



Concours Mathématiques et Physique Epreuve de Mathématiques II

Session 2020	Date : 21/07/2020	Heure : 8H	Durée : 3 heures
--------------	-------------------	------------	------------------

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Notations et rappels :

- Dans tout le problème, $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et $M_n(\mathbb{K})$ est l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans \mathbb{K} . I_n est la matrice identité de $M_n(\mathbb{K})$.
- On note $M_{n,1}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices à une colonne et à coefficients dans \mathbb{K} . $M_{n,1}(\mathbb{K})$ sera identifié à \mathbb{K}^n .
- $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 d'une variable réelles et à valeurs dans \mathbb{C}^n .
- $S_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), {}^tA = A\}$ et $AS_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), {}^tA = -A\}$ où tA désigne la matrice transposée de A .
- Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique définie positive si $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $\forall U \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, ${}^tUAU > 0$. On note S_n^{++} l'ensemble des matrices symétriques définies positives.
- Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si ${}^tAA = I_n$.
- On rappelle que, pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$, l'exponentielle de M est définie par $\exp(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}$.
- Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. La fonction $t \mapsto \exp(tM)$ est C^1 sur \mathbb{R} et sa dérivée est donnée par

$$t \mapsto M \exp(tM) = \exp(tM) M,$$

de plus, $\exp(tM) \exp(-tM) = I_n$, pour tout réel t .

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : X'(t) = AX(t), t \in \mathbb{R}.$$

On note S_E le sous-espace vectoriel de $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ formé des solutions de (E) .

On rappelle également que si $X_0 \in \mathbb{C}^n$, alors l'application $\varphi : t \mapsto e^{tA} X_0$ est l'unique solution de (E) telle que $\varphi(0) = X_0$. On appelle φ la solution de problème de Cauchy.

Questions préliminaires (4 points) :

1. Critère de diagonalisation

Soient $M \in M_n(\mathbb{C})$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.

- (a) Montrer que la suite $\left(\ker(M - \alpha I_n)^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion et qu'il existe un entier naturel p tel que

$$\forall k \geq p, \ker(M - \alpha I_n)^k = \ker(M - \alpha I_n)^p$$

- (b) Soit $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\ker(M - \alpha I_n)^{k_0} = \ker(M - \alpha I_n)^{k_0+1}$.

Montrer que : $\forall k \geq k_0, \ker(M - \alpha I_n)^k = \ker(M - \alpha I_n)^{k_0}$.

- (c) Justifier que $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)} \ker(M - \lambda I_n)^{m_\lambda}$, où m_λ est la multiplicité de la valeur propre λ .

- (d) En déduire que M est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$, si et seulement si $\forall \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M), \ker(M - \lambda I_n) = \ker(M - \lambda I_n)^2$.

2. Matrice associée à un produit scalaire

Soit $(\mathbb{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de \mathbb{E} et la matrice $M = (\langle e_i, e_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$.

- (a) Montrer que : $\forall (u, v) \in \mathbb{E}^2, \langle u, v \rangle = {}^t U M V$ avec $U = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $V = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$.

On rappelle que si $u = \sum_{k=1}^n u_k e_k$ alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$.

- (b) Montrer alors que $M \in S_n^{++}$.

3. Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall U \in \mathbb{R}^n, {}^t U S U = 0$.

- (a) Montrer que toute valeur propre de S est nulle.

- (b) En déduire que $S = 0$.

Partie I (7,5 points) : Cas où A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ et à valeurs propres imaginaires

A – Exemple

On considère $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. Sans diagonaliser A , calculer $(tA)^{2k}$ et $(tA)^{2k+1}$, $k \in \mathbb{N}$.
2. Déduire e^{tA} , $t \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que, dans ce cas, toutes les solutions de (E) sont bornées sur \mathbb{R} .

B – Généralisation

1. On suppose que A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ et que $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{ia, a \in \mathbb{R}\}$.

- (a) Soient $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et V un vecteur propre associé à λ .

Montrer soigneusement que $e^{tA}V = e^{\lambda t}V$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

- (b) Soit (V_1, \dots, V_n) une base de \mathbb{C}^n formée par des vecteurs propres de A et on considère les fonctions $\varphi_k : t \mapsto e^{tA} V_k$, $1 \leq k \leq n$. Montrer que $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de S_E .
- (c) En déduire que les solutions de (E) sont bornées sur \mathbb{R} .
2. Dans cette question, on suppose que toutes les solutions de (E) sont bornées sur \mathbb{R} . Soient λ une valeur propre complexe de A et V_0 un vecteur propre associé à λ .
- (a) En considérant la solution φ de (E) telle que $\varphi(0) = V_0$, montrer que $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$.
- (b) Soient $w \in \ker(A - \lambda I_n)^2$ et $v = (A - \lambda I_n)w$.
- Montrer que $e^{tA}w = e^{\lambda t}(w + tv)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
 - Montrer que $\ker(A - \lambda I_n)^2 \subset \ker(A - \lambda I_n)$.
 - En déduire que A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.

C – Application

On munit \mathbb{C}^n de la norme suivante : Pour $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$, $\|U\| = \sqrt{t\bar{U}U}$, où $\bar{U} = \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \vdots \\ \bar{u}_n \end{pmatrix}$.

On suppose ici que $A \in AS_n(\mathbb{R})$.

- Montrer que e^A est une matrice orthogonale.
- Soient $t \in \mathbb{R}$, $U \in \mathbb{C}^n$. Calculer $\|e^{tA}U\|^2$.
- Conclure que A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ et que ses valeurs propres sont imaginaires.

Partie II (5 points) : Cas où les valeurs propres de A sont de parties réelles strictement négatives

On considère une norme quelconque $\|\cdot\|$ sur \mathbb{C}^n .

- Montrer que si $\forall X \in S_E$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)\| = 0$ alors $\forall \lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$.
- On note $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres complexes distinctes de A , de multiplicités respectives m_1, \dots, m_r .

On suppose que, pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$.

Soit $U \in \mathbb{C}^n$. On rappelle que $U = U_1 + \dots + U_r$, où $U_i \in \ker(A - \lambda_i I_n)^{m_i}$, $\forall i \in \{1, \dots, r\}$.

(a) Vérifier que pour tout réel t :

$$e^{t(A - \lambda_i I_n)} U_i = \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda_i I_n)^k U_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\}.$$

(b) En déduire que pour tout réel t :

$$e^{tA} U_i = e^{t\lambda_i} \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda_i I_n)^k U_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\}.$$

(c) Justifier l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$\|(A - \lambda_i I_n)^k U_i\| \leq C \|U_i\|, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \text{ et } \forall k \in \{0, \dots, m_i - 1\}.$$

(d) Montrer alors que pour tout réel t :

$$\|e^{tA}U_i\| \leq C e^{t\operatorname{Re}(\lambda_i)} (1+|t|)^{m_i-1} \|U_i\|, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\},$$

et déduire que :

$$\|e^{tA}U\| \leq C(1+|t|)^{n-1} \left(\sum_{i=1}^r e^{t\operatorname{Re}(\lambda_i)} \right) \max_{1 \leq i \leq r} \|U_i\|.$$

(e) Conclure que toute solution de (E) tend vers 0 en $+\infty$.

3. Vitesse de convergence

On suppose qu'il existe un réel $a > 0$ tel que $\operatorname{Re}(\lambda) < -a$, $\forall \lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

(a) Montrer que la fonction $t \mapsto (1+|t|)^{n-1} e^{t\operatorname{Re}(\lambda)} e^{ta}$ est bornée sur \mathbb{R}_+ .

(b) En déduire que si X est une solution de (E) alors il existe $C' > 0$ tel que :

$$\|X(t)\| \leq C' e^{-at}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Partie III (3,5 points) : Application à l'équation de Lyapunov

Dans cette partie, on suppose que la matrice A est à valeurs propres complexes de parties réelles strictement négatives.

\mathbb{R}^n sera muni de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne associée $\|\cdot\|$.

Pour U, V dans \mathbb{R}^n . On pose

$$\Phi(U, V) = \int_0^{+\infty} \langle e^{tA}U, e^{tA}V \rangle dt.$$

1. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que $\Phi(U, V)$ est bien défini.

2. Montrer que Φ est un produit scalaire sur \mathbb{R}^n .

3. Montrer que la fonction $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $U \mapsto \Phi(U, U)$ est différentiable et que

$$dq(U).H = 2\Phi(U, H), \quad \forall (U, H) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

4. Soit $U \in \mathbb{R}^n$. Calculer la dérivée de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \|e^{tA}U\|^2$.

5. En déduire que $2\Phi(U, AU) = -\|U\|^2$, $\forall U \in \mathbb{R}^n$.

6. Soit $B = (\Phi(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ avec (e_1, \dots, e_n) est la base canonique de \mathbb{R}^n .

(a) Montrer que : ${}^tUBAU + {}^tU^tABU = -{}^tUU$, $\forall U \in \mathbb{R}^n$.

(b) Conclure que $B \in S_n^{++}$ et que ${}^tAB + BA = -I_n$ (appelée équation de Lyapunov).

Fin de l'énoncé