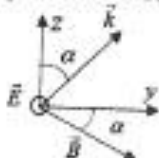
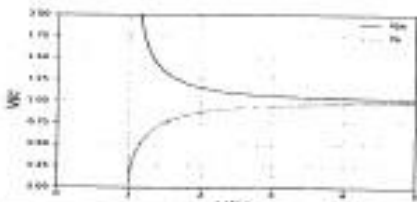


Corrigé Physique **MP juin 2019**

Problème 1		35
I-	Propagation d'une onde	
1)	a) $\frac{\partial^2 \Psi(z,t)}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi(z,t)}{\partial t^2} = 0$	0,5
	b) $\Psi(z,t) = f(t - \frac{z}{v}) + g(t + \frac{z}{v})$, f O.P.P vers les $z > 0$ de vitesse v , g O.P.P vers les $z < 0$.	0,5
	c) $f(t - \frac{z}{v}) = a \cos\left(\omega(t - \frac{z}{v}) + \varphi\right) = a \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v} z + \varphi\right) = a \cos(\omega t - k z + \varphi)$ avec $k = \frac{\omega}{v}$.	1
	d) La vitesse à laquelle la phase de l'onde se propage dans l'espace : $v_p = \frac{\omega}{\text{Re}(k)}$. Dans le vide :	0,5
	$k = k_0 = \frac{\omega}{v}$ donc $v_p = \frac{\omega}{k_0} = v$, dans un milieu d'indice n $k = n k_0$ donc $v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{v}{n}$.	0,5 0,5
	e) OPPM dans le vide suivant Oz , $\text{div} \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow E_z = \text{cte}$, en régime variable cette constante est nulle, $E_z = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp \vec{u}_z$, de même $\text{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} \perp \vec{u}_z$, : Onde E.M. transversale.	0,5
	En adoptant la notation complexe : $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow -i\vec{k} \wedge \vec{E} = -i\omega \vec{B}$, en notation réelle	0,5
	$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$ ou $\vec{B} = \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}}{c}$, en effet $k = \frac{\omega}{c}$.	1
2)	a) $\vec{k} = k(\cos \alpha \vec{u}_z + \sin \alpha \vec{u}_x)$, $\vec{E} = E_0 \exp(i(\omega t - k z \cos \alpha - k y \sin \alpha)) \vec{u}_x$; $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \Rightarrow$	0,5
	$B_z = 0$; $B_x = \frac{E_0}{c} \cos(\alpha) \exp(i(\omega t - k z \cos \alpha - k y \sin \alpha))$; $B_y = -\frac{E_0}{c} \sin(\alpha) \exp(i(\omega t - k z \cos \alpha - k y \sin \alpha))$	1
	b) Structure de l'onde E.M	
		1
	c) $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - k z \cos \alpha - k y \sin \alpha) (\cos \alpha \vec{u}_z + \sin \alpha \vec{u}_x)$,	0,5
	$I = \langle \ \vec{\Pi}\ \rangle = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\mu_0 c} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 c$, $[I] = W \cdot m^{-2}$.	0,5 0,5
	d) $P = I \cdot S = I \cdot \pi r^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 c \cdot \pi r^2 \Rightarrow E_0 = \sqrt{\frac{2P}{\epsilon_0 c \pi r^2}} = 154,8 \times 10^3 V \cdot m^{-1}$	0,5 0,5
II-	Propagation dans l'ionosphère	
3)	a) Pour un électron : $m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B}) + m_e \vec{g}$.	0,5

	Pour un proton : $m_p \frac{d\vec{v}}{dt} = e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) + m_p \vec{g}$.	0,5
b)	$\ \vec{f}_e\ \ll \ \vec{f}_p\ $ en effet $\ \vec{v} \wedge \vec{B}\ = \frac{v}{c} E_0 \ll E_0$ car $v \ll c$ et $\ m\vec{g}\ \ll \ \vec{f}_e\ = eE_0$ (vue les valeurs numériques).	0,5
4)	$\vec{v}_p = -j \frac{e}{m_p \omega} \vec{E}$, $\vec{v}_e = j \frac{e}{m_e \omega} \vec{E}$, $\vec{j} = n_p e \vec{v}_p - n_e e \vec{v}_e = -in_0 \frac{e^2}{\omega} (\frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_e}) \vec{E}$.	0,5 0,5 0,5
5)	$\vec{j} = \gamma \vec{E}$, $\gamma = -in_0 \frac{e^2}{\omega} (\frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_e}) = -j \frac{e_0}{\omega} (\frac{n_p e^2}{\epsilon_0 m_p} + \frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e}) = -j \frac{\epsilon_0}{\omega} (\omega_p^2 + \omega_{pe}^2)$	0,25 0,75
6)	$\omega_{pe} = 0,42 \times 10^6 \text{ rad.s}^{-1}$, $\omega_{pe} = 17,9 \times 10^6 \text{ rad.s}^{-1}$, $\omega_{pe}^2 \ll \omega_p^2$ soit $\gamma = -j \frac{\epsilon_0}{\omega} \omega_p^2$	0,5 0,5 0,5
7)	$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \text{rot}(\text{rot } \vec{B}) = \mu_0 \gamma \text{rot } \vec{E} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial(\text{rot } \vec{E})}{\partial t} \Rightarrow$ $-ik \wedge (-ik \wedge \vec{B}) = -\mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \Rightarrow k^2 \vec{B} = (-i\omega \mu_0 \gamma + \frac{\omega^2}{c^2}) \vec{B}$ $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2})$, $k^2 > 0 \Rightarrow \omega > \omega_p = \omega_c = 2\pi f_c$, $f_c = \frac{\omega_{pe}}{2\pi} = 2,85 \text{ MHz}$.	1 0,5 0,5
8)	Le milieu est dispersif, $v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$, $v_g = \frac{d\omega}{dk} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$	0,5 0,5
	 <p>Si $\omega \gg \omega_c$, $v_p = v_g = c$, le plasma se comporte comme le vide. Les charges n'arrivent pas à suivre les oscillations rapides du champ EM.</p>	1 0,5
9)	Les ondes AM de fréquences $f_{AM} = 100 \text{ KHz} < f_c$ se réfléchissent sur l'ionosphère et pourront être captées à des distances nettement plus importantes (plus vaste audience) que les ondes FM qui se propagent dans l'ionosphère $f_{FM} = 100 \text{ MHz} > f_c$.	0,5 1
10)	a) $\vec{E}_1(z=0) + \vec{E}_2(z=0) = \vec{0} \Rightarrow E_{y1} = -E_{y2} \Rightarrow \vec{E}_2 = -E_0 \cos(\omega t + kz) \vec{u}_y$	0,5
	b) $\vec{E}_1 = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y \Rightarrow \vec{B}_1 = \frac{k}{\omega} \vec{u}_z \wedge E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x$.	0,5
	$\vec{B}_2 = -\frac{k}{\omega} \vec{u}_z \wedge -E_0 \cos(\omega t + kz) \vec{u}_y = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kz) \vec{u}_x$.	0,5
11)	$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = E_0 e^{j\omega t} (e^{-jkz} - e^{jkz}) \vec{u}_y = -2j \sin(kz) E_0 e^{j\omega t} \vec{u}_y$, $\vec{E} = 2E_0 \sin(\omega t) \sin(kz) \vec{u}_y$ $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{E_0}{c} e^{j\omega t} (e^{-jkz} + e^{jkz}) \vec{u}_x = 2 \frac{E_0}{c} \cos(kz) e^{j\omega t} \vec{u}_x$, $\vec{B} = 2 \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kz) \vec{u}_x$. Onde stationnaire	0,5 0,5 0,5
12)	Nœuds de $\vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \sin(kz) = 0$ donc $kz = m\pi$ avec $m \in \mathbb{N} \Rightarrow z_m = \frac{m\pi}{k} = m \frac{\lambda}{2}$, la distance qui sépare deux nœuds consécutifs est $\frac{\lambda}{2}$, et $L = n \frac{\lambda}{2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.	0,5 0,5 0,5
III-	Quantification de l'énergie	

13)	a) La particule étant isolée, son énergie est constante : $E = E_c = \frac{p_c^2}{2m} = cte \Rightarrow p_c = cte$.	0,5
	b) $\Delta p_x = \sqrt{\langle p_x^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2}$ et $\langle p_x \rangle = 0$ car les deux directions sont équiprobables donc $\Delta p_x = \sqrt{\langle p_x^2 \rangle} = p_c$ car $p_c = cte$ donc $\langle p_x^2 \rangle = p_c^2$.	1 1
	c) $\Delta x = L$, l'inégalité de Heisenberg s'écrit $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \Rightarrow \Delta x^2 \cdot \Delta p_x^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}$ c'-à-d $L^2 \cdot p_c^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} \Rightarrow L^2 \cdot 2mE \geq \frac{\hbar^2}{4} \Rightarrow E \geq \frac{\hbar^2}{8mL^2}$ donc $E_{min} = \frac{\hbar^2}{8mL^2}$. L'énergie minimale de la particule quantique confinée dans la cavité n'est pas nulle (contrairement au modèle classique) E_{min} croît quand L diminue.	0,5 0,5 1 0,5
14)	Relation de De Broglie $p_c = \frac{h}{\lambda}$ et $L = n \frac{\lambda}{2} \Rightarrow p_c = n \frac{h}{2L}$ puisque $E = \frac{p_c^2}{2m} = n^2 \frac{h^2}{8mL^2}$ $E = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \Rightarrow E_{min} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$.	1 1 0,5
15)	Dans la question 13) $E_{min} = \frac{\hbar^2}{8mL^2}$ et dans 14) $E_{min} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} = 4\pi^2 E_{min}$, les deux résultats sont de même ordre de grandeur à $4\pi^2$ près. Pour Déterminer la valeur exacte de E_{min} et trancher entre les deux méthodes il faut résoudre l'équation de Schrödinger relative à une particule confinée dans la cavité.	0,5 0,5
Problème 2		65
I-	Etude quantique-statistique	
1)	$ \Psi(x,t) ^2$: densité de probabilité de présence de la particule dans $[x, x+dx]$. $ \Psi(x,t) ^2 = \varphi(x) ^2$ est indépendant du temps donc l'état est stationnaire. φ vérifie l'équation : $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + V(x) \varphi(x) = E \varphi(x)$. Pour $x \in [0, L]$, l'équation devient $\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \varphi(x) = 0 \Rightarrow \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + k_x^2 \varphi(x) = 0$	0,5 0,5 1
2)	$\varphi(x) = A e^{ik_x x} + B e^{-ik_x x}$. A et B deux constantes. Condition aux limites : $\varphi(x=0) = 0 \rightarrow A + B = 0$. Ce qui donne : $\varphi(x) = D \sin(k_x x)$, $D = 2iA$.	0,5 0,5
3)	La condition $\varphi(x=L) = 0 \rightarrow \sin(k_x L) = 0$ donc $k_x = \frac{n_x \pi}{L}$, $n_x \in \mathbb{N}^*$. $E_{min} = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m} = n_x^2 \frac{\hbar^2}{8mL^2}$. L'énergie de la particule est quantifiée et on retrouve le même résultat de la question 14-Prob. 1	0,5 0,5 0,5
4)	La normalisation de φ : $\int_0^L \varphi(x) ^2 dx = 1 \rightarrow D ^2 \frac{L}{2} = 1 \rightarrow D = \sqrt{\frac{2}{L}}$. $\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(k_x x)$.	1
5)	a) $n_1 = \frac{2L\sqrt{2mk_B T}}{h} = \frac{2L\sqrt{2M RT}}{N_A h}$, $n_2 = n_1 \sqrt{1,01}$. A.N. $n_1 = 6,25 \times 10^8$, $n_2 = 6,28 \times 10^8$.	1 0,5 0,5
	b) Il y a $\Delta n = 3 \times 10^7$ niveaux d'énergie entre les énergies $k_B T$ et $1,01 k_B T$.	1

	b) Il y a $\Delta n = 3 \times 10^7$ niveaux d'énergie entre les énergies $k_B T$ et $1,01 k_B T$.	1
	c) Il y a plus de 10^7 niveaux d'énergie entre deux niveaux très proches $\Delta E = 0,01 k_B T = 17 \times 10^{-23} J$. Les niveaux sont très serrés donc on peut considérer que l'énergie est continue.	1
6)	$n_x = \frac{2L\sqrt{2mE_x}}{h}$, $w(E_x) = \frac{dn_x}{dE_x} = \frac{L\sqrt{2m}}{h\sqrt{E_x}}$.	0,5 0,5 0,5
7)	$dp(E_x) = A \frac{L\sqrt{2m}}{h\sqrt{E_x}} \exp(-\beta E_x) dE_x$. $\int_0^{+\infty} dp(E_x) = 1 \Rightarrow A \int_0^{+\infty} \frac{L\sqrt{2m}}{h\sqrt{E_x}} \exp(-\beta E_x) dE_x = 1$, $x = \beta E_x$, $A \frac{L\sqrt{2m}}{h\sqrt{\beta}} \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-x) dx}{\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow A \frac{L\sqrt{2m}}{h\sqrt{\beta}} \sqrt{\pi} = 1 \Rightarrow A = \frac{h\sqrt{\beta}}{L\sqrt{2m\pi}}$, $dp(E_x) = \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\beta E_x}}{\sqrt{E_x}} dE_x$.	0,5 1 0,5
8)	$\langle E_x \rangle = \int_0^{+\infty} E_x dp(E_x) = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} \int_0^{+\infty} E_x \frac{\exp(-\beta E_x)}{\sqrt{E_x}} dE_x$, on $x = \beta E_x$ et $dE_x = \frac{dx}{\beta}$ donc $\langle E_x \rangle = \frac{1}{\beta\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \sqrt{x} \exp(-x) dx = \frac{1}{\beta\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow \langle E_x \rangle = \frac{1}{2\beta} = \frac{1}{2} k_B T$.	1
9)	$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi(x)\varphi(y)\varphi(z) = E \varphi(x)\varphi(y)\varphi(z)$ Devisons les deux membres par $\varphi(x)\varphi(y)\varphi(z)$ $\frac{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x)}{\varphi(x)} + \frac{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \varphi(y)}{\varphi(y)} + \frac{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \varphi(z)}{\varphi(z)} = E$ constantes $\frac{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x)}{\varphi(x)} = E_x$, $\frac{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \varphi(y)}{\varphi(y)} = E_y$, $\frac{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \varphi(z)}{\varphi(z)} = E_z$	1 1,5
	Enfinement $E = E_x + E_y + E_z$	0,5
10)	a) En considérant que les directions de l'espace x, y , ou z sont équivalentes : $E = E_x + E_y + E_z = (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \frac{\hbar^2}{8mL^2}$	1
	b) En utilisant le résultat de la question 4) $\varphi(x, y, z) = \left(\frac{2}{L}\right)^{3/2} \sin\left(\frac{n_x \pi}{L}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{L}\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{L}\right)$	1
11)	$\langle E_x \rangle = \langle E_y \rangle = \langle E_z \rangle$, puisque $\langle E_x \rangle = \frac{1}{2} k_B T$ donc $\langle E \rangle = 3 \langle E_x \rangle = \frac{3}{2} k_B T$	0,5 0,5
12)	$U = N_A \langle E \rangle = \frac{3}{2} N_A k_B T = \frac{3}{2} RT \Rightarrow C_{vm} = \frac{dU}{dT} = \frac{3}{2} R$ $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3} = 1,67 \neq 1,4$	0,5 0,5 0,5 0,5 0,5
13)	a) $E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{J^2}{2I}$	0,5
	b) Cette énergie est une fonction quadratique de la variable ω . Selon le théorème d'équipartition d'énergie $\langle E_{rot} \rangle = \frac{1}{2} k_B T$.	1
14)	Chaque degré de liberté contribue par $\frac{1}{2} k_B T$	1 0,5
15)	$U = U_{trans} + U_{rot} = \frac{3}{2} RT + RT = \frac{5}{2} RT$	1 1

16)	$C_{v_m} = \frac{5}{2}R$ et $C_{p_m} = \frac{7}{2}R$	$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{7}{5} = 1,4$	0,5 0,5 0,5
17)	a) $\Delta E = \frac{\varepsilon}{2}(1 \times 2 - 0) = \varepsilon$, $\frac{N_1}{N_0} = \exp\left(\frac{-\Delta E}{k_B T}\right) = \exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T}\right) = e^{-\frac{\varepsilon}{k_B T}}$, $T_{rot} = \frac{\varepsilon}{k_B}$ est en Kelvin. b) Aux basses températures $T \ll T_{rot}$, $\frac{N_1}{N_0} \ll 1$ le niveau $j=0$ est peuplé très majoritairement. c) Les molécules sont pratiquement toutes dans l'état $j=0$, c-à-d qu'elle ne tournent pas $E_{rot} = 0 \Rightarrow U_{rot} = 0$ alors $U = \frac{3}{2}RT$ et $H = \frac{5}{2}RT$. d) $C_{v_m} = \frac{3}{2}R$ tant que $T \ll T_{rot}$ d'où l'allure de la courbe $C_{v_m}(T)$ à basse température. e) A.N $T_{rot} = \frac{\varepsilon}{k_B} = \frac{\hbar^2}{2ma^2k_B} = 5,7K$.		0,5 1 0,5 0,5 0,5 0,5 0,5
II-	Modèle de l'atmosphère isotherme		
18)	$e_p(z) = mg_0 z$		1
19)	$dp(z) = K \exp\left(-\frac{mg_0 z}{k_B T}\right) dz = K \exp\left(-\frac{Mg_0 z}{RT}\right) dz$ $\int dp(z) = 1 = \int_0^{+\infty} K \exp\left(-\frac{Mg_0 z}{RT}\right) dz \Rightarrow K \frac{RT}{Mg_0} = 1$	$K = \frac{1}{H} \Rightarrow dp(z) = \frac{1}{H} \exp\left(-\frac{z}{H}\right) dz$ H homogène à une longueur, $H = 8,8km$	1 0,5 0,5
20)	$\langle z \rangle = \int_0^{+\infty} \frac{z}{H} \exp\left(-\frac{z}{H}\right) dz$ par intégration par partie $\langle z \rangle = H$.		1
21)	$\int_0^{+\infty} dN(z) = N = \alpha \int_0^{+\infty} dp(z) \Rightarrow N = \alpha \Rightarrow n(z) = \frac{dN}{dz} = \frac{N}{H} \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$.		0,5 0,5
22)	a) La tranche a pour volume $dV = S dz$, elle contient $dN(z) = n(z)S dz$ molécules soit $\frac{n(z)dV}{N_A}$ moles, l'équation d'état des gaz parfaits $P(z)dV = \frac{n(z)dV}{N_A} RT \Rightarrow P(z) = n(z) \frac{RT}{N_A}$. b) $P(z) = \frac{RT}{N_A} \frac{N}{H} \exp\left(-\frac{z}{H}\right) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$; $P_0 = \frac{RT}{N_A} \frac{N}{H}$. $P(z = 8850) = 354 \times 10^2 Pa$		0,5 0,5 1 0,5
23)	$g(z) = g_0 \left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^{-2} = g_0 \left(1 - 2 \frac{z}{R_T}\right)$; $\bar{P} = -m\bar{g} = -\frac{de_p(z)}{dz} = -\frac{d}{dz} mg_0 \left(1 - 2 \frac{z}{R_T}\right) \Rightarrow e_p(z) = mg_0 \left(z - \frac{z^2}{R_T}\right)$.		1 1
24)	La loi des gaz parfait appliquée à la tranche de volume $dV = S dz$ et de masse δm s'écrit $PdV = nRT = \frac{\delta m}{M} RT \Rightarrow P(z) = \frac{\delta m}{dV} \frac{RT}{M} = \rho(z) \frac{RT}{M} \Rightarrow \rho(z) = P(z) \frac{M}{RT}$ $\Rightarrow \rho(0) = P(0) \frac{M}{RT} = \frac{P_0 M}{RT} = 1,21 kg \cdot m^{-3}$		1 1
25)	$S P(z) - S P(z+dz) - \rho(z)S dz g(z) = 0 \Rightarrow \frac{dP}{dz} = -\rho(z)g(z) \Rightarrow \frac{dP}{dz} = -P(z) \frac{M}{RT} g(z)$ $Ln(P) = -\frac{Mg_0}{RT} \left(z - \frac{z^2}{R_T}\right) + P_0$ donc $P = P_0 \exp\left(-\frac{mg_0}{k_B T} \left(z - \frac{z^2}{R_T}\right)\right) \Rightarrow P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{e_p(z)}{k_B T}\right)$		0,5 0,5 1 0,5

III- Modèle de l'atmosphère isentropique			
26)	$PV^\gamma = cte$ Pour le volume $dV = S dz$ de masse δm : $P(z)(dV(z))^\gamma = P_0 dV_0^\gamma$.	$\rho(z) = \frac{\delta m}{dV(z)} \Rightarrow dV(z) = \frac{\delta m}{\rho(z)}, dV_0 = \frac{\delta m}{\rho_0}$, $\delta m = cte$ on obtient $P(z)\rho(z)^{-\gamma} = P_0\rho_0^{-\gamma}$.	0,5 1
27)	$\frac{dP}{dz} = -\rho(z)g_0$ et $\rho(z) = \rho_0 \left(\frac{P(z)}{P_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$ donc $\frac{dP}{dz} = -g_0\rho_0 \left(\frac{P(z)}{P_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \Rightarrow P^{-\frac{1}{\gamma}} dP = -\rho_0 g_0 P_0^{-\frac{1}{\gamma}} dz$ en intégrant cette équation 0 à z on obtient : $\frac{P^{-\frac{1}{\gamma}+1}}{-\frac{1}{\gamma}+1} - \frac{P_0^{-\frac{1}{\gamma}+1}}{-\frac{1}{\gamma}+1} = -\rho_0 g_0 P_0^{-\frac{1}{\gamma}} z \Rightarrow P(z)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = P_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) \rho_0 g_0 P_0^{-\frac{1}{\gamma}} z \Rightarrow P(z) = P_0 \left(1 - \frac{(\gamma-1)\rho_0 g_0}{\gamma P_0} z\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$	0,5 0,5 1	
28)	L'épaisseur de l'atmosphère : $P(z) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\rho_0 g_0}{P_0} z = 0, z_{max} = \frac{\gamma P_0}{(\gamma-1)\rho_0 g_0} = 29,5 km$.	0,5 0,5	
29)	On a $PV^\gamma = P_0 V_0^\gamma$ et $PV = nRT \Rightarrow P(z)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T(z) = P_0^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_0 \Rightarrow T(z) = T_0 \left(\frac{P_0}{P(z)}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$ $\Rightarrow T(z) = T_0 \left(1 - \frac{(\gamma-1)\rho_0 g_0}{\gamma P_0} z\right) = T_0 - \frac{(\gamma-1)Mg_0}{\gamma R} z ; \frac{dT}{dz} = -\frac{(\gamma-1)Mg_0}{\gamma R} = -10 K \cdot km^{-1}$.	0,5 0,5 0,5 0,5	
30)	$T(z=8850) = T_0 + \frac{dT}{dz} z = 288 - 10 \times 8,85 = 199,5 K = -73,5^\circ C ; P(z=8850) = 290 \times 10^2 Pa < P_{isotherme}$ La pression dans le modèle isentropique et la température diminue plus rapidement.	0,5 0,5 0,5	
IV- Modèle de l'atmosphère polytropique			
31)	a) $\rho(z) = P(z) \frac{M}{RT(z)} = P(z) \frac{M}{R(T_0 - az)}$. b) $\frac{dP}{dz} = -g_0 P(z) \frac{M}{R(T_0 - az)} \Rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{Mg_0}{R(T_0 - az)} dz \Rightarrow \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = \frac{Mg_0}{Ra} \ln\left(\frac{T_0 - az}{T_0}\right)$ soit $\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = \ln\left(\frac{T_0 - az}{T_0}\right)^{\frac{Mg_0}{Ra}}$ donc : $\frac{P}{P_0} = \left(\frac{T_0 - az}{T_0}\right)^{\frac{Mg_0}{Ra}} \Rightarrow P(z) = P_0 \left(1 - \frac{a}{T_0} z\right)^{\frac{Mg_0}{Ra}} \Rightarrow b = \frac{a}{T_0}$ et $\eta = \frac{Mg_0}{Ra}$	0,5 0,5 0,5 0,5	
32)	Modèle isotherme $bz \ll 1$: $P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right) = P_0 \left(1 - \frac{z}{H}\right) = P_0 \left(1 - \frac{Mg_0}{RT_0} z\right)$ Modèle Polytropique $bz \ll 1$: $P(z) = P_0 (1 - bz)^\eta = P_0 (1 - \beta bz) = P_0 \left(1 - \frac{Mg_0}{RT_0} z\right)$ Au voisinage de la Terre les deux modèles coïncident	1 1 0,5	
33)	On a $P(z) = P_0 (1 - bz)^\eta$ et $\rho(z) = P(z) \frac{M}{R(T_0 - az)} = P_0 \left(1 - \frac{a}{T_0} z\right)^\eta \frac{M}{RT_0 \left(1 - \frac{a}{T_0} z\right)} = \frac{M}{RT_0} P_0 \left(1 - \frac{a}{T_0} z\right)^{\eta-1}$ $\rho_0 = \frac{P_0 M}{RT_0}, \rho(z) = \rho_0 \left(1 - \frac{a}{T_0} z\right)^{\eta-1}$ et $P(z) = P_0 \left(1 - \frac{a}{T_0} z\right)^\eta \Rightarrow P(z)\rho(z)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = P_0 \rho_0^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \Rightarrow k = \frac{\eta}{\eta-1}$	0,5 0,5	
34)	On a $\eta = \frac{Mg_0}{Ra} \Rightarrow a = \frac{Mg_0}{R\eta} = 5,79 \times 10^{-3} K \cdot m^{-1}$ et $b = \frac{a}{T_0} \Rightarrow b = 2,01 \times 10^{-5} m^{-1}$. $T(z) = T_0 - az \Rightarrow T(10km) = 230 K = -42,9^\circ C$ Qui est inférieure mais proche de la température mesurée $T = -56^\circ C$. Pour améliorer le modèle il faut tenir compte de la dynamique de l'atmosphère ainsi que d'autre phénomènes comme l'effet de serre.	0,5 0,5	

III- Quantification de l'énergie		
13)	<p>a) La particule étant isolée, son énergie est constante : $E = E_c = \frac{p_x^2}{2m} = cte \Rightarrow p_x = cte$</p> <p>b) $\Delta p_x = \sqrt{\langle p_x^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2}$ et $\langle p_x \rangle = 0$ car les deux directions sont équiprobables donc $\Delta p_x = \sqrt{\langle p_x^2 \rangle} = p_x$ car $p_x = cte$ donc $\langle p_x^2 \rangle = p_x^2$</p> <p>c) $\Delta x \sim L$, l'inégalité de Heisenberg s'écrit $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \Rightarrow \Delta x^2 \cdot \Delta p_x^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}$ c'-à-d</p> <p>$L^2 \cdot p_x^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} \Rightarrow L^2 \cdot 2mE \geq \frac{\hbar^2}{4} \Rightarrow E \geq \frac{\hbar^2}{8mL^2}$ donc $E_{min} = \frac{\hbar^2}{8mL^2}$. L'énergie minimale de la particule quantique confinée dans la cavité n'est pas nulle (contrairement au modèle classique) E_{min} croît quand L diminue.</p>	0,5 0,5 1 0,5 0,5
14)	<p>Relation de De Broglie $p_x = \frac{h}{\lambda}$ et $L = n \frac{\lambda}{2} \Rightarrow p_x = n \frac{h}{2L}$ puisque $E = \frac{p_x^2}{2m} = n^2 \frac{h^2}{8mL^2}$</p> <p>$E = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \Rightarrow E_{min} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$</p>	0,5 1 0,5
15)	<p>Dans la question 13) $E_{min1} = \frac{\hbar^2}{8mL^2}$ et dans 14) $E_{min2} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} = 4\pi^2 E_{min1}$, les deux résultats sont de même ordre de grandeur à $4\pi^2$ près. Pour Déterminer la valeur exacte de E_{min} et trancher entre les deux méthodes il faut résoudre l'équation de Schrödinger relative à une particule confinée dans la cavité.</p>	0,5 0,5
Problème 2		65
I- Etude quantique-statistique		
1)	<p>$\Psi(x,t) ^2$: densité de probabilité de présence de la particule dans $[x, x+dx]$.</p> <p>$\Psi(x,t) ^2 = \varphi(x) ^2$ est indépendant du temps donc l'état est stationnaire.</p> <p>φ vérifie l'équation : $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + V(x) \varphi(x) = E_x \varphi(x)$. Pour $x \in [0, L]$, l'équation devient</p> <p>$\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + \frac{2mE_x}{\hbar^2} \varphi(x) = 0 \Rightarrow \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + k_x^2 \varphi(x) = 0$</p>	0,5 0,5 1
2)	<p>$\varphi(x) = Ae^{ik_x x} + Be^{-ik_x x}$. A et B deux constantes. Condition aux limites :</p> <p>$\varphi(x=0) = 0 \rightarrow A+B=0$. Ce qui donne : $\varphi(x) = D \sin(k_x x)$, $D = 2iA$.</p>	0,5 0,5
3)	<p>La condition $\varphi(x=L) = 0 \rightarrow \sin(k_x L) = 0$ donc $k_x = \frac{n_x \pi}{L}$, $n_x \in \mathbb{N}^*$.</p> <p>$E_x = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m} = n_x^2 \frac{\hbar^2}{8mL^2}$. L'énergie de la particule est quantifiée et on retrouve le même résultat de la question 14-Prob. 1</p>	0,5 0,5 0,5
4)	<p>La normalisation de φ : $\int_0^L \varphi(x) ^2 dx = 1 \rightarrow D ^2 \frac{L}{2} = 1 \rightarrow D = \sqrt{\frac{2}{L}}$. $\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(k_x x)$.</p>	1
5)	<p>a) $n_1 = \frac{2L\sqrt{2mk_B T}}{h} = \frac{2L\sqrt{2M RT}}{N_A h}$, $n_2 = n_1 \sqrt{1,01}$. A.N. $n_1 = 6,25 \times 10^9$, $n_2 = 6,28 \times 10^9$.</p>	1 0,5 0,5

$$n_1^2 = \frac{8mL^2 E}{h^2} \rightarrow n = \frac{2L}{h} \sqrt{2mE}$$

	c) Il y a plus de 10^7 niveaux d'énergie entre deux niveaux très proches $\Delta E = 0,01 k_B T = 17 \times 10^{-23} J$. Les niveaux sont très serrés donc on peut considérer que l'énergie est continue.	1 0,5	
6)	$n_x = \frac{2L\sqrt{2mE_x}}{h}, \quad w(E_x) = \frac{dn_x}{dE_x} = \frac{L\sqrt{2m}}{h\sqrt{E_x}}$	0,5 0,5	
7)	$dP(E_x) = A \frac{L\sqrt{2m}}{h\sqrt{E_x}} \exp(-\beta E_x) dE_x, \quad \int_0^\infty dP(E_x) = 1 \Rightarrow A \int_0^\infty \frac{L\sqrt{2m}}{h\sqrt{E_x}} \exp(-\beta E_x) dE_x = 1$ on pose $x = \beta E_x$ $A \frac{L\sqrt{2m}}{h\sqrt{\beta}} \int_0^\infty \frac{\exp(-x) dx}{\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow A \frac{L\sqrt{2m}}{h\sqrt{\beta}} \sqrt{\pi} = 1 \Rightarrow A = \frac{h\sqrt{\beta}}{L\sqrt{2m\pi}}$ $dP(E_x) = \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\beta E_x}}{\sqrt{E_x}} dE_x$	0,5 1 0,5	
8)	$\langle E_x \rangle = \int_0^\infty E_x dP(E_x) = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} \int_0^\infty E_x \frac{\exp(-\beta E_x)}{\sqrt{E_x}} dE_x$ on $x = \beta E_x$ et $dE_x = \frac{dx}{\beta}$ donc $\langle E_x \rangle = \frac{1}{\beta\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{x} \exp(-x) dx = \frac{1}{\beta\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow \langle E_x \rangle = \frac{1}{2\beta} = \frac{1}{2} k_B T$	1	
9)	$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi(x)\varphi(y)\varphi(z) = E \varphi(x)\varphi(y)\varphi(z)$ Dévisons les deux membres par $\varphi(x)\varphi(y)\varphi(z)$ $\frac{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x)}{\varphi(x)} + \frac{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \varphi(y)}{\varphi(y)} + \frac{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \varphi(z)}{\varphi(z)} = E$ fonction de x fonction de y fonction de z constante	La seule configuration possible est que chacune des fonctions de x , y et z soit égale à une constante, que l'on choisit être respectivement E_x , E_y et E_z . On a donc 3 fois un problème unidimensionnel qui se ramène à la question 3 $\frac{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x)}{\varphi(x)} = E_x, \quad \frac{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \varphi(y)}{\varphi(y)} = E_y, \quad \frac{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \varphi(z)}{\varphi(z)} = E_z$	1 1,5
	Finalement $E = E_x + E_y + E_z$	0,5	
10)	a) En considérant que les directions de l'espace x , y , ou z sont équivalentes : $E = E_x + E_y + E_z = (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \frac{\hbar^2}{8mL^2}$	1	
	b) En utilisant le résultat de la question 4) $\varphi(x, y, z) = \left(\frac{2}{L}\right)^{3/2} \sin\left(\frac{n_x \pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{L} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{L} z\right)$	1	
11)	$\langle E_x \rangle = \langle E_y \rangle = \langle E_z \rangle$, puisque $\langle E_x \rangle = \frac{1}{2} k_B T$ donc $\langle E \rangle = 3 \langle E_x \rangle = \frac{3}{2} k_B T$	Ce résultat correspond au théorème d'équipartition d'énergie : les particules ont 3 degrés de liberté quadratiques.	0,5 0,5
12)	$U = N_A \langle E \rangle = \frac{3}{2} N_A k_B T = \frac{3}{2} RT \Rightarrow C_{vm} = \frac{dU}{dT} = \frac{3}{2} R$	$H = U + PV = \frac{5}{2} RT \Rightarrow C_{pm} = \frac{dH}{dT} = \frac{5}{2} R$ $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3} = 1,67 \approx 1,4$	0,5 0,5 0,5 0,5
13)	a) $E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{J^2}{2I}$	b) Cette énergie est une fonction quadratique de la variable ω . Selon le théorème d'équipartition d'énergie $\langle E_{rot} \rangle = \frac{1}{2} k_B T$	0,5 1
14)	Chaque degré de liberté contribue par $\frac{1}{2} k_B T$	$\langle E_{rot} \rangle = 2 \times \frac{1}{2} k_B T = k_B T \Rightarrow U_{rot} = N_A k_B T = RT$	1 0,5
15)	$U = U_{trans} + U_{rot} = \frac{3}{2} RT + RT = \frac{5}{2} RT$	$H = U + PV = \frac{7}{2} RT$	1 1
16)	$C_{vm} = \frac{5}{2} R \text{ et } C_{pm} = \frac{7}{2} R$	$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{7}{5} = 1,4$	0,5 0,5 0,5