

Concours Mathématiques et Physique  
Correction de l'Epreuve de Mathématiques II

Partie I: Etude de  $R(I_n)$ .

1.  $A\bar{A} = I_n$ .
2. (a)  $M\bar{C}_\alpha = M(\bar{\alpha}\bar{M} + \alpha I_n) = \bar{\alpha}M\bar{M} + \alpha M = \alpha M + \bar{\alpha}I_n = C_\alpha$ .  
(b)  $\det(C_\alpha) = \det(\alpha(M + \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}I_n)) = \alpha^n \det(M + \exp(-2i\theta)I_n) = \alpha^n P_M(-\frac{\bar{\alpha}}{\alpha})$ .  
(c) Si on pose  $\alpha = |\alpha| \exp(i\theta)$ , alors  $\frac{\bar{\alpha}}{\alpha} = \exp(-2i\theta)$ . Comme  $P_M$  admet au plus  $n$  racines donc il existe  $\theta_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $P_M(-\exp(-2i\theta_0)) \neq 0$ , pour  $\beta = \exp(i\theta_0)$  on a  $\det(C_\beta) \neq 0$  c'est à dire  $C_\beta$  est inversible.  
(d)  $C_\beta \bar{C}_\beta^{-1} = M$ .
3. " $\subset$ " d'après 2).  
" $\supset$ " d'après 1).
4. a) évident.  
b) Si  $P\bar{P}^{-1} = -I_n$ , alors  $\bar{P} = -P$  et par conséquent  $P = iQ$  avec  $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ . La réciproque est évidente. D'où  $\{P \in GL_n(\mathbb{C}); P\bar{P}^{-1} = -I_n\} = iGL_n(\mathbb{R}) = \{iQ; Q \in GL_n(\mathbb{R})\}$ .

Partie II: Etude de  $R(0)$ .

- A) (a) évident.  
(b) Il suffit de remarquer que  $rg(M)$  est le nombre maximal de colonnes libres de  $M$ , donc d'après 1)  $rg(M) = rg(\bar{M})$ .
- B) 1)  $M\bar{M} = 0$  donne  $Im\bar{M} \subset \ker M$ .  
2)  $rg(M) = rg(\bar{M}) \leq \dim \ker M = n - rg(M)$  d'où  $rg(M) \leq \frac{n}{2}$ .  
3) Si on note  $B_r = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  alors on a  
 $b_{l, n-r+l} = 1$  si  $1 \leq l \leq r$  et  $b_{i, j} = 0$  si non.  
On a  $B_r^2 = (\sum_{k=1}^n b_{ik}b_{kj})_{1 \leq i, j \leq n}$ .  
si  $b_{ik} \neq 0$ , alors  $1 \leq i \leq r$ ,  $k = n - r + i$  et  $b_{i, n-r+i} = 1$ .  
Dans ce cas  $\sum_{k=1}^n b_{ik}b_{kj} = b_{i, n-r+i}b_{n-r+i, j} = b_{n-r+i, j}$ .  
Or  $i \geq 1$  donc  $n - r + 1 \leq n - r + i$  ce qui donne  $b_{n-r+i, j} = 0$ . D'où  $B_r^2 = 0$ .  
4) a) Il suffit de remarquer que  $rg(\bar{M}) = rg(M) = r$ .  
b) Théorème de la base incomplète.  
c)  $\forall 1 \leq i \leq r$   $X_i \in Im(\bar{M})$  alors il existe  $Z_i$  tel que  $X_i = \bar{M}Z_i$   
pour tout  $1 \leq j \leq r$  on pose  $X_{n-r+j} = \bar{Z}_j$  pour tout on a  $MX_{n-r+j} = M\bar{Z}_j = \bar{M}\bar{Z}_j = \bar{X}_j$  pour tout  $1 \leq j \leq r$ .



- d) Soit  $\alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{C}$  tel que  $\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i = 0$  on applique  $M$  on aura  $\sum_{i=n-r+1}^n \alpha_i M X_i = 0$  soit  $\sum_{j=1}^r \alpha_{n-r+j} M X_{n-r+j} = 0$  ce qui donne  $\sum_{j=1}^r \bar{\alpha}_{n-r+j} \overline{M X_{n-r+j}} = 0$  d'où  $\sum_{j=1}^r \bar{\alpha}_{n-r+j} X_j = 0$  d'après b) or  $(X_1, \dots, X_r)$  est libre donc  $\bar{\alpha}_{n-r+j} = 0$  pour tout  $1 \leq j \leq r$  et par suite  $\alpha_i = 0$  pour tout  $n-r+1 \leq i \leq n$ . Revenons à l'équation de départ on a  $\sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i X_i = 0$  or  $(X_1, \dots, X_{n-r})$  est libre donc  $\alpha_i = 0$  pour tout  $1 \leq i \leq n-r$  ce qui donne  $\alpha_i = 0$  pour tout  $1 \leq i \leq n$  et donc  $(X_1, \dots, X_n)$  est libre. D'après A)1)  $(\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n)$  est une base et par conséquent la matrice  $P$  dont les colonnes sont  $\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n$  est inversible.
- e) Par définition de  $P$ , on a  $P e_i = \overline{X}_i$  où  $(e_1, \dots, e_n)$  désigne la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ . On a  $\overline{P} e_i = X_i$  et donc  $\overline{P}^{-1} X_i = e_i$ . Alors  $P B_r \overline{P}^{-1} X_i = P B_r e_i$  pour  $1 \leq i \leq n$ .
- 1<sup>er</sup> cas: si  $1 \leq i \leq n-r$  on a  $B_r e_i = 0$  et par suite  $P B_r \overline{P}^{-1} X_i = 0$ .
- 2<sup>er</sup> cas: si  $n-r \leq i \leq n$  alors  $i = n-r+j$  avec  $1 \leq j \leq r$  donc  $P B_r \overline{P}^{-1} X_i = P B_r e_i = P B_r e_{n-r+j} = P e_j = \overline{X}_j$ .
- D'autre part comme  $(X_1, \dots, X_{n-r})$  est une base de  $\ker M$  alors  $M X_i = 0$  pour tout  $1 \leq i \leq n-r$ . si  $n-r+1 \leq i \leq n$  on a  $M X_i = M X_{n-r+j}$  avec  $1 \leq j \leq r$  d'après 3) b)  $M X_i = \overline{X}_j$  d'où  $M$  et  $P B_r \overline{P}^{-1} \text{co}\overline{A}^{-1}$  coïncident sur  $(X_1, \dots, X_n)$  qui est une base de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  c'est à dire  $M = P B_r \overline{P}^{-1}$ .

5) " $\subset$ " évident.

" $\supset$ " soit  $M = P B_r \overline{P}^{-1}$  alors  $M \overline{M} = P B_r \overline{P}^{-1} \overline{P} B_r P^{-1} = P B_r^2 P^{-1} = 0$  (par B)3a)).

6) Exemple:  $n = 2$  donne  $0 \leq r \leq 1$ .

si  $r = 0$  c'est à dire  $B_0 = 0$  et donc  $M = 0$ .

si  $r = 1$  alors  $M = P \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overline{P}^{-1}$  où  $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  avec  $ad - bc \neq 0$ .

Alors  $P^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$  par suite

$M = P \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overline{P}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} -a\bar{c} & |a|^2 \\ -|c|^2 & c\bar{a} \end{pmatrix}$  Remarquons que si  $M \in R(0)$  alors  $M \overline{M} = 0$

et donc pour tout  $\alpha \in \mathbb{C}$   $(\alpha M)(\overline{\alpha M}) = |\alpha|^2 M \overline{M} = 0$  donc  $\alpha M \in R(0)$  et donc si  $\alpha \in \mathbb{C}^*$  on a  $M \in R(0)$  si et seulement si  $\alpha M \in R(0)$ .

donc  $R(0) = \left\{ \begin{pmatrix} -a\bar{c} & |a|^2 \\ -|c|^2 & c\bar{a} \end{pmatrix}, a, c \in \mathbb{C} \right\}$ .

### Partie III: Caractérisation des matrices co-diagonalisables.

A)  $M = P D \overline{P}^{-1}$ .

1)  $M \overline{M} = P D \overline{P}^{-1} \overline{P} \overline{D} P^{-1} = P D \overline{D} P^{-1}$  d'où

$$M \overline{M} = P \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & |\lambda_2|^2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

par suite  $M \overline{M}$  est diagonalisable.

2) d'après la question précédente on a  $sp(M \overline{M}) \subset \mathbb{R}_+$ .

3) Comme  $M = P D \overline{P}^{-1}$  donc la matrice  $M$  et  $D$  sont équivalentes donc  $rg(M) = rg(D) = rg(D \overline{D}) = rg(P(D \overline{D}) \overline{P}^{-1}) = rg(M \overline{M})$ .

B) 1) Comme  $M \overline{M}$  est diagonalisable à valeurs propres positives, alors il existe  $Q$  inversible et  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_k \geq 0$  tel que  $M \overline{M} = Q D_1 Q^{-1}$ , où

$$D_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{n_2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_k I_{n_k} \end{pmatrix}$$

2) Posons que  $B = Q^{-1} M \overline{Q}$

a)  $B \overline{B} = Q^{-1} M \overline{Q} \overline{Q}^{-1} \overline{M} Q = Q^{-1} M \overline{M} Q = Q^{-1} Q D_1 Q^{-1} Q = D_1$ .

$\overline{B} B = \overline{Q}^{-1} \overline{M} Q Q^{-1} M \overline{Q} = \overline{Q}^{-1} \overline{M} M \overline{Q} = \overline{Q}^{-1} \overline{Q} \overline{D_1} \overline{Q}^{-1} \overline{Q} = \overline{D_1}$  or  $D_1 = \overline{D_1}$  donc  $B \overline{B} = \overline{B} B = D_1$ .

b)  $B D_1 = B(\overline{B} B) = (B \overline{B}) B = (\overline{B} B) B = D_1 B$

c) Soit  $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$   $D_1 = (\lambda_1 I_{n_1}, \dots, \lambda_k I_{n_k}) = (d_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$   
l'égalité  $B D_1 = D_1 B$  donne  $B D_1 = \left( \sum_{k=1}^n b_{ik} d_{kj} \right)_{1 \leq i, j \leq n} = (b_{ij} d_{jj})_{1 \leq i, j \leq n}$

$D_1 B = \left( \sum_{k=1}^n d_{ik} b_{kj} \right)_{1 \leq i, j \leq n} = (b_{ij} d_{ii})_{1 \leq i, j \leq n}$

$B D_1 = D_1 B$  équivaut à  $b_{ij}(d_{jj} - d_{ii}) = 0$  pour tout  $1 \leq i, j \leq n$  équivaut à  $b_{ij} = 0$  pour tout  $1 \leq i, j \leq n$  et  $d_{ii} \neq d_{jj}$  équivaut à  $b_{ij} = 0$  pour tout  $(i, j) \in [[1, n]]^2 \setminus \bigcup_{j=1}^k [[n_{j-1}, n_j]]^2$  avec  $(n_0 = 0)$

d'où

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & B_k \end{pmatrix}$$

où  $B_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{C})$  pour tout  $1 \leq i \leq k$ .

d) d'après 2)a) on a  $B \overline{B} = \overline{B} B = D_1$  c'est à dire ( par 2)c))  $B_i \overline{B}_i = \lambda_i I_{n_i}$  pour tout  $1 \leq i \leq k$ .

Si  $\lambda_k > 0$  alors pour tout  $1 \leq i \leq k$ , on a  $\lambda_i > 0$  et par suite

$\left( \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} B_i \right) \overline{\left( \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} B_i \right)} = I_{n_i}$  pour tout  $1 \leq i \leq k$ .

e) Si  $\lambda_k = 0$ .

i) Pour tout  $1 \leq i \leq k-1$ , on a  $\lambda_i > 0$  et par suite

$\left( \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} B_i \right) \overline{\left( \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} B_i \right)} = I_{n_i}$ .

ii) Pour  $i = k$  on a  $B_k \overline{B}_k = 0$ .



iii) Montrons que  $rg(B_k) = 0$  et par suite  $B_k = 0$

on a  $rg(B) = \sum_{i=1}^k rg(B_i) = rg(M) = rg(M\overline{M}) = rg(D_1) = \sum_{i=1}^{k-1} n_i$ .

D'autre part  $\sum_{i=1}^k rg(B_i) = rg(B_k) + \sum_{i=1}^{k-1} rg(B_i) = rg(B_k) + \sum_{i=1}^{k-1} n_i = \sum_{i=1}^{k-1} n_i$   
alors  $rg(B_k) = 0$  et par suite  $B_k = 0$ .

f) Si  $\lambda_k > 0$ , alors pour tout  $1 \leq i \leq k$  on a  $\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} B_i\right) \overline{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} B_i\right)} = I_{n_i}$ . En utilisant  $I$ ,  
 $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} B_i = P_i \overline{P_i}^{-1}$  où  $P_i \in Gl_{n_i}(\mathbb{C})$  ou encore  $B_i = P_i(\sqrt{\lambda_i} I_{n_i}) \overline{P_i}^{-1}$  ce qui donne

$$B = \begin{pmatrix} P_1(\sqrt{\lambda_1} I_{n_1}) \overline{P_1}^{-1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & P_2(\sqrt{\lambda_2} I_{n_2}) \overline{P_2}^{-1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & P_k(\sqrt{\lambda_k} I_{n_k}) \overline{P_k}^{-1} \end{pmatrix} =$$

$$P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} I_{n_1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} I_{n_2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \sqrt{\lambda_k} I_{n_k} \end{pmatrix} \overline{P}^{-1} \text{ où}$$

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & P_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & P_k \end{pmatrix} \in Gl_n(\mathbb{C}) \text{ par suite } B = P D \overline{P}^{-1} \text{ avec}$$

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} I_{n_1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} I_{n_2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \sqrt{\lambda_k} I_{n_k} \end{pmatrix}$$

Si  $\lambda_k = 0$  alors  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_{k-1} > 0$  et par suite, (d'après ce qui précède) on a  
 $B_i = P_i(\sqrt{\lambda_i} I_{n_i}) \overline{P_i}^{-1}$  pour tout  $1 \leq i \leq k-1$  et  $B_k = 0 = I_{n_k} 0 \overline{I_{n_k}}^{-1}$ . Ce qui donne

$$B = \begin{pmatrix} P_1(\sqrt{\lambda_1} I_{n_1}) \overline{P_1}^{-1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & P_2(\sqrt{\lambda_2} I_{n_2}) \overline{P_2}^{-1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & P_{k-1}(\sqrt{\lambda_{k-1}} I_{n_{k-1}}) \overline{P_{k-1}}^{-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & I_{n_k} 0 \overline{I_{n_k}}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\text{si on pose } P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & P_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & P_{k-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & I_{n_k} \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{n_2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_{k-1} I_{n_{k-1}} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0_{n_k} \end{pmatrix} \text{ on a bien } B = PD_2\overline{P}^{-1}.$$

C) "  $\Rightarrow$  " conséquence de A).

"  $\Leftarrow$  " conséquence de B)

en effet si  $M\overline{M}$  est diagonalisable,

$sp(M\overline{M}) \subset \mathbb{R}_+$  et  $rg(M\overline{M}) = rg(M)$  on a  $B = PD_2\overline{P}^{-1} = Q^{-1}M\overline{Q} \Rightarrow M = (QP)D_2(\overline{Q}\overline{P})^{-1}$  signifie que  $M$  est co-diagonalisable.

### Exemple

1)  $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  donc  $A\overline{A} = 0$

on a  $rg(A\overline{A}) = 0 \neq rg(A) = 1$  donc  $A$  n'est pas co-diagonalisable.

$A$  est nilpotente non nulle donc non diagonalisable.

2)  $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$  donc  $A\overline{A} = I_2$   
donc  $A$  est co-diagonalisable.

$sp(A) = \{i\}$  et  $A$  n'est pas une homothétie donc  $A$  non diagonalisable.

3)  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  donc  $A\overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

on a  $sp(A) = \{2i, -2i\}$  donc  $A$  n'est pas co-diagonalisable.

$A$  admet deux valeurs propres distinctes donc  $A$  est diagonalisable.