Контрольная работа по курсу
«Математическая Статистика в Машинном Обучении»

Федор Ерин

Задача 1 [1 балл]

Пусть $\boldsymbol{X} = \{X_1, \ldots, X_n\} \sim \mathcal{N}(\theta, 1)$. Пусть $\hat{\theta}_n = a\overline{\boldsymbol{X}}$, где $\overline{\boldsymbol{X}} = n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i$, и $0 \le a \le 1$ — некоторая константа. Найти MSE для оценки $\hat{\theta}_n$. Какое значение a позволяет достигнуть наименьшего значения MSE? Чему равно наименьшее значение MSE?

Решение

- $$\mathbb{E}\hat{\theta}_n = \mathbb{E}[a\overline{\boldsymbol{X}}] = \frac{a}{n}\sum_{i=1}^n X_i = \frac{a}{n}n\theta = a\theta$$

$$bias = \mathbb{E}\hat{\theta}_n - \theta = a\theta - \theta = \theta(a-1)$$

$$se^2 = \mathbb{V}\hat{\theta}_n = \mathbb{V}(\frac{a}{n}\sum_{i=1}^n X_i) = \frac{a^2}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathbb{V}X_i = \frac{a^2}{n^2}n = \frac{a^2}{n}$$

$$MSE = bias^2 + se^2 = \theta^2(a-1)^2 + \frac{a^2}{n} = (\theta^2 + \frac{1}{n})a^2 - 2\theta^2 a + \theta^2$$

$MSE = f(a)$ - парабола относительно a, экстремум - минимум, т.к. коэф-т при a^2 положительный ($\theta^2 + 1/n > 0$), найдем точку минимума MSE:

$$MSE'(a) = 2a(\theta + \frac{1}{n}) - 2\theta^2 = 0$$

$$a_0 = \frac{\theta^2}{\theta^2 + \frac{1}{n}} = \frac{\theta^2 n}{\theta^2 n + 1}$$

$$MSE_{min} = MSE(a_0) = \theta^2\frac{1}{(\theta^2 n + 1)^2} + \frac{\theta^4 n^2}{(\theta^2 n + 1)^2 n} = \frac{\theta^2 + \theta^4 n}{(\theta^2 n + 1)^2} = \frac{\theta^2}{\theta^2 n + 1}$$

Ответ: $MSE = \theta^2(a-1)^2 + a^2/n, \quad \arg\min_a MSE = \frac{\theta^2 n}{\theta^2 n + 1}, \quad MSE_{min} = \frac{\theta^2}{\theta^2 n + 1}$

Задача 2 [1 балл]

Пусть $\boldsymbol{X} = \{X_1, \ldots, X_n\} \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ (гамма-распределение). Найдите с помощью метода моментов оценки для α и β. *Подсказка: считать известным, что* $\mathbb{E}[X] = \alpha\beta$, $\mathbb{V}[X] = \alpha\beta^2$.

Решение

- $$\mathbb{E}X = \alpha\beta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i = \overline{X} \text{ - первый момент}$$

$$\mathbb{E}X^2 = \mathbb{V}X + (\mathbb{E}X)^2 = \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 = \overline{X^2} \text{ - второй момент}$$

Решаем СЛАУ:

$$\begin{cases}\hat{\alpha}\hat{\beta} = \overline{X} \\ \hat{\beta}\cdot\hat{\alpha}\hat{\beta} + (\hat{\alpha}\hat{\beta})^2 = \overline{X^2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\hat{\alpha} = \overline{X}/\hat{\beta} \\ \hat{\beta}\cdot\overline{X} + \overline{X}^2 = \overline{X^2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\hat{\alpha} = \overline{X}^2/(\overline{X^2} - \overline{X}^2) \\ \hat{\beta} = (\overline{X^2} - \overline{X}^2)/\overline{X}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\hat{\alpha} = \overline{X}^2/\hat{\sigma}^2 \\ \hat{\beta} = \hat{\sigma}^2/\overline{X}\end{cases} \quad (1)$$

Здесь $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2 = \overline{X^2} - \overline{X}^2$ - центральный момент.

Ответ: $\hat{\alpha} = \overline{X}^2/\hat{\sigma}^2, \hat{\beta} = \hat{\sigma}^2/\overline{X}$, где $\overline{X}$ - 1-й момент, $\overline{X^2}$ - 2-й момент, $\hat{\sigma}^2$ - центральный момент.

Задача 3 [1 балл]

Пусть элементы выборки $\boldsymbol{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$ имеют распределение Лапласа с параметром $\theta = (\mu; \sigma), \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$:

$$p(x, \theta) = \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x-\mu|}{\sigma}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Найдите MLE-оценку для θ.

Решение

- $$L(\mu, \sigma; x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2\sigma} exp(-\frac{|X_i - \mu|}{\sigma})$$

$$l(\mu, \sigma; x) = \log L(\mu, \sigma; x) = -n \log 2\sigma - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^{n} |X_i - \mu|$$

Максимум правдоподобия по μ достигается, когда $|X_i - \mu| \to min$, это достигается, когда $\hat{\mu}_{MLE} = median(X^n)$ - медиана выборки. Найдем теперь MLE-оценка для σ:

$$\frac{\partial l(\mu, \sigma; x)}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} |X_i - \mu| = 0$$

$$\hat{\sigma}_{MLE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |X_i - \hat{\mu}_{MLE}|$$

Ответ: $\hat{\mu}_{MLE} = median(X^n), \hat{\sigma}_{MLE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |X_i - \hat{\mu}_{MLE}|$

Задача 4 [2 балла]

Пусть $\boldsymbol{X} = \{X_1, \dots, X_n\} \sim \text{Uniform}(\theta, 2\theta)$, $\theta > 0$.

a) Найдите MLE-оценку θ_{MLE} для параметра θ. Найдите MSE для этой оценки. Является ли оценка θ_{MLE} состоятельной?

b) Найдите с помощью метода моментов оценку θ_M для θ. Найдите предельное распределение для случайной величины

$$\sqrt{n}(\theta_M - \theta).$$

Решение

a)

$$f(x) = \begin{cases} 1/\theta, x \in [\theta, 2\theta] \\ 0, \text{ иначе} \end{cases} \tag{2}$$

$$L(\theta; x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} \cdot I[x \in [\theta, 2\theta]] = \frac{1}{\theta^n} I[\theta \leq X_{(1)} \leq X_{(n)} \leq 2\theta]$$

$L(\theta; x)$ убывает на интервале $[\frac{X_{(n)}}{2}, X_{(1)}] \Rightarrow$ максимум правдоподобия достигается в точке:

$$\hat{\theta}_{MLE} = X_{(n)}/2$$

Найдем распределение и плотность случайной величины $X_{(n)}$ для расчета MSE:

$$\mathbb{F}(X_{(n)}) = \mathbb{P}(X_{(n)} < x) = \mathbb{P}(X_1 < x)^n = \begin{cases} \frac{(x-\theta)^n}{\theta^n}, x \in [\theta, 2\theta] \\ 1, x > 2\theta \\ 0, x < \theta \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(X_{(n)}) = n\frac{(x-\theta)^{n-1}}{\theta^n} \tag{3}$$

$$\mathbb{E}\hat{\theta}_{MLE} = \mathbb{E}\frac{X_{(n)}}{2} = \int_{\theta}^{2\theta} \frac{x}{2} dF(X_{(n)}) = \int_{\theta}^{2\theta} \frac{x}{2} d\left(\frac{(x-\theta)^n}{\theta^n}\right) = \frac{x}{2}\frac{(x-\theta)^n}{\theta^n}\bigg|_{\theta}^{2\theta} - \int_{\theta}^{2\theta} \frac{1}{2}\frac{(x-\theta)^n}{\theta^n} dx =$$

$$= \theta - \frac{1}{2\theta^n} \cdot \frac{(x-\theta)^{n+1}}{n+1}\bigg|_{\theta}^{2\theta} = \theta - \frac{\theta}{2(n+1)}$$

$$bias = \mathbb{E}\hat{\theta}_{MLE} - \theta = -\frac{\theta}{2(n+1)}$$

$$\mathbb{E}\hat{\theta}^2_{MLE} = \mathbb{E}\frac{X^2_{(n)}}{4} = \int_\theta^{2\theta} \frac{x^2}{4} dF(X_{(n)}) = \int_\theta^{2\theta} \frac{x^2}{4} d\Big(\frac{(x-\theta)^n}{\theta^n}\Big) = \frac{x^2}{4}\frac{(x-\theta)^n}{\theta^n}\Big|_\theta^{2\theta} - \int_\theta^{2\theta} \frac{x}{2}\frac{(x-\theta)^n}{\theta^n}dx =$$

$$= \theta^2 - \int_\theta^{2\theta} \frac{x}{2(n+1)} d\Big(\frac{(x-\theta)^{n+1}}{\theta^n}\Big) = \theta^2 - \frac{x}{2(n+1)}\frac{(x-\theta)^{n+1}}{\theta^n}\Big|_\theta^{2\theta} + \int_\theta^{2\theta} \frac{1}{2(n+1)}\frac{(x-\theta)^{n+1}}{\theta^n}dx =$$

$$= \theta^2 - \frac{\theta^2}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)(n+2)}\frac{(x-\theta)^{n+2}}{\theta^n}\Big|_\theta^{2\theta} = \theta^2 - \frac{\theta^2}{n+1} + \frac{\theta^2}{2(n+1)(n+2)}$$

$$se^2 = \mathbb{V}\hat{\theta}_{MLE} = \mathbb{E}\hat{\theta}^2_{MLE} - (\mathbb{E}\hat{\theta}_{MLE})^2 = \theta^2 - \frac{\theta^2}{n+1} + \frac{\theta^2}{2(n+1)(n+2)} - \Big(\theta - \frac{\theta}{2(n+1)}\Big)^2 =$$

$$= \frac{\theta^2}{2(n+1)(n+2)} - \frac{\theta^2}{4(n+1)^2} = \frac{\theta^2 n}{4(n+1)^2(n+2)}$$

$$MSE = bias^2 + se^2 = \frac{\theta^2}{4(n+1)^2} + \frac{\theta^2 n}{4(n+1)^2(n+2)} = \frac{\theta^2 \cdot 2(n+1)}{4(n+1)^2(n+2)} = \frac{\theta^2}{2(n+1)(n+2)}$$

MSE $\to 0$ $(bias \to 0, se \to 0)$ при $n \to \infty \Rightarrow$ оценка $\hat{\theta}_{MLE}$ состоятельна.

b)

$$\mathbb{E}X = \frac{\theta + 2\theta}{2} = \frac{3}{2}\theta = \overline{X} \text{ - первый момент}$$

$$\mathbb{E}X^2 = \mathbb{V}X + (\mathbb{E}X)^2 = \frac{\theta^2}{12} + \frac{9}{4}\theta^2 = \frac{7}{3}\theta^2 = \overline{X^2} \text{ - второй момент}$$

Решаем СЛАУ:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}\theta_M = \overline{X} \\ \frac{7}{3}\theta_M^2 = \overline{X^2} \end{cases} \Rightarrow \theta_M = \frac{2}{3}\overline{X} \tag{4}$$

По ЦПТ:

$$\sqrt{n}(\overline{X} - \frac{3}{2}\theta) \sim N(0, \frac{\theta^2}{12}) \quad \Big| \cdot \frac{2}{3}$$

$$\sqrt{n}(\theta_M - \theta) \sim N(0, \frac{\theta^2}{27})$$

Ответ:

a) $\hat{\theta}_{MLE} = X_{(n)}/2, MSE = \frac{\theta^2}{2(n+1)(n+2)}$, состоятельна

b) $\theta_M = \frac{2}{3}\overline{X}, \sqrt{n}(\theta_M - \theta) \sim N(0, \frac{\theta^2}{27})$

Задача 5 [3 балла]

Пусть $\boldsymbol{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$ — н.о.р. случайные величины, имеющие дискретное распределение с параметром $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3)$:

$$\mathsf{P}(X_i = 1) = p_1, \quad \mathsf{P}(X_i = 2) = p_2, \quad \mathsf{P}(X_i = 3) = p_3,$$

где $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

a) Найдите MLE-оценку для $\boldsymbol{p}$.

b) Найдите информационную матрицу Фишера.

c) Используя дельта-метод, найдите асимптотический доверительный интервал с вероятностью покрытия $1-\alpha$ для ψ, где

$$\psi = \log p_1.$$

Решение

a) Обозначим кол-во $(X_i = k)$ в выборке X^n как n_k, где $k = \{1, 2, 3\}$, тогда $n_1 + n_2 + n_3 = n$.

$$L(p; x) = \prod_{i=1}^{3} p_i^{n_i}$$

$$l(p; x) = \log L(p; x) = \sum_{i=1}^{3} n_i \log p_i$$

Найдем условный экстремум функции правдоподобия, используя метод множителей Лагранжа и условие $p_1 + p_2 + p_3 = 1$:

$$l_\lambda(p, \lambda; x) = \sum_{i=1}^{3} n_i \log p_i + \lambda(1 - \sum_{i=1}^{3} p_i)$$

Решим задачу относительно p_1:

$$\frac{\partial l_\lambda}{\partial p_1} = \frac{n_1}{p_1} - \lambda = 0$$

$$p_1 = \frac{n_1}{\lambda} = \frac{n_1}{n}$$

Аналогично для p_2 и p_3. Последнее равенство следует из того, что

$$\sum_{i=1}^{3} p_i = \sum_{i=1}^{3} \frac{n_i}{\lambda} \Rightarrow 1 = \frac{n}{\lambda} \Rightarrow \lambda = n$$

Получили MLE-оценку:

$$\hat{p}_{MLE} = (\frac{n_1}{n}, \frac{n_2}{n}, \frac{n_3}{n})$$

b) Распределение по сути задано двумя параметрами: p_1 и p_2, а p_3 выражается через первые два. Используя это, перепишем правдободобие и найдем матрицу Фишера:

$$l(p;x) = n_1 \log p_1 + n_2 \log p_2 + (n - n_1 - n_2)\log(1 - p_1 - p_2)$$

$$\frac{\partial l(p;x)}{\partial p_1} = \frac{n_1}{p_1} - \frac{n - n_1 - n_2}{1 - p_1 - p_2}; \quad \frac{\partial l(p;x)}{\partial p_2} = \frac{n_2}{p_2} - \frac{n - n_1 - n_2}{1 - p_1 - p_2}$$

$$H_{11} = \frac{\partial^2 l(p;x)}{\partial p_1^2} = -\frac{n_1}{p_1^2} - \frac{n - n_1 - n_2}{(1 - p_1 - p_2)^2} \Rightarrow \mathbb{E}[H_{11}] = -\frac{n}{p_1} - \frac{n - np_1 - np_2}{(1 - p_1 - p_2)^2} = -\frac{n(1 - p_2)}{p_1(1 - p_1 - p_2)}$$

$$H_{22} = \frac{\partial^2 l(p;x)}{\partial p_2^2} = -\frac{n_2}{p_2^2} - \frac{n - n_1 - n_2}{(1 - p_1 - p_2)^2} \Rightarrow \mathbb{E}[H_{22}] = -\frac{n}{p_2} - \frac{n - np_1 - np_2}{(1 - p_1 - p_2)^2} = -\frac{n(1 - p_1)}{p_2(1 - p_1 - p_2)}$$

$$H_{12} = \frac{\partial^2 l(p;x)}{\partial p_1 \partial p_2} = -\frac{n - n_1 - n_2}{(1 - p_1 - p_2)^2} \Rightarrow \mathbb{E}[H_{12}] = -\frac{n}{1 - p_1 - p_2}$$

$$H_{21} = \frac{\partial^2 l(p;x)}{\partial p_2 \partial p_1} = -\frac{n - n_1 - n_2}{(1 - p_1 - p_2)^2} \Rightarrow \mathbb{E}[H_{12}] = -\frac{n}{1 - p_1 - p_2}$$

Откуда получаем:

$$I_n(p_1, p_2) = -\begin{bmatrix} \mathbb{E}_{p_1 p_2}(H_{11}) & \mathbb{E}_{p_1 p_2}(H_{12}) \\ \mathbb{E}_{p_1 p_2}(H_{21}) & \mathbb{E}_{p_1 p_2}(H_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n(1-p_2)}{p_1(1-p_1-p_2)} & \frac{n}{1-p_1-p_2} \\ \frac{n}{1-p_1-p_2} & \frac{n(1-p_1)}{p_2(1-p_1-p_2)} \end{bmatrix} = \frac{n}{1 - p_1 - p_2} \begin{bmatrix} \frac{1-p_2}{p_1} & 1 \\ 1 & \frac{1-p_1}{p_2} \end{bmatrix}$$

c) Для дельта-метода потребуется обратная матрица Фишера, найдем ее:

$$\det I_n = \frac{n}{1 - p_1 - p_2} \cdot (\frac{1 - p_2}{p_1} \frac{1 - p_1}{p_2} - 1) = \frac{n}{1 - p_1 - p_2} \cdot \frac{1 - p_1 - p_2}{p_1 p_2} = \frac{n}{p_1 p_2}$$

$$J_n(p_1, p_2) = I_n^{-1}(p_1, p_2) = \frac{1}{\det I_n} \begin{bmatrix} \frac{1-p_1}{p_2} & -1 \\ -1 & \frac{1-p_2}{p_1} \end{bmatrix} = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} p_1(1 - p_1) & -p_1 p_2 \\ -p_1 p_2 & p_2(1 - p_2) \end{bmatrix}$$

Построим доверительный интервал для $\psi = \log p_1$:

$$\hat{\psi} = \log \hat{p_1} = \log \frac{n_1}{n} \Rightarrow \nabla \hat{\psi} = \begin{bmatrix} 1/\hat{p}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{se}(\hat{\psi}) = \sqrt{\begin{bmatrix} 1/\hat{p}_1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \frac{1}{n} \begin{bmatrix} \hat{p}_1(1 - \hat{p}_1) & -\hat{p}_1 \hat{p}_2 \\ -\hat{p}_1 \hat{p}_2 & \hat{p}_2(1 - \hat{p}_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\hat{p}_1 \\ 0 \end{bmatrix}} = \sqrt{\frac{1}{n} \begin{bmatrix} 1 - \hat{p}_1 \\ -\hat{p}_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1/\hat{p}_1 \\ 0 \end{bmatrix}} = \sqrt{\frac{1 - \hat{p}_1}{n \hat{p}_1}} = \sqrt{\frac{n - n_1}{n n_1}}$$

$$\frac{\hat{\psi}_n - \psi}{\hat{se}(\hat{\psi})} \sim N(0, 1)$$

$$\hat{\psi} \pm z_{\alpha/2} \hat{se}$$

$$\log \frac{n_1}{n} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{n - n_1}{n n_1}}$$

Ответ: *a)* $\hat{p}_{MLE} = (\frac{n_1}{n}, \frac{n_2}{n}, \frac{n_3}{n})$; *b)* $I_n(p_1, p_2) = \frac{n}{1-p_1-p_2} \begin{bmatrix} \frac{1-p_2}{p_1} & 1 \\ 1 & \frac{1-p_1}{p_2} \end{bmatrix}$; *c)* $\log \frac{n_1}{n} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{n-n_1}{n n_1}}$

Задача 6 [3 балла]

Пусть $\boldsymbol{X} = \{X_1, \ldots, X_n\} \sim \text{Pareto}(\theta, k)$, где $k > 2$ и $\theta > 0$:

$$f(x;\theta,k) = \begin{cases} \frac{k\theta^k}{x^{k+1}}, & \text{если } x \geq \theta; \\ 0, & \text{если } x < \theta. \end{cases}$$

Требуется оценить среднее значение распределения по данной выборке. Предложено использовать следующую оценку для среднего:

$$\hat{\mu} = (\overline{\boldsymbol{X}^\alpha})^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Требуется определить, насколько корректен данный подход. Для этого

- Найдите среднее и дисперсию величины $\hat{\mu}(\alpha)$, используя дельта-метод при рассмотрении преобразования $g(x) = x^{1/\alpha}$.
- Укажите интервал значений α, при которых существуют среднее и дисперсия для оценки $\hat{\mu}(\alpha)$. Далее в условии упоминается именно он. К чему стремится оценка среднего при α, стремящемся а) к нулю, б) верхней границе интервала допустимых значений.
- Найдите отношение дисперсий:

$$\rho(\alpha;\theta,k) = \frac{\mathbb{V}[\hat{\mu}]}{\mathbb{V}[\overline{\boldsymbol{X}}]}.$$

  Требуется выяснить, является ли это отношение больше или меньше единицы при α, стремящемся а) к нулю, б) верхней границе интервала допустимых значений. *Внимание.* Ответ может зависеть от θ.

Решение

- Рассмотрим функцию $g(y) = y^{1/\alpha}$, тогда $\overline{X^\alpha} = y$. Оценим с.в. X^α:

$$\mathbb{E}X^\alpha = \int_\theta^\infty x^\alpha \frac{k\theta^k}{x^{k+1}} = k\theta^k \cdot \left.\frac{x^{\alpha-k}}{\alpha-k}\right|_\theta^\infty = \frac{k\theta^\alpha}{k-\alpha}$$

$$\mathbb{E}X^{2\alpha} = \int_\theta^\infty x^{2\alpha} \frac{k\theta^k}{x^{k+1}} = k\theta^k \cdot \left.\frac{x^{2\alpha-k}}{2\alpha-k}\right|_\theta^\infty = \frac{k\theta^{2\alpha}}{k-2\alpha}$$

$$\mathbb{V}X^\alpha = \mathbb{E}X^{2\alpha} - (\mathbb{E}X^\alpha)^2 = \frac{k\theta^{2\alpha}}{k-2\alpha} - \frac{k^2\theta^{2\alpha}}{(k-\alpha)^2} = k\theta^{2\alpha}\left(\frac{1}{k-2\alpha} - \frac{k}{(k-\alpha)^2}\right) = \frac{k\theta^{2\alpha}\alpha^2}{(k-2\alpha)(k-\alpha)^2}$$

$$\mathbb{E}\hat{\mu} = \left(\frac{k\theta^\alpha}{k-\alpha}\right)^{1/\alpha} = \theta\left(\frac{k}{k-\alpha}\right)^{1/\alpha}$$

$$\mathbb{V}\hat{\mu} = g'(y)^2\hat{se}^2(y) = \left.\left(\frac{y^{1/\alpha-1}}{\alpha}\right)^2\right|_{y=\hat{y}} \mathbb{V}y = \frac{\overline{X^\alpha}^{2/\alpha-2}}{\alpha^2}\frac{\mathbb{V}X^\alpha}{n} = \left(\frac{k\theta^\alpha}{k-\alpha}\right)^{2/\alpha-2}\frac{k\theta^{2\alpha}}{n(k-2\alpha)(k-\alpha)^2} =$$

$$= \theta^2\left(\frac{k}{k-\alpha}\right)^{2/\alpha}\frac{1}{nk(k-2\alpha)}$$

- $\mathbb{E}\hat{\mu}$ существует при $\alpha \neq \{0, k\}$, $\mathbb{V}\hat{\mu}$ существует при $\alpha \neq \{0, k\}$ и $\alpha < k/2$, одновременно существуют при $\alpha \in (-\infty, 0) \cup (0, k/2)$.

  Оценим, к чему стремится оценка среднего, при α, стремящемся

  а) к нулю:

$$\mathbb{E}\hat{\mu} = \theta\left(\frac{k}{k-\alpha}\right)^{1/\alpha} \xrightarrow{\alpha\to 0} \theta e^{1/k} \text{ (замечательный предел)}$$

  б) к верхней границе интервала допустимых значений:

$$\mathbb{E}\hat{\mu} = \theta\left(\frac{k}{k-\alpha}\right)^{1/\alpha} \xrightarrow{\alpha\to k/2} \theta 2^{2/k}$$

- Найдем $\rho(\alpha;\theta,k)$:

$$\mathbb{V}\overline{X} = \left.\frac{\mathbb{V}X^\alpha}{n}\right|_{\alpha=1} = \frac{k\theta^2}{n(k-2)(k-1)^2}$$

$$\rho(\alpha;\theta,k) = \frac{\mathbb{V}[\hat{\mu}]}{\mathbb{V}[\overline{\boldsymbol{X}}]} = \theta^2\left(\frac{k}{k-\alpha}\right)^{2/\alpha}\frac{1}{nk(k-2\alpha)} \cdot \frac{n(k-2)(k-1)^2}{k\theta^2} = \left(\frac{k}{k-\alpha}\right)^{2/\alpha}\frac{(k-2)(k-1)^2}{k^2(k-2\alpha)}$$

При α, стремящемся

а) к нулю:

$$\rho(\alpha;\theta,k) \xrightarrow{\alpha\to 0} e^{2/k}\frac{(k-2)(k-1)^2}{k^3} < 1, \text{ причем } \rho(\alpha;\theta,k) \xrightarrow{\alpha\to 0, k\to\infty} 1$$

(то есть оценка $\hat{\mu}$ всегда имеет меньшую дисперсию, чем оценка $\overline{X}$)

б) к верхней границе интервала допустимых значений:

$$\rho(\alpha;\theta,k) \xrightarrow{\alpha\to k/2} \infty > 1$$

Ответ:

- $\mathbb{E}\hat{\mu} = \theta(\frac{k}{k-\alpha})^{1/\alpha}, \mathbb{V}\hat{\mu} = \theta^2(\frac{k}{k-\alpha})^{2/\alpha}\frac{1}{nk(k-2\alpha)}$
- $\alpha \in (-\infty,0)\cup(0,k/2), \mathbb{E}\hat{\mu} \xrightarrow{\alpha\to 0} \theta e^{1/k}, \mathbb{E}\hat{\mu} \xrightarrow{\alpha\to k/2} \theta 2^{2/k}$
- $\rho = (\frac{k}{k-\alpha})^{2/\alpha}\frac{(k-2)(k-1)^2}{k^2(k-2\alpha)}, \rho \xrightarrow{\alpha\to 0} e^{2/k}\frac{(k-2)(k-1)^2}{k^3} < 1, \rho \xrightarrow{\alpha\to k/2} \infty > 1$

Задача 7 [2 балла]

Пусть $\boldsymbol{X} = \{X_1,\dots,X_n\} \sim \text{Uniform}(0,\theta)$.

a) Критерий δ_1 предписывает принимать гипотезу $\theta = 2$, если $\overline{\boldsymbol{X}} = n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i \le 3$, иначе принимается альтернатива $\theta = 4$. Найти пределы вероятностей ошибок первого и второго рода этого критерия.

b) Критерий δ_2 предписывает принимать гипотезу $\theta = 2$, если $X_{(n)} = \max\limits_{i=1,\dots,n} X_i < 3$, иначе принимается альтернатива $\theta = 4$. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия.

Решение

a) Для $\text{Uniform}(0,\theta)$ известно:

$$\mathbb{E}X = \frac{\theta}{2}, \mathbb{V}X = \frac{\theta^2}{12}$$

По ЦПТ:

$$\overline{X} \sim N(\frac{\theta}{2}, \frac{\theta^2}{12n})$$

Найдем ошибку I рода:

$$\alpha = \mathbb{P}(H_1|H_0) = \mathbb{P}(\overline{X} > 3|\theta = 2) = 1 - \mathbb{P}(\overline{X} < 3|\theta = 2) = 1 - \Phi_{\overline{X},\theta=2}(3)$$

$$\Phi_{\overline{X},\theta=2} : N(1, \frac{1}{3n})$$

При $n\to\infty$ функция распределения приобретает вид ступеньки: $\Phi = 1$ при $x > 1$, иначе $\Phi = 0$, следовательно:

$$\alpha \to 1 - 1 = 0 \text{ при } n \to \infty$$

Альтернативное рассуждение: $\alpha = 0$, т.к. плотность распределение нулевая вне интервала $[0,2]$ при справедливости H_0 и тогда вероятность получить X больше 3 равна нулю.

Найдем ошибку II рода:

$$\beta = \mathbb{P}(H_0|H_1) = \mathbb{P}(\overline{X} < 3|\theta = 4) = \Phi_{\overline{X},\theta=4}(3)$$

$$\Phi_{\overline{X},\theta=4} : N(2, \frac{4}{3n})$$

При $n\to\infty$ функция распределения приобретает вид ступеньки: $\Phi = 1$ при $x > 2$, иначе $\Phi = 0$, следовательно:

$$\beta \to 1 \text{ при } n \to \infty$$

Альтернативное рассуждение: $\beta = 1$, т.к. плотность распределение не нулевая внутри интервала $[0,4]$ при справедливости H_1 и тогда вероятность получить X меньше 3 равна единице.

b)

$$\alpha = \mathbb{P}(H_1|H_0) = \mathbb{P}(X_{(n)} \ge 3|\theta = 2) = 1 - \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_{\theta=2}(X_1 < 3) = 1 - \mathbb{P}_{\theta=2}(X_1 < 3)^n = 1 - 1 = 0 \quad (\text{т.к. } X_1 \in [0,2])$$

$$\beta = \mathbb{P}(H_0|H_1) = \mathbb{P}(X_{(n)} < 3|\theta = 4) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_{\theta=4}(X_1 < 3) = \mathbb{P}_{\theta=4}(X_1 < 3)^n = \left[\Phi_{\theta=4}(3)\right]^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Ответ: *a)* $\alpha \xrightarrow{n\to\infty} 0, \beta \xrightarrow{n\to\infty} 1;$ *b)* $\alpha = 0, \beta = (\frac{3}{4})^n$

Задача 8 [2 балла]

Пусть $\boldsymbol{X} = \{X_1, \ldots, X_n\} \sim \mathcal{N}(\theta, 1)$.

a) Постройте тест Неймана-Пирсона для тестирования гипотезы $H_0 : \theta = 0$ против альтернативы $H_1 : \theta = a$, $a > 0$. Выпишите явную формулу для критического порога в тесте. Покажите, что мощность теста стремится к 1 при $n \to \infty$ (мощность теста — вероятность отклонить H_0 при условии, что H_1 верна).

b) Построить тест на основе отношения правдоподобия для тестирования гипотезы $H_0 \colon \theta = 0$ против альтернативы $H_1 \colon \theta \neq 0$

Решение

a) Правдоподобие для $\boldsymbol{X} \sim N(\theta, 1)$:

$$L(X^n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\Big(- \frac{(X_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \Big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\big(- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \theta)^2 \big)$$

$$T_{NP}(X^n) = \frac{L(X^n|H_1)}{L(X^n|H_0)} = \frac{exp(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2)}{exp(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - 0)^2)} = exp\big(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - (X_i - a)^2)\big) =$$

$$= exp\big(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(2aX_i - a^2)\big) = exp\big(a\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{na^2}{2}\big) = exp\big(na\overline{X} - \frac{na^2}{2}\big) > c$$

$$na\overline{X} - \frac{na^2}{2} > \log c$$

$$\overline{X} > \frac{2\log c + na^2}{2na}$$

При справедливости H_0: $\overline{X} \sim N(0, 1/n)$, тогда

$$\mathbb{P}_{H_0}(\overline{X} < \frac{2\log c + na^2}{2na}) = 1 - \alpha$$

$$\frac{2\log c + na^2}{2na} = \frac{1}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}(1 - \alpha)$$

$$c = exp\big(a\sqrt{n}\Phi^{-1}(1-\alpha) - \frac{na^2}{2}\big)$$

Если $T_{NP}(X^n) > c$, отвергаем H_0.
Найдем мощность теста. При справедливости H_1: $\overline{X} \sim N(a, 1/n)$, тогда:

$$1 - \beta = \mathbb{P}(H_0|H_1) = 1 - \mathbb{P}_{H_1}(\overline{X} < \frac{2\log c + na^2}{2na}) = 1 - \Phi_{N(a,1/n)}(\frac{2\log c + na^2}{2na}) = 1 - \Phi((\frac{2\log c + na^2}{2na} - a)\sqrt{n}) =$$

$$= 1 - \Phi(\frac{2\log c - na^2}{2a\sqrt{n}}) = 1 - \Phi(\frac{2a\sqrt{n}\Phi^{-1}(1-\alpha) - 2na^2}{2a\sqrt{n}}) = 1 - \Phi(\Phi^{-1}(1-\alpha) - a\sqrt{n}) \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

b)

$$T_\lambda(X^n) = 2\log\frac{\sum_{i=1}^{n} exp(-(X_i - \hat{\theta})^2/2)}{\sum_{i=1}^{n} exp(-(X_i - 0)^2/2)} = -\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{\theta})^2 + \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 2n\hat{\theta}(\overline{X} - \frac{\hat{\theta}}{2}) = 2n\overline{X}^2 - n\overline{X}^2 = n\overline{X}^2$$

Отклоняем H_0, если

$$T_\lambda(X^n) = n\overline{X}^2 > \chi^2_{1,1-\alpha}$$

Ответ:

a) $T_{NP}(X^n) = exp\big(na\overline{X} - \frac{na^2}{2}\big) > c, c = exp\big(a\sqrt{n}\Phi^{-1}(1-\alpha) - \frac{na^2}{2}\big), 1 - \beta \xrightarrow{n\to\infty} 1;$

b) $T_\lambda(X^n) = n\overline{X}^2 > \chi^2_{1,1-\alpha}$

Задача 9 [5 баллов]

Пусть $\boldsymbol{X} = \{X_1, \ldots, X_n\} \sim \text{Exp}(\theta)$, т.е.

$$p(x;\theta) = \theta e^{-x\theta}, \quad x > 0, \quad \theta > 0.$$

- Найдите MLE-оценку θ_{MLE}. Является ли предельное распределение $\hat{\theta}$ асимтотически нормальным? Обоснуйте свой ответ.
- Подсчитайте информацию Фишера.
- Найти $(1-\alpha)$ асимптотический доверительный интервал для $\psi = \log\theta$.
- Постройте тест Вальда для различения гипотез $H_0\colon \theta = \theta_0$ и $H_1\colon \theta \neq \theta_0$.
- Построить тест на основе отношения правдоподобия для различения двух гипотез из предыдущего пункта.

Решение

- Найдем MLE-оценку параметра θ:

$$l(\theta;x) = \sum_{i=1}^{n} \log\theta exp(-X_i\theta) = \sum_{i=1}^{n}\log\theta - \sum_{i=1}^{n} X_i\theta = n\log\theta - \theta\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\frac{\partial l(\theta;x)}{\partial\theta} = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} X_i = 0$$

$$\theta_{MLE} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i} = \frac{1}{\overline{X}}$$

Определим предельное распределение этой оценки. По ЦПТ:

$$\overline{X} \sim N(\frac{1}{\theta}, \frac{1}{\theta^2 n})$$

Применим дельта-метод:

$$\text{если } \hat{\theta} \sim N(\theta, se^2(\hat{\theta})),$$

$$\text{то } g(\hat{\theta}) \sim N(g(\theta), g'(\theta)^2 se^2(\hat{\theta})).$$

Рассмотрим $g(\overline{X}) = 1/\overline{X}$:

$$g'(\overline{X})\big|_{\overline{X}=1/\theta} = -\frac{1}{\overline{X}^2}\bigg|_{\overline{X}=1/\theta} = -\theta^2 \Rightarrow g'(\overline{X})^2 se^2(\hat{\theta}) = \theta^4 \cdot \frac{1}{\theta^2 n} = \frac{\theta^2}{n}$$

$$\theta_{MLE} = \frac{1}{\overline{X}} \sim N(\theta, \frac{\theta^2}{n})$$

- Найдем матрицу Фишера:

$$\theta_{MLE} \sim N(\theta, \frac{1}{nI(\theta)}) \Rightarrow I(\theta) = \frac{1}{\theta^2} \Rightarrow I_n(\theta) = \frac{n}{\theta^2}$$

Альтернативно, можем получить так:

$$I_n(\theta) = -\mathbb{E}\bigg(\frac{\partial^2 l(\theta;x)}{\partial\theta^2}\bigg) = -\mathbb{E}\bigg(-\frac{n}{\theta^2}\bigg) = \frac{n}{\theta^2}$$

- Для нахождения доверительного интервала применим дельта-метод:

$$\psi = \log\theta = g(\theta)$$

$$g'(\theta) = \frac{1}{\theta}$$

$$\hat{\theta} = \theta_{MLE} = \frac{1}{\overline{X}} \sim N(\theta, \frac{\theta^2}{n})$$

$$\hat{\psi} = \log\hat{\theta} = -\log\overline{X}$$

$$\hat{se}(\hat{\psi}) = |g'(\hat{\theta})|\hat{se}(\hat{\theta}) = \frac{1}{\hat{\theta}}\sqrt{\frac{\hat{\theta}^2}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{\hat{\psi} - \psi}{\hat{se}(\hat{\psi})} \sim N(0,1) \Rightarrow C_n : \hat{\psi} \pm z_{\alpha/2}\hat{se}(\hat{\psi}) = -\log\overline{X} \pm \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}$$

- Построим тест Вальда:

$$H_0 \colon \theta = \theta_0$$

$$H_1 \colon \theta \neq \theta_0$$

$$\hat{\theta} = \theta_{MLE} = \frac{1}{\overline{X}} \text{ (а.н.о.)}$$

$$\hat{se} = \frac{\hat{\theta}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\overline{X}\sqrt{n}}$$

$$W = \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{\hat{se}} = (1/\overline{X} - \theta_0)\overline{X}\sqrt{n} = (1 - \theta_0\overline{X})\sqrt{n}$$

  Отвергаем H_0, если

$$|W| = |(1 - \theta_0\overline{X})\sqrt{n}| > z_{\alpha/2}$$

- Построим тест на основе отношения правдоподобия:

$$T_\lambda(X^n) = 2\log\frac{\sum_{i=1}^n \hat{\theta} exp(-X_i\hat{\theta})}{\sum_{i=1}^n \theta_0 exp(-X_i\theta_0)} = 2(n\log\hat{\theta} - \sum_{i=1}^n X_i - n\log\theta_0 + \sum_{i=1}^n X_i\theta_0) =$$

  Отклоняем H_0, если

$$T_\lambda(X^n) = 2n(\theta_0\overline{X} - \log\overline{X} - \log\theta_0 - 1) > \chi^2_{1,1-\alpha}$$

Ответ:
- $\theta_{MLE} = \frac{1}{\overline{X}} \sim N(\theta, \frac{\theta^2}{n})$
- $I_n(\theta) = \frac{n}{\theta^2}$
- $(-\log\overline{X} - \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}, -\log\overline{X} + \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}})$
- $|W| = |(1 - \theta_0\overline{X})\sqrt{n}| > z_{\alpha/2}$
- $T_\lambda(X^n) = 2n(\theta_0\overline{X} - \log\overline{X} - \log\theta_0 - 1) > \chi^2_{1,1-\alpha}$