



Concours Mathématiques et Physique Corrigé de l'épreuve de Mathématiques II

Questions préliminaires

1. (a) • Soit $k \in \mathbb{N}$ et $X \in \ker(M - \alpha I_n)^k$. On a

$$(M - \alpha I_n)^{k+1} X = (M - \alpha I_n)(M - \alpha I_n)^k X = 0.$$

Donc $X \in \ker(M - \alpha I_n)^{k+1}$.

- La suite d'entiers naturels $(\dim \ker(M - \alpha I_n)^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par n , par suite elle est stationnaire. Ainsi,

$$\exists p \in \mathbb{N} / \forall k \geq p, \dim \ker(M - \alpha I_n)^k = \dim \ker(M - \alpha I_n)^p.$$

Puisque pour tout $k \geq p, \ker(M - \alpha I_n)^p \subset \ker(M - \alpha I_n)^k$ alors

$$\forall k \geq p, \ker(M - \alpha I_n)^k = \ker(M - \alpha I_n)^p.$$

- (b) Montrons le résultat par récurrence.

Soit $i \in \mathbb{N}^*$ et $HR(i) : \ker(M - \alpha I_n)^{k_0} = \ker(M - \alpha I_n)^{k_0+i}$.

- Initialisation : Par hypothèse, $\ker(M - \alpha I_n)^{k_0} = \ker(M - \alpha I_n)^{k_0+i}$. Donc $HR(1)$ est vraie.
- Hérédité : Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $HR(i)$ est vraie et montrons que $HR(i+1)$ est vraie.

On sait déjà que $\ker(M - \alpha I_n)^{k_0} \subset \ker(M - \alpha I_n)^{k_0+i+1}$.

Réciproquement, si $X \in \ker(M - \alpha I_n)^{k_0+i+1}$ alors

$$(M - \alpha I_n)X \in \ker(M - \alpha I_n)^{k_0+i} \underset{HR(i)}{=} \ker(M - \alpha I_n)^{k_0}.$$

Ainsi, $X \in \ker(M - \alpha I_n)^{k_0+1} = \ker(M - \alpha I_n)^{k_0}$.

- (c) Notons $\chi_M(X) = \prod_{\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(M)} (X - \lambda)^{m_\lambda}$, le polynôme caractéristique de la matrice M .

D'après le théorème de **Cayley-Hamilton**, $C^n = \ker \chi_M(M)$. De plus, d'après le lemme de décomposition des noyaux, on a

$$\ker \chi_M(M) = \bigoplus_{\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(M)} \ker(M - \lambda I_n)^{m_\lambda}.$$

D'où le résultat.

(d) Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres complexes distinctes de M .

- Supposons que M est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$. Dans ce cas, il existe une matrice $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$M = Q \text{diag}(\lambda_1 I_{m_{\lambda_1}}, \dots, \lambda_p I_{m_{\lambda_p}}) Q^{-1}.$$

Ainsi,

$$M - \lambda_1 I_n = Q \text{diag}(0_{m_{\lambda_1}(\mathbb{C})}, (\lambda_2 - \lambda_1) I_{m_{\lambda_2}}, \dots, (\lambda_p - \lambda_1) I_{m_{\lambda_p}}) Q^{-1}.$$

et

$$(M - \lambda_1 I_n)^2 = Q \text{diag}(0_{m_{\lambda_1}(\mathbb{C})}, (\lambda_2 - \lambda_1)^2 I_{m_{\lambda_2}}, \dots, (\lambda_p - \lambda_1)^2 I_{m_{\lambda_p}}) Q^{-1}.$$

D'où, $\dim \ker(M - \lambda_1 I_n) = m_{\lambda_1} = \dim \ker(M - \lambda_1 I_n)^2$.

Comme $\ker(M - \lambda_1 I_n) \subset \ker(M - \lambda_1 I_n)^2$ alors $\ker(M - \lambda_1 I_n) = \ker(M - \lambda_1 I_n)^2$.

De la même manière, on montre que $\ker(M - \lambda_i I_n) = \ker(M - \lambda_i I_n)^2$ pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

- Supposons que pour tout $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(M)$, $\ker(M - \lambda I_n) = \ker(M - \lambda I_n)^2$.

D'après la question 1-b, on a :

$$\forall \lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(M), \forall k \in \mathbb{N}^*, \ker(M - \lambda I_n) = \ker(M - \lambda I_n)^k.$$

En particulier,

$$\forall \lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(M), \ker(M - \lambda I_n) = \ker(M - \lambda I_n)^{m_{\lambda}}.$$

Ainsi, d'après la question 1-c, on a

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(M)} \ker(M - \lambda I_n).$$

La matrice M est alors diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.

2. (a) Notons $u = \sum_{k=1}^n u_k e_k$ et $v = \sum_{k=1}^n v_k e_k$. On a

$$\langle u, v \rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n u_k v_l \langle e_k, e_l \rangle = {}^t U M V,$$

avec $U = \text{Mat}_B(u)$ et $v = \text{Mat}_B(v)$.

(b) La matrice M est clairement symétrique.

Si $U \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ alors ${}^t U M U = \langle u, u \rangle > 0$ avec $u \in E \setminus \{0\}$ tel que $U = \text{Mat}_B(u)$.

3. (a) D'après le théorème spectral, la matrice S est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$. On considère alors λ une valeur propre de S et $\underline{U} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé. On a alors

$$\lambda {}^t U U = {}^t U S U = 0 \text{ et } {}^t U U \neq 0.$$

Donc, $\lambda = 0$.

(b) La matrice S est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$ et $Sp_{\mathbb{R}}(S) = \{0\}$, donc $S = 0$.

Partie I : Cas où A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ et à valeurs propres imaginaires

A-Exemple

1. On a $A^2 = -I_2$. Ainsi,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, (tA)^{2k} = (-1)^k t^{2k} I_2 \text{ et } (tA)^{2k+1} = (-1)^k t^{2k+1} A.$$

2. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(tA)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(tA)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} \right) I_2 + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) A = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

3. Soit φ une solution de (E). Il existe alors $X_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = e^{tA} X_0 = \begin{pmatrix} x \cos t - y \sin t \\ x \sin t + y \cos t \end{pmatrix}.$$

Par suite, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\|\varphi(t)\|_{\infty} \leq |x| + |y|$. La fonction φ est alors bornée sur \mathbb{R} .

B-Généralisation

1. (a) On a

$$e^{tA} V = \left(\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{t^k A^k}{k!} \right) V.$$

Comme l'application $M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^n; M \mapsto MV$ est continue car elle est linéaire sur un espace de dimension finie, alors

$$\left(\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{t^k A^k}{k!} \right) V = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\left(\sum_{k=0}^N \frac{t^k A^k}{k!} \right) V \right).$$

Par suite,

$$e^{tA} V = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^N \frac{t^k A^k}{k!} V \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^N \frac{t^k \lambda^k}{k!} V \right) = \left(\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{t^k \lambda^k}{k!} \right) V = e^{t\lambda} V.$$

- (b) Comme $\dim S_E = n$, il suffit de montrer que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ engendre S_E .

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\varphi_k \in S_E$.

Soit φ une solution quelconque de (E) . Il existe alors $X \in \mathbb{C}^n$ tel que $\varphi(t) = e^{tA} X$.

Comme (V_1, \dots, V_n) engendre \mathbb{C}^n , alors

$$X = \alpha_1 V_1 + \dots + \alpha_n V_n,$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont des scalaires.

Par suite, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\varphi(t) = \alpha_1 e^{tA} V_1 + \dots + \alpha_n e^{tA} V_n = \alpha_1 e^{t\lambda_1} V_1 + \dots + \alpha_n e^{t\lambda_n} V_n.$$

On déduit que

$$\varphi = \alpha_1 \varphi_1 + \dots + \alpha_n \varphi_n.$$

D'où le résultat.

- (c) Soit φ une solution de (E) et $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur \mathbb{C}^n .

Il existe des scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k e^{t\lambda_k} V_k.$$

Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \|\varphi(t)\| \leq \sum_{k=1}^n |\alpha_k| \|V_k\|.$$

La solution φ est alors bornée sur \mathbb{R} .

2. (a) Soit φ la solution de (E) définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = e^{tA} V_0 = e^{t\lambda} V_0.$$

Par hypothèse, la fonction φ est bornée sur \mathbb{R} . Comme $\|\varphi(t)\| = e^{t\operatorname{Re}(\lambda)} \|V_0\|$, alors $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$.

- (b) i. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{tA} w = e^{t\lambda} e^{t(A - \lambda I_n)} w = e^{t\lambda} (w + t(A - \lambda I_n)w + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I_n)^k w) = e^{t\lambda} (w + tv).$$

- ii. Par hypothèse, la solution de (E) , $\varphi(t) = e^{tA} w$ est bornée sur \mathbb{R} . Si $v \neq 0$ alors

$$\|\varphi(t)\| = e^{t\operatorname{Re}(\lambda)} \|w + tv\| = \|w + tv\| \mapsto +\infty, t \rightarrow +\infty.$$

Ce qui est absurde. Par suite, $(A - \lambda I_n)w = 0$.

On a montré alors que $\ker(A - \lambda I_n)^2 \subset \ker(A - \lambda I_n)$.

iii. D'après la question précédente, on a

$$\ker(A - \lambda I_n) \subset \ker(A - \lambda I_n)^2 \subset \ker(A - \lambda I_n).$$

Ainsi,

$$\forall \lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A), \ker(A - \lambda I_n) = \ker(A - \lambda I_n)^2.$$

D'après la question 1-d de la partie préliminaire, la matrice A est alors diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.

C-Application

1. On a

$${}^t e^A = {}^t \left(\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!} \right).$$

Par continuité de l'application linéaire $M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R}); M \mapsto {}^t M$, on a

$${}^t e^A = \lim_{N \rightarrow +\infty} {}^t \left(\sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!} \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{({}^t A)^k}{k!} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{(-A)^k}{k!} = e^{-A} = (e^A)^{-1}.$$

Par conséquent, la matrice e^A est orthogonale.

2. Soit $s \in \mathbb{R}$. On a :

$$\|e^{sA}U\|^2 = {}^t \overline{U} {}^t e^{sA} e^{sA} U.$$

Comme $sA \in AS_n(\mathbb{R})$ alors $e^{sA} \in O_n(\mathbb{R})$. Ainsi,

$$\|e^{sA}U\|^2 = {}^t \overline{U} U = \|U\|^2.$$

3. D'après la question précédente, si $A \in AS_n(\mathbb{R})$ alors les solutions de (E) sont bornées sur \mathbb{R} . Par suite, d'après la partie précédente, A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ et $Sp_{\mathbb{C}}(A) \subset \{ia, a \in \mathbb{R}\}$.

Partie II : Cas où les valeurs propres de A sont de parties réelles strictement négatives

1. Soit λ une valeur propre de A et V un vecteur propre associé. On considère φ la solution de (E) définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = e^{tA}V = e^{\lambda t}V.$$

Par hypothèse, $e^{t \operatorname{Re}(\lambda)} \|V\| = \|\varphi(t)\| \mapsto 0, t \rightarrow +\infty$.

Ainsi, $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$.

2. (a) On a

$$\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \forall k \geq m_i, (A - \lambda_i I_n)^k U_i = 0.$$

Ainsi,

$$e^{t(A-\lambda_i I_n)} U_i = \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda_i I_n)^k U_i + \sum_{k=m_i}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda_i I_n)^k U_i = \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda_i I_n)^k U_i.$$

(b) Pour $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$e^{tA} U_i = e^{t(A-\lambda_i I_n) + t\lambda_i I_n} U_i = e^{t\lambda_i} \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda_i I_n)^k U_i.$$

(c) Soit $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ et $k \in \llbracket 0, m_i - 1 \rrbracket$.

Comme l'application linéaire $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n; X \mapsto (A - \lambda_i I_n)^k X$ est continue, alors il existe une constante $C_{i,k} > 0$ telle que :

$$\forall X \in \mathbb{C}^n, \|(A - \lambda_i I_n)^k X\| \leq C_{i,k} \|X\|.$$

On pose alors $C = \max\{C_{k,i}, i \in \llbracket 1, r \rrbracket, k \in \llbracket 0, m_i - 1 \rrbracket\}$.

(d) • Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$\|e^{tA} U_i\| = \|e^{t\lambda_i} \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda_i I_n)^k U_i\| \leq e^{t\operatorname{Re}(\lambda_i)} \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{|t|^k}{k!} \|(A - \lambda_i I_n)^k U_i\|.$$

En utilisant la question précédente, on obtient

$$\|e^{tA} U_i\| \leq e^{t\operatorname{Re}(\lambda_i)} C \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{|t|^k}{k!} \|U_i\| \leq e^{t\operatorname{Re}(\lambda_i)} C \sum_{k=0}^{m_i-1} \binom{m_i-1}{k} |t|^k \|U_i\| = C e^{t\operatorname{Re}(\lambda_i)} (1 + |t|)^{m_i-1} \|U_i\|.$$

• Comme $U = U_1 + \dots + U_r$ alors

$$\|e^{tA} U\| \leq \sum_{i=1}^r \|e^{tA} U_i\| \leq \sum_{i=1}^r C e^{t\operatorname{Re}(\lambda_i)} (1 + |t|)^{m_i-1} \|U_i\|.$$

Comme $m_i \leq n$ pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, alors

$$\|e^{tA} U\| \leq C(1 + |t|)^{n-1} \left(\sum_{i=1}^r e^{t\operatorname{Re}(\lambda_i)} \right) \max_{1 \leq i \leq r} \|U_i\|.$$

(e) Comme $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} (1 + |t|)^{n-1} e^{t\operatorname{Re}(\lambda_i)} = 0$.

On déduit alors que

$$\forall U \in \mathbb{C}^n, \lim_{t \rightarrow +\infty} \|e^{tA} U\| = 0.$$

3. (a) La fonction $t \mapsto (1 + |t|)^{n-1} e^{t\operatorname{Re}(\lambda)} e^{ta}$ est continue sur \mathbb{R}_+ et tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. Donc elle est bornée sur \mathbb{R}_+ .

(b) D'après la question précédente, il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$\forall t \geq 0, (1 + |t|)^{n-1} \left(\sum_{i=1}^r e^{t \operatorname{Re}(\lambda_i)} \right) = (1 + |t|)^{n-1} \left(\sum_{i=1}^r e^{t \operatorname{Re}(\lambda_i)} \right) e^{ta} e^{-ta} \leq C_1 e^{-at}.$$

Par suite,

$$\forall U \in \mathbb{C}^n, \forall t \in \mathbb{R}_+, \|e^{tA}U\| \leq C' e^{-at},$$

avec $C' = CC_1$.

Partie III : Application à l'équation de Lyapunov

1. Soit $(U, V) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Soit $a > 0$ vérifiant $\operatorname{Re}(\lambda) < -a$ pour tout $\lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. D'après la partie précédente, on a

$$\|e^{tA}U\| \leq C_1 e^{-at} \quad \text{et} \quad \|e^{tA}V\| \leq C_2 e^{-at}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes.

Ainsi, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|\langle e^{tA}U, e^{tA}V \rangle| \leq \|e^{tA}U\| \cdot \|e^{tA}V\| \leq C_1 C_2 e^{-2at}.$$

Comme la fonction $t \mapsto e^{-2at}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $e^{-2at} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$, alors elle est intégrable sur $[0, +\infty[$.

On conclut alors que $t \mapsto \langle e^{tA}U, e^{tA}V \rangle$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et que Φ est bien définie.

2. • Il est clair que Φ est une forme bilinéaire symétrique positive.
 • Soit $U \in \mathbb{R}^n$ tel que $\Phi(U, U) = 0$. Dans ce cas, la fonction $t \mapsto \|e^{tA}U\|^2$ est continue, positive et d'intégrale nulle, donc pour tout $t \geq 0$, $e^{tA}U = 0$. En choisissant $t = 0$, on trouve que $U = 0$. Ainsi, Φ est définie.

On conclut alors que Φ est un produit scalaire sur \mathbb{R}^n .

3. • **Première méthode**

Comme Φ est bilinéaire et $\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^n} : U \mapsto U$ est différentiable alors q est différentiable et on a : $\forall U \in \mathbb{R}^n, \forall H \in \mathbb{R}^n$,

$$dq(U).H = \Phi(d\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^n}(U).H, U) + \Phi(U, d\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^n}(U).H) = \Phi(H, U) + \Phi(U, H) = 2\Phi(U, H).$$

- **Deuxième méthode**

Soit $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, U \mapsto (U, U)$. Comme $q = \Phi \circ \psi$, Φ et ψ sont différentiables alors q est aussi différentiable et on a : $\forall U \in \mathbb{R}^n, \forall H \in \mathbb{R}^n$,

$$dq(U).H = d\Phi(\psi(U)).(d\psi(U).H) = d\Phi(U, U)(H, H) = \Phi(U, H) + \Phi(H, U) = 2\Phi(U, H).$$

- **Troisième méthode**

Soit $(U, H) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. On a :

$$q(U + H) - q(U) = \Phi(U, H) + \Phi(H, U) + \Phi(H, H).$$

Par équivalence des normes en dimension finie, $\Phi(H, H) \leq \beta \|H\|^2$. Par suite,

$$\Phi(H, H) \underset{H \rightarrow 0}{=} o(\|H\|).$$

On conclut que q est différentiable et que $dq(U).H = \Phi(U, H) + \Phi(H, U) = 2\Phi(U, H)$.

4. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \langle e^{tA}U, e^{tA}U \rangle$. Comme la fonction $t \mapsto e^{tA}U$ est dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée est la fonction $t \mapsto Ae^{tA}U$ alors f est dérivable sur \mathbb{R} et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = \langle Ae^{tA}U, e^{tA}U \rangle + \langle e^{tA}U, Ae^{tA}U \rangle = 2 \langle Ae^{tA}U, e^{tA}U \rangle.$$

5. On sait que $0 \leq f(t) \leq Ce^{-2ta}$ avec $C > 0$ et $a > 0$. Par suite, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$. On déduit alors que :

$$2\Phi(U, AU) = \int_0^{+\infty} f'(t) dt = -f(0) = -\|U\|^2.$$

6. (a) On munit \mathbb{R}^n du produit scalaire Φ . En appliquant la deuxième question de la partie préliminaire, on a :

$$\forall (U, V) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \Phi(U, V) = {}^tUBV.$$

En particulier, pour tout $U \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\Phi(U, AU) = {}^tUBAU.$$

Par suite, pour tout $U \in \mathbb{R}^n$, on a

$$2\Phi(U, AU) = \Phi(U, AU) + \Phi(AU, U) = {}^tUBAU + {}^t(AU)BU = {}^tUBAU + {}^tU^tABU.$$

On conclut que, $-{}^tUU = -\|U\|^2 = 2\Phi(U, AU) = {}^tUBAU + {}^tU^tABU$.

- (b) Toujours d'après la question 2-a de la partie préliminaire, la matrice $B \in S_n^{++}$. D'après la question précédente, on a :

$$\forall U \in \mathbb{R}^n, {}^tU(BA + {}^tAB + I_n)U = 0.$$

Comme la matrice $BA + {}^tAB + I_n \in S_n(\mathbb{R})$ alors d'après la question 2-b de la partie préliminaire, $BA + {}^tAB + I_n = 0$. D'où le résultat.