Теория игр. Домашняя работа 2

Федор Ерин

1 Задача 1

(10 баллов). Игра в числа. Вася и Петя должны загадать число в диапазоне от 20 до 50 включая концы, после этого выбирается X – минимум из двух загаданных чисел, и выдаются следующие платежи: загадавший большее число получит $X - 5$, меньшее – $X + 5$, если числа одинаковые, то каждый получит своё число. Найдите чистые равновесия Нэша в этой игре.

Решение

- Если $X_1 = X_2 = Y$, $Y \in [21, 50]$: каждый игрок получает Y, но при этом каждый захочет отклониться в меньшую сторону на 1, чтобы получить $+5$ и заработать больше.
- Если $X_1 \neq X_2$: игрок с меньшим числом будет всегда в выигрыше, так как ему всегда $+5$, нет смысла опускаться ниже, хоть и можно приблизиться к большему числу, если есть разрыв более чем на 1; при этом другой игрок получает -5 от меньшего числа, и ему всегда будет хотеться поставить либо столько же, либо меньше, чем первый.
- Если $X_1 = X_2 = 20$: оба игрока получают по 20, вниз никто не может отклониться, а повышать невыгодно никому, так как сразу получишь меньше, поэтому все довольны - это единственное чистое рановесие Нэша.

2 Задача 2

(20 баллов). Теория игр на работе. На маленькой фирме работает 10 человек. Каждый из них может работать либо старательно, либо "спустя рукава". Ни один работник не хотел бы быть уволенным. Работодатель видит качество работы каждого сотрудника и заинтересован в том, чтобы все работали старательно. Проблема заключается в том, что уволить можно не более чем одного сотрудника. Этот факт прекрасно известен работникам, они понимают, что если все будут плохо работать, то уволят только одного. И им приятнее лениться и быть уволеным с вероятностью 1/10, чем стараться. Как построить систему угроз увольнений, чтобы в равновесии каждый хотел работать старательно?

Решение

- По условию все 10 сотрудников неразличимы и находятся в равных условиях, необходимо добиться некоторого неравенства между ними и чтобы все это знали, то есть соблюдается совершенство информации. Также логично было бы добиться "каскадного"эффекта, что если кому-то одному невыгодно работать плохо, то невыгодно и другому и так далее.

- Для этого введем понятие "грейда"для сотрудника и назначим его каждому: 1 - для самого Junior специалиста, 10 - для самого Senior. Далее объявим всем, что уволим самого младшего по грейду среди плохо работающих. Тогда работнику с грейдом 1 не выгодно работать плохо, ведь его точно уволят, независимо от качества работы остальных. Грейду 2 тогда тоже не выгодно плохо работать, ведь он будет уволен как самый младший специалист, поскольку первый работает старательно. И так далее по самого старшего грейда. В итоге все работают старательно.

3 Задача 3

(15 баллов). Чистые и смешанные равновесия. В игре 3 игрока. Ниже изображены 2 матрицы платежей, условно на ход третьего игрока (In или Out).

Найдите все равновесия Нэша (чистые и смешанные).

$s_3 = In$

		Игрок 2: In	Игрок 2: Out
Игрок 1	In	1,1,1	0,0,0
	Out	0,0,0	0,0,0

$s_3 = Out$

	Игрок 2: In	Игрок 2: Out
In	0,0,0	0,0,0
Out	0,0,0	4,4,4

Решение

- Два чистых равновесия: (In, In, In), (Out, Out, Out) с платежами $(1, 1, 1)$, $(4, 4, 4)$ - при отклонении любого из игроков от своей стратегии каждый сразу получает 0 вместо 1 или 4.

- Пусть три игрока будут играть In с вероятностями (α, β, γ), а Out - $(1-\alpha, 1-\beta, 1-\gamma)$ соответственно. Для смешенной стратегии нужно сделать так, что игроку 3 не выгодно будет играть чисто In или Out, потому что игроки 1 и 2 будут играть смешанные стратегии. Аналогично для игрока 1 - против 2 и 3, и для игрока 2 - против 1 и 3. Запишем уравнения для этих трех условий и решим их относительно (α, β, γ):

$$\begin{cases} \alpha\beta = 4(1-\alpha)(1-\beta) \\ \beta\gamma = 4(1-\beta)(1-\gamma) \\ \alpha\gamma = 4(1-\alpha)(1-\gamma) \end{cases} \begin{cases} \alpha\beta = 4 - 4\alpha - 4\beta + 4\alpha\beta \\ \beta\gamma = 4 - 4\beta - 4\gamma + 4\beta\gamma \\ \alpha\gamma = 4 - 4\alpha - 4\gamma + 4\alpha\gamma \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha(\beta+4-4\beta)=4-4\beta\\ \gamma(\beta+4-4\beta)=4-4\beta\end{array}\right. \Rightarrow \alpha=\gamma$$

Тогда:

$$\alpha^2 = 4 - 8\alpha + 4\alpha^2$$
$$(3\alpha-2)(\alpha-2)=0$$
$$\alpha = \frac{2}{3}$$

В силу симметрии уравнений получаем:

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{2}{3}$$

Отсюда имеем одно смешанное равновесие:

$$(\frac{2}{3}In + \frac{1}{3}Out, \frac{2}{3}In + \frac{1}{3}Out, \frac{2}{3}In + \frac{1}{3}Out)$$

с матожидаемыми платежами $(2, 2, 2)$.

4 Задача 4

(20 баллов). Списывание на экзамене. N студентов пишут экзамен по теории игр. Каждый студент i имеет возможность списать ($s_i = 1$) или не списывать ($s_i = 0$). Все списывающие студенты будут наказаны. Однако тяжесть наказания, понесенная списывающим студентом, будет обратно пропорциональна числу списывающих. Так, например, если на списывании попался только один студент, то он может быть отчислен. Если на списывании попалась половина потока, то наказания для каждого студента будет более легким: по административным причинам, преподавателю будет трудно отчислить всех нарушителей. Выигрыш студента i будет равен $u_i(s) = 1 - C/\sum_{j=1}^{N} s_j$, если $s_i = 1$; и $u_i(s) = 0$, если $s_i = 0$. Здесь, выигрыш от списывания равен 1; суммарный объем наказания — C. Найдите чистые равновесия Нэша в этой игре.

Hint: Равновесия зависят от параметра C. Рассмотрите 4 случая:

- $C < 1$ (5 баллов);
- $1 \leq C \leq N$, если C – целое число (5 баллов);
- $1 < C < N$, если C – нецелое число (5 баллов);
- $C > N$ (5 баллов).

Решение

Действие каждого студента будет зависеть от решения остальных: если большинство списывает, то ему выгодно тоже списать, так как он получит от этого больше, чем рискует потерять, и наоборот, если никто не списывает, то есть риск потерять все, и он не будет списывать. Распишем, как стратегия студента i зависит от стратегий оппонентов:

- $s_i(s_{-i}) = 1$, если $\sum_{j \neq i} s_j > C - 1$, то есть кол-во списывающих студентов, помимо i-го, уже больше порога, при котором выигрыш студента будет 0;

- $s_i(s_{-i}) = 0$, если $\sum_{j \neq i} s_j < C - 1$, то есть недостаточно списывающих студентов, чтобы получить выигрыш больше 0;

- $s_i(s_{-i}) = 0$ или 1, если $\sum_{j \neq i} s_j = C - 1$, то есть нет разницы списывать или нет, выигрыш будет все равно 0.

Тогда, в зависимости от C имеем:

- $C < 1$: наказание слишком слабое и в любом случае выгодно списать, даже если такой студент один, все списывают $\Rightarrow$ 1 равновесие Нэша;

- $1 \leq C \leq N$ (C – целое): если никто не списывает, то никому не хочется списывать, чтобы получить наказание и либо отрицательный платеж, либо 0, если $C = 1$; если все списывают, то никому не выгодно не списывать, ведь все равно платеж 0 в худшем случае ($C = N$); если списывает лишь часть, то другим выгодно присоединиться $\Rightarrow$ 2 равновесия Нэша;

- $1 < C < N$ (C – нецелое): одному из всех невыгодно списывать, ведь наказание сделает точно платеж отрицательный, так как $C > 1$, поэтому никто не списывает; если списывает большее кол-во студентов, то остальным выгодно присоединиться вплоть до N, потому что это строго выгоднее, ведь $C < N$, поэтому все списывают $\Rightarrow$ 2 равновесия Нэша;

- $C > N$: наказание слишком суровое и даже если все будут списывать, платеж будет ниже 0, поэтому никто не списывает $\Rightarrow$ 1 равновесие Нэша.

5 Задача 5

(15 баллов). Волшебная шкатулка. Количество денег в волшебной шкатулке постоянно увеличивается! Время дискретно. В момент времени $t \in \{1; 2; 3; ...; 100\}$ там находится $2t$ рублей. Каждый период оба игрока одновременно решают потребовать денег или нет. Игра продолжается, пока кто-нибудь не потребует деньги или не наступит период $t = 100$. Если в некоторый период только один игрок потребует деньги, то он получит всю сумму, и игра закончится в этом периоде. Если оба игрока потребуют деньги в некоторый период, то игроки разделят сумму в шкатулке поровну, и игра закончится в этом периоде. Если никто не потребует деньги к моменту $t = 100$, то деньги сгорают.

Найдите равновесия по Нэшу, совершенные в подыграх.

Решение

- Решаем задачу на поиск Subgame Perfect Nash Equilibrium (SPNE). Разберем игру с конца, с самой последней подигры при $t = 100$, распишем матрицу (сгорание денег обозначим потерю для обоих -100):

	требовать	оставить
требовать	100,100	200,0
оставить	0,200	-100,-100

  Здесь единственное чистое равновесие Нэша - оба игрока требуют деньги из шкатулки.

- Рассмотрим теперь предыдущую подигру при $t = 99$. Так как следующая (последняя) подигра решена (если оба оставляют, то получат затем 100/100), то на этом шаге имеем следующую матрицу стратегий:

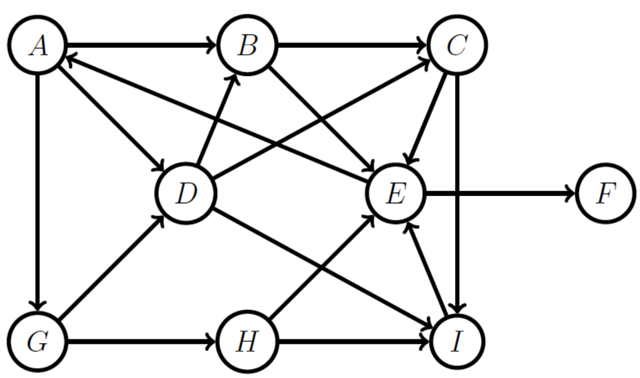
	требовать	оставить
требовать	99,99	198,0
оставить	0,198	100,100

  Здесь единственное чистое ранновесие Нэша - оба игрока требуют деньги из шкатулки.

- Итеративно продолжаем до момента $t = 1$. Получили, что равновесными стратегиями игроков по Нэшу будет всегда требовать деньги, независимо от t.

6 Задача 6

(20 баллов).



Два игрока двигают фишку по полю по очереди. Первоначально фишка расположена в узле A и ходит первый игрок. Игроки могут двигать фишку на один ход в направлении, указанном стрелочкой. Тот, кто не сможет сделать очередной ход, проиграл. Кто выигрывает (первый или второй игрок) при правильной игре? Как нужно действовать при правильной игре?

Решение

- Рассмотрим узлы по очереди, начиная с последнего F, в котором если окажется игрок, то проиграет, и будем отмечать, какой узел выигрышный, а какой проигрышный, руководствуясь правилом - узел выигрышный, если из него можно перейти в узел, который точно станет проигрышем для оппонента.

  F - проигрыш (нет хода никуда)

  E - победа (можно сходить в проигрышный F)

  I - проигрыш (можно сходить только в E, а он выигрышный)

  C, D, H - победа (можно сходить в проигрышный I)

  G - проигрыш (можно сходить только в выигрышные D и H)

  B - проигрыш (можно сходить только в выигрышные C и E)

  A - победа (можно сходить в проигрышные B и G)

- Итого, выигрышные узлы: A/C/D/E/H, проигрышные: B/F/G/I.
- Получаем, что при правильной игре выигрывает первый игрок. Для победы необходимо делать ход в заранее проигрышный для оппонента узел (из A в B или G и так далее).

7 Задача 7*

(40 баллов). Встреча в метро.

Двое живут на отрезке $[-1, 1]$, например, на одной линии метро. Места проживания – частная информация каждого, но известно, что это случайные величины $X_i \sim U[-1, 1]$, имеющие равномерное распределение на $[-1, 1]$. Игроки одновременно посылают СМС со своим "адресом". Встречаются в середине между "адресами". Каждый хочет ездить поменьше.

- 10 баллов. Найдите оптимальную функцию-ответ на честное поведение.
- 30 баллов. Найдите симметричное равновесие (хотя бы одно).

Решение

- TODO