ЗАНЯТИЯ СО ЗВЕЗДОЧКОЙ
СУНЦ 10 КЛАСС

1 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СПРАВКА. ЧИСЛА

Мы уже давно знакомы с этими множествами чисел, но на всякий случай, еще раз вспомним о них:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ - натуральные числа

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ - целые числа

$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \quad | \quad m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ - рациональные числа

$\mathbb{R} = \{a_0{,}a_1a_2a_3a_4\ldots | a_0 \in \mathbb{Z}, a_i \in \{0,\ldots,9\}\}$, при этом период из 9 запрещен - действительные (вещественные) числа ($\mathbb{R}$ от агл. Real)

Заметим, что $\forall a, b \in \mathbb{Q}, a \neq b : \quad \exists c \in \mathbb{Q} : a < c < b$. Именно для того, чтобы это свойство сохранялось, в $\mathbb{R}$ запрещен период из 9, иначе между 0,(9) и 1 не было бы никакого числа. В множестве рациональных чисел у любого ненулевого элемента есть обратный, то есть $\forall 0 \neq x \in \mathbb{Q} \quad \exists b \in \mathbb{Q} : a \cdot b = b \cdot a = 1$. Но рациональных чисел нам все равно недостаточно для вычислений: например, рациональные числа не содержат в себе длину диагонали квадрата со стороной 1 ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

В $\mathbb{R}$ $\forall X, Y : \forall x \in X \ \forall y \in Y \ \exists z : x \leq z \leq y$ (аксиома полноты). Этого свойства, казалось бы, уже достаточно для всего, но:

> *640 Кб должно быть достаточно для каждого* (Билл Гейтс, 1981)

1.1 Комплексные числа

Действительные числа действительно хороши, но у них есть некоторые проблемы. Например, многочлен $x^2 + 1$ не имеет в $\mathbb{R}$ корней. На помощь должно прийти некоторое новое числовое множество.

Определение 1. *Множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ - это множество с операциями $+$ и $\cdot$, обладающее следующими свойствами:*

1) оно содержит в себе множество действительных чисел $\mathbb{R}$ и наследует его свойства сложения и умножения;

2) оно содержит такой элемент i, что $i^2 = -1$;

Прошу обратить внимание на то, что определение не является формальным, хоть довольно близко к нему.

Комплексные числа можно представлять как множество $\mathbb{C} = \{a+bi | a, b \in \mathbb{R}\}$. В таком случае, результатом сложения комплексного числа $z_1 = a_1+b_1i$ на $z_2 = a_2+b_2i$ будет число $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$, а результатом умножения тех же чисел друг на друга будет являться $z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i$ (в этом легко убедиться, раскрыв скобки и воспользовавшись равенством $i^2 = -1$)

Определение 2. $z = a + bi \in \mathbb{C}$.

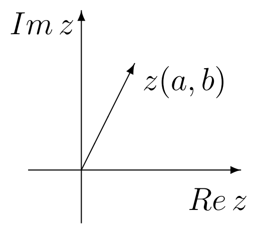
$Re\, z = a$ - вещественная часть числа z;

$Im\, z = b$ - мнимая часть числа z;

$\overline{z} = a - bi$ - комплексно сопряженное к z число.

Заметим, что $\overline{\overline{z}} = z$. Исходя из этого получаем, что $z + \overline{z} \in \mathbb{R}$, а также что $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$.

Вещественные числа проще всего представлять как точки на прямой, где числу в соответствие ставится точка на прямой с координатой, равной этому числу. Как же геометрически можно представить комплексное число? Заметим, что число z однозначно задается своими вещественной и мнимой частями, так что попробуем рассмотреть плоскость Oxy, где оси x и y соответствуют $Re\, z$ и $Im\, z$:



Оказывается, комплексное число можно спокойно представить в виде вектора с координатами $(Re\,z, Im\,z)$. Как мы знаем, положение точки на плоскости можно задать с помощью чисел r и φ, где r - длина вектора, а φ - угол, составляемый им с горизонтальной осью. В таком случае число $z = a + bi$ представляется в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

такое представление комплексного числа называется его тригонометрической формой.

Определение 3. $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.
$|z| = r$ - *модуль числа z;*
$\arg z = \varphi$ - *аргумент числа z.*

Легко понять, что $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$. Чем же нам так удобна тригонометрическая форма записи комплексного числа? Попробуем умножить числа z_1 и z_2 в тригонометрической форме:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

Несложными преобразованиями получаем

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(&\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 \\ &+ i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1)) \end{aligned}$$

Вспоминая формулы синуса и косинуса суммы, замечаем, что

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

и приходим к тому, что при умножении двух комплексных чисел их модули умножаются, а аргументы складываются.

Отсюда следует *формула Муавра:*

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), n \in \mathbb{Z}$$

Теперь рассмотрим следующую задачу: дано число $z \in \mathbb{C}$. Необходимо найти все числа x такие, что $x^n = z$. Иначе говоря, мы хотим найти все корни степени n числа z. Сделать это очень просто из формулы Муавра:

$$x = \sqrt[n]{r}\Big(\cos\big(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\big) + i\sin\big(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\big)\Big),$$

где $k \in \mathbb{Z}$.

Теперь мы хотим как-то определить комплексную экспоненту e^x, где $x = a + i\varphi \in \mathbb{C}$. Главное свойство, которое должно выполняться, состоит в том, что $e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}$. Отсюда должно следовать, что $|e^x| = e^a$ и $e^x = e^a e^{i\varphi} = |e^x| e^{i\varphi} = re^{i\varphi}$.

Чтобы еще ближе подобраться к определению комплексной экспоненты, еще раз запишем произведение z_1 и z_2: $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$, что должно наводить нас на следующую формулу:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad \textit{(формула Эйлера)}$$

Определение 4. *Запись $z = re^{i\varphi}$ называется показательной формой комплексного числа z. Так же, как в тригонометрической форме, здесь $r = |z|$, а $\varphi = \arg z$.*

1.2 Задачи

1. Покажите, что геометрически происходит при умножении комплексных чисел с модулем 1.

2. Покажите, где в плоскости лежат корни комплексного числа z степени n.

3. Вычислите:
   (a) $10 * (5 + 3i)$
   (b) $i + (10 - 2i)$
   (c) $i * (11 + i)$
   (d) $(10 + 10i)^3$

4. Запишите в тригонометрической и показательной формах следующие числа:
   (a) $1 + \sqrt{3}$
   (b) $2i$
   (c) $-7i$
   (d) $1 - \sqrt{3}i$

(e) $3 + 4i$

5. Найдите частное, домножив знаменатель на комплексно сопряженное:

   (a) $\frac{1}{i}$
   (b) $\frac{1}{1+i}$
   (c) $\frac{1+i}{2-i}$
   (d) $\frac{a_1+b_1 i}{a_2+b_2 i}$

6. Что происходит при делении чисел в тригонометрической форме?

7. Найдите все значения корней из комплексных чисел:

   (a) $\sqrt[2]{1+\sqrt{3}i}$
   (b) $\sqrt[3]{2i}$
   (c) $\sqrt[6]{-7i}$

8. Пользуясь формулой Эйлера, выразите $\sin x$ и $\cos x$ через комплексные экспоненты.

9. Решите уравнение:

$$x^4 + 2x^2 + 1 = 0$$