Задача 10.1 «Вольтметры 1»

Из двенадцати одинаковых вольтметров собрали электрическую цепь, изображенную на рисунке 1.

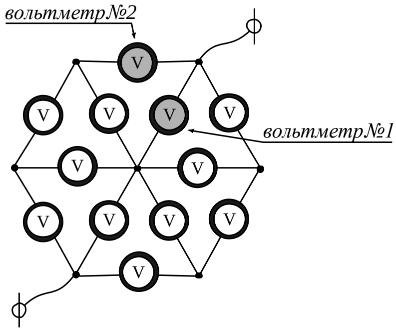

Рис. 1

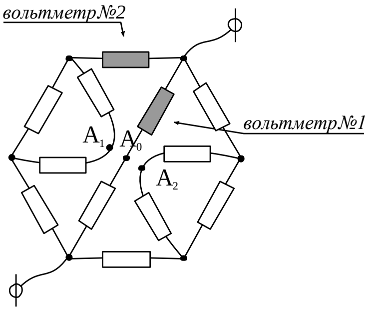

Рис. 2

При подключении этой цепи к источнику тока, вольтметр №1 показал напряжение $44\,B$. А что показал вольтметр №2? (Вольтметры реальные, т.е. электрический ток через них течет.)

Решение.

1) Центральный узел приведенной схемы можно расщепить (рис. 2). Действительно, пусть это сделано, тогда потенциалы в точках A_1, A_2 и A_0 в силу симметрии цепи будут одинаковы и равны $\varphi_ц = U/2$, где U - напряжение внешнего источника. При соединении этих узлов проводниками, токи по этим проводникам идти не будут, и распределение напряжений в цепи не изменится. Этим мы доказали, что наш переход есть переход к эквивалентной схеме.

2) Теперь решение. Сопротивлениеие участка цепи, содержащего вольтметр №1 равно $R_1 = 2R$, где R - сопротивление одного вольтметра. А сопротивление участка, содержащего вольтметр №2, будет равно

$$. \; R_2 = R + \frac{2R \cdot R}{2R + R} + R = \frac{8}{3}R$$

Это означает, что ток через вольтметр №2, а, следовательно, и его показания, будут в $4/3$раз меньше, чем в случае первого вольтметра:

$$U_2 = \frac{R_1}{R_2}U_1 = \frac{3}{4}U_1 = 33\,B$$

Ответ: $U_2 = \frac{R_1}{R_2}U_1 = \frac{3}{4}U_1 = 66\,B$.

Задача 10.2 «Столкновения протонов»

В эксперименте было проведено изучение столкновений протонов в скрещенных пучках (рис. 1). Энергия протонов обоих пучков была одинакова и равной $E_0 = 6 \cdot 10^{-13}$ *Дж*.

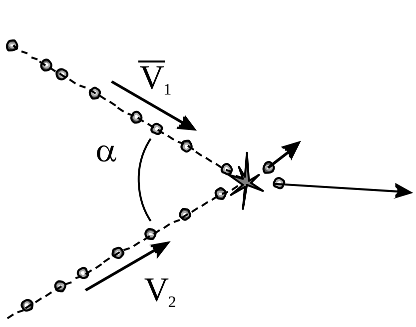

Рис. 1

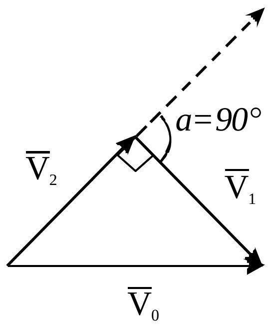

Рис. 2

Чему равен угол α, между пучками, если было установлено, что максимальная кинетическая энергия протонов после столкновения равна $E_{\max} = 1{,}2 \cdot 10^{-12}$ *Дж*? Столкновения протонов считать абсолютно упругими.

Решение.

Если после столкновения энергия одного из протонов равна сумме кинетических энергий сталкивающих частиц $E_{\max} = 2E_0$, то это означает, что второй протон остановился.

Законы сохранения для такого столкновения имеют вид (импульс и энергия остановившегося протона равны нулю):

$$\begin{cases} m\vec{V}_1 + m\vec{V}_2 = m\vec{V}_0, \\ \dfrac{mV_1^2}{2} + \dfrac{mV_2^2}{2} = \dfrac{mV_0^2}{2} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_0, \\ V_1^2 + V_2^2 = V_0^2 \end{cases}$$

Закон сохранения импульса означает, что вектора скорости образуют треугольник, а закон сохранения энергии говорит, что этот треугольник прямоугольный. Поэтому угол между скоростями налетающих протонов равне $\alpha = 90°$.

Этот факт больше известен как утверждение для обратного по времени процесса: «после абсолютно упругого удара бильярдных шаров, один из которых покоился, скорости шаров после удара образуют угол равный $90°$.

Ответ: $\alpha = 90°$.

Задача 10.3 «Две пружины»

К двум очень длинным пружинам одинаковой длины прикрепляют грузы, массами $m_1 = 10\,кг$ и $m_2 = 3\,кг$ (рис. 1). Грузы связаны нерастяжимой легкой нитью длиной $a = 5\,см$. Насколько будет растянута каждая пружина после того, как грузы отпустят и установится равновесие?

Жесткости пружин равны $k_1 = 200\,Н/м$ и $k_2 = 100\,Н/м$, точки их закрепления очень близки друг к другу.

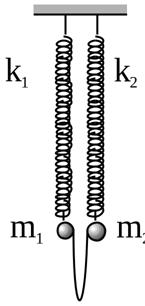

Рис. 1

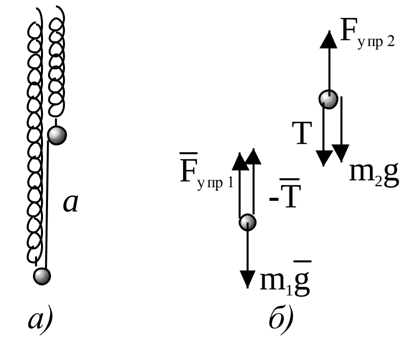

Рис. 2

Решение.

Если пружины очень длинные, а точки их прикрепления расположены близко друг к другу, то мы можем считать, что и пружины и нить, которая связывает тела, расположены вертикально (рис. 2, *а*).

Система уравнений, которая описывает эту ситуацию, состоит из двух уравнений равновесия (для каждого груза) и условия нерастяжимости нити (рис. 2, *б*):

$$\begin{cases} m_1 g = k_1 \Delta\ell_1 + T, \\ m_2 g + T = k_2 \Delta\ell_2, \\ \Delta\ell_1 = \Delta\ell_2 + a. \end{cases}$$

Здесь мы учли, что без нити первый груз был бы расположен ниже второго.

Отсюда получаем ответы:

$$\begin{cases} \Delta\ell_1 = \dfrac{(m_1 + m_2)g + k_2 a}{k_1 + k_2} = 45\,см, \\ \Delta\ell_2 = \dfrac{(m_1 + m_2)g - k_1 a}{k_1 + k_2} = 40\,см \end{cases}$$

Ответ: $\Delta\ell_1 = \dfrac{(m_1 + m_2)g + k_2 a}{k_1 + k_2} = 45\,см$; $\Delta\ell_2 = \dfrac{(m_1 + m_2)g - k_1 a}{k_1 + k_2} = 40\,см$

Задача 10.4 «Рацпредложение»

Заводской профилакторий обеспечивается теплой водой за счет собственной котельной. Котельная производит нагрев артезианской воды от температуры $t_1 = 12\,°C$ до температуры $t_2 = 52\,°C$. Главный энергетик профилактория счел возможным проводить предварительный подогрев 60 % потребляемой воды до температуры $t_3 = 30\,°C$ за счет солнечной водонагревательной установки. На сколько процентов уменьшится потребление топлива в котельной, если рацпредложение главного инженера будет внедрено?

Решение.

Масса топлива, которая требуется для подогрева 60 % потребляемой воды до температуры $t_3 = 32\,°C$, равна $m_1 = \frac{0{,}6 m_в c(t_3 - t_1)}{q}$.

После внедрения рацпредложения, этот нагрев будет проводиться за счет солнечной энергии, поэтому выписанная выше масса бует массой съэкономленного топлива.

Масса потребляемого в котельной топлива до введения рацпредложения дается формулой $m_{топл} = \frac{m_в c(t_2 - t_1)}{q}$. Отсюда получаем, что экономия составляет:

$$\frac{m_{эк}}{m_{топл}} = \frac{0{,}6 \cdot (t_3 - t_1)}{(t_2 - t_1)} = 0{,}27 = 27\,\%$$

Ответ: $\frac{m_{эк}}{m_{топл}} = \frac{0{,}6 \cdot (t_3 - t_1)}{(t_2 - t_1)} = 0{,}27 = 27\,\%$.

Задача 10.5 «Дон Педро»

Все жители страны Касталии ездят по автострадам как предписывают правила: удерживают одинаковое расстояние между машинами ℓ (оно зависит от времени суток) и одинаковую скорость $V_0 = 100\,км/час$.

Все кроме дона Педро! Он рассматривает эти правила как личное оскорбление и всегда едет со скоростью $V_1 = 150\,км/час$. А если увидит впереди себя на расстоянии $\ell_0 = 400\,м$ другую машину, то мгновенно увеличивает скорость до $V_2 = 200\,км/час$. Обогнав «нахала», он скидывает свою скорость до V_1, если, разумеется, впереди, в пределах видимости, нет нового «нахала».

1) Найти среднюю скорость движения дона Педро для режима, когда расстояние между машинами законопослушных граждан составляет $\ell = 1000\,м$.

2) Чему равна средняя скорость движения дона Педро в «часы пик», когда расстояние между машинами уменьшается до $\ell = 200\,м$?

Решение.

2) Рассмотрим движение дона Педро с момента окончания обгона некоторого «нахала» до момента окончания обгона следующего «нахала».

Если расстояние ℓ до следующего нахала больше чем ℓ_0, то он его не видит и едет со скоростью V_1. Это движение длится до тех пор, пока расстояние между доном Педро и машиной впереди не сократится с ℓ до ℓ_0. Время движения на этом этапе равно

$$t_1 = \frac{\ell - \ell_0}{V_1 - V_0}.$$

С этого момента скорость дона Педро становится равной V_2 и для того, чтобы обогнать «нахала», ему понадобится время

$$t_2 = \frac{\ell_0}{V_2 - V_0}$$

Считаем среднюю скорость дона Педро:

$$V_{ср1} = \frac{V_1 t_1 + V_2 t_2}{t_1 + t_2} = \frac{V_1 \dfrac{\ell - \ell_0}{V_1 - V_0} + V_2 \dfrac{\ell_0}{V_2 - V_0}}{\dfrac{\ell - \ell_0}{V_1 - V_0} + \dfrac{\ell_0}{V_2 - V_0}} = 162{,}5\,км/час.$$

2) В этом случае он всегда видит перед собой «нахала» и едет с постоянной скоростью V_2. Она и есть средняя скорость – $V_{ср2} = V_2 = 200\,км/час$.

Ответ:

$$V_{ср1} = \frac{V_1 t_1 + V_2 t_2}{t_1 + t_2} = \frac{V_1 \dfrac{\ell - \ell_0}{V_1 - V_0} + V_2 \dfrac{\ell_0}{V_2 - V_0}}{\dfrac{\ell - \ell_0}{V_1 - V_0} + \dfrac{\ell_0}{V_2 - V_0}} = 162{,}5\,км/час;$$

$$V_{ср2} = V_2 = 200\,км/час.$$