



Concours Mathématiques et Physique Epreuve de Mathématiques I

Date: Lundi 8 Juin 2015 Heure : 8 H Durée : 4 heures Nb pages : 4

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.
Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

N.B. Le sujet comporte un exercice et deux problèmes, totalement indépendants.

Exercice

1. Montrer que, pour tout $x > 0$, $t \mapsto \frac{\ln t}{x+t}$, est intégrable sur $]0,1]$.

On pose alors

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\ln t}{x+t} dt, \quad x > 0.$$

2. Montrer que l'application f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

3. Montrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{\ln(1+x) - \ln x}{x}$.

4. Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2}(\ln x)^2 + 2f(1).$$

5. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer l'intégrale $I_k = \int_0^1 t^k \ln t \, dt$.

- (b) Montrer que, pour tout $x \geq 1$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{1}{x^n}$.

- (c) Montrer que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{x}$.

- (d) En déduire un équivalent simple de f au voisinage de 0^+ .

Problème I

Partie I

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ ait un rayon de convergence infini.

1. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} (n+1)a_{n+1}z^n$ converge absolument.

(On pourra écrire pour tout $r > |z|$, $(n+1)a_{n+1}z^n = a_{n+1}r^{n+1} \left(\frac{z}{r}\right)^{n+1} \frac{n+1}{z}$).

2. En déduire que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} z^n$ est infini.
3. On pose pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \quad \text{et} \quad S_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} z^n.$$

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, l'application définie pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ par:

$$f(r, \theta) = S(z_0 + r e^{i\theta}).$$

- (a) Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^2 .
- (b) Montrer que f admet une dérivée partielle première par rapport à r donnée par:

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta) = e^{i\theta} S_1(z_0 + r e^{i\theta}).$$

- (c) Montrer que f admet une dérivée partielle première par rapport à θ donnée par:

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \theta) = i r e^{i\theta} S_1(z_0 + r e^{i\theta}).$$

- (d) En déduire que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 et vérifie l'équation aux dérivées partielles:

$$r \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta) + i \frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \theta) = 0.$$

Partie II

Soit $f: (r, \theta) \mapsto f(r, \theta)$ une application de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 telle que, pour tout $r \in \mathbb{R}$, l'application $f_r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $\theta \mapsto f(r, \theta)$ soit 2π -périodique. On pose, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$u_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta.$$

1. Montrer que, pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(r, \theta) = u_0(r) + \sum_{n=1}^{+\infty} (u_n(r) e^{in\theta} + u_{-n}(r) e^{-in\theta}).$$

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, l'application $u_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $r \mapsto u_n(r)$, est de classe C^1 sur \mathbb{R} et que, pour tout $r \in \mathbb{R}$,

$$u'_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta.$$

3. Dans cette question on suppose que, pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$,

$$r \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta) + i \frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \theta) = 0.$$

- (a) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que, pour tout $r \in \mathbb{R}$,

$$r u'_n(r) - n u_n(r) = 0.$$

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe $a_n \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$,

$$u_n(r) = a_n r^n.$$

(c) Montrer alors que, pour tout $r \in \mathbb{R}_+$,

$$u_n(r) = \begin{cases} a_n r^n & \text{si } n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

(d) En déduire que, pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$,

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta}.$$

Partie III

Soit $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une application. On lui associe l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ définie, pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$, par

$$f(r, \theta) = F(re^{i\theta}).$$

Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) La fonction f est de classe C^1 et vérifie l'équation :

$$r \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta) + i \frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \theta) = 0.$$

(ii) Il existe une suite complexe $(a_n)_n$ telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

(iii) Pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, il existe une suite $(b_n)_n$ telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n.$$

Problème II

Dans ce problème $(E, \|\cdot\|)$ désigne un espace vectoriel normé de dimension finie, A une partie de E et $f : A \rightarrow A$ une application.

– Soit $k > 0$. On dit que f est k -lipschitzienne sur A si

$$\forall x, y \in A, \|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|.$$

– Si f est k -lipschitzienne et $k \in]0, 1[$, on dit que f est k -contractante.

– On rappelle que toute application k -lipschitzienne sur A est continue sur A .

– Pour p entier naturel, on note $f^p : A \rightarrow A$ l'application définie, pour tout $x \in A$, par :

$$f^0(x) = x \text{ et si } p \geq 1, f^p(x) = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{p \text{ fois}}(x).$$

Partie I

Dans cette partie, on suppose que A est une partie fermée de E et que f est k -contractante.

On considère la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in A, \\ x_{n+1} = f(x_n), n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|x_1 - x_0\|.$$

2. Montrer alors que la série $\sum_{n \geq 0} (x_{n+1} - x_n)$ est convergente.

3. En déduire que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est convergente. On note ℓ sa limite.

4. Montrer que $\ell \in A$ et que $f(\ell) = \ell$.

5. On suppose que f admet deux points fixes ℓ et ℓ' . Montrer que $\ell = \ell'$.

6. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|x_n - \ell\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|x_1 - x_0\|$.

7. (a) Montrer que les applications sinus et arctangente sont 1-lipschitziennes sur \mathbb{R} .

(b) Montrer que le système

$$\begin{cases} 4x = \sin(x+y) \\ 3y = 3 + 2 \arctan(x-y), \end{cases}$$

admet une unique solution dans \mathbb{R}^2 .

(On pourra considérer une application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 muni de la norme $\|(x,y)\| = |x| + |y|$).

8. Soit $g : A \rightarrow A$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que g^p soit k -contractante. Montrer que g admet un unique point fixe.

Partie II

Dans cette partie, A désigne la boule unité fermée de E : $A = \{x \in E, / \|x\| \leq 1\}$, et $f : A \rightarrow A$ une application 1-lipschitzienne.

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ définie sur A par $f_n : x \mapsto \left(1 - \frac{1}{n}\right)f(x)$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f sur A .

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique élément x_n de A vérifiant $f_n(x_n) = x_n$.

3. En déduire que l'application f admet un point fixe.

(On pourra extraire une sous suite convergente de $(x_n)_{n \geq 1}$).

4. À-t-on, nécessairement, l'unicité du point fixe de f .

Partie III

Dans cette partie, A désigne la boule unité fermée de E , $b \in A$ et u un endomorphisme de E tels que pour tout $x \in A$, $\|u(x) + b\| \leq 1$. On pose alors $f : A \rightarrow A$:

$$x \mapsto u(x) + b$$

Pour tout entier naturel non nul n , on note g_n l'application définie sur A par :

$$g_n(x) = \frac{1}{n}(x + f(x) + f^2(x) + \cdots + f^{n-1}(x)).$$

1. Montrer que, pour tout entier non nul n , $g_n(A) \subset A$.

2. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall y \in g_n(A), \|f(y) - y\| \leq \frac{2}{n}.$$

3. Soit $a \in A$. Montrer que la suite $(f(g_n(a)) - g_n(a))_{n \geq 1}$ converge vers 0.

4. En déduire que l'application f admet un point fixe.

5. Montrer que, si x est un point fixe de f , alors x est un point fixe de g_n , pour tout $n \geq 1$.

6. En déduire que l'ensemble $S_f = \bigcap_{n \geq 1} g_n(A)$ est non vide.

7. Montrer que S_f est exactement l'ensemble des points fixes de f .