Задача 8.1 «Мурашко»

Два одинаковых зеркала соединяют так, что угол между ними равен 120° (рис.1). Мурашка ползет из точки А в точку В. Всего на путешествие он тратит 12 минут.

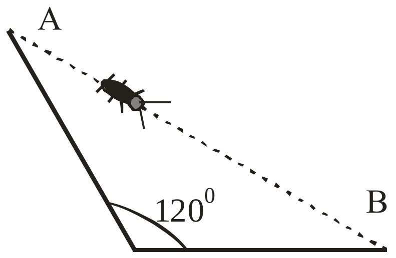

Рис. 1

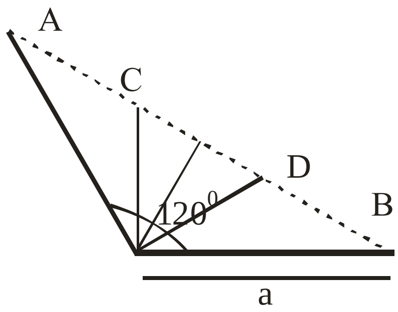

Рис 2

Сколько времени в течение своего путешествия он имеет возможность наслаждаться видом двух своих изображений в зеркалах?

Решение

Область, где мурашка будет видеть два своих изображения в зеркалах, - это участок CD (рис.2). Время движения по этому участку связано с общим временем путешествия таким образом:

$$t_1 = \frac{CD}{AB} \cdot t = \frac{2a \cdot \left(1/\cos(30°) - \cos(30°)\right)}{2a \cdot \cos(30°)} \cdot t = \left(\frac{1}{\cos^2(30°)} - 1 \right) \cdot t = 4 \text{ мин}$$

Ответ: $t_1 = \left(\frac{1}{\cos^2(30°)} - 1 \right) \cdot t = 4 \text{ мин}$**.**

Задача 8.2 «Расстояние между мальчиками»

Матвей и Александр любят бегать на переменах по школе. По первому и второму этажам (рис. 1) они бегут со скоростью $V = 5\,м/с$, вверх по лестнице BC они поднимаются со скоростью $u = 4\,м/с$, а спускаются вниз по лестнице DA со скоростью $w = 6\,м/с$.

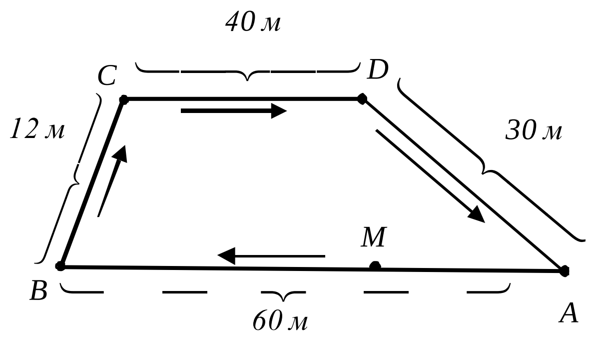

Рис. 1

Каким будет максимальное и минимальное расстояние между мальчиками, если Матвей стартует по звонку из точки M, а Александр из точки A (расстояние между этими точками $20\,м$)? Расстояние между мальчиками считается вдоль траектории, размеры всех участков движения указаны на рисунке.

Решение

Расстояние между мальчиками будет изменяться лишь в те моменты времени, когда у них разная скорость. Первый раз это случится через 8 секунд после начала движения, когда Матвей подбежит к лестнице BC. С этого момента он будет три секунды двигаться со скоростью на $1\,м/с$ меньшей, чем Александр. Поэтому расстояние между мальчиками уменьшится на три метра и станет равным:

$$S_{\min} = S_0 - |V - u| \cdot \frac{BC}{u} = 20 - 1 \cdot \frac{12}{4} = 17\,м\,.$$

После того, как и Александр пробежит лестницу BC, расстояние между ними снова станет равным 20 метрам.

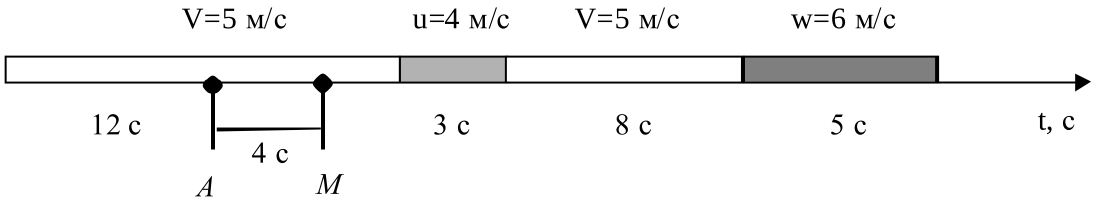

Рис. 2. Временная развертка движения мальчиков. На этой диаграмме Александр отстает от Матвея всегда на 4 секунды.

Расстояние между мальчиками начнет увеличиваться, когда Матвей добежит до лестницы DA. Оно будет увеличиватьсяна 1 м/с, но длится это будет только 4 секунды (через это время Александр тоже добежит до лестницы и скорости мальчиков сравняются). Поэтому максимальное расстояние между мальчиками будет равным:

$$S_{\max} = S_0 + (w - V) \cdot \frac{S_0}{V} = 20 + 1 \cdot \frac{20}{5} = 24\,м$$

Ответ: $S_{\min} = S_0 - |V - u| \cdot \frac{BC}{u} = 17\,м$, $S_{\max} = S_0 + (w - V) \cdot \frac{S_0}{V} = 24\,м$.

Задача 8.3 «Автомобиль, велосипедист и пешеход»

По дороге в одном направлении движутся (слева направо): автомобиль, велосипедист и пешеход. В некоторый момент времени расстояние между автомобилем и велосипедистом составляло 400 метров, а расстояние между велосипедистом и пешеходом 600 метров. Спустя 80 секунд автомобиль догоняет велосипедиста, а спустя еще 45 секунд – пешехода. Через какое время после этого велосипедист догонит пешехода?

Решение

Обозначим скорость автомобиля V, велосипедиста u, а пешехода w. Будем пользоваться временами отсчитанными от начального момента: $\tau_1 = 80с$ и $\tau_2 = 125с$. Расстояния обозначим: $S_1 = 400м$ и $S_2 = 600м$.

Чтобы ответить на вопрос нам надо найти величину $\tau_3 = \dfrac{S_2}{u - w}$.

По условию задачи имеем: $\begin{cases} V - u = \dfrac{S_1}{\tau_1} \\ V - w = \dfrac{S_1 + S_2}{\tau_2} \end{cases}$. Отсюда $u - w = \dfrac{S_1 + S_2}{\tau_2} - \dfrac{S_1}{\tau_1}$ и промежуточный ответ $\tau_3 = \dfrac{S_2}{\dfrac{S_1 + S_2}{\tau_2} - \dfrac{S_1}{\tau_1}} = \dfrac{S_2 \cdot \tau_1 \tau_2}{(S_1 + S_2)\tau_1 - S_1 \tau_2} = 200с$.

Ответ: велосипедист догонит пешехода через 75 секунд после того, как пешехода догонит автомобиль.

Задача 8.4 «Орех Бон-Бон»

На острове Бао-Бао растет орех «Бон-Бон». Мякоть у него легкая, а скорлупа – тяжелая. Если скорлупа составляет 82,5 % всего объема ореха, то орех тонет в соленой воде, а если 70 % объема – то в смеси морской и дождевой воды. Своему любимому вождю аборигены дарят только те орехи, которые тонут в чистейшей дождевой воде. Какой процент объема занимает скорлупа в таких орехах?

Плотность морской воды $\rho_м = 1020 кг/м^3$, плотность смеси морской и дождевой воды $\rho_c = 1016 кг/м^3$, плотность чистейшей дождевой воды $\rho_д = 1000 кг/м^3$.

Решение.

1) Подсчитаем плотность ореха. Пусть его объем равен V, а часть объема занятого скорлупой равна α. Тогда плотнось ореха будет равна:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{(1-\alpha)\rho_{мяк}V + \alpha\rho_{ск}V}{V} = (1-\alpha)\rho_{мяк} + \alpha\rho_{ск}.$$

Итак, плотность ореха $\rho = (1-\alpha)\rho_{мяк} + \alpha \cdot \rho_{ск}$ линейно зависит от величины α. А это означает, что именение плотности прямо проворционально изменению α.

При изменении α от 82,5 % до 70 % ($\Delta\alpha_1 = 12{,}5\,\%$) плотность уменьшилась на $\Delta\rho_1 = \rho_м - \rho_c = 4\,кг/м^3$. Чтобы она уменьшилась еще на $\Delta\rho_2 = \rho_c - \rho_д = 16\,кг/м^3$ (при этом плотность ореха станет равной плотности воды) величина α должна уменьшится на

$$\Delta\alpha_2 = \frac{\Delta\rho_2}{\Delta\rho_1} \cdot \Delta\alpha_1 = \frac{(\rho_c - \rho_д)}{(\rho_м - \rho_c)} \cdot \Delta\alpha_1 = \frac{16}{4} \cdot 12{,}5\,\% = 50\,\%$$

Таким образом, в орехах, плотность которых равна плотности воды, доля скорлупы составляет 20 % от объема.

Для справки приведем:

плотность мякоти равна $\rho_{мяк} = \rho_д - \frac{\Delta\rho_1}{\Delta\alpha_1} \cdot \alpha_{кон} = 1000 - \frac{4}{12{,}5} \cdot 20 = 993{,}6\,кг/м^3$,

плотность скорлупы равна $\rho_{ск} = \rho_д + \frac{\Delta\rho_1}{\Delta\alpha_1} \cdot (100\% - \alpha_{кон}) = 1000 + \frac{4}{12{,}5} \cdot 80 = 1025{,}6\,кг/м^3$

Ответ: $\alpha = \alpha_2 - \Delta\alpha_2 = \alpha_2 - \frac{\Delta\rho_2}{\Delta\rho_1} \cdot \Delta\alpha_1 = \alpha_2 - \frac{(\rho_c - \rho_д)}{(\rho_м - \rho_c)} \cdot \Delta\alpha_1 = 70\,\% - \frac{16}{4} \cdot 12{,}5\,\% = 20\,\%$.

Задача 8.5 «Горящая свеча»

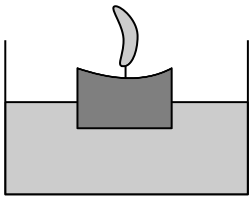

Рис.1

Задача. В сосуде с водой плавает горящая свечка (рис. 1). С какой скорость опускается уровень воды в сосуде, если за $\Delta t = 10\,мин$ масса свечки уменьшается на $\Delta m = 6\,гр$? Площадь поперечного сечения сосуда $S = 100\,см^2$, плотность воды $\rho = 1000\,кг/м^3$.

Решение

Если заменить плавающую свечку равной ей по массе водой, то уровень воды в сосуде не изменится (в силу закона Архимеда). Общий объем воды в сосуде будет равен $V = V_0 + \frac{m_{св}}{\rho}$, а высота уровня $h = V/S = \left(V_0 + \frac{m_{св}}{\rho}\right)/S$. Изменение уровня воды за время Δt будет равно $\Delta h = \frac{\Delta m_{св}}{\rho \cdot S}$, а скорость движения уровня $u = \Delta h / \Delta t = \frac{\Delta m_{св}}{\rho \cdot S \cdot \Delta t}$. Расчет дает $u = \frac{\Delta m_{св}}{\rho \cdot S \cdot \Delta t} = 10^{-4}\,м/с$.

Ответ: $u = \frac{\Delta m_{св}}{\rho \cdot S \cdot \Delta t} = 10^{-4}\,м/с$.