
Rapport de projet Actuariat Vie

Rente viagère croissante

Elaboré par Groupe 4 :

MNEJJA Imen
NCIB Fedi
BOUKHRIS Manar
BENYAHIA Rahma
NEIFER Ahmed
ABDOULI Aziz

Encadré par :

Mr. Anis Matoussi



TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES	iii
LISTE DES ABRÉVIATIONS	iv
INTRODUCTION GÉNÉRALE	1
1 Vue d'ensemble des notions actuarielles	2
1.1 Introduction	2
1.2 Principe de la méthode de Vraisemblance :	2
1.3 Table de mortalité	5
1.3.1 Définition et utilité	5
1.3.2 Taux de mortalité q_x :	6
1.3.3 Définition :	6
1.3.4 Formule et signification :	6
1.4 Modele de Lee-Carter :	7
1.4.1 Définition :	7
1.4.2 La relation de Lee Carter avec le taux de mortalité	7
1.4.3 Procédure d'estimation :	8
1.4.3.1 Etape1 : Estimation de paramètre à partir des methodes historiques	8
1.4.3.2 Etape2 : Projection de la force de mortalité future.	9
1.5 Valeur Actuelle Probable (VAP) :	9
1.5.1 Définition :	9
1.5.2 Les Rentes Viagères :	10
1.5.2.1 Rente viagère à termes anticipés	10
1.5.2.2 Rente viagère à termes échus :	11
1.5.2.3 Rente viagère différée et temporaire	11
1.5.3 La Rente Viagère Croissante :	11
1.5.3.1 Introduction	11
1.5.3.2 Formule et signification actuarielle :	12

1.5.4	Interprétation et avantages	12
1.6	Conclusion	13
2	Applications numériques en R	14
2.1	INTRODUCTION	14
2.2	Lecture et compréhension des données	14
2.3	Taux de mortalité en fonction de l'âge : Etude de cohorte	17
2.4	Projection avec le modèle de Lee-Carter	19
2.5	Simulation des Trajectoires Projetées des Taux de Mortalité	22
2.6	Calcul de la Valeur Actuelle Probable du contrat	23
2.7	Tarification :	25
2.8	CONCLUSION	26
	CONCLUSION GÉNÉRALE	27
	BIBLIOGRAPHIE	27



LISTE DES FIGURES

2.1	Logarithme de taux de mortalité (1841 -2021) en UK	15
2.2	– Logarithme de taux de mortalité (0-110) en UK	16
2.3	Taux moratailie de la cohorte	18
2.4	Etude de l'intervalle de confiance de la cohoerte	19
2.5	Les valeurs estimées des \hat{a}_x , \hat{b}_x et \hat{k}_t du modèle avec le package StMoMo . . .	21
2.6	Simulation des Trajectoires Projetées	22
2.7	La table de survie	24
2.8	La table d'actuarielle	24



LISTE DES ABRÉVIATIONS

HMD Human Mortality Database

VAP Valeur Actuelle et Probable



INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le monde de l'actuariat vie est en constante évolution, influencé par les dynamiques démographiques et économiques. Parmi les produits d'assurance les plus sophistiqués et adaptés aux besoins modernes des retraités figure la rente viagère croissante.

Ce produit, qui offre des paiements augmentant au fil du temps, s'avère particulièrement pertinent dans un contexte où les tendances de longévité et les taux de mortalité évoluent de manière significative.

Notre projet de fin d'année vise à examiner la relation complexe entre la rente viagère croissante, la mortalité et la longévité des populations. En modélisant les variations futures des taux de mortalité pour une cohorte spécifique d'assurés, nous pouvons déterminer la valeur actuelle probable (VAP) de ce produit.

Nous nous concentrons sur un portefeuille d'assurés anglais ayant souscrit une rente viagère à l'âge de 65 ans en 2020, avec les modalités suivantes :

- Pendant les 10 premières années, l'assuré reçoit une rente annuelle de 6000 euros.
- À partir de la dixième année et pendant 5 ans, la rente augmente de 20 %.
- À partir de la quinzième année, la rente augmente de 10 % supplémentaires et reste constante jusqu'au décès de l'assuré.

Ce rapport présente notre démarche méthodologique, les résultats de nos projections et l'impact de ces projections sur la valorisation de la rente viagère croissante développée en R.

Chapitre

1

Vue d'ensemble des notions actuarielles

1.1 Introduction

Au cours de ce premier chapitre, nous nous intéressons à décrire les notions de base, dans lequel s'est déroulé notre projet .

1.2 Principe de la méthode de Vraisemblance :

La vraisemblance de l'échantillon s'exprime de la manière suivante :

$$\mathcal{L}(\theta, x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta),$$

ou f désigne la fonction de masse de probabilité ou la densité suivant la loi retenue.

L'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) de θ est la valeur de $\hat{\theta}$ qui maximise la fonction de vraisemblance $\mathcal{L}(\theta, x_1, \dots, x_n)$ par rapport à (pour un jeu d'observation donné) sur son domaine de définition. De plus, ceci est équivalent à maximiser le logarithme de la vraisemblance (appelé log-vraisemblance) :

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i, \theta)$$

On définit les fonctions de score :

$$S_j(\theta) = \frac{\partial \ln \mathcal{L}(\theta)}{\partial \theta_j} \text{ pour } j = 1, \dots, p$$

La Maximisation de $\mathcal{L}(\theta)$ se résume donc à résoudre les équations normales

$$S_j(\theta) = 0 \text{ pour } j = 1, \dots, p$$

Généralement, il n'existe pas de formules fermées pour ces équations, on les résout numériquement.

Dans le cas de données groupées, où n_j représente le nombre de données dans la classe $]c_{j-1}, c_j]$ avec $j = 1, \dots, r$ la probabilité qu'une donnée tombe dans l'intervalle $]c_{j-1}, c_j]$ est $F(c_j) - F(c_{j-1})$.

La fonction de vraisemblance est donc :

$$\mathcal{L}(\theta, x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^r [F(c_j, \theta) - F(c_{j-1}, \theta)]^{n_j}$$

On trouvera dans tout bon livre de statistique mathématique (par exemple Hogg et al.[4](2005), Saporta[5] (2006), Dagnelie[2] (2007), Dalgaard[3] (2008)) une étude détaillée des propriétés de l'estimateur du maximum de vraisemblance. Aussi nous contenterons-nous, ici, de ne présenter que les principaux résultats.

Invariance Pour toute fonction bijective g si $\hat{\theta}$ est l'EMV de θ alors $g(\hat{\theta})$ est l'EMV de $g(\theta)$ soit :

$$\hat{g}(\theta) = g(\hat{\theta})$$

Biais et efficacité asymptotique Sous des conditions de régularité, l'EMV est asymptotiquement sans biais et efficace. C'est-à-dire que si $\hat{\theta}_n$ est l'EMV de θ pour un échantillon (*i.i.d.*) de taille n , alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[\hat{\theta}_{n,i}] = \theta_i \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} V[\hat{\theta}_{n,i}] = \frac{1}{I_n(\theta)_{ii}} \quad \text{pour} \quad i \in 1, \dots, p$$

D'où **La matrice d'information de Fisher** ($I_n(\theta)$) est définie pour un paramètre (θ) de dimension $(p \times p)$. L'élément $((i, j))$ de cette matrice est donné par :

$$I_n(\theta)_{ij} = -nE \left[\frac{\partial^2 \ln f(X, \theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right]$$

ou ($f(X)$) est la fonction de densité de probabilité associée à l'échantillon (X).

Bornes de Cramer-Rao : L'élément $(I_n(\theta)^{-1})$ de la matrice d'information de Fisher est appelé la borne de Cramer-Rao.

Normalité asymptotique de l'EMV : Lorsque la taille de l'échantillon tend vers l'infini, la distribution de l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) ($\hat{\theta}$) suit une loi normale multivariée avec une moyenne (θ) et une matrice de variance-covariance $(I_n(\theta)^{-1})$, c'est-à-dire :

$$\hat{\theta}_n \sim N(\theta, I_n(\theta)^{-1})$$

Cas univarié ($p = 1$) : Dans le cas plus simple où ($p = 1$), l'EMV suit également une loi normale pour de grands échantillons, on a, pour de grands échantillons :

$$P[-Z_{\alpha/2} < ((\frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sqrt{I_n(\theta)^{-1}}}) < -Z_{\alpha/2}))]$$

où Z_{α} est le $100(1 - \alpha)$ centile d'une distribution normale standard $N(0, 1)$.

Lorsque nous souhaitons estimer la variance d'une distribution, nous utilisons souvent un intervalle de confiance. Cependant, le calcul de cet intervalle peut être complexe. Voici deux scénarios courants :

1. L'information est connue mais complexe : Si nous connaissons l'information, mais qu'elle dépend de θ d'une manière compliquée (par exemple, une distribution non standard), nous pouvons la remplacer par son estimateur $\hat{\theta}$.

$$[\hat{\theta}_n - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{I_n^{-1}(\theta_n)}, \hat{\theta}_n + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{I_n^{-1}(\theta_n)}]$$

2. Si l'espérance (moyenne) est trop compliquée à estimer, nous pouvons utiliser une moyenne empirique basée sur l'échantillon. L'information observée est donnée par :

$$\hat{I}_n(\hat{\theta}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2}{\partial^2 \theta} \ln f(i; \theta) \right) \Big|_{\theta=\hat{\theta}} = - \frac{\partial^2}{\partial^2 \theta} l(\theta; x_1, \dots, x_n) \Big|_{\theta=\hat{\theta}}$$

Ces idées se généralisent au concept d'ellipse ou d'ellipsoïde de confiance dans le cas multivarié.

En pratique, il est plutôt rare de pouvoir obtenir explicitement l'expression du maximum de la fonction de vraisemblance. Dans de tels cas, il faut avoir recours à des méthodes numériques pour résoudre les équations normales (par exemple avec la méthode de Newton-Raphson) ou alors pour directement maximiser la fonction de vraisemblance ou, plus communément, de log-vraisemblance.

1.3 Table de mortalité

1.3.1 Définition et utilité

Les tables de mortalité, également connues sous le nom de tables de survie, sont des outils essentiels pour suivre de près le destin d'une population. Elles offrent une vue détaillée des taux de décès survenant dans une population donnée sur une période définie, ainsi que des taux de survie depuis la naissance jusqu'au décès.

Ces tables sont cruciales à la fois en démographie et en actuariat, permettant d'analyser les tendances de mortalité, de prévoir les compositions démographiques futures et d'estimer les engagements financiers des assureurs envers leurs clients.

La table de mortalité représente :

- x : Présente l'âge de l'assuré à la souscription
- d_x : Le nombre de décès entre l'âge x et $x+1$

$$d_x = l_x * q_x$$

- l_x : Présente le nombre de personne survivant jusqu'à l'âge x

$$l_x = l_{x-1} * (1 - q_{x-1})$$

- L_x : Présente le nombre d'années des personnes vécues entre les âges exacts x et $x + 1$

$$L_x = l_x - 5d_x$$

— T_x :Présente le nombre d'années des personnes vécues après l'âge exact x

$$T_x = L_x + L_{x+1} + L_{x+2} + \dots$$

— e_x :Présente le nombre moyen d'années de vie restant à l'âge exact x

$$e_x = \frac{T_x}{l_x}$$

1.3.2 Taux de mortalité q_x :

1.3.3 Définition :

Le taux de mortalité q_x est une mesure du nombre de décès (en général ou dû à une cause spécifique) dans une population particulière , à l'échelle de la taille de cette population, par unité de temps.

1.3.4 Formule et signification :

Un taux de mortalité est une mesure quantitative exprimant la fréquence des décès au sein d'une population spécifique sur une période déterminée. Il permet d'évaluer l'ampleur des décès survenant dans cette population donnée, fournissant ainsi une indication de la vulnérabilité ou de la santé de cette communauté.

$$\mu_x(t) = -\frac{S'_x(t)}{S_x(t)} = \frac{f_x(t)}{S_x(t)}$$

avec la fonction de répartition :

$$F_x(t) = P(T_x < t | T_x > 0) = tq_x$$

La fonction de Survie : $S_x(t) = P(T_x > t | T_x > 0) = tp_x \cdot S_x(t) = P(T_x > t | T_x < 0)$

1.4 Modele de Lee-Carter :

1.4.1 Définition :

Le modèle Lee-Carter est un algorithme numérique largement utilisé dans les prévisions de mortalité et d'espérance de vie.

$$\mu_{x,t} = \frac{E(D_{x,t})}{E(E_{x,t})}$$

$D_{x,t}$ est le nombre de décès d'âge x pendant l'année t ,

$E_{x,t}$ est l'exposition au risque d'âge x pendant l'année t , autrement dit, le nombre moyen de personnes vivantes d'âge x observé au milieu de l'année t ,

L'idée du modèle est d'ajuster une série de taux de mortalité instantanés logarithmiques, indexés par l'âge et le temps, dans une structure paramétrique avec l'ajout de phénomènes aléatoires.

1.4.2 La relation de Lee Carter avec le taux de mortalité

D'après Lee et Carter, la relation entre la mortalité, le temps et l'âge est définie de la manière suivante :

$$\log(\mu_{x,t}) = a_x + b_t k_t + \epsilon_{x,t}$$

avec $t=1,\dots,n$ et $x = x_{\min}, \dots, x_{\max}$

— $\mu_{x,t}$ est le taux de mortalité central pour l'âge x au cours de l'année t , défini comme

$$\mu_{x,t} = \frac{D_{x,t}}{E_{x,t}},$$

— a_x représente le profil de mortalité moyen par âge, Il décrit le comportement moyen des taux instantanés de mortalité au cours du temps.

— b_x capture la variation de mortalité par âge et il explique comment les taux diminuent rapidement ou lentement en réponse au changement de κ_t :

$$\frac{d \ln(\mu_{x,t})}{dt} = b_x \frac{dk_t}{dt}$$

- k_t est l'indice temporel capturant les variations de mortalité au fil du temps, il reproduit la tendance temporelle sous-jacente, tandis que le terme b_x est considéré dans l'ordre de prendre en compte les différents effets du temps t à chaque âge.

$$\frac{d \ln(\mu_{x,t})}{dt} = k_t \frac{db_x}{dt}$$

- $\epsilon_{x,t}$ est le terme d'erreur aléatoire implique les "bruits" ou la variance des taux centraux de mortalité. Ce coefficient $\epsilon_{x,t}$ dont l'espérance $E=0$ et la variance $=\sigma^2$ reflète l'influence historique particulière de l'âge non prise en compte dans le modèle. Des contraintes sur les paramètres doivent donc venir compléter le modèle. Lee et Carter proposent de fixer la valeur des sommes des b_x et des k_t

$$\sum_{x=x_{min}}^{x=x_{max}} b_x = 1$$

$$\sum_{t=t_{min}}^{t=t_{max}} k_t = 0$$

1.4.3 Procédure d'estimation :

1.4.3.1 Etape1 : Estimation de paramètre à partir des méthodes historiques

Le but de cette étape est d'estimer par la méthode de moindres carrées en minimisant cette expression :

$$\min_{\alpha_x, \beta_x, \kappa_x} \sum_{t=1}^n \sum_{x=x_{min}}^{x_{max}} [\log(\mu_{x,t} - \alpha_x - \beta_x \kappa_1)]^2$$

La procédure se compose de la décomposition en valeur singulière (SVD) :

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \log(\mu_{x,t})$$

1.4.3.2 Etape2 : Projection de la force de mortalité future.

$$\log(\mu(x, t)) = \alpha_x + \beta_x \kappa_t$$

La deuxième étape de l'approche Lee-Carter consiste à utiliser des méthodes de séries chronologiques statistiques pour modéliser et prévoir l'indice κ_t

Lors de leur application à la mortalité aux États-Unis, ils ont constaté que, sauf pour l'épidémie de grippe de 1918, cet indice se comporte comme une marche aléatoire simple avec dérive.

$$\kappa_t = d + \kappa_{t-1} + \epsilon_t$$

La simulation des trajectoires de κ_t nous permet d'obtenir des intervalles de confiance.

A travers ce chapitre, nous avons présenté le modèle Lee Carter en identifiant la relation adéquate entre Lee Carter et le taux de mortalité. Dans le chapitre suivant, nous allons identifier les effets du taux d'intérêt sur la valeur actuelle probable d'une rente viagère Croissante.

1.5 Valeur Actuelle Probable (VAP) :

1.5.1 Définition :

La Valeur Actuelle Probable (VAP) est une mesure actuarielle utilisée pour estimer la valeur actuelle d'un ensemble de flux de trésorerie futurs, en tenant compte de l'incertitude et de la probabilité de survenance de chaque flux.

Elle est calculée en actualisant chaque flux de trésorerie futur à sa valeur actuelle en utilisant un taux d'actualisation approprié et en pondérant chaque valeur actualisée par sa probabilité d'occurrence correspondante.

La formule mathématique de la VAP est la suivante :

$$VAP = \sum_{t=1}^n \frac{P_t X_t}{(1+d)^t}$$

VAP : représente la Valeur Actuelle Probable

P_t :représente la probabilité d'occurrence du flux de trésorerie à la période t

X_t : représente le montant du flux de trésorerie à la période t

d :représente le taux d'actualisation

t :représente la période (généralement exprimée en années)

Plus simplement :

$$VAP=E(VA)=\sum_{k=0}^{\infty} F_k v^k P(C_k)$$

VA : Valeur Actuelle désigne la valeur actuelle des flux futures espérés, qui est actualisée au taux de rentabilité exigé par les investisseurs.

D'ou La Valeur Actuelle Probable est représentée par l'espérance de la valeur actuelle

F_k : une série de flux

v : facteur d'actualisation

C_k :des conditions de paiement aléatoires

1.5.2 Les Rentes Viagères :

La rente viagère est une somme d'argent versée de manière régulière à un bénéficiaire, offrant ainsi une analogie avec une retraite ou certaines pensions à vie, jusqu'au décès du bénéficiaire. En contrepartie, le capital utilisé pour financer la rente ne peut ni être récupéré, ni être transmis aux héritiers. La rente cesse généralement au décès du bénéficiaire, sauf si le contrat prévoit une clause de réversion, permettant la poursuite des versements au profit du conjoint ou d'un autre bénéficiaire désigné.

Il existe plusieurs types de rentes viagères, chacun adapté à des besoins spécifiques.

1.5.2.1 Rente viagère à termes anticipés

Une rente viagère à termes anticipés est une série annuelle de flux de l'individu à commencer d'aujourd'hui jusqu'au décès. Sa valeur actuelle probable est :

$$VAP(rente) = \sum_{k=0}^{\infty} v^k k P_x = \ddot{a}_x$$

avec

x : l'âge de l'assuré à la souscription

${}_kP_x$: Probabilité de survie est égale à $P(T > x + k | T > x)$

v^k : un facteur d'actualisation compris entre 0 et 1 est égale à $(1 + i)^{-k}$ (i : le taux d'intérêt annuel)

1.5.2.2 Rente viagère à termes échus :

Une rente viagère à termes anticipés est une série annuelle de flux de l'individu à partir de la première année jusqu'au décès. Sa valeur actuelle probable est :

$$VAP(\text{rente}) = \sum_{k=1}^{\infty} v^k {}_kP_x = \ddot{a}_x$$

La relation entre la Rente viagère à termes échus et la Rente viagère à termes anticipés est simplement :

$$a_x = \ddot{a}_x - 1$$

1.5.2.3 Rente viagère différée et temporaire

Une rente viagère différée et temporaire est une série annuelle de flux de l'individu. Elle est versée pendant une durée déterminée entre $[s; s + t]$ et s'interrompt en cas de décès du bénéficiaire si sa durée de versement n'est pas garantie. Sa valeur actuelle probable est :

$$VAP(\text{diff temp}) = \sum_{k=0}^{s+t-1} v^k {}_kP_x = {}_s|_t\ddot{a}_x$$

La rente peut être seulement temporaire si le versement de l'individu à commencer d'aujourd'hui $s=0$ et notée :

$${}_t\ddot{a}_x = {}_0|_t\ddot{a}_x$$

1.5.3 La Rente Viagère Croissante :

1.5.3.1 Introduction

La rente viagère croissante est une rente qui prévoit des paiements réguliers augmentant selon un taux déterminé à l'avance, généralement pour compenser l'érosion du pouvoir d'achat due à

l'inflation. Actuariellement, cette rente est conçue de manière à offrir une protection contre l'inflation en ajustant les montants des paiements sur une base périodique, souvent annuelle.

1.5.3.2 Formule et signification actuarielle :

Une rente viagère croissante est une série de paiements périodiques effectués à un bénéficiaire pour la durée de sa vie, avec chaque paiement augmentant selon un taux de croissance prédéterminé g . Le montant initial de la rente, R_0 , est spécifié au moment de l'achat du contrat. La formule pour le paiement de la n -ième période est :

$$R_n = R_0 * (1 + g)^n$$

avec :

R_n : est le montant du n -ième paiement.

R_0 : est le montant initial de la rente

g : est le taux de croissance périodique.

n : est le nombre de périodes écoulées depuis le début de la rente.

1.5.4 Interprétation et avantages

La VAP fournit une estimation plus précise de la valeur d'un actif ou d'un engagement financier que la simple Valeur Actuelle (VA), car elle prend en compte l'incertitude et la probabilité des flux de trésorerie futurs.

L'utilisation de la VAP présente plusieurs avantages :

- **Prise en compte de l'incertitude** : La VAP permet de modéliser l'incertitude des flux de trésorerie futurs en utilisant des probabilités. Cela la rend plus réaliste que la VA, qui suppose des flux de trésorerie certains.
- **Meilleure prise de décision** : En fournissant une estimation plus précise de la valeur d'un actif ou d'un engagement, la VAP peut aider à prendre de meilleures décisions financières.

- **Adaptabilité** : La VAP peut être facilement adaptée à différents scénarios et hypothèses, ce qui la rend flexible pour une large gamme d'applications.

1.6 Conclusion

Dans ce chapitre, on a dévoilé l'idée générale et les objectifs de notre sujet ainsi on a bien compris les tâches à réaliser par la suite. Dans le chapitre suivant, on va entamer le traitement des données et l'implémentation les méthodes.

Chapitre

2

Applications numériques en R

2.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, Nous proposons d'estimer et de projeter la mortalité d'une cohorte d'assurés anglais en utilisant le modèle Lee-Carter, afin de calculer la valeur actuelle probable (VAP) d'un produit de rente viagère croissante. Le portefeuille étudié concerne des assurés ayant souscrit un contrat à 65 ans en 2020, avec une rente initiale de 6000 euros par an, augmentant de 20 % après 10 ans et de 10 % supplémentaires après 15 ans.

Nous analyserons la VAP en fonction des taux d'intérêt et l'influence des variations de mortalité sur cette valeur.

2.2 Lecture et compréhension des données

Comme indiqué dans l'énoncé on va travailler sur un portefeuille d'un assureur composé d'assurés. Pour ce faire nous avons eu recours au site Human Mortality Database (HMD). C'est une base de données qui a été créée pour fournir des données détaillées sur la mortalité et la population. Dans le cadre de notre projet, nous nous sommes concentrés sur les données concernant l'Angleterre et qui se présentent comme ceci :

- Year : les années pour lesquelles la mortalité a été observée entre 1941-2021 .
- Age : les âges pour lesquelles la mortalité a été observée entre 0-110.
- pop : une répartition de la population anglaise selon 3 modalités : année du décès, âge du décès et genre (H/F).

- rate : les taux de mortalité observés en UK repartis selon 3 modalités : année, âge et genre (H/F).

Pour mieux analyser les données, nous commençons par tracer les logarithmes des taux de mortalité de la population Englaise âgée de 0 à 110 ans pour la période 1841-2021 :

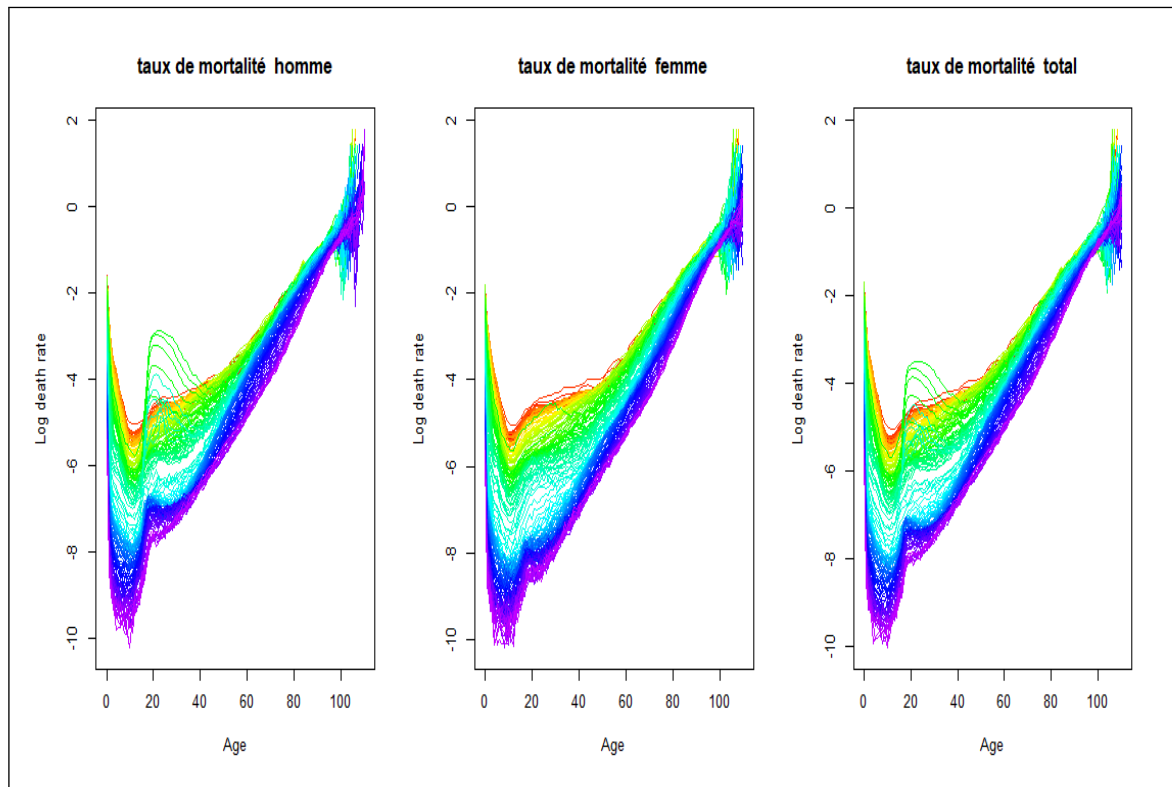


FIGURE 2.1 – Logarithme de taux de mortalité (1841 -2021) en UK

On constate tout d'abord que le taux de mortalité a baissé au cours du temps pour les deux genres. De même nous observons un taux particulièrement élevé pour les hommes âgés de 20 à 40 ans courant les périodes 1914-1918 (première guerre mondiale) et 1941-1946 (deuxième guerre mondiale). Cependant, l'augmentation du taux de mortalité est restée relativement moins importante pour les femmes âgées de 20 à 50 ans pendant les mêmes périodes. Pour confirmer les observations ci-dessus, on peut envisager le traçage des logarithmes des taux de mortalité en fonction des années pour les différentes tranches d'âge :

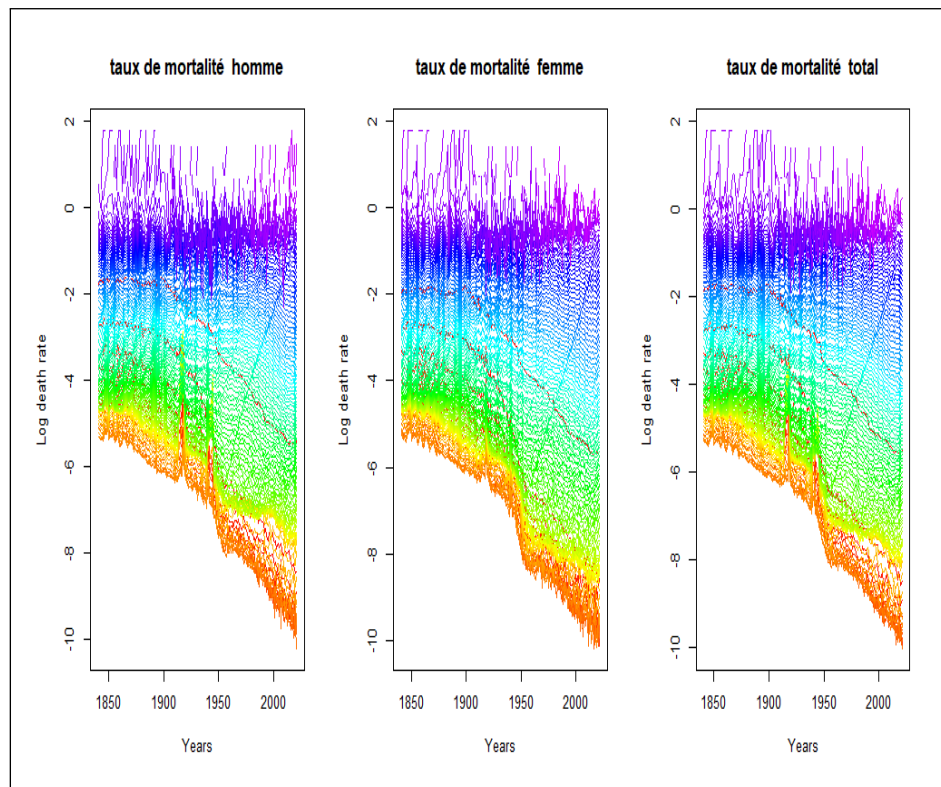


FIGURE 2.2 – Logarithme de taux de mortalité (0-110) en UK

Ce graphique illustre l'évolution des taux de mortalité de la population britannique de 1841 à 2021, en fonction de la date de naissance. Analysons cette évolution en divisant le graphique en quatre périodes historiques distinctes, chacune représentée par une couleur différente :

1. Période 1940-1945 :

- Cette période correspond aux générations qui ont vécu pendant la Deuxième Guerre mondiale.
- Le taux de mortalité infantile et celui des personnes âgées sont les plus élevés, principalement en raison des conditions de guerre.

2. Période 1945-1960 :

- Cette période inclut l'après-guerre, marquée par la crise pétrolière de 1971 et les guerres de décolonisation.
- Une hausse notable du taux de mortalité est observée entre 1940 et 1945, attribuée à un hiver extrêmement froid en 1940 et une maladie respiratoire en 1945.

3. Période 1980-2005 :

- Elle couvre les générations ayant vécu durant la guerre froide.
- Bien que le taux de mortalité soit moyen, une augmentation est notée vers 2002 due au développement des maladies cardiovasculaires et du cancer.

4. Période 2005-2021 :

- Cette période contemporaine montre une diminution du taux de mortalité.
- Les avancées scientifiques, les progrès médicaux, l'amélioration de la qualité de vie, et les efforts de lutte contre les maladies cardiovasculaires et le cancer sont des facteurs clés de cette tendance.
- Cette période est également caractérisée par la paix et la stabilité mondiale.

Facteurs historiques spécifiques :

- Deuxième Guerre mondiale : Impact direct sur les taux de mortalité en raison des conditions extrêmes et des privations.
- Après-guerre et crise pétrolière : Épisodes de mortalité accrue liés à des crises économiques et environnementales.
- Guerre froide : Apparition de nouvelles pathologies telles que les maladies cardiovasculaires et le cancer.
- Période contemporaine : Réduction du taux de mortalité grâce à des innovations médicales et une meilleure qualité de vie.

2.3 Taux de mortalité en fonction de l'âge : Etude de cohorte

En assurance vie, le principe est de suivre un individu par année de naissance pour pouvoir offrir un produit d'assurance-vie pour les individus de la même génération.

Ces trois dimensions x (âge), t (date) et tx (année de naissance) n'est pas sans rappeler la lecture des triangles de provisionnement j (développement, ou âge d'un sinistre), $i + j$ (année calendaire, ou date de paiement) et i (année de survenance, ou année de naissance du sinistre).

La génération est obtenue par $g = xt$, par exemple $1901=1902-1=1903-2=[7]$

Pour extraire une génération, nous avons défini la fonction `cohort`. Nous nous concentrons sur une cohorte d'assurés ayant souscrit un contrat à l'âge de 65 ans en 2020.

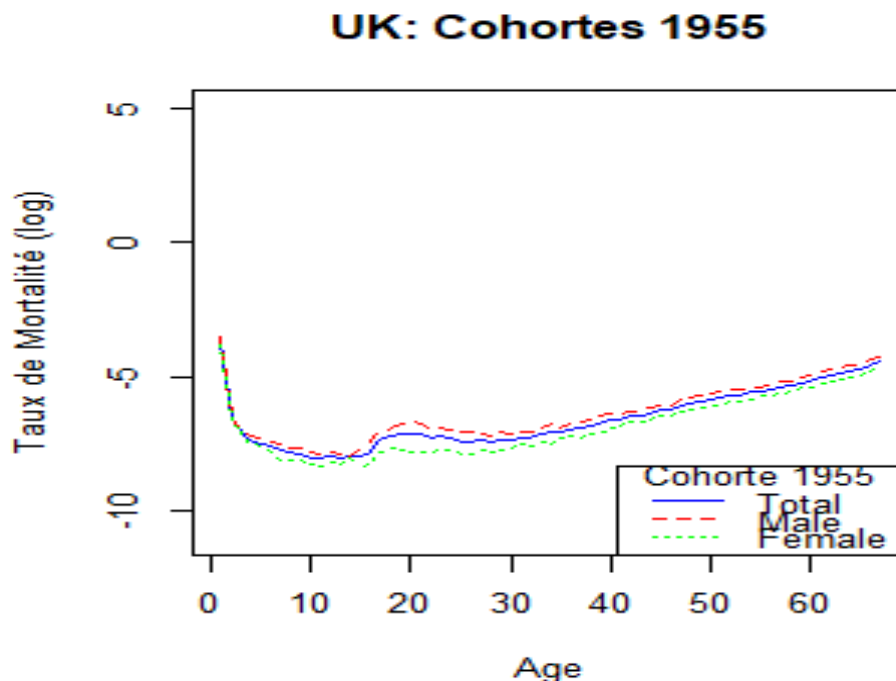


FIGURE 2.3 – Taux morataillie de la cohorte

On a constaté :

- La courbe en échelle logarithmique montre une tendance générale d'une mortalité élevée à la naissance, une baisse rapide dans l'enfance, une relative stabilité pendant l'adolescence et le début de l'âge adulte, suivie d'une augmentation progressive à partir de l'âge adulte moyen.
- Les hommes ont des taux de mortalité légèrement plus élevés que les femmes dans tous les groupes d'âge, reflétant les différences biologiques et comportementales.

Nous avons ajouté des intervalles de confiance au seuil de 95 % à l'estimation des taux de mortalité pour cette cohorte, afin de quantifier la précision de nos estimations. Ces intervalles de confiance montrent que les estimations sont plus incertaines aux extrêmes de l'âge.

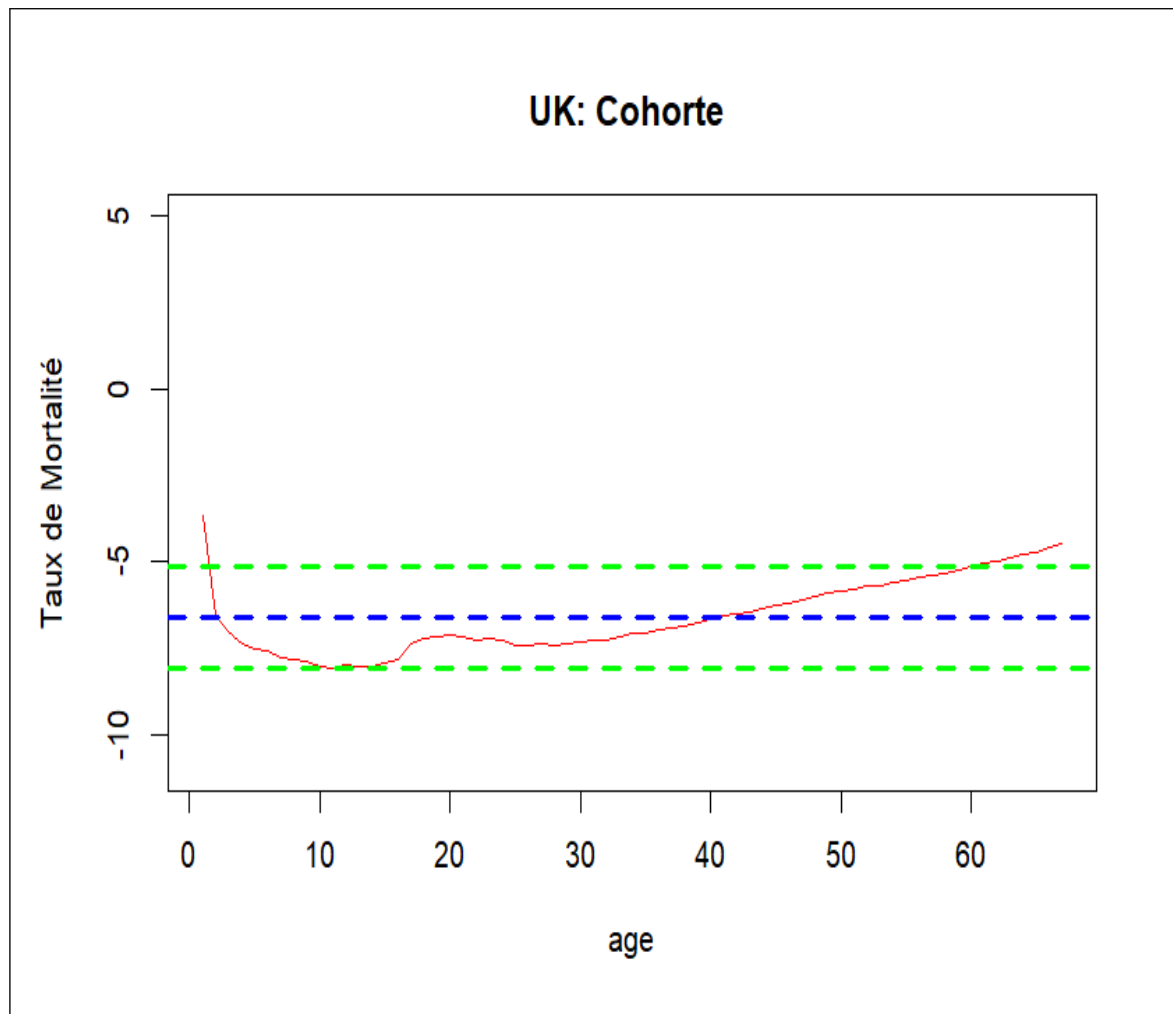


FIGURE 2.4 – Etude de l'intervalle de confiance de la cohorte

2.4 Projection avec le modèle de Lee-Carter

Estimation en utilisant le package StMoMo

Package StMoMo :

StMoMo (Stochastic Mortality Modeling) est un package R fournissant des fonctions pour spécifier et ajuster les modèles de mortalité stochastique, y compris les modèles Lee-Carter, le modèle CBD, le modèle APC et de nombreux autres modèles. L'ensemble comprend également des outils pour analyser la qualité de l'ajustement des modèles et effectuer des projections et des simulations de mortalité.[8]

Application de la méthode :

On va estimer différemment les coefficients du modèle Lee Carter avec le package StMoMo en appliquant les étapes suivantes :

- Charger les données annuelles disponibles par années d'âge dans la base HMD.
- Appliquer une fonction qui va créer un objet StMoMoData adapté à l'ajustement d'un modèle de mortalité stochastique.
- Une transformation des données StMoMo des expositions centrales en expositions initiales sera appliquée. Les expositions initiales sont calculées en ajoutant la moitié des décès aux expositions centrales en utilisant la fonction `central2initial()`.
- Assumer à avoir un seuil d'âge égale à 100 ans.
- Générer une matrice de poids en fonction d'un groupe d'âge et d'années et d'un ensemble de cohortes étant donné un poids nul. Ceci est utile pour exclure certains points de données lors de l'ajustement d'une mortalité stochastique par la fonction `genWeightMat()`.
- Estimer le modèle LC(Lee-Carter) avec le paramètre `link` qui définit la fonction de liaison et la composante aléatoire associées au modèle de mortalité. Nous avons opté pour "log" qui supposerait que les décès suivent une distribution de Poisson et utilisent un lien logarithmique tandis que "logit" supposerait que les décès suivent une distribution binomiale.

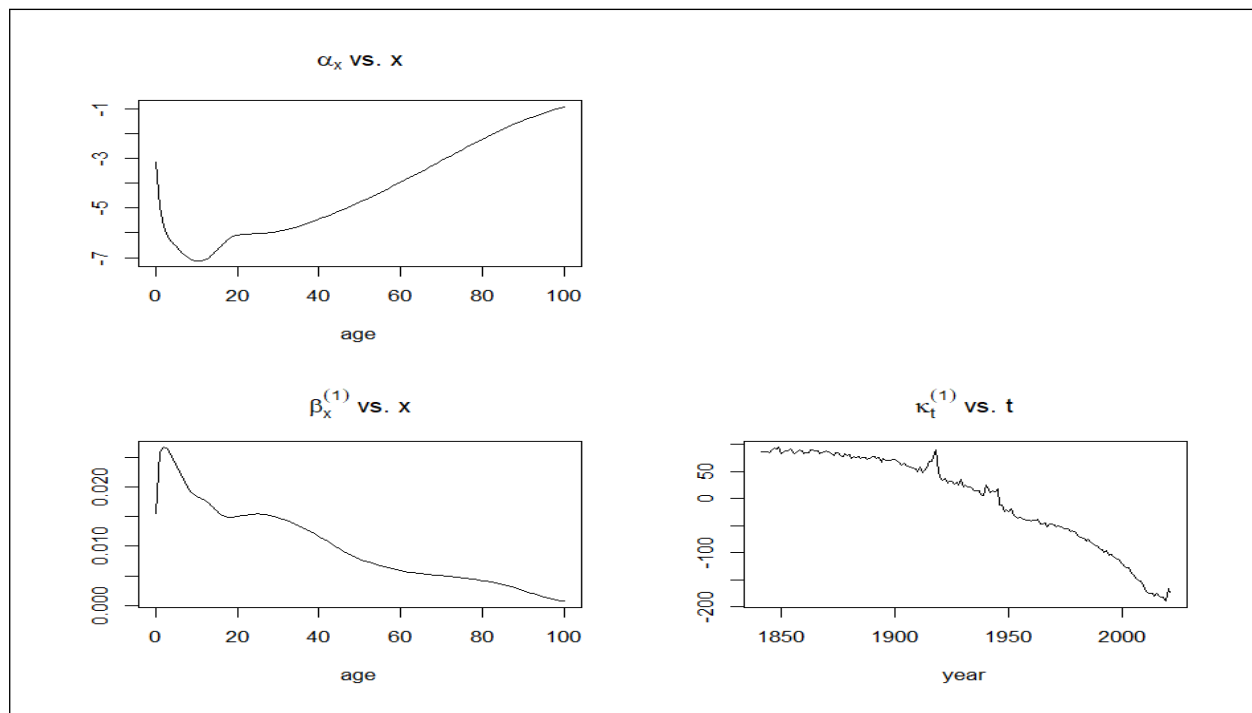


FIGURE 2.5 – Les valeurs estimées des \hat{a}_x , \hat{b}_x et \hat{k}_t du modèle avec le package StMoMo

Étape 1 : Estimation du coefficient \hat{a}_x

- La courbe du coefficient \hat{a}_x est relativement élevée chez les nouveau-nés et décroît rapidement avec l'âge, atteignant son minimum absolu vers 10 ans.
- On observe un pic de mortalité discret appelé la "bosse-accident", qui affecte principalement les jeunes d'une vingtaine d'années. Cette bosse est principalement due aux suicides et aux accidents.
- Par la suite, les logarithmes moyens des taux instantanés de mortalité augmentent presque linéairement avec l'âge.

Étape 2 : Estimation du coefficient \hat{b}_x

- Les paramètres \hat{b}_x représentent l'interaction de l'effet des années calendaires sur les taux de mortalité. Cet effet est toujours positif mais diminue avec l'âge.

- On observe également une bosse à 22 ans. En revanche, pour les âges avancés, \hat{b}_x se rapproche de zéro, rendant la diminution temporelle de la mortalité beaucoup moins perceptible.

Étape 3 : Estimation du coefficient \hat{k}_t

- Comme prévu, \hat{k}_t montre une tendance à la baisse au fil du temps.

2.5 Simulation des Trajectoires Projetées des Taux de Mortalité

Nous avons réalisé une simulation de 5000 trajectoires projetées des taux de mortalité futurs pour la cohorte de 1955 sur une période de 25 ans, à partir de 2020. Le graphique ci-dessous illustre ces trajectoires :

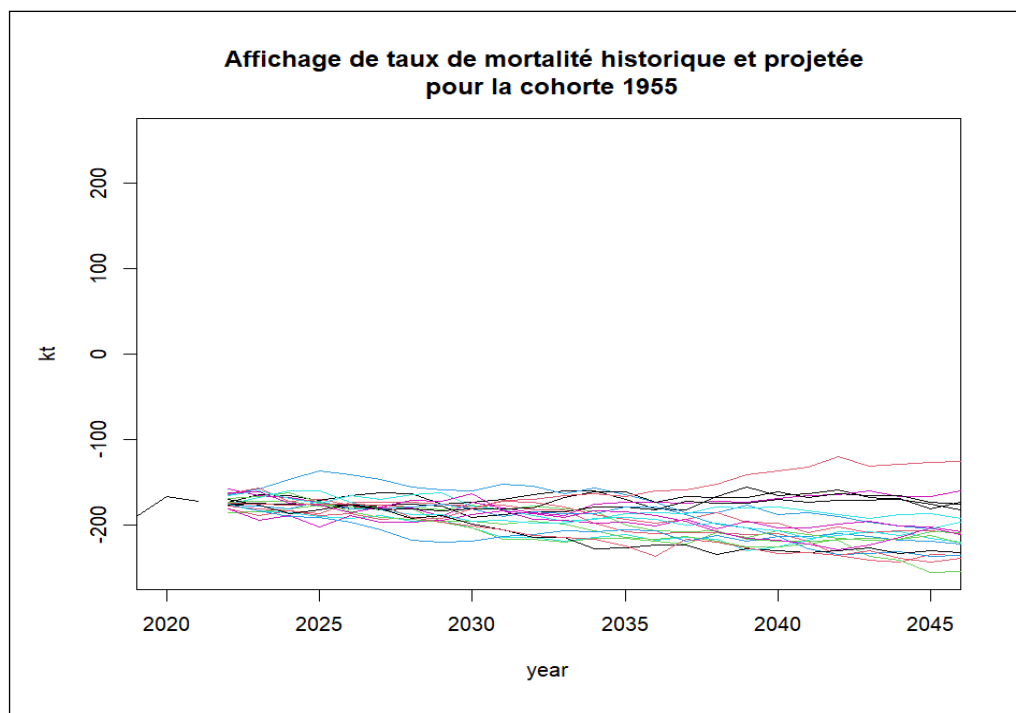


FIGURE 2.6 – Simulation des Trajectoires Projetées

Les trajectoires montrent une stabilité relative des taux de mortalité dans les premières années, suivie d'une variabilité croissante à mesure que l'horizon temporel s'allonge, à partir de 2035

environ. Cette variabilité accrue reflète l'incertitude inhérente aux projections de mortalité sur de longues périodes.

Implications pour l'Assurance :

- Le risque de longévité est un facteur crucial. Une diminution moins prononcée des taux de mortalité implique que les assurés pourraient vivre plus longtemps que prévu initialement. - Une approche prudente dans la tarification des rentes viagères est essentielle. Les assureurs doivent envisager des réserves supplémentaires pour couvrir les incertitudes liées aux projections de mortalité.

2.6 Calcul de la Valeur Actuelle Probable du contrat

Le défi principal pour un assureur vie réside dans la capacité à évaluer, au moment de la souscription d'un contrat, la valeur d'un engagement à long terme dont l'issue n'est pas certaine. Pour ce faire, il utilise la notion de valeur actuelle probable, qui combine à la fois la probabilité de réalisation et la valorisation financière au présent.

Pour calculer cette valeur, plusieurs étapes sont nécessaires :

Étape 1 : D'abord, nous avons converti les taux de mortalité en probabilités de décès pour la cohorte 1943 à l'aide de la fonction `mx2qx()` afin de construire la table de survie.

Étape 2 : Après, nous avons utilisé la fonction `probs2lifetable()` pour créer une nouvelle table de survie en précisant la génération de cette table à partir de la probabilité de décès q_x ou de survie p_x .

Life table Cohort 1955 Lifetable				
	x	lx	px	ex
1	0	10000.000	0.9746598	62.8522673
2	1	9746.598	0.9972591	63.4863630
3	2	9719.884	0.9988650	62.6608490
4	3	9708.852	0.9992338	61.7320485
5	4	9701.413	0.9993720	60.7793839
6	5	9695.321	0.9994679	59.8175788
7	6	9690.162	0.9994937	58.8494255
8	7	9685.255	0.9995509	57.8792377
9	8	9680.905	0.9995783	56.9052438
10	9	9676.823	0.9996591	55.9292530

FIGURE 2.7 – La table de survie

Étape 3 : Ensuite, nous avons créé une nouvelle table actuarielle qui est générée à partir de la table de survie avec un taux d'intérêt égale à 3 % et qui contient tous les indicateurs nécessaires à l'analyse des résultats par période.

Actuarial table Actuarial Table for Cohort 1955 interest rate 3 %							
	x	lx	Dx	Nx	Cx	Mx	Rx
1	0	10000.000	10000.000	283802.668	246.021115	1733.903	90580.911
2	1	9746.598	9462.717	273802.668	25.180637	1487.882	88847.008
3	2	9719.884	9161.923	264339.951	10.095711	1462.701	87359.127
4	3	9708.852	8884.975	255178.028	6.609391	1452.605	85896.425
5	4	9701.413	8619.580	246293.053	5.255634	1445.996	84443.820
6	5	9695.321	8363.269	237673.473	4.320591	1440.740	82997.824
7	6	9690.162	8115.358	229310.204	3.989352	1436.420	81557.084

FIGURE 2.8 – La table d'actuarielle

Étape 4 : Les rentes ont été déterminées en suivant une structure spécifique basée sur l'évolution des paiements au fil du temps.

- Pendant les 10 premières années, l'assuré reçoit une rente annuelle de 6000 euros.

- A partir de la dixième année et pendant 5 ans, la rente augmente de 20 %.
- A partir de la quinzième année, la rente augmente de 10 % supplémentaires et reste constante jusqu'au décès de l'assuré.

En se rappelant de la formule du calcul de la valeur actuelle probable :

$$VAP(\text{rente}) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)v^k {}_k p_x.$$

Dans notre cas :

- Age de début du contrat = 65
- Année de début du contrat = 2020
- Taux d'actualisation = 3%
- $X(t)$ est le montant du paiement à l'année t Tel que :
 - Pour $t < 10$: $X(t) = 6000$
 - Pour $10 \leq t < 15$: $X(t) = 6000 \times 1.20 = 7200$
 - Pour $t > 15$: $X(t) = 6000 \times 1.20 \times 1.10 = 7920$

Le résultat obtenu pour la valeur actuelle probable dans le cas d'une rente viagère croissante anticipée d'une durée de 25 ans pour une cohorte des assurés ayant un contrat en 2020 à l'âge de 65 ans égale à **17271.87**.

2.7 Tarification :

Dans cette section, nous proposons une structure de tarification pour notre produit, en tenant compte des intérêts et des besoins spécifiques du marché cible.

Une tarification efficace est cruciale pour plusieurs raisons. Elle ne se contente pas de couvrir les coûts et de générer des profits, mais elle joue également un rôle essentiel dans la perception de la valeur par les clients et dans la compétitivité sur le marché.

Dans le cas d'une prime pure unique Π versée en $t = 0$, on obtient simplement :

$$\Pi = VAP$$

Dans le cas d'une prime pure annuelle :

$$\Pi = \frac{VAP}{\ddot{a}_x}$$

avec \ddot{a}_x : la valeur actuelle des paiements annuels constants pour n années à l'âge x .

La valeur de la prime pure annuelle proposée pour notre produit est de 6000.

2.8 CONCLUSION

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Sed non risus. Suspendisse lectus tortor, dignissim sit amet, adipiscing nec, ultricies sed, dolor. Cras elementum ultrices diam. Maecenas ligula massa, varius a, semper congue, euismod non, mi. Proin porttitor, orci nec nonummy molestie, enim est eleifend mi, non fermentum diam nisl sit amet erat. Duis semper. Duis arcu massa, scelerisque vitae, consequat in, pretium a, enim. Pellentesque congue. Ut in risus volutpat libero pharetra tempor. Cras vestibulum bibendum augue. Praesent egestas leo in pede. Praesent blandit odio eu enim. Pellentesque sed dui ut augue blandit sodales. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Aliquam nibh. Mauris ac mauris sed pede pellentesque fermentum. Maecenas adipiscing ante non diam sodales hendrerit.



CONCLUSION

GÉNÉRALE

L'objectif de ce projet était d'évaluer et de projeter la cohorte des assurés anglais afin de déterminer la valeur d'un contrat d'assurance. Nous avons mené notre étude sur une population spécifique, celle du Royaume-Uni, qui se distingue par son niveau de vie élevé, entraînant une baisse du taux de mortalité.

Au cours de cette étude, nous avons abordé des questions précises visant à résoudre des problèmes d'actualité dans le domaine de l'assurance. Nous avons estimé les taux de mortalité en utilisant le modèle de Lee-Carter, largement reconnu dans le domaine de la prévision de la mortalité, dont nous avons déjà déterminé les paramètres.

De plus, nous avons simulé un nombre $N=5000$ de trajectoires projetées sur 25 ans des taux de mortalité futurs proposés et nous avons calculé la valeur actuelle probable des contrats (à la date de début du contrat) pour chacun des scénarios afin de calculer la tarification du produit.

Enfin, notre groupe a également présenté sa propre vision en proposant une méthode de tarification unisexe. En résumé, ce projet a été enrichissant pour tous les membres de l'équipe, nous offrant l'opportunité de mieux comprendre le domaine de l'actuariat vie à travers l'analyse de données réelles.



BIBLIOGRAPHIE

- [1] Charpentier, A., Dutang, C. (2012). *Actuariat Avec R*. Retrieved from https://cran.r-project.org/doc/contrib/Charpentier_Dutang_actuariat_avec_R.pdf
- [2] Dagnelie, P. (2007). *Statistique théorique et appliquée*. De Boeck Université.
- [3] Dalgaard, P. (2008). *Introductory Statistics with R*. Springer.
- [4] Hogg, R. V., Craig, A. T., & McKean, J. W. (2005). *Introduction to Mathematical Statistics* (6th ed.). Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.
- [5] Saporta, G. (2006). *Probabilités, analyse de données et statistique*. Technip.
- [6] VU Tuan Anh. *Modèle Lee Carter*. Retrieved from <https://www.institutdesactuaires.com/>
- [7] A. Matoussi. (Année 2023-2024). Actuariat - Assurance vie chapitre 3 - Mortalité stochastique
- [8] Villegas, A., Kaishev, V. K., Millossovich, P. (2015). StMoMo : An R package for stochastic mortality modelling. In 7th Australasian Actuarial Education and Research Symposium.
[https ://cran.r-project.org/web/packages/StMoMo/vignettes/StMoMoVignette.pdf](https://cran.r-project.org/web/packages/StMoMo/vignettes/StMoMoVignette.pdf)