Задача 9.1 «Вращающийся стержень 2»

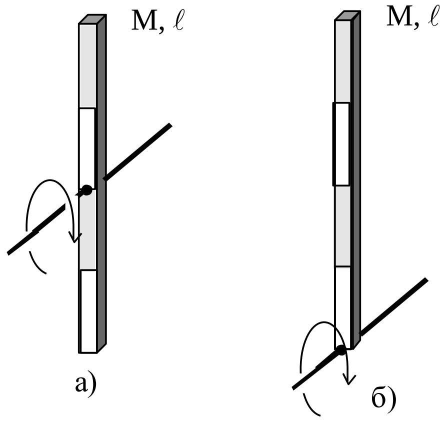

Рис. 1

Кинетическая энергия тонкого стержня, который вращается относительно оси проходящей через его центр (рис. 1а), дается формулой:

$$E_k = \frac{\pi^2}{6} M\ell^2 \cdot \frac{1}{T^2}.$$

Здесь M – масса стержня, ℓ – его длина, T - период вращения.

Используя эту формулу, подсчитайте кинетическую энергию стержня массой 3 кг и длиной 4 метра, который вращается относительно оси, проходящий через его край (рис. 1б). Период вращения $T = 2\,c$.

Решение

Получим из данной формулы формлу для подсчета кинетической энергии стержня, вращающегося относительно оси, проходящей через край.

Стержень, вращающийся относительно оси, проходящий через центр, можно представить как два одинаковых стержня, массами $m = M/2$ и длиной $\ell_1 = \ell/2$, каждый из которых вращается относительно оси проходящей через край. Тогда для кинетической энергии одного стержня получаем:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{6} M\ell^2 \cdot \frac{1}{T^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{6} \cdot 2m \cdot (2l_1)^2 \cdot \frac{1}{T^2} = \frac{2\pi^2}{3} \cdot \frac{ml_1^2}{T^2}.$$

Для данного нам стержня $m = 3\,кг$, $\ell_1 = 4\,м$.Отсюда ответ:

$$E_k = \frac{2\pi^2}{3} \cdot \frac{ml_1^2}{T^2} = 79\,Дж$$

Ответ: $E_k = \frac{2\pi^2}{3} \cdot \frac{ml_1^2}{T^2} = 79\,Дж$

Задача 9.2 «Три амперметра»

Три амперметра от разных производителей соединяеют последовательно и подключают к источнику постоянного напряжения (рис. 1, *а*). При этом первый амперметр показывает силу тока $I_0 = 1\,A$.

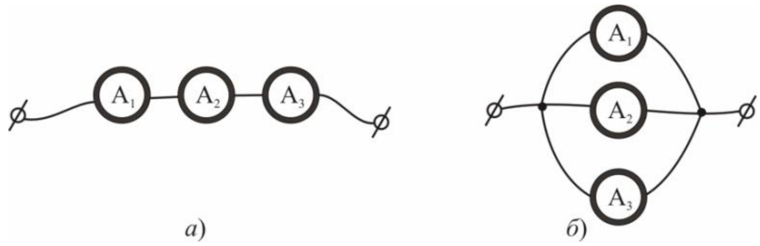

Рис. 1

Затем все три амперметра соединяют паралельно и подключают к тому же самому источнику (рис. 1, *б*). При этом второй амперметр показывает силу тока $I_2 = 2\,A$, а третий – $I_3 = 3\,A$.

Что показывает во втором случае первый амперметр?

Решение

Пусть внешнее напряжение равно 6 В (все равно его конкретное значение из окончательного ответа выпадет).

Тогда результат первого подключения говорит нам, что общее сопротивление всех трех амперметров равно 6 Ом.

Результат второго подключения добавляет: сопротивление второго амперметра 3 Ом, а третьего – 2 Ом.

Получается, сопротивление первого амперметра равно 1 Ом. И, следовательно, при подключении его источнику он покажет ток $I_1 = 6\,A$.

Приведем и ответ в общем виде:

$$I_1 = \frac{I_0 I_2 I_3}{I_2 I_3 - I_3 I_0 - I_0 I_2} = 6\,A.$$

Ответ: $I_1 = \dfrac{I_0 I_2 I_3}{I_2 I_3 - I_3 I_0 - I_0 I_2} = 6\,A.$

Задача 9.3 «Максимальная мощность нагревателя»

Для исследования тепловых свойств полимера его поместили в калориметр с нагревателем.

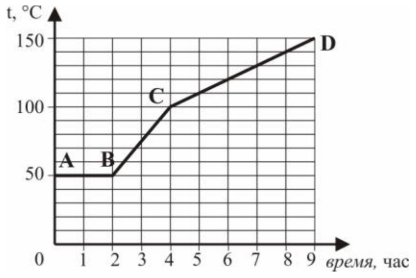

Рис. 1

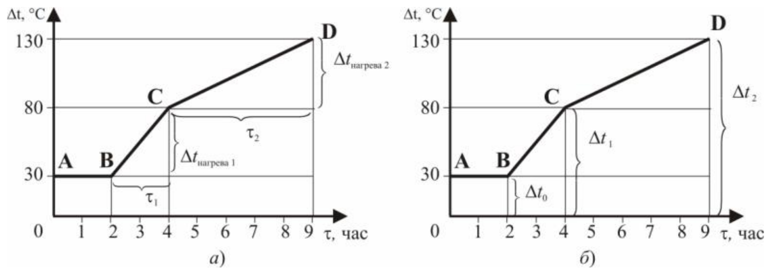

Рис. 2

Первые два часа температуру полимера поддерживали постоянной и равной $50°C$. При этом мощность нагревателя оставалась равной $P_0 = 0{,}6\,Вт$. Следующие семь часов мощность нагревателя изменяли. При этом изменялась и температура полимера. График изменения температуры полимера от времени показан на рисунке 1. Определить максимальную тепловую мощность нагревателя в процессе $A-B-C-D$.

Общая теплоемкость образца и калориметра равна $C = 360\,Дж/К$, температура в лаборатории поддерживается постоянной и равной $20°C$, изменение агрегатного состояния полимера не происходит. Задачу решить в предположении, что мощность потерь тепла из калориметра прямо пропорциональна разности температур внутри и снаружи калориметра.

Решение Тепло, которое выделяется при работе нагревателя, идет на нагрев образца и теряется в виде тепловых потерь из-за теплопроводности стенок калориметра.

Поэтому мощность нагревателя равна $P = P_{нагр} + P_{потерь}$, здесь $P_{нагр}$ – тепловая мощность нагрева образца, $P_{потерь}$ – тепловая мощность потерь.

Первое слагаемое $P_{нагр}$ остается постоянной на каждом из участков, а вторая составляющая $P_{потерь}$ увеличивается с ростом температуры образца. Поэтому для нахождения максимальной мощности нам следует рассчитать и сравнить мощности нагревателя в конце участков $B-C$ и $C-D$. Результаты этих вычислений мы приводим в таблице.

	участок $A-B$	конец участка $B-C$	конец участка $C-D$
$P_{нагр}$	0	$2{,}5\,Вт$	$1{,}0\,Вт$
$P_{потерь}$	$0{,}6\,Вт$	$1{,}6\,Вт$	$2{,}6\,Вт$
$P = P_{нагр} + P_{потерь}$	$0{,}6\,Вт$	$4{,}1\,Вт$	$3{,}6\,Вт$

Вычисления первого слагаемого мы проводим по формуле (рис. 2, *а*): $P_{нагр} = \dfrac{Q}{\tau} = \dfrac{C \cdot \Delta t_{нагрева}}{\tau}$, где $\Delta t_{нагрева}$ – величина нагрева на каждом участке, τ – время нагрева на каждом участке.

Вычисление второго слагаемого мы проводили по формуле (рис. 2, *б*): $P_{потерь} = k \cdot \Delta t = \dfrac{\Delta t}{\Delta t_0} \cdot k \cdot \Delta t_0 = \dfrac{\Delta t}{\Delta t_0} \cdot P_0$, где Δt – разность температур внутри и снаружи калориметра в конце каждого участка, $\Delta t_0 = 30°C$ – разность температур внутри и снаружи калориметра на первом участке $A-B$.

Сравнивая значения мощностей, приведенные в самой нижней строчке таблицы, находим, что мощность нагревателя была максимальной в конце участка $B-C$. Ее значение было равно $P_{\max} = 4{,}1\,Вт$. *Ответ:* $P_{\max} = 4{,}1\,Вт$.

Задача 9.4 «Шоколадные конфеты»

Кондитерскя фабрика выпускает три сорта шоколадных конфет с орехами. Шоколадная начинка во всех конфетах одинакова, а количество орехов разное.

В конфеты первого сорта кладут три маленьких ореха, в конфеты второго сорта – два средних, в конфеты третьего сорта – один большой. Размеры среднего ореха в два раза, а большого в три раза большие, чем размеры маленького ореха.

Найти плотность конфет второго сорта ρ_2, если плотность конфет первого сорта равна $\rho_1 = 1200 кг/м^3$, а третьего сорта – $\rho_3 = 1392 кг/м^3$. Размеры конфет всех сортов одинаковы. Расчеты выполнить, в предположении, что орехи имеют форму куба.

Решение.

1) Главная идея: один средний орех – это *восемь* маленьких орехов, а один большой орех – *двадцать семь* маленьких орехов.

Доказать это можно так. Пусть размер ребра маленького ореха (куба) равен a, тогда размер ребра среднего куба будет равен $2a$, а объем $V_2 = (2a)^3 = 8a^3 = 8V_0$, т.е. куб, имеющий в два раза больший размер, имеет в восемь раз больший объем! А для куба с размером ребра $3a$ объем в $3^3 = 27$ раз больше объема маленького куба.

2) Введем обозначения: V - объем кофеты, V_0 - объем одного маленького ореха, $\rho_н$ - плотность шоколадной начинки, $\rho_о$ – плотность ореха. Тогда для плотности конфет каждого сорта получим:

$$\rho_1 = \frac{m}{V} = \frac{\rho_н \cdot (V - 3V_0) + \rho_0 3V_0}{V} = \rho_н + 3\frac{V_0}{V}(\rho_о - \rho_н),$$

$$\rho_2 = \rho_н + 16\frac{V_0}{V}(\rho_о - \rho_н),$$

$$\rho_3 = \rho_н + 27\frac{V_0}{V}(\rho_о - \rho_н).$$

Из первого и третьего равенства получаем $24\frac{V_0}{V}(\rho_о - \rho_н) = \rho_3 - \rho_1$. И для плотности второго сорта можно записать:

$$\rho_2 = \rho_н + 16\frac{V_0}{V}(\rho_о - \rho_н) = \rho_1 + 13\frac{V_0}{V}(\rho_о - \rho_н) = \rho_1 + \frac{13}{24}(\rho_3 - \rho_1).$$

Проведем расчет

$$\rho_2 = \rho_1 + \frac{13}{24}(\rho_3 - \rho_1) = 1200 + \frac{13}{24} \cdot 192 = 1304 кг/м^3.$$

Ответ: $\rho_2 = \rho_1 + \frac{13}{24}(\rho_3 - \rho_1) = 1304 кг/м^3$.

Задача 9.5 «Четыре трубки»

Четыре трубки разного размера, запаянные с одного конца, опускают открытым концом в ртуть (рис. 4). Размер клетки на рисунке 1 см, атмосферное давление равно 760 мм.рт.ст..

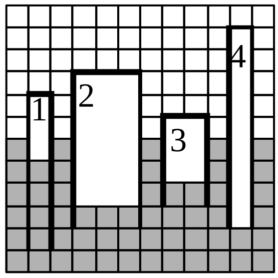

Рис. 1

1) В какой из трубок давление воздуха минимально, а в какой максимально?

2) Чему равны эти давления? Ответ дать в мм.рт.ст.

Решение.

Давление воздуха в трубках такое же, как гидростатическое давление ртути на границе «воздух-ртуть» (точки A, B, C и D). А оно такое же, как давление в жидкости снаружи трубок на той же глубине (точки A_1, B_1, C_1 и D_1).

Выше всех, на глубине $h_1 = 10\,мм$, расположена точка A_1. Давление воздуха в ней минимальное. Оно равно $P_1 = P_{атм} + \rho g h_1 = 770\,мм.рт.ст.$

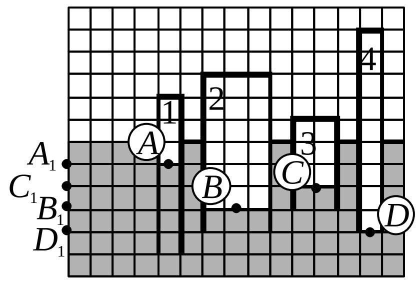

Рис. 2.

Ниже всех, на глубине $h_4 = 40\,мм$, расположена точка D_1. Давление воздуха в ней максимальное. Оно равно $P_4 = P_{атм} + \rho g h_4 = 800\,мм.рт.ст.$.

Ответ: самое маленькое давление воздуха в первой трубке, самое большое – в четвертой; $P_{\min} = P_{атм} + \rho g h_1 = 770\,мм.рт.ст.$, $P_{\max} = P_{атм} + \rho g h_4 = 800\,мм.рт.ст.$.