \omega_0, \tau_e$  et  $\xi)$  en fonction de  $(R, L, k_e, m_s, f_s$  et  $k_s)$ .

$$\begin{cases} k_0\omega_0^2 = k_e/Rm_s \\ \tau_e = L/R \\ \omega_0^2 = k_s/m_s \\ 2\xi\omega_0 = f_s/m_s \end{cases}$$

$$\omega_0 = \sqrt{k_s/m_s} \quad \tau_e = L/R \quad k_0 = k_e/k_s R$$

$$\xi = \frac{0.5f_s}{\sqrt{m_s k_s}}$$

**C.12:** Déterminer les paramètres  $(\tau_e, k_0, \omega_0$  et  $\xi)$  de la fonction de transfert  $T_1(p)$  sachant que  $k_s = 10 \text{ N/m}$ ,  $k_e = 10 \text{ N/A}$ ,  $L = 0.1 \text{ H}$ ,  $m_s = 0.4 \text{ Kg}$ ,  $f_s = 2.8 \text{ N.s/m}$  et  $R = 10 \Omega$ .

$$\tau_e = 0,01\text{s} \quad k_0 = 0,1 \quad \omega_0 = 5 \text{ rd/s} \quad \xi = 0,7$$

**C.13:** En négligeant l'inductance du solénoïde, montrer que la fonction de transfert de l'ensemble {solénoïde, tiroir} est donnée par :

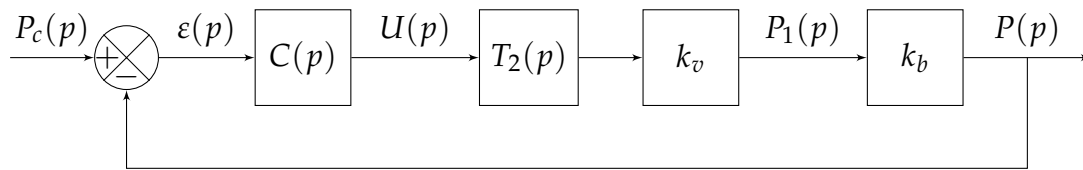
$$T_2(p) = \frac{2.5}{(p^2 + 7p + 25)}$$

$$\text{si } L = 0 \Rightarrow T_2(p) = \frac{0,1 \times 25}{p^2 + 2 \times 0,7 \times 5p + 25} \text{ soit}$$

$$T_2(p) = \frac{2.5}{(p^2 + 7p + 25)}$$

## Commande du système électro-hydraulique

Le système de commande est donné par le schéma fonctionnel suivant :



$P_c(p)$  et  $\varepsilon(p)$  désignent respectivement la consigne et le signal d'erreur. On supposera que le produit :  $k_v \cdot k_b = 1 \text{ N/m}^3$ .

On cherche à concevoir un correcteur  $C(p)$  permettant de garantir au système les performances suivantes :

performances	exigences
stabilité	système stable
précision	erreur statique de position unitaire nulle

**Cas d'un correcteur proportionnel  $C(p) = K$**

**C.14:** Pour quelles valeurs de  $K$ , le système est stable en boucle fermée ?

$p^2 + 7p + 25 + 2,5K = 0$  le système est stable si et seulement si

$$25 + 2,5K > 0 \quad \text{soit } K > -10$$

**C.15:** Déterminer l'erreur statique de position unitaire en fonction de  $K$ , faire l'application numérique pour  $K = 10$ .

$$\text{F.T.B.O. } T(p) = \frac{2,5K}{p^2 + 7p + 25}$$

$$\text{système de classe 0} \Rightarrow \varepsilon_p(\infty) = \frac{25}{25 + 2,5K}$$

$$\text{pour } K = 10 \Rightarrow \varepsilon_p(\infty) = 0,5$$

**C.16:** Pour cette même valeur de  $K$  calculer le dépassement et le temps de pic.

$$\begin{aligned} \text{F.T.B.F.} \quad H(p) &= \frac{25}{p^2 + 7p + 50} \\ \omega_0 &= \sqrt{50} \text{ rad/s} \quad \xi = \frac{7}{2\sqrt{50}} = 0,5 \\ D\% &= 100 \exp\left(-\frac{\pi \cdot 0,5}{\sqrt{1 - 0,5^2}}\right) = 16,3\% \\ t_{pic} &= \frac{\pi}{\sqrt{50(1 - 0,5^2)}} = 0,51 \text{ s} \end{aligned}$$

**C.17:** Conclure quant aux performances obtenues par ce correcteur.

Correcteur non performant car l'erreur statique de position unitaire n'est pas nulle.

**Cas d'un correcteur intégral**  $C(p) = \frac{90}{p}$

**C.18:** Avec ce correcteur peut-on assurer une erreur statique de position nulle? Conclure quant à l'efficacité de ce correcteur pour ce système.

$$\text{F.T.B.O. : } T(p) = \frac{225}{p(p^2 + 7p + 25)}$$

l'introduction d'une intégration dans la boucle entrave à la stabilité du système, d'où la nécessité de la vérifier en premier lieu.

L'équation caractéristique est  $p^3 + 7p^2 + 25p + 225 = 0$

— la première condition de Routh est vérifiée.

— le tableau de Routh :

$p^3$	1	25
$p^2$	7	225
$p^1$	-7,14	
$p^0$	225	

le système est donc instable avec ce correcteur intégral

Comme la stabilité n'est pas vérifiée on ne peut tolérer ce correcteur.

**Cas d'un correcteur**  $C(p) = K_1\left(\frac{p + K_2}{p}\right)$  où  $K_1$  et  $K_2$  sont des constantes positives

**C.19:** De quel type de correcteur s'agit-il? Donner ses paramètres caractéristiques.

$C(p) = K_1\left(\frac{p + K_2}{p}\right) = K_1\left(1 + \frac{K_2}{p}\right)$  il s'agit d'un correcteur PI avec  $K_p = K_1$  et  $K_i = K_2$   
ou bien  $C(p) = K_p + \frac{1}{\tau_i p}$  ce qui fait  $K_p = K_1$  et  $\frac{1}{\tau_i} = K_1 K_2$

**C.20:** Étudier la stabilité du système en boucle fermée en fonction de  $K_1$  et  $K_2$ , en déduire le domaine de stabilité dans le plan  $K_2 = f(K_1)$ ;

$$\text{F.T.B.O. : } T(p) = \frac{2,5K_1(p + K_2)}{p(p^2 + 7p + 25)}$$

$$\text{L'équation caractéristique : } p^3 + 7p^2 + (25 + 2,5K_1)p + 2,5K_1K_2 = 0$$

La condition (1) de Routh :

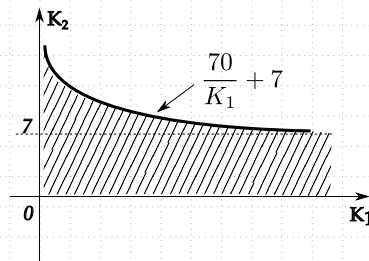
$$K_1K_2 > 0 ; 25 + 2,5K_1 > 0 \Rightarrow K_1 > 0 ; K_2 > 0 \text{ condition déjà vérifiée.}$$

Le tableau de Routh :

$p^3$	1	$25 + 2,5K_1$
$p^2$	7	$2,5K_1K_2$
$p^1$	$25 + 2,5K_1 - 0,3571K_1K_2$	
$p^0$	$2,5K_1K_2$	

Le système est stable si et seulement si :

$$25 + 2,5K_1 - 0,3571K_1K_2 > 0 \Rightarrow K_2 < \frac{70}{K_1} + 7$$



**C.21:** Déterminer les erreurs statiques de position et de vitesse unitaires.

$$\text{F.T.B.O. : } T(p) = \frac{2,5K_1(p + K_2)}{p(p^2 + 7p + 25)}$$

$$\text{Le système est de classe 1} \Rightarrow \varepsilon_p(\infty) = 0$$

$$\varepsilon_v(\infty) = \frac{10}{K_1K_2}$$

**C.22:** Conclure quant aux performances garanties par ce correcteur dans ce cas de figure.

Ce correcteur satisfait les performances recherchées.