



Concours Mathématiques et Physique Corrigé de l'épreuve de Mathématiques II

I.1.1. $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est le noyau de l'endomorphisme $M \mapsto M - {}^tM$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est le noyau de l'endomorphisme $M \mapsto M + {}^tM$ donc $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On a $A = {}^tA = -A$ donc $A = 0$. On a :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad M = \frac{M + {}^tM}{2} + \frac{M - {}^tM}{2}.$$

Mais $\frac{M + {}^tM}{2} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\frac{M - {}^tM}{2} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

I.1.2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a $\langle A, B \rangle = \text{Tr}({}^tAB) = \text{Tr}({}^t({}^tAB)) = \text{Tr}({}^tBA) = \langle B, A \rangle$. Soient $A_1, A_2, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a

$$\langle \alpha A_1 + A_2, B \rangle = \text{Tr}({}^t(\alpha A_1 + A_2)B) = \text{Tr}((\alpha {}^tA_1 + {}^tA_2)B) = \alpha \text{Tr}({}^tA_1B) + \text{Tr}({}^tA_2B) = \alpha \langle A_1, B \rangle + \langle A_2, B \rangle.$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note C_{ij} les coefficients de la matrice tAA . Pour tout $1 \leq i \leq n$, on a

$$C_{ii} = \sum_{j=1}^n {}^tA_{ij}A_{ji} = \sum_{j=1}^n A_{ji}^2. \text{ Ainsi } \langle A, A \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ji}^2 \geq 0 \text{ et } \langle A, A \rangle = 0 \Leftrightarrow A = 0. \text{ Alors, } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

I.1.3. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$,

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(AB) = \text{Tr}({}^t(AB)) = \text{Tr}({}^tB {}^tA) = -\text{Tr}(BA) = -\text{Tr}(AB) = -\langle A, B \rangle.$$

Alors, $\langle A, B \rangle = 0$ et par suite, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^\perp$.

Mais $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^\perp$ donc $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^\perp$.

I.2.1. $I_n \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et si $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ alors U est inversible et $U^{-1} = {}^tU$. Soit $(U_1, U_2) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})^2$. On a ${}^t(U_1U_2^{-1})(U_1U_2^{-1}) = U_2 {}^tU_1U_1 {}^tU_2 = U_2 {}^tU_2 = I_n$ donc $U_1U_2^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Par conséquent, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

I.2.2. Puisque $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, les colonnes de U sont des vecteurs unitaires dans \mathbb{R}^n . Ainsi, pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ on a $\sum_{i=1}^n U_{ij}^2 = 1$ donc pour tous $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $|U_{ij}| \leq 1$.

I.2.3. Pour tout $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\sup_{1 \leq i, j \leq n} |U_{ij}| \leq 1$. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie donc toutes les normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont équivalentes et alors $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est borné dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère les applications

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), & \ell : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \\ A &\longmapsto {}^tAA & A &\longmapsto ({}^tA, A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (A, B) &\longmapsto AB \end{aligned}$$

On a, $f = b \circ \ell$. Mais ℓ est linéaire et b est bilinéaire donc elles sont continues. Alors, f est continue. D'autre part, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{I_n\})$ et $\{I_n\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

I.2.4.a. On a pour tout $1 \leq i \leq n$ $(M_X)_{ii} = x_i^2$ et donc $\text{Tr}(M_X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$. Les vecteurs colonnes

de la matrice M_X sont colinéaires au vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, par suite $\text{rg}(M_X) \leq 1$. De plus M_X

est non nulle puisque sa trace est non nulle donc $\text{rg}(M_X) = 1$.

I.2.4.b. On a ${}^t(M_X) = {}^t(X^t X) = X^t X = M_X$ donc M_X est symétrique réelle et alors M_X est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Puisque M_X est de rang 1, 0 est une valeur propre de M_X de multiplicité égale au moins à $n - 1$. La somme des valeurs propres de M_X est égale à sa trace = 1 donc 1 est aussi une valeur propre de M_X . Par conséquent, M_X est semblable à la matrice diagonale $D = \text{diag}(0, 0, \dots, 0, 1)$.

I.2.4.c. On a ${}^t U_X U_X = {}^t(I_n - 2M_X)(I_n - 2M_X) = (I_n - 2M_X)(I_n - 2M_X) = I_n - 4M_X + 4M_X^2$.

Mais $M_X^2 = X^t X X^t X$ et ${}^t X X = (X|X) = 1$ donc $M_X^2 = M_X$ et par suite, ${}^t U_X U_X = I_n$. La matrice U_X est alors orthogonale.

Autrement : Il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $M_X = P \text{diag}(0, 0, \dots, 0, 1) {}^t P$ donc $U_X = P \text{diag}(1, 1, \dots, 1, -1) {}^t P$. Par suite U_X est produit des trois matrices orthogonales donc elle est orthogonale.

De plus $U_X^2 = I_n$ par suite U_X représente une symétrie orthogonale.

I.3.1. En utilisant la continuité de l'application linéaire $A \longrightarrow {}^t A$ on obtient

$$e^{tM} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{({}^t M)^k}{k!} = \lim_{N \rightarrow +\infty} {}^t \sum_{k=0}^N \frac{(M)^k}{k!} = {}^t(e^M)$$

En utilisant la continuité de l'application linéaire $A \longrightarrow PAP^{-1}$ on obtient

$$e^{PMP^{-1}} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{(PMP^{-1})^k}{k!} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{PM^k P^{-1}}{k!} = P \left(\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{M^k}{k!} \right) P^{-1} = P e^M P^{-1}.$$

I.3.2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. Il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ des réels distincts et $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ tels que

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & 0 \\ & \lambda_2 I_{n_2} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_k I_{n_k} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Par conséquent, on a

$$e^A = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} I_{n_1} & & 0 \\ & e^{\lambda_2} I_{n_2} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & e^{\lambda_k} I_{n_k} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Donc e^A est diagonalisable. Soit Q un polynôme interpolateur de Lagrange tel que $Q(e^{\lambda_i}) = \lambda_i$ pour tout $1 \leq i \leq k$. Ainsi on obtient

$$Q(e^A) = PQ \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} I_{n_1} & & 0 \\ & e^{\lambda_2} I_{n_2} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & e^{\lambda_k} I_{n_k} \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} Q(e^{\lambda_1}) I_{n_1} & & 0 \\ & Q(e^{\lambda_2}) I_{n_2} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & Q(e^{\lambda_k}) I_{n_k} \end{pmatrix} P^{-1} = A.$$

I.3.3. Soit S une matrice symétrique. On a ${}^t(e^S) = e^{tS} = e^S$ donc $e^S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, S est diagonalisable. D'après la question précédente, e^S est diagonalisable et ses valeurs propres sont les exponentielles des valeurs propres de S donc sont toutes positives. Par suite e^S est symétrique positive.

I.3.4. Soit A une matrice antisymétrique. On a ${}^tAA = -A^2 = A{}^tA$. Par conséquent, ${}^t(e^A)e^A = e^{tA}e^A = e^{(tA+A)} = e^0 = I_n$ donc $e^A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

II.1.1. Soient $D = \text{diag}(D_{11}, D_{22}, \dots, D_{nn})$ une matrice diagonale avec $D_{ii} \geq 0$, pour tout

$i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et $U = (U_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On a $\text{Tr}(UD) = \sum_{i=1}^n D_{ii} U_{ii}$. Mais, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$-1 \leq U_{ii} \leq 1 \text{ donc } \text{Tr}(UD) \leq \sum_{i=1}^n D_{ii} = \text{Tr}(D).$$

II.1.2. S est symétrique réelle donc il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(D_{11}, D_{22}, \dots, D_{nn})$ telles que $S = PD{}^tP$. De plus, S est positive donc, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $D_{ii} \geq 0$. Mais, pour tout $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, ${}^tPUP \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ donc $\text{Tr}(US) = \text{Tr}({}^tPUPD) \leq \text{Tr}(D) = \text{Tr}(S)$.

II.2.1. On considère les applications

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow M_n(\mathbb{R}), & \ell : M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e^{xA} & M &\longmapsto \text{Tr}(MS) \end{aligned}$$

On sait que g est dérivable sur \mathbb{R} et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = Ae^{xA}$. Mais $f = \ell \circ g$ et ℓ est linéaire donc f est dérivable sur \mathbb{R} et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \ell(g'(x)) = \text{Tr}(Ae^{xA}S).$$

II.2.2. Soit $x \in \mathbb{R}$. xA est antisymétrique donc $e^{xA} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, et alors on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \text{Tr}(e^{xA}S) \leq \text{Tr}(S) = f(0).$$

Par conséquent, f possède un maximum en 0 donc $f'(0) = 0$ et alors $\text{Tr}(AS) = 0$. On obtient,

$$\langle S, A \rangle = \langle A, S \rangle = \text{Tr}({}^tAS) = -\text{Tr}(AS) = 0.$$

II.2.3. D'après ce qui précède, pour tout $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $\langle S, A \rangle = 0$. Alors, $S \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

II.2.4. On a $\text{Tr}(U_X S) = \text{Tr}(S) - 2\text{Tr}(M_X S) = \text{Tr}(S) - 2\text{Tr}(SX^tX)$, mais $SX = \lambda X$ donc $\text{Tr}(U_X S) = \text{Tr}(S) - 2\lambda \text{Tr}(M_X) = \text{Tr}(S) - 2\lambda$.

II.2.5. $U_X \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ donc $2\lambda = \text{Tr}(S) - \text{Tr}(U_X S) \geq 0$ et alors toutes les valeurs propres de S sont positives donc $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

III.1. On considère l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ U &\longmapsto \text{Tr}(UA) \end{aligned}$$

φ est la restriction, sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, d'une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R} donc φ est continue sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Mais $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact donc φ est bornée et atteint son maximum en une matrice $U_0 \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

III.2. Soit $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On a $\text{Tr}(US) = \text{Tr}(UU_0 A) = \varphi(UU_0) \leq \varphi(U_0) = \text{Tr}(S)$. On déduit de la partie II que $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

III.3. On a $S = U_0 A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On pose $O = U_0^{-1} = {}^tU_0$, $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $A = OS$.

III.4. On a $A = OS$ où $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On sait qu'il existe $V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et D une matrice diagonale à coefficients positifs telles que $S = {}^tVDV$. En posant, $U = O^tV$ on trouve que l'on a $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $A = UDV$.

III.5. Les éléments de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ sont de la forme $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ ou bien $s_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$,

où $\theta \in \mathbb{R}$. On a $\text{Tr}(R_\theta A) = 2\sin \theta$ et $\text{Tr}(s_\theta A) = 2\cos \theta$. Ainsi, pour tout $U \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$, $\text{Tr}(UA) \leq 2 = \text{Tr}(s_0 A)$ donc $\max \{ \text{Tr}(UA) \mid U \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \} = 2$.

Posons $S = s_0 A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de S sont 0 et 2. Si $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ alors

$A = s_0 P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} {}^tP$. On trouve ainsi une décomposition en valeurs singulières de A , $A = UDV$

avec $U = s_0 P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $V = {}^tP = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

IV.1.1. Supposons que A est inversible. On a $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ donc AA^{-1} et $A^{-1}A$ sont symétriques. D'autre part, $AA^{-1}A = A$ et $A^{-1}AA^{-1} = A^{-1}$ donc A^{-1} est une pseudo-inverse de A .

IV.1.2. On considère la matrice, $D^* = \begin{pmatrix} 0_{n-k} & 0 \\ 0 & D_1^{-1} \end{pmatrix}$. On a $DD^* = D^*D = \begin{pmatrix} 0_{n-k} & 0 \\ 0 & I_k \end{pmatrix}$ qui est

symétrique. D'autre part,

$$DD^*D = \begin{pmatrix} 0_{n-k} & 0 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_{n-k} & 0 \\ 0 & D_1^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_{n-k} & 0 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{n-k} & 0 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix} = D, \quad \text{et}$$

$$D^*DD^* = \begin{pmatrix} 0_{n-k} & 0 \\ 0 & D_1^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_{n-k} & 0 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_{n-k} & 0 \\ 0 & D_1^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_1^{-1} \end{pmatrix} = D^* \quad \text{donc}$$

D^* est une pseudo-inverse de D .

IV.1.3. Si $A = 0$ alors A est une pseudo-inverse d'elle même. Supposons que $A \neq 0$. Il existe une matrice diagonale à coefficients positifs $D = \text{diag}(0, \dots, 0, D_{i+1, i+1}, \dots, D_{n, n})$ et deux matrices orthogonales U et V telles que $A = UDV$.

Posons $D^* = \text{diag}(0, \dots, 0, D_{i+1, i+1}^{-1}, \dots, D_{n, n}^{-1})$ et $A^* = {}^tVD^*{}^tU$. Ainsi on a, $AA^* = UDD^*{}^tU$ et $A^*A = {}^tVD^*DV$. AA^* et A^*A sont symétriques. D'autre part,

$AA^*A = UDV{}^tVD^*{}^tUUDV = UDD^*DV = UDV = A$ et

$A^*AA^* = {}^tVD^*{}^tUUDV{}^tVD^*{}^tU = {}^tVD^*DD^*{}^tU = {}^tVD^*{}^tU = A^*$. Par conséquent, A^* est une pseudo-inverse de A .

IV.1.4.a. On pose $F = \text{Im}A = \{AX \mid X \in \mathbb{R}^n\}$. On sait que le projeté orthogonal de b , $p_F(b)$, sur F vérifie, $\|p_F(b) - b\| = \inf\{\|AX - b\| \mid X \in \mathbb{R}^n\}$ donc il existe $X_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\|AX_0 - b\| = \inf\{\|AX - b\| \mid X \in \mathbb{R}^n\}.$$

IV.1.4.b. Soit $X \in \mathbb{R}^n$. Pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\varphi(X+h) = (AX - b + Ah \mid AX - b + Ah) = \varphi(X) + (AX - b \mid Ah) + (Ah \mid AX - b) + (Ah \mid Ah).$$

On a, d'une part, $(AX - b \mid Ah) + (Ah \mid AX - b) = 2(AX - b \mid Ah) = 2({}^tAAX - {}^tAb \mid h)$ et d'autre part, $(Ah \mid Ah) = \|Ah\|^2 \leq C\|h\|^2$ où C est une constante positive.

Posons $\ell(h) = 2({}^tAAX - {}^tAb \mid h)$ et, pour $h \neq 0$, $\varepsilon(h) = \frac{(Ah \mid Ah)}{\|h\|}$. ℓ est une application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} et $\varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$. Il vient

$$\varphi(X+h) = \varphi(X) + \ell(h) + \|h\|\varepsilon(h).$$

Par conséquent, φ est différentiable sur \mathbb{R}^n et on a :

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \quad d\varphi(X).h = 2({}^tAAX - {}^tAb \mid h).$$

IV.1.4.c. φ possède un minimum en X_0 donc $d\varphi(X_0) = 0$ et alors on a :

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \quad ({}^tAAX_0 - {}^tAb \mid h) = 0.$$

Par conséquent, on a ${}^tAAX_0 = {}^tAb$. Mais AA^* est symétrique donc

$$AA^*b = {}^t(A^*){}^tAb = {}^t(A^*){}^tAAX_0 = {}^t(AA^*)AX_0 = AA^*AX_0 = AX_0.$$

Finalement on trouve

$$\inf\{\|AX - b\| \mid X \in \mathbb{R}^n\} = \|AA^*b - b\|.$$

IV.2.1. Soit $D = \text{diag}(D_{11}, \dots, D_{nn})$ une matrice diagonale. S'il existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $|D_{i_0 i_0}| > 1$ alors $|D_{i_0 i_0}|^k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$. La suite $(D^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la suite $(D_{ii}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée. Ce qui équivaut à $|D_{ii}| \leq 1$, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

IV.2.2. Si $D \in G$ alors D est inversible et $D^{-1} \in G$. Par suite pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $|D_{ii}| \leq 1$ et $\left| \frac{1}{D_{ii}} \right| \leq 1$. Ainsi on a, $|D_{i,i}| = 1$, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

IV.2.3. Soit $A \in G$. On écrit $A = UDV$ une décomposition en valeurs singulières de A . Puisque $U, V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subset G$, on a $D = {}^tUA {}^tV \in G$. Comme D est diagonale à coefficients positifs, d'après la question précédente, $D_{ii} = 1$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, et donc $D = I_n$. Par suite $A = UV \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et alors $G = \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.