① $\nabla_{X_0} tr(AX^2BX^{-T})$ – ?

$$[D_{X_0} tr(AX^2BX^{-T})](H) = tr([D_{X_0} AX^2](H) \cdot BX_0^{-T} + AX_0^2 \cdot$$

$$\cdot [D_{X_0} BX^{-T}](H)) = tr(([D_{X_0} AX](H) \cdot X_0 + AX_0 \cdot [D_{X_0} X](H)) \cdot BX_0^{-T} + AX_0^2 \cdot$$

$$\cdot B(-X_0^{-1} H X_0^{-1})^T) = tr(AHX_0BX_0^{-T} + AX_0HBX_0^{-T} - AX_0^2BX_0^{-T}H^TX_0^{-T}) =$$

$$= tr(X_0BX_0^{-T}AH) + tr(BX_0^{-T}AX_0H) - tr(X_0^{-T}AX_0^2BX_0^{-T}H^T) =$$

$$= tr((A^TX_0^{-}B^TX_0^T)^TH) + tr((X_0^TA^TX_0^{-}B^T)^TH) - tr(X_0^{-T}AX_0^2BX_0^{-T}H^T) =$$

$$= tr(A^TX_0^{-}B^TX_0^T\underline{H^T}) + tr(X_0^TA^TX_0^{-}B^T\underline{H}^T) - tr(X_0^{-T}AX_0^2BX_0^{-T}\underline{H^T}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla_{X_0} tr(AX^2BX^{-T}) = A^TX_0^{-}B^TX_0^T + X_0^TA^TX_0^{-}B^T - X_0^{-T}AX_0^2BX_0^{-T}}$$

② X_{mn} - rank = n $\qquad F(G) = tr(G\Omega G^T) \to \min$ на

Ω_{mm} - полож. опред. $\qquad$ подмн-ве: $GX = W$

W_{kn}

G_{km} - ?

Метод Лагранжа:

$$L = tr(G\Omega G^T) + tr(L^T(GX - W))$$

$$[D_{G_0} tr(G\Omega G^T)](H) = tr(\Omega[D_{G_0} G^T](H)\cdot G_0 + \Omega G_0^T [D_{G_0} G](H)) =$$

$$= tr(\Omega H^T G_0 + \Omega G_0^T H) = tr((G_0\Omega + G_0\Omega^T)\underline{H^T})$$

$$[D_{G_0} tr(L^T(GX - W))](H) = tr(L^T H X) = tr(L X^T \underline{H^T})$$

$\nabla_{G_0} L = G_0\Omega + G_0\Omega^T + LX^T = 0$ - условие min, т.к. $F(G)$ - гладкая, огранич. снизу.

(1) $\quad G_0 = -LX^T\underbrace{(\Omega + \Omega^T)}^{-1}$ ← обратима, т.к. квадратна и невырождена (размер $m\times m$, rank=m)

Домножим на X:

$$G_0 X = -LX^T(\Omega + \Omega^T)^{-1}X = W$$

(2) $\quad -L = W\underbrace{(X^T(\Omega+\Omega^T)^{-1}X)}^{-1}$ ← обратима, т.к. квадратна ($nm \cdot mm \cdot mn \to nn$) и невырождена (ранг X - n, ранг $(\Omega+\Omega^T)^{-1}$ - m $\Rightarrow$ rank = n)

(1), (2) $\Rightarrow$ $\boxed{G_0 = W(X^T(\Omega+\Omega^T)^{-1}X)^{-1}X^T(\Omega+\Omega^T)^{-1}}$

③ $X_1, \dots, X_n \sim \rho(x) = \frac{4x^3}{\theta^4} \mathbb{I}[x \in [0, \theta]]$, θ - неизв. парам.

А.н.о. для $\tau(\theta) = \theta^2 + \theta + 1 + \frac{1}{\theta}$ и её а.д. -?

$\mathbb{E}X = \int_0^\theta x \frac{4x^3}{\theta^4} dx = \frac{4}{5} x^5 \frac{1}{\theta^4}\Big|_{x=\theta} = \frac{4\theta}{5}$; $\mathbb{E}X^2 = \int_0^\theta x^2 \frac{4x^3}{\theta^4} dx = \frac{2\theta^2}{3}$

$\mathbb{D}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{2\theta^2}{3} - \frac{16\theta^2}{25} = \frac{2\theta^2}{75}$

Из ЦПТ $\Rightarrow \overline{X}$ - а.н.о. для $\frac{4\theta}{5}$ с а.д. $\frac{2\theta^2}{75}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{5\overline{X}}{4}$ - а.н.о. для θ с а.д. $\left(\frac{5}{4}\right)^2 \cdot \frac{2\theta^2}{75} = \frac{\theta^2}{24}$

Применим Δ-метод для $\tau(\theta)$:

$\underbrace{\tau\left(\frac{5\overline{X}}{4}\right)}_{\parallel}$ - а.н.о. для $\tau(\theta)$ с а.д. $\frac{\theta^2}{24} \cdot \left(\tau'(\theta)\big|_{x=\theta}\right)^2 =$

$= \frac{\theta^2}{24} \cdot \left(2\theta + 1 - \frac{1}{\theta^2}\right)^2 =$

$\frac{25\overline{X}^2}{16} + \frac{5\overline{X}}{4} + 1 + \frac{4}{5\overline{X}} =$

$= \frac{\theta^2}{24} \cdot \frac{(2\theta^3 + \theta^2 - 1)^2}{\theta^4} =$

$= \frac{125\overline{X}^3 + 100\overline{X}^2 + 80\overline{X} + 64}{80\overline{X}}$

$= \frac{(2\theta^3 + \theta^2 - 1)^2}{24\theta^2}$

Итого, $\boxed{\frac{125\overline{X}^3 + 100\overline{X}^2 + 80\overline{X} + 64}{80\overline{X}}}$ - а.н.о. для $\tau(\theta)$ с

а.д. $\boxed{\frac{(2\theta^3 + \theta^2 - 1)^2}{24\theta^2}}$.

④ $X_1,\dots,X_n \sim \rho_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\alpha} e^{(\beta-x)/\alpha} I\{x \geq \beta\}$

ОМП $\theta = (\alpha,\beta)$ — ?

Правдоподобие:

$$L(\alpha,\beta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha} e^{(\beta-x)/\alpha} = \frac{1}{\alpha^n} \exp\left(\frac{n\beta}{\alpha} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\alpha}\right)$$

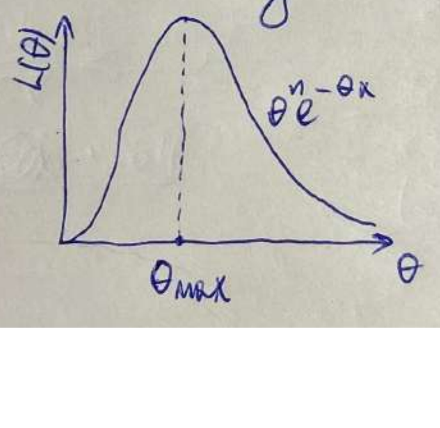
$$\ln L = -n \ln\alpha + \frac{n\beta}{\alpha} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\alpha}$$

$$\begin{cases} (\ln L)'_\alpha = -\frac{n}{\alpha} - \frac{n\beta}{\alpha^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\alpha^2} = 0 \Rightarrow -n\alpha - n\beta + \overline{X}\cdot n = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = \overline{X} \\ (\ln L)'_\beta = \frac{n}{\alpha} \neq 0, \text{ но для макс. правдоп. } \underbrace{I\{x \geq \beta\} = 1}_{\forall\beta} \Rightarrow \beta = X_{(1)} \end{cases}$$

первая порядковая статистика

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \alpha = \overline{X} - X_{(1)} \\ \beta = X_{(1)} \end{cases}}$$

Экстремум $L(\alpha,\beta)$ является максимумом, т.к. функ. правдоп. экспоненциального распр-я имеет вид:



⑤ $X \sim Ber(p)$, p – неизв.; $X_1, \dots, X_n$ – н.о.р.с.в.

$$\underbrace{\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}}_{\text{выборочное среднее } \bar{X}} \qquad \tilde{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i + 1}{n+2} \qquad \mathbb{E}X = p \quad \mathbb{D}X = p(1-p)$$

$\tilde{p}$ – апостериорная оценка с учётом 2 наблюдений, из которых одно "1", т.е. использована байесовская оценка с сопряжённым распр. Beta(2,2).

1) $\mathbb{E}\hat{p} = \mathbb{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}X_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p = \frac{np}{\cancel{n}} = \boxed{p}$ – несмещённая.

$\mathbb{E}\tilde{p} = \mathbb{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i + 1}{n+2}\right) = \frac{1}{n+2}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i + 1\right) = \boxed{\frac{np+1}{n+2}} \neq p$ – смещённая.

2) Возьмём $n = 10$:

$\mathbb{E}\tilde{p} = \frac{10p+1}{12} \Rightarrow$ при $p = 0 \to \mathbb{E}\tilde{p} = \frac{1}{12} > p$

$p = \frac{1}{2} \to \mathbb{E}\tilde{p} = \frac{1}{2} = p$

$p = 1 \to \mathbb{E}\tilde{p} = \frac{11}{12} < p$

$\Rightarrow$ $\tilde{p}$ смещена в большую сторону при $p < \frac{1}{2}$, в меньшую при $p > \frac{1}{2}$

3) $MSE_{\hat{p}} = \mathbb{E}(\hat{p} - p)^2 = \mathbb{E}\hat{p}^2 - 2\underbrace{\mathbb{E}\hat{p}}_{p}\,p + \underbrace{\mathbb{E}p^2}_{p^2} = \mathbb{E}\hat{p}^2 - p^2 \ominus$

$\mathbb{E}\hat{p}^2 = \frac{1}{n^2}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = \frac{1}{n^2}\Big(\underbrace{\sum_{\substack{i=1 \\ i=j}}^{n} \mathbb{E}X_i^2}_{n \text{ слагаемых}} + \underbrace{\sum_{\substack{i=j=1 \\ i \neq j}}^{n} \mathbb{E}X_iX_j}_{n^2-n \text{ слагаемых}}\Big) = \frac{1}{n^2}\left(np + (n^2-n)p^2\right) =$

$= \frac{p}{n} + p^2 - \frac{p^2}{n}$

одна бинар. случ. величина $(1^2 = 1, 0^2 = 0)$ две разные независ. бинар. случ. величины

$\ominus\ \frac{p}{n} + \cancel{p^2} - \frac{p^2}{n} - \cancel{p^2} = \boxed{\frac{p(1-p)}{n}}$

$MSE_{\tilde{p}} = \mathbb{E}(\tilde{p} - p)^2 = \mathbb{E}\tilde{p}^2 - 2\frac{np+1}{n+2}p + p^2 \ominus$

$\mathbb{E}\tilde{p}^2 = \frac{1}{(n+2)^2}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i + 1\right)^2 = \frac{1}{(n+2)^2}\Big(\underbrace{\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}_{np + (n^2-n)p^2} + 2\underbrace{\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}_{np} + 1\Big) =$

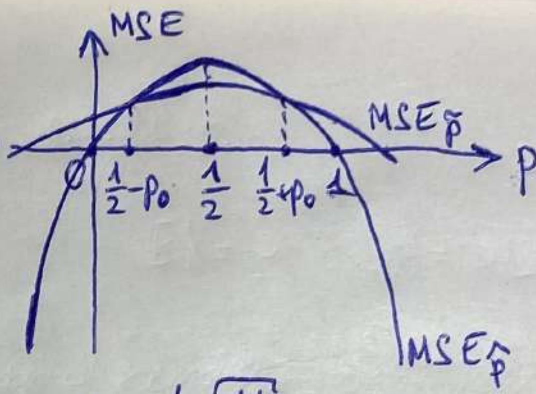
$= \frac{3np + (n^2-n)p^2 + 1}{(n+2)^2}$

$\ominus\ \frac{3np + n^2p^2 - np^2 + 1 - 2p(np+1)(n+2) + p^2(n+2)^2}{(n+2)^2} = \boxed{\frac{p(1-p)(n-4) + 1}{(n+2)^2}}$

При $n = 10$: $MSE_{\hat{p}} = \dfrac{p(1-p)}{10}$

$$MSE_{\tilde{p}} = \frac{6p(1-p)+1}{144}$$

$\Rightarrow$



С т.з. MSE при $p \in [\sim 0{,}14; \sim 0{,}86]$ лучше оценка $\tilde{p}$, при остальных p - лучше $\hat{p}$.

$$p_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{21}} \approx 0{,}72/2 = 0{,}36$$

$$\frac{1}{2} - p_0 \approx 0{,}14$$

$$\frac{1}{2} + p_0 \approx 0{,}86$$

⑥ p_1 – жарко $\quad p_1+p_2+p_3=1 \quad X_1,\dots,X_n \in \{$жарко, тепло, холодно$\}$

p_2 – тепло $\quad q[(p_1,p_2,p_3)] \propto p_1^2 p_2^3 p_3^9$ – PRIOR $\quad$ н.о.р.с.в.

p_3 – холодно

MAP-оценка для p_1, p_2, p_3 – ?

Оценка апостериорного максимума:

$$\widehat{(p_1,p_2,p_3)}_{MAP} = \arg\max_p q((p_1,p_2,p_3)\mid X_1,\dots,X_n) =$$
$$= \arg\max_p q(X_1,\dots,X_n \mid (p_1,p_2,p_3))\, q((p_1,p_2,p_3)) =$$
$$= \arg\max_p \left(p_1^{\Sigma X_{жарко}} p_2^{\Sigma X_{тепло}} p_3^{\Sigma X_{холодно}} p_1^2 p_2^3 p_3^9 \right) =$$
$$= \arg\max_p \left(p_1^{a+2} p_2^{b+3} p_3^{c+9} \right),$$ где a – кол-во "жарко" в X_n

b – "тепло"

c – "холодно"

$a+b+c=n$

$$L = \ln\left(p_1^{a+2} p_2^{b+3} p_3^{c+9}\right) = (a+2)\ln p_1 + (b+3)\ln p_2 + (c+9)\ln p_3 =$$
$$= (a+2)\ln p_1 + (b+3)\ln p_2 + (c+9)\ln(1-p_1-p_2) \to \max$$

$$\begin{cases} L'_{p_1} = \dfrac{a+2}{p_1} - \dfrac{c+9}{1-p_1-p_2} = 0 \Rightarrow p_1 = p_2 \dfrac{a+2}{b+3} \\ L'_{p_2} = \dfrac{b+3}{p_2} - \dfrac{c+9}{1-p_1-p_2} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{b+3}{p_2} - \frac{c+9}{1-p_2\frac{a+2}{b+3}-p_2} = 0 \Rightarrow (b+3) - p_2(a+2) - p_2(b+3) - (c+9)p_2 = 0$$

$$p_2 = \frac{b+3}{a+2+b+3+c+9} = \frac{b+3}{(a+b+c)+14} = \frac{b+3}{n+14} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_1 = \frac{\cancel{b+3}}{n+14} \cdot \frac{a+2}{\cancel{b+3}} = \frac{a+2}{n+14}\ ; \ p_3 = 1 - \frac{a+2}{n+14} - \frac{b+3}{n+14} = \frac{(n-a-b)+9}{n+14} = \frac{c+9}{n+14}$$

Итого, $\boxed{p_1 = \dfrac{\Sigma X_{жарко}+2}{n+14},\ p_2 = \dfrac{\Sigma X_{тепло}+3}{n+14},\ p_3 = \dfrac{\Sigma X_{холодно}+9}{n+14}}$

⑦ $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ $\quad \mathbb{E}(e^{X_1} | X_1 + X_2 = b)$ – ?

$X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$

$\mathrm{cov}(X_1, X_2) = \gamma$

По т. Байеса:

$$\rho(e^{X_1} | X_1 + X_2 = b) = \frac{\rho(e^{X_1}, X_1 + X_2 = b)}{\rho(X_1 + X_2 = b)} \quad (*)$$

$r = \frac{\mathrm{cov}(X_1, X_2)}{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{\gamma}{\sigma_1 \sigma_2}$ – коэф. корреляции.

Плотность двумерного расп-я:

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{1}{2\pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1-r^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{(X_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - r\frac{2(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(X_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right),$$

т.е. $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\gamma)$

Аналогично, можно создать распределение с пл-тью $\rho(X_1, X_1 + X_2)$.

→→ Далее идея решения:

1) Найти $\rho(X_1, X_1 + X_2 = b)$ и $\rho(X_1 + X_2 = b)$, причём $\rho(X_1, X_1 + X_2 = b) =$
2) Перейти к $\rho(e^{X_1}, X_1 + X_2 = b)$ от $\rho(X_1, X_1 + X_2 = b)$.
3) Подставить всё в исходное ур-е (*).

$= \rho(X_1, X_1 = b - X_2) =$
$= \rho(X_1 = c, X_2 = b - c)$,
где $c = \mathrm{const}$
(пользуемся св-вом, где $\mathbb{E}(X|X) = X$)