Задача 11.1 «Вольтметры 2»

Из восьми одинаковых вольтметров собрали электрическую цепь, изображенную на рисунке 1. (Вольтметры реальные, т.е. электрический ток через них течет.)

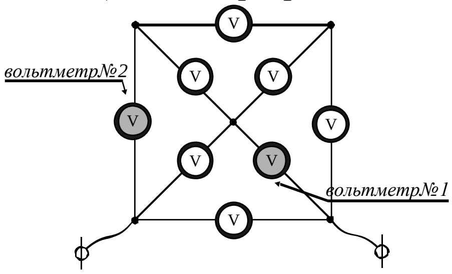

Рис. 1

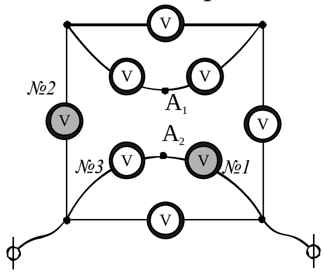

Рис. 2

При подключении этой цепи к источнику тока, вольтметр №1 показал напряжение $44\,B$.

1) Чему равно внешнее напряжение?

2) Чему равны показания вольтметра №2?

Решение.

1) Центральный узел приведенной схемы можно расщепить (рис. 2). Действительно, пусть это сделано, тогда потенциалы в точках A_1 и A_2 в силу симметрии цепи будут одинаковы и равны $\varphi_ц = U/2$, где U - напряжение внешнего источника. При соединении этих узлов проводником, ток по проводнику идти не будет, и распределение напряжений в цепи не изменится. Этим мы доказали, что наш переход есть переход к эквивалентной схеме.

2) Показание вольтметра №3 в силу симметрии равно показанию первого вольтметра. Поэтому напряжение в цепи равно $U_{внеш} = 2U_1 = 88\,B$.

3) Сопротивление участка цепи, содержащего вольтметр №1 равно $R_1 = 2R$, где R - сопротивление одного вольтметра. А сопротивление участка, содержащего вольтметр №2, будет равно

$$. \; R_2 = R + \frac{2R \cdot R}{2R + R} + R = \frac{8}{3} R$$

Это означает, что ток через вольтметр №2, а, следовательно, и его показания, будут в $4/3$ раз меньше, чем в случае первого вольтметра:

$$U_2 = \frac{R_1}{R_2} U_1 = \frac{3}{4} U_1 = 33\,B$$

Ответ: $U_{внеш} = 2U_1 = 88\,B$; $U_2 = \frac{3}{4} U_1 = 33\,B$.

Задача 11.2 «Магнитный двигатель»

Для путешествия в тех областях межзвездного пространства, в которых существует магнитное поле, был предложен «магнитный двигатель», конструкция которого изображена на рисунке 1. Автор проекта предлагает заряжать плоский конденсатор с помощью солнечных батарей, а затем разряжать его через систему проводов представляющих собой квадрат размером $100 \times 100\,\textit{метров}$. Движущей силой будет при этом сила Ампера, действующая на провода с током.

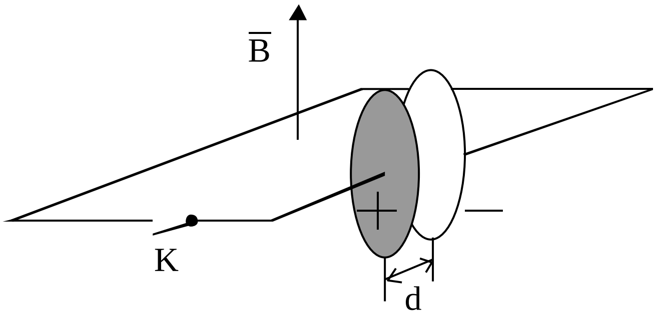

Рис. 1

1) Чему будет равна «движущая сила» сразу после замыкания ключа?

2) В какую сторону она будет направлена?

Для расчетов принять: расстояние между пластинами конденсатора равно $d = 1\,м$, сопротивление проводов $R = 1\,Ом$, индукция магнитного поля $B = 5 \cdot 10^{-6}\,Тл$, напряжение на конденсаторе $U = 10^{6}\,В$.

Решение.

1) Если бы квадрат был бы полный, то равнодействующая всех сил Ампера действующих на него, была бы равна нулю. Поэтому сила Ампера, действующая на квадрат без участка d, равна и направлена противоположно силе Ампера, действующей на отрезок d. «Движущая сила» будет направлена вправо.

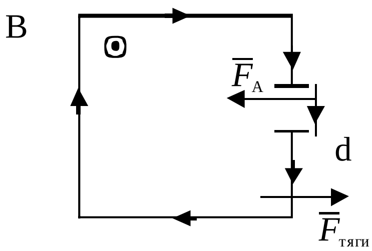

Рис. 2

2) Сила тока в цепи сразу после замыкания ключа будет равна $I = U/R$. Сила Ампера, действующая на отрезок d, а, следовательно, и на систему токов, будет равна

$$F = IdB = \frac{UdB}{R} = 5\,Н$$

Ответ: вправо, $F = IdB = \dfrac{UdB}{R} = 5\,Н$.

Задача 11.3 «Отклонение лучей»

На собирающую линзу падают два параллельных луча (рис. 1). Первый луч отклоняется линзой на угол $\beta = 15°$. На какой угол отклонит линза второй луч, если точка его падения расположена в два раза ближе к оптическому центру O, чем точка падения первого луча. Угол $\alpha = 45°$.

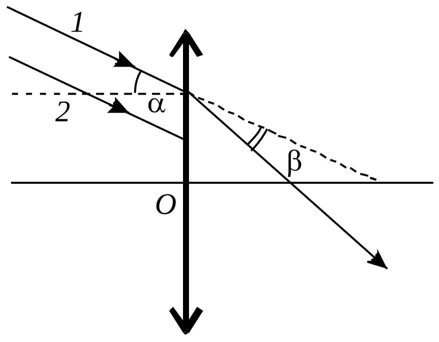

Рис. 1

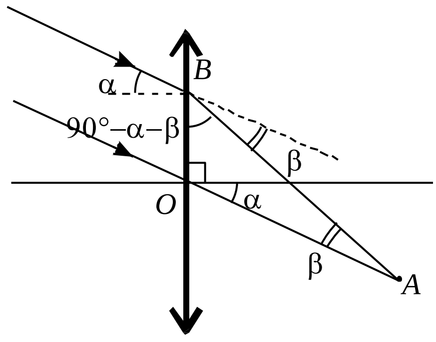

Рис. 2

Решение.

Как известно, параллельный пучок лучей после прохождения собирающей линзы собирается в одной точке, расположенной в фокальной плоскости линзы. Пусть это будет точка А (рис. 2).

Из рисунка видно, что угол отклонения каждого луча зависит от расстояния от места падения до оптического центра. Луч, идущий через оптический центр, не отклоняется. А для остальных лучей справедливоправило, чем больше расстояние OB, тем больше угол отклонения β.

Свяжем угол отклонения β с расстоянием OB. Из треугольника AOB по теореме синусов имеем $\frac{AO}{\sin(90° - \alpha - \beta)} = \frac{OB}{\sin\beta}$. Или $\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin\beta} = \frac{AO}{OB}$.

Применяя эту формулу к лучам № 1 и №2, получим $\begin{cases} \frac{\cos(45° + 15°)}{\sin 15°} = \frac{AO}{h} \\ \frac{\cos(45° + \gamma)}{\sin\gamma} = \frac{2AO}{h} \end{cases}$, где γ - угол отклонения второго луча, h – расстояние OB для первого луча.

Отсюда для искомого угла γ получаем уравнение:

$$\frac{\cos(45° + \gamma)}{\sin\gamma} = \frac{2\cos(45° + 15°)}{\sin 15°}.$$

Его можно записать так $Ctg\gamma = 2Ctg15° - 1$. Отсюда ответ:

$$\gamma = arctg\left(\frac{tg15°}{2 - tg15°}\right) = 0{,}153\,рад = 8{,}79° = 8°48'$$

Если учесть, что $\sin 15° = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$, то ответ можно записать в следующем виде:

Ответ: $\gamma = arctg\left(\frac{tg15°}{2 - tg15°}\right) = arctg\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1\right) = 0{,}153\,рад = 8{,}79° = 8°48'$

Задача 11.3 «Ванна»

Некто решил принять ванну. Он полностью открыл кран холодной воды и наполовину кран горячей воды. Через пять минут температура воды в ванной оказалась равной $t_1 = 39\,°C$. – Маловато, – подумал Некто и кран холодной наполовину прикрыл, а кран горячей воды полностью открыл. Еще через 10 минут температура воды в ванной оказалась равной $t_2 = 52\,°C$. – Многовато, – подумал Некто и прикрыл наполовину кран горячей воды. Через 10 минут после этого ванна наполнилась. Чему оказалась равной конечная температура воды?

Примечание: кран наполовину открытый или прикрытый дает воды в два раза меньше чем полностью открытый кран.

Решение.

Пусть полностью открытый кран дает за 5 пять минут массу воды равную m. Тогда процесс заполнения ванны дает таблица 1.

Таблица 1.

	0	5 минут	15 минут	25 минут
холодная вода	0	$2m$	$4m$	$6m$
горячая вода	0	m	$5m$	$7m$
температура смеси	-	$t_1 = 39\,°C$	$t_2 = 52\,°C$	$t_{кон} = ?$

Темература смеси равна $t = \dfrac{m_1 t_{хол} + m_2 t_{гор}}{m_1 + m_2}$, где $t_{хол}$ – температура холодной воды, а $t_{гор}$ – температура горячей воды.

Применим эту формулу для трех моментов времени, упомянутых в задаче. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{2t_{хол} + t_{гор}}{3}, \\ t_2 = \dfrac{4t_{хол} + 5t_{гор}}{9}, \\ t_{кон} = \dfrac{6t_{хол} + 7t_{гор}}{13}. \end{cases}$$

Отсюда получаем ответ:

$$t_{кон} = \frac{t_1 + 12t_2}{13} = 51\,°C.$$

Для справок приведем:

$$t_{гор} = 3t_2 - 2t_1 = 78\,°C$$

$$t_{хол} = \frac{5t_1 - 3t_2}{2} = 19{,}5\,°C$$

Ответ: $t_{кон} = \dfrac{t_1 + 12t_2}{13} = 51\,°C$.

Задача 11.3 «Два груза»

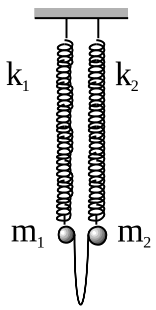

Рис. 1

К двум очень длинным пружинам одинаковой длины прикрепляют грузы, связанные нерастяжимой легкой нитью длиной $a = 22{,}5\,см$ (рис. 1). Грузы отпускают, и они начинают двигаться. Через какое время после начала движения нить окажется натянутой?

Известно, что после того как движение грузов прекратится, первая пружина будет растянута на $\Delta\ell_1 = 20\,см$, а вторая на $\Delta\ell_2 = 5\,см$. Считать, что точки закрепления пружин очень близки друг к другу.

Решение.

1) В конечном состоянии расстояние между грузами равно $\Delta\ell = \Delta\ell_1 - \Delta\ell_2 = 15\,см$. Оно меньше длины нити. Поэтому нить будет ненатянутой, и не будет оказывать какого-либо влияния на равновесие тел.

Из условия равновесия каждого груза получаем:

$$\begin{cases} m_1 g = k_1 \Delta\ell_1, \\ m_2 g = k_2 \Delta\ell_2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{m_1}{k_1} = \dfrac{\Delta\ell_1}{g}, \\ \dfrac{m_2}{k_2} = \dfrac{\Delta\ell_2}{g}. \end{cases}$$

Отсюда следует первый важный вывод: период колебания на пружине первого груза ровно в два раза больше периода колебаний второго груза. Действительно,

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta\ell_1}{g}} = 2\cdot 2\pi\sqrt{\frac{\Delta\ell_2}{g}} = 2T_2\,.$$

2) До того, как нить натянется грузы будут двигаться независимо друг от друга. Их движение будет представлять собой гармонические колебания с амплитудами $\Delta\ell_1 = 20\,см$ и $\Delta\ell_2 = 5\,см$ и периодами $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{\Delta\ell_1}{g}}$ и $T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{\Delta\ell_2}{g}}$, причем $T_1 = 2T_2$.

Это утверждение становится очевидным, если прочитать условие задачи не как «*к нерастянутым пружинам прикрепляют грузы*», а так: «*первый груз смещают из положения равновесия на высоту $\Delta\ell_1 = 20\,см$, а второй на высоту $\Delta\ell_2 = 5\,см$*».

Законы движения для каждого груза имеют вид:

$$\begin{cases} x_1(t) = \Delta\ell_1 - \Delta\ell_1 \cos\omega_1 t, \\ x_2(t) = \Delta\ell_2 - \Delta\ell_1 \cos\omega_2 t \end{cases}$$

А условие натяжения нити: $x_1(t) - x_2(t) = a$, или

$$\Delta\ell_1 - \Delta\ell_1 \cos\omega_1 t - \Delta\ell_2 + \Delta\ell_2 \cos 2\omega_1 t = a$$

Его решение $\cos\omega_1 t = -1/2$. Отсюда получаем окончательный ответ:

$$t = T_1/3 = \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{\Delta\ell_1}{g}} = 0{,}30\,c$$

Ответ: $t = \dfrac{2\pi}{3}\sqrt{\dfrac{\Delta\ell_1}{g}} = 0{,}30\,c$.