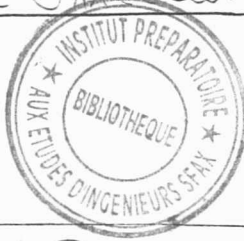
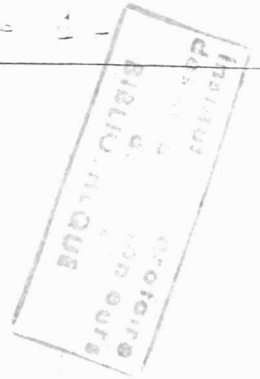


Correction de l'épreuve de physique - Juin 2000

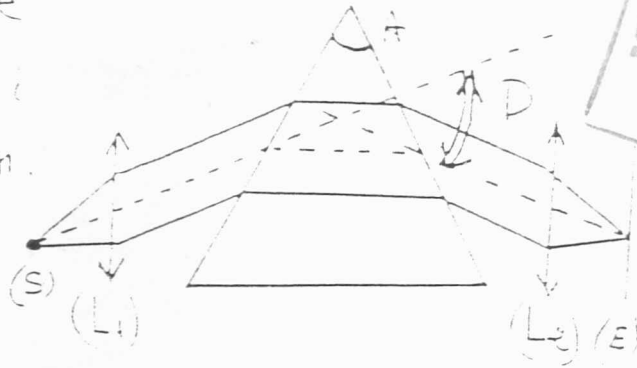


Concours HP

Page 1

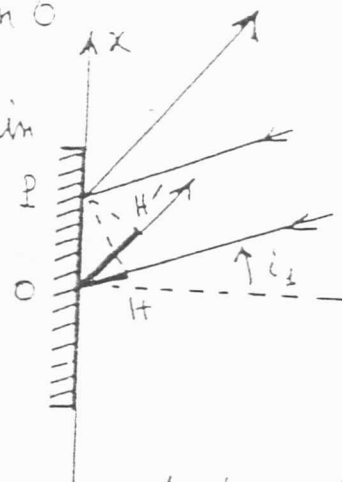


Pour un prism., la déviation D est une fonction de l'angle d'incidence i et de l'indice n .



Si on réalise à l'aide d'une lentille convergente un faisceau de rayons parallèles ($i = 0$), D ne dépend que de n . Or pour le verre, milieu dispersif, l'indice dépend de la longueur d'onde λ .
 $\Rightarrow D = D(\lambda)$: dispersion de la lumière.

Preions pour origine des phases celle de l'onde diffractée en O dans la direction i_2 . Cette onde parcourt un chemin plus long par rapport à l'onde diffractée en P.



$$\delta(P) = -x (\sin i_1 + \sin i_2) = - (OH + OH')$$

$$A = A_0 \int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} e^{\frac{2i\pi}{\lambda} \delta(P)} dx = A_0' \left(\frac{\sin u}{u} \right)$$

$$\text{avec } u = \frac{\pi \epsilon}{\lambda} (\sin i_1 + \sin i_2)$$

(*) L'onde incidente est plane, on s'intéresse à une direction i_2 : diffraction à l'infini.

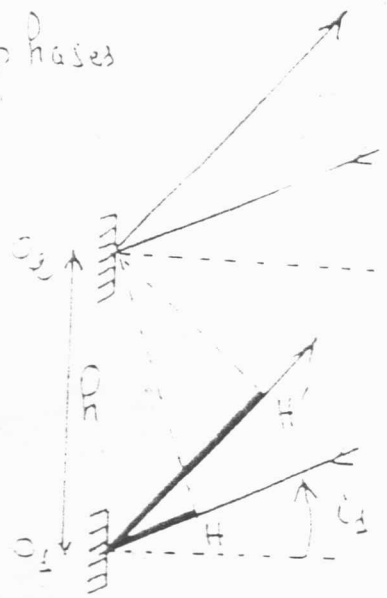
I-3-

Prendons pour origine des phases celle de l'onde diffractée par le miroir (1) au centre O_1 dans la direction i_1 .

L'onde diffractée par le miroir (2) dans la même direction est déphasée de

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (O_1 H + O_1 H')$$

$$= \frac{2\pi h}{\lambda} (\sin i_1 + \sin i_2)$$



L'onde diffractée par les N miroirs formant le réseau, avec origine des phases en O_1 a pour amplitude : $A_R = A + A e^{-i\varphi} + A e^{-2i\varphi} + \dots + A e^{-i(N-1)\varphi}$

soit $A_R = A \frac{\sin(\frac{N\varphi}{2})}{\sin(\frac{\varphi}{2})} \cdot e^{-i\frac{(N-1)\varphi}{2}}$ de l'onde

avec $A = A_0 \left(\frac{\sin u}{u} \right)$: amplitude diffractée par 1 miroir

L'intensité de l'onde diffractée par le réseau peut s'écrire alors sous la forme :

$$I_R = I_{R0} \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \left[\frac{\sin(\frac{N\varphi}{2})}{N \sin(\frac{\varphi}{2})} \right]^2 ; \begin{cases} u = \frac{\pi \varepsilon}{\lambda} (\sin i_1 + \sin i_2) \\ \varphi = \frac{2\pi h}{\lambda} (\sin i_1 + \sin i_2) \end{cases}$$

I_{R0} désigne l'intensité de l'onde diffractée par le réseau dans la direction $i_2 = -i_1$ ($u=0, \varphi=0$).

1) 0,5
calcul : 0,5
I_{R0}

(2)

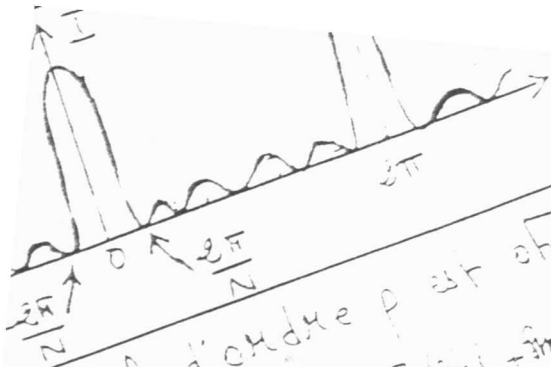
I-4-a-

Si ε est très petit ($\varepsilon \ll \lambda$) ; $\frac{\sin u}{u} \approx 1$

$$I = I_{R0} \left[\frac{\sin(\frac{N\varphi}{2})}{N \sin(\frac{\varphi}{2})} \right]^2$$

(0,5)

0
ou
0,5



Principal d'ordre p est obtenu
 action 2π / $\phi = \frac{2\pi}{\lambda} (m_1 + m_2) = 2p\pi$

un premier minimum \Rightarrow qui correspond
 de $d\phi = \frac{2\pi}{N}$ si $(N \gg 1)$

λ - largeur angulaire $(\delta\epsilon_2)^{1/2}$
 λ constants, $d\phi = \frac{2\pi}{\lambda} h \cos \epsilon_2 d\epsilon_2$
 $= \frac{2\pi h \cos \epsilon_2}{\lambda} \left(\frac{2\pi}{N} \right) \Rightarrow (\delta\epsilon_2)^{1/2} = \frac{\lambda}{N h \cos \epsilon_2}$

$1/2$ on acceptera le résultat sans valeur absolue

De combien varie l'angle ϵ_2 lorsque
 au maximum principal d'ordre p si λ
 d'onde λ varie de $\delta\lambda$?

Soit $(\delta\epsilon_2)_{\text{Max}}$ cette variation.
 En différentiant l'équation : m
 à ϵ_2 constant, on obtient ainsi

$$\text{Soit } (\delta\epsilon_2)_{\text{Max}} = \frac{p \delta\lambda}{h \cos \epsilon_2}$$

on obtient le résultat

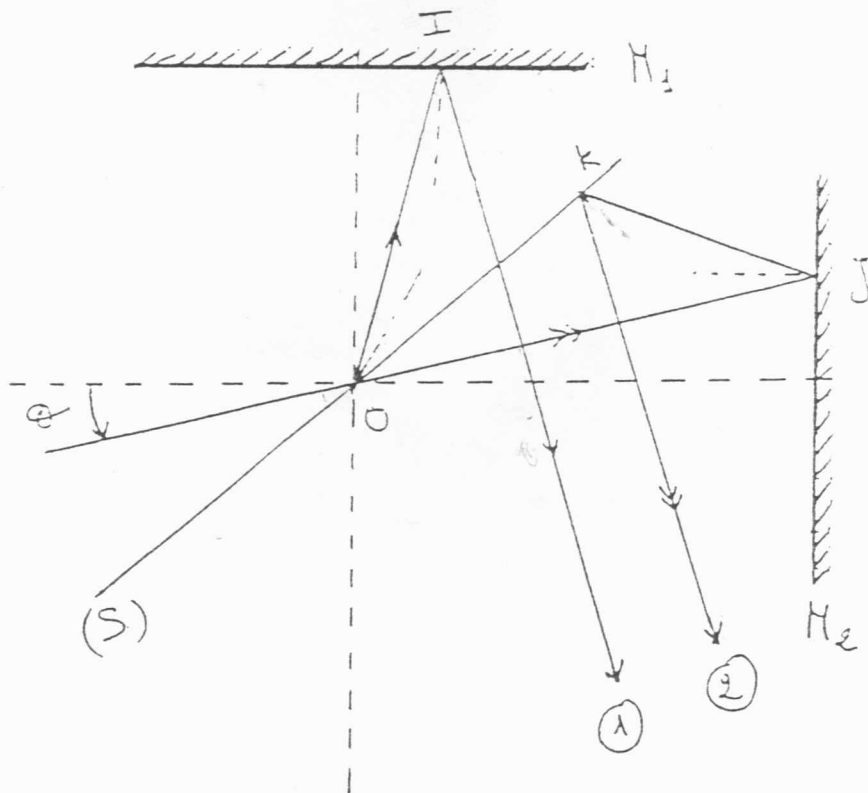
I - 7 - En adoptant le critère de Rayleigh, la résolution devient possible si $(\delta i_2)^{\text{Max}} \geq (\delta i_1)^{1/2}$
 c.à.d si $\Delta \lambda \geq \frac{\lambda}{PN}$. Si $\Delta \lambda_{\text{min}}$ désigne le plus petit écart qu'on peut détecter, on obtient:
 $\Delta \lambda_{\text{min}} = \frac{\lambda}{PN}$ soit $R_{\text{th}} = \frac{\lambda}{\Delta \lambda_{\text{min}}} = PN$

(1,5)

I - 8 - Le nombre total de miroirs est $N = 4 \times 10^3$.
 A l'ordre 1, $\Delta \lambda_{\text{min}} = \frac{577}{4 \times 10^3} = 0,14 \text{ nm}$.
 Or $\Delta \lambda = 579 - 577 = 2 \text{ nm} > \Delta \lambda_{\text{min}}$
 \Rightarrow La résolution du doublet de mercure est alors possible dans le spectre d'ordre 1.

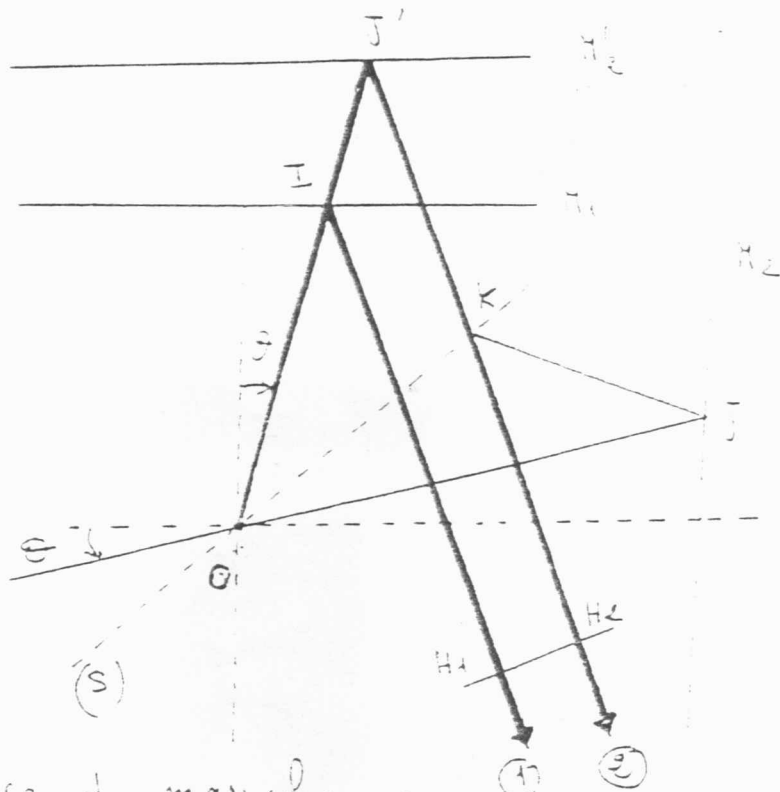
(1,5)

II - 1 -



(2)

II-2-



(1) (1)

Figure :
explication :

La différence de marche δ entre (1) et (2) est:
 $\delta = (OJKH_2) - (OIH_1) = (OJ) + (JK) + (KH_2) - (OIH_1)$
 Soit H'_2 le symétrique de H_2 par rapport à S
 et J' " " de J " " "
 on a $(OJ) = OJ = OJ'$ (OJ) } $(OJKH_2) =$
 et $(JK) = JK = J'K = (J'K)$ } $(OJ'H_2)$
 $\Rightarrow \delta = (OJ'H_2) - (OIH_1)$; pour le calcul
 de δ , on peut considérer la figure 3.

(2)

II-3-a-

(0,5) (0)

Les rayons (1) et (2) proviennent d'un même rayon incident. Les deux ondes sont cohérentes et peuvent donc interférer.

(0,5)

II-3-b-

(0,5) (0)

On peut observer l'interférence à l'infini ou bien dans le plan focal image d'une lentille convergente.

(0,5)

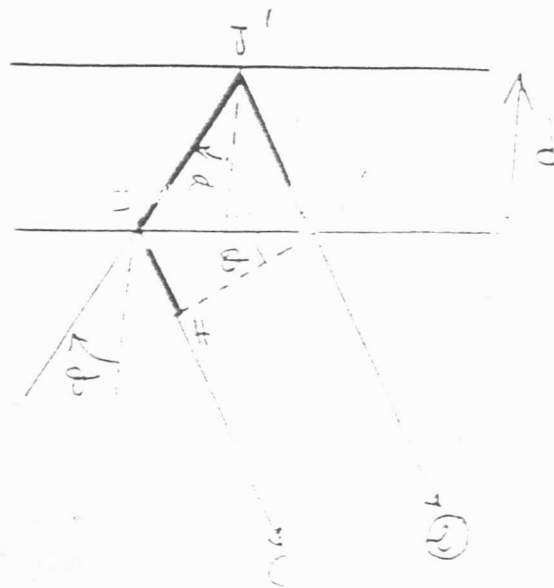
3-C

$$\delta = I J' + \delta' H - I H$$

$$\delta = \frac{d}{\cos \theta} - (d \tan \theta) \sin \theta$$

$$\delta = \frac{2d}{\cos \theta} (1 - \sin^2 \theta)$$

$$\Rightarrow \underline{\delta = 2d \cos \theta}$$



3-d
① ou ②

$$I = \frac{I_0}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi \delta}{\lambda} \right); \text{interférence d'ondes}$$

4-a

La lentille (L) réalise $\theta = 0$ $\delta = 2d$.
Les interférences sont obtenues dans le plan focal image de la lentille (L) et puisque $\theta = 0$, toute la lumière sera concentrée au foyer.

$$I = \frac{I_0}{2} \left(1 + \cos \frac{4\pi c}{\lambda} \right)$$

4-b
③ ou ④

$$d = v_0 t \Rightarrow I = \frac{I_0}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{4\pi}{\lambda} v_0 t \right) \right)$$

5

Deux ondes de longueurs d'onde différentes sont incohérentes \Rightarrow somme des intensités.

$$I = I_1 + I_2 = \frac{I_0}{2} \left[2 + \cos \left(\frac{4\pi}{\lambda_1} v_0 t \right) + \cos \left(\frac{4\pi}{\lambda_2} v_0 t \right) \right]$$

$$I = I_0 \left[1 + \cos (2\pi (\nu_1 - \nu_2) v_0 t) \times \cos (2\pi (\nu_1 + \nu_2) v_0 t) \right]$$

$$i = \frac{i_0}{2} \left[1 + \cos (2\pi (\nu_1 - \nu_2) v_0 t) \times \cos (2\pi (\nu_1 + \nu_2) v_0 t) \right]$$

$$\text{Soit } i = \frac{i_0}{2} \left[1 + \cos (2\pi \Delta \nu v_0 t) \times \cos (4\pi \bar{\nu} v_0 t) \right]$$

⑤

⑥

①

II - 6

Puisque $\Delta \sigma \ll \sigma_0$, c'est la fonction $f(t) = \cos(\pi \Delta \sigma_0 t)$ qui module les variations rapides de $g(t) = \cos(4\pi \sigma_0 v_0 t)$

$T_1 = \frac{1}{\Delta \sigma v_0}$: période de la fonction lente $f(t)$ qui module

(1,5) (0,5)

$T_2 = \frac{1}{2 \sigma_0 v_0}$: période de la fonction rapide $g(t)$ (module)

(3)

méthode:
1,5, 0,5
 $\Delta \lambda$

$$\begin{cases} T_1 = 16 \mu s \\ T_2 = 0,26 \mu s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_0 = 1,92 \cdot 10^8 \text{ m}^{-1} \\ \Delta \sigma = 6,2 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 1,90 \cdot 10^8 \text{ m}^{-1} \\ v_2 = 1,84 \cdot 10^8 \text{ m}^{-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0,524 \mu m; \lambda_2 = 0,569 \mu m; \Delta \lambda \approx 18 \text{ nm}$$

III - 1 -

(1,5) (1)

⊗ $\vec{F}_{HP} = \int_0^b i_s d\vec{r} \wedge \vec{B}$; avec $\begin{cases} d\vec{r} = dl \vec{e}_z \\ \vec{B} = B_0 \vec{u}_x \end{cases} \Rightarrow \vec{F}_{HP} = i_s B_0 b \vec{u}_z$

⊗ $\vec{F}_{QS} = \int_0^b i_s d\vec{r} \wedge \vec{B}$; avec $\begin{cases} d\vec{r} = -dl \vec{e}_z \\ \vec{B} = -B_0 \vec{u}_x \end{cases} \Rightarrow \vec{F}_{QS} = i_s B_0 b \vec{u}_z$

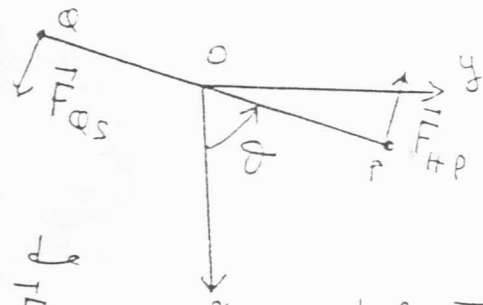
⊗ Pour les portions PQ et SH, $d\vec{r}$ et \vec{B} sont colinéaires $\Rightarrow \vec{F}_{PQ} = \vec{F}_{SH} = \vec{0}$.

Conclusion

La résultante des forces est nulle: $\vec{F} = \sum \vec{F}_i = \vec{0}$

Les forces qui s'exercent sur HP et QS forment un couple de

moment $\vec{C} = \vec{OP} \wedge \vec{F}_{HP} + \vec{OQ} \wedge \vec{F}_{QS} = 2 i_s a b B_0 \vec{u}_z$



(2,5)

III - 2 -

méthode: (1)
équation: (1)

Si \vec{D}_0 désigne le moment dynamique en O, on a $\vec{D}_0 = \vec{C} + \vec{C}_n$.

Or l'axe (Oz) est un axe de symétrie du rotor $\Rightarrow \vec{D}_0 = \frac{d\vec{L}_0}{dt} = J \frac{d\omega}{dt} \vec{u}_z$, soit par projection

sur (Oz): $J \frac{d\omega}{dt} = 2 i_s a b B_0 - C_0$

(2)

III - 3 -

La fem induite est calculée par la circulation du champ électromoteur $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$, le long de la spire: $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{KL} = \int (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}$.

$$\int_H^P (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int_0^b a \omega B_0 \left[\underbrace{(\vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_r) \cdot \vec{u}_z}_{(-1)} \right] dz = -ab\omega B_0$$

$$\int_Q^S (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int_0^b a \omega B_0 \left[(\vec{u}_\theta \wedge (-\vec{u}_r)) \cdot (-\vec{u}_z) \right] dz = -ab\omega B_0$$

pour les portions PQ et SH, $d\vec{l}$ et \vec{B} sont colinéaires \Rightarrow les fem correspondantes sont nulles.

Conclusion $\mathcal{E} = -2\omega ab B_0$

* Tout ce calcul suppose négligeable le champ magnétique propre créé par le courant i_s devant B_0 ; cela revient à négliger le phénomène d'auto-induction.

III - 4 -
① ou ②

$$E = R i_s + 2\omega ab B_0 i \quad | \text{ loi des mailles}$$

III - 5 - a -

$$\begin{cases} (EH) : J \frac{dw}{dt} = 2i_s ab B_0 - C_0 \\ (EE) : E = R i_s + 2\omega ab B_0 \end{cases}$$

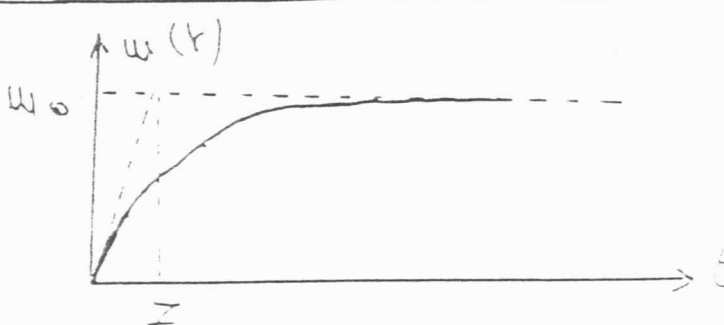
$$\Rightarrow \frac{dw}{dt} + \frac{w}{\tau} = \frac{1}{J} \left(\frac{2ab B_0 E}{R} - C_0 \right); \quad \tau = \frac{J R}{4 a^2 b^2 B_0^2}$$

III - 5 - b -

on posant $\frac{w_0}{\tau} = \frac{1}{J} \left(\frac{2ab B_0 E}{R} - C_0 \right)$, l'équation différentielle devient, $\frac{dw}{d\tau} + \frac{w}{\tau} = \frac{w_0}{\tau} \Rightarrow$

$$w(t) = w_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad \text{avec}$$

$$w_0 = \frac{R}{4 a^2 b^2 B_0^2} \left(\frac{2ab B_0 E}{R} - C_0 \right)$$

<p>III-5-C-</p> <p>0,5</p>		<p>0,5</p>
<p>II-6-a-</p> <p>0,5</p>	<p>si m désigne le nombre de tours par seconde,</p> <p>on a $\begin{cases} \omega = 2\pi m \\ \omega = m f \end{cases} \Rightarrow \omega = \frac{\omega}{2\pi} \cdot 2\pi, \omega_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \cdot 2\pi$</p> <p>$\Rightarrow \omega_0 = \frac{R f}{8\pi a^4 b^4 B_0^2} \left(\frac{2abB_0 E}{R} - C_0 \right)$</p>	<p>0,5</p>
<p>II-6-b-</p> <p>0,5 ou 0</p>	<p>$\Delta t = \tau \cdot \ln 100 = 4,6 \cdot \tau$</p>	<p>0,5</p>
<p>V-1-</p> <p>méthode: 0,5</p> <p>calcul: 0,5</p>	<p>$\begin{cases} \vec{J}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{J}_C = \gamma \vec{E} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J_D = \epsilon_0 \omega E \\ J_C = \gamma E \end{cases} \Rightarrow \frac{J_D}{J_C} = \frac{\epsilon_0 \omega}{\gamma}$</p> <p>$\frac{J_D}{J_C} = \frac{8,8 \cdot 10^{-12}}{10^7} \times 2\pi \times f = 5,52 \cdot 10^{-18} \times f$</p> <p>Pour $f = 10^{10}$ Hz, on a $J_D \ll J_C$.</p>	<p>1</p>
<p>IV-2-</p> <p>0 ou 1</p>	<p>$\text{div } \vec{E} = 0 \quad ; \quad \text{Rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$</p> <p>$\text{div } \vec{B} = 0 \quad ; \quad \text{Rot } \vec{B} = \mu_0 \gamma \vec{E}$</p>	<p>1</p>
<p>IV-3-</p> <p>0 ou 1</p>	<p>$\Delta \vec{E} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$</p>	<p>1</p>

IV-4-

$$\vec{E} = E_x \vec{u}_x = E_{ot} e^{-\left(\frac{1-i}{\delta}\right)z} e^{-i\omega t} \vec{u}_x$$

$$\Delta \vec{E} = \left(\frac{1-i}{\delta}\right)^2 \vec{E} ; \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\omega \vec{E}$$

L'équation de propagation donne: $\left(\frac{1-i}{\delta}\right)^2 + \mu_0 \gamma i\omega = 0$

$$\Rightarrow \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$$

Le champ électrique proposé peut exister dans le métal à condition de prendre $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$.

(1)

IV-5-

$$\frac{dP}{dz} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2 = \gamma E_{ot}^2 e^{-\frac{2z}{\delta}} \cos^2\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$$

$$\left\langle \frac{dP}{dz} \right\rangle_T = \frac{\gamma E_{ot}^2}{2} e^{-\frac{2z}{\delta}} : \text{densité moyenne de puissance.}$$

$$P_{moy} = \frac{\gamma E_{ot}^2}{2} \cdot S \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{2z}{\delta}} dz = \frac{\gamma E_{ot}^2 S \delta}{4}$$

Ceci conduit à un échauffement du métal.

(2)

IV-6-

$$M = \int_0^\infty \frac{dM}{d\gamma} d\gamma = \int_0^\infty \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\gamma^3}{e^{\frac{h\gamma}{k_B T}} - 1} d\gamma$$

En posant $x = \frac{h\gamma}{k_B T}$, il vient donc:

$$M = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{k_B^4 T^4}{h^4} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

$$M = \sigma T^4, \text{ avec } \sigma = \frac{2\pi^5}{15 c^2 h^3} k_B^4$$

AN: $\sigma = 5,62 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$

(1,5)

IV-7-a- $\frac{dH}{d\lambda} = \left(\frac{dH}{d\tau} \right) \cdot \left| \frac{d\tau}{d\lambda} \right| = \frac{c}{\lambda^2} \left(\frac{dH}{d\tau} \right) = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}$

On acceptera decrire $\frac{dH}{d\lambda} = \left(\frac{dH}{d\tau} \right) \left(\frac{d\tau}{d\lambda} \right)$ dou
un signe (-) qui apparait.

(1)

IV-7-b- $\frac{dH}{d\lambda}$ est extrêmele si la fonction $f(\lambda) = \lambda^5 (e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1)$

est extrêmele. Si on pose $x = \frac{hc}{\lambda k_B T}$, la

fonction $f(x) = x^5 (e^x - 1)$ est extrêmele

si $-5 x^{-6} (e^x - 1) + x^{-5} e^x = 0$, soit

$e^x (5 - x) = 5$, qui admet pour solution

$x_m = 4,96 = \frac{hc}{k_B \lambda_m T} \Rightarrow \lambda_m T = \frac{hc}{4,96 \times k_B}$

AN: $\lambda_m T = 2906 \mu m \cdot K$: Loi de Wien.

On donnera (0,5 point) en plus pour une vérification
du fait que la fonction $f(\lambda)$ est maximale pour x_m .

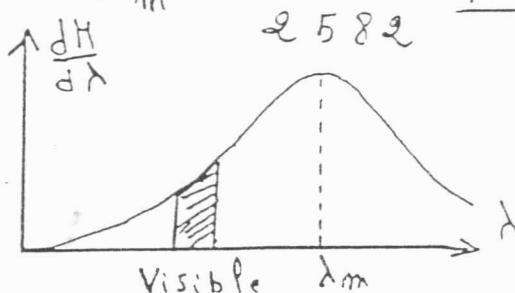
(1)

IV-8- $P = \sigma T^4 \Rightarrow T = \left(\frac{P}{\sigma S} \right)^{\frac{1}{4}} = 2582 K$

A cette température, le maximum

d'émission est pour $\lambda_m = \frac{2906}{2582} = 1,13 \mu m$

Le Michelson reçoit
donc un rayonnement
essentiellement
concentré dans l'IR



(1,5)

0,5
0,5
0,5
T = ...
λm = ...
Conclusion:

IV.9-

$$\lambda_B = 0,4 \mu m; \lambda_R = 0,8 \mu m; \nu_B = \frac{c}{\lambda_B}; \nu_R = \frac{c}{\lambda_R}$$

$$\frac{P_{visible}}{P} = \frac{\int_{\nu_R}^{\nu_B} \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} d\nu}{\int_0^{\infty} \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} d\nu}$$

On pose $x = \frac{h\nu}{k_B T}$; $x_B = \frac{hc}{\lambda_B k_B T}$; $x_R = \frac{hc}{\lambda_R k_B T}$

$$\frac{P_{visible}}{P} = \frac{\int_{x_R}^{x_B} \frac{x^3}{e^x - 1} dx}{\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx} = \frac{15}{\pi^4} e^{-x_R} (x_B^3 + 3x_R^2)$$

puisque $x_B = 2 x_R = 14$.

AN: $\frac{P_{visible}}{P} = 6,88 \cdot 10^{-2} \Rightarrow P_{visible} = 6,88 W$

La partie visible du rayonnement émis par la lampe ne constitue qu'une fraction très petite de la totalité de la puissance rayonnée. En plaçant un verre anticalorique, on protège donc l'interféromètre contre le rayonnement IR sans perdre en luminosité. (c'est indiqué par l'énoncé !)

Fin du corrigé

méthode : (1)
calcul : (0,5)
conclusion : (0,5)

(5)