



Concours Mathématiques et Physique Epreuve de Mathématiques II

Date: Samedi 13 Juin 2015 Heure : 8 H Durée: 3 heures Nb pages: 4

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Notations:

Dans ce problème, n et p sont deux entiers naturels non nuls. On désigne par :

- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ le \mathbb{C} -espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans \mathbb{C} .
- $GL_n(\mathbb{C})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- $0_{n,p}$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$.
- 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on note par :

- $sp(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A .
- $\det(A)$ le déterminant de A .
- $rg(A)$ le rang de A .
- P_A le polynôme caractéristique de A .
- $\bar{A} = (\bar{a}_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice conjuguée de A .
- $\ker(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) : AX = 0_{n,1}\}$.
- $\text{Im}(A) = \{AX, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})\}$.
- $R(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : M\bar{M} = A\}$.

A est dite **co-diagonalisable** s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et D diagonale tel que $A = P D \bar{P}^{-1}$.

Partie I: Etude de $R(I_n)$.

1) Soit $M \in GL_n(\mathbb{C})$, on pose $A = M\overline{M}^{-1}$. Vérifier que $A \in R(I_n)$.

2) Soit $M \in R(I_n)$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}^*$, on pose :

$$C_\alpha = \alpha M + \overline{\alpha} I_n.$$

a) Montrer que $M\overline{C_\alpha} = C_\alpha$.

b) Montrer que $\det(C_\alpha) = \alpha^n P_M(-\frac{\overline{\alpha}}{\alpha})$.

c) En déduire l'existence de $\beta \in \mathbb{C}$ tel que C_β soit inversible.

d) Calculer alors $C_\beta \overline{C_\beta}^{-1}$.

3) En déduire de ce qui précède que

$$R(I_n) = \{P\overline{P}^{-1} : P \in GL_n(\mathbb{C})\}.$$

4) (a) Vérifier que $-I_n \in R(I_n)$.

(b) Déterminer l'ensemble $\{P \in GL_n(\mathbb{C}) ; P\overline{P}^{-1} = -I_n\}$.

Partie II: Etude de $R(0_n)$.

A) 1) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

(X_1, \dots, X_k) est libre dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ si et seulement si $(\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_k)$ l'est aussi.

2) En déduire que $rg(M) = rg(\overline{M})$, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

B) 1) Montrer que, si $n = 1$, $R(0_1) = \{0_1\}$.

Dans la suite, on suppose que $n \geq 2$. Soit $M \in R(0_n)$ de rang r et $M \neq 0_n$. On note par B_r la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par :

$$B_r = \begin{pmatrix} 0_{r,n-r} & I_r \\ 0_{n-r,n-r} & 0_{n-r,r} \end{pmatrix}.$$

2) Montrer que $\text{Im}(\overline{M}) \subset \ker(M)$.

3) En déduire que $1 \leq rg(M) \leq \frac{n}{2}$.

4) Montrer que $B_r^2 = 0_n$.

5) Soit (X_1, \dots, X_r) une base de $\text{Im}(\overline{M})$.

a) Justifier l'existence de (X_1, \dots, X_r) .

b) Montrer qu'il existe une famille $(X_{r+1}, \dots, X_{n-r})$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ telle que (X_1, \dots, X_{n-r}) soit une base de $\ker(M)$.

c) Pour tout $1 \leq i \leq r$, montrer qu'il existe un élément Y_i de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $MY_i = \overline{X}_i$. On notera $Y_i = X_{n-r+i}$ pour tout $1 \leq i \leq r$.

d) Montrer que (X_1, \dots, X_n) est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

- e) En déduire que la matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les vecteurs colonnes, dans l'ordre, sont $\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n$ est inversible.
- f) Vérifier alors que $M = PB_r \overline{P}^{-1}$.
- 6) En déduire de ce qui précède que

$$R(0_n) = \{PB_r \overline{P}^{-1}; 1 \leq r \leq \frac{n}{2} \text{ et } P \in GL_n(\mathbb{C})\} \cup \{0_n\}.$$

- 7) Exemple: Montrer que, pour $n = 2$,

$$R(0_2) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -a\overline{c} & |a|^2 \\ -|c|^2 & c\overline{a} \end{pmatrix}; a, c, \lambda \in \mathbb{C} \right\}.$$

Partie III: Caractérisation des matrices co-diagonalisables.

- A) Soit M une matrice co-diagonalisable.

- 1) Montrer que $M\overline{M}$ est diagonalisable.
- 2) Montrer que $sp(M\overline{M}) \subset \mathbb{R}_+$.
- 3) Montrer que $rg(M) = rg(M\overline{M})$.

- B) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tels que $M\overline{M}$ est diagonalisable, $sp(M\overline{M}) \subset \mathbb{R}_+$ et $rg(M) = rg(M\overline{M})$.

- 1) Montrer qu'il existe une matrice $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_k \geq 0$ tels que $M\overline{M} = QD_1Q^{-1}$ où

$$D_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{n_2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_k I_{n_k} \end{pmatrix}$$

avec, pour tout $1 \leq i \leq k$, $n_i \in \mathbb{N}$ et $\sum_{i=1}^k n_i = n$.

- 2) Posons $S = Q^{-1}M\overline{Q}$.
 - a) Montrer que $S\overline{S} = \overline{S}S = D_1$.
 - b) En déduire que $SD_1 = D_1S$.
 - c) Montrer que

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & S_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & S_k \end{pmatrix}$$

où $S_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{C})$ pour tout $1 \leq i \leq k$.

d) Montrer que, si $\lambda_k > 0$, alors, pour tout $1 \leq i \leq k$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} S_i \in R(I_{n_i}).$$

e) On suppose que $\lambda_k = 0$.

i) Montrer que, pour tout $1 \leq i \leq k-1$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} S_i \in R(I_{n_i}).$$

ii) Montrer que $S_k \in R(0_{n_k})$.

iii) Montrer que $S_k = 0_{n_k}$.

f) En déduire qu'il existe une matrice diagonale D_2 et une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telles que $S = PD_2\overline{P}^{-1}$.

C) Conclure de ce qui précède que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

i) M est co-diagonalisable.

ii) $M\overline{M}$ est diagonalisable, $sp(M\overline{M}) \subset \mathbb{R}_+$ et $rg(M\overline{M}) = rg(M)$.

Exemple Dire dans chacun des cas suivants si A est co-diagonalisable? si A est diagonalisable?

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$