Министерство образования и науки Российской Федерации

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Б.Ю. ЛЕМЕШКО

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ ОБ ОДНОРОДНОСТИ

Руководство по применению

Москва

ИНФРА–М

2016

УДК 519.23

Л 44

***Рецензенты:***

*А.А. Попов –* д-р техн. наук, профессор

*В.А. Селезнев –* д-р физ.-мат. наук, профессор

**Лемешко Б.Ю.**

Л 44           Критерии проверки гипотез об однородности. Руководство по применению / Б.Ю. Лемешко. – М: ИНФРА–М, 2016. – 207 с. (Научная мысль). – www.dx.doi.org/10.12737/xxxxx

Книга рассчитана на специалистов, в той или иной степени сталкивающихся в своей деятельности с вопросами статистического анализа данных, с обработкой результатов экспериментов, применением статистических методов для анализа различных аспектов и тенденций окружающей действительности.

В руководстве рассматриваются вопросы применения статистических критериев, ориентированных на проверку гипотез об однородности законов, которым принадлежат анализируемые выборки, об однородности средних (о равенстве математических ожиданий), об однородности дисперсий (о равенстве дисперсий сравниваемых выборок). Указываются недостатки и преимущества различных критериев, рассматривается применение критериев в условиях нарушения стандартных предположений.

Приводятся таблицы, содержащие процентные точки и модели распределений статистик, необходимые для корректного применения критериев.

Следование рекомендациям обеспечит корректность и повысит обоснованность статистических выводов при анализе данных.

Книга будет полезна инженерам, научным сотрудникам, специалистам различного профиля (медикам, биологам, социологам, экономистам, и др.), сталкивающимся в своей деятельности с необходимостью статистического анализа результатов экспериментов. Руководство будет полезно преподавателям вузов, аспирантам и студентам.

**ISBN \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_** © Лемешко Б.Ю., 2016

Оглавление

[Предисловие 5](#_Toc508871273)

[ВВЕДЕНИЕ 8](#_Toc508871274)

[1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ПРОВЕРКЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ 11](#_Toc508871275)

[2. КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ ОДНОРОДНОСТИ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ 18](#_Toc508871276)

[2.1. Критерий Смирнова 20](#_Toc508871277)

[2.2. Критерий Лемана–Розенблатта 29](#_Toc508871278)

[2.3. Критерий Андерсона–Дарлинга 35](#_Toc508871279)

[2.4. Многовыборочный критерий Андерсона–Дарлинга 40](#_Toc508871280)

[2.5. Критерии однородности Жанга 48](#_Toc508871281)

[2.6. Анализ k выборок с использованием двухвыборочных критериев 60](#_Toc508871282)

[2.6.1. k –выборочный критерий максимума статистик Смирнова 61](#_Toc508871283)

[2.6.2. k –выборочный критерий максимума статистик Лемана–Розенблатта 67](#_Toc508871284)

[2.6.3. k –выборочный критерий максимума статистик Андерсона–Дарлинга 71](#_Toc508871285)

[2.7. Примеры применения 74](#_Toc508871286)

[2.8. Выводы по разделу 78](#_Toc508871287)

[3. КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ ОДНОРОДНОСТИ СРЕДНИХ 82](#_Toc508871288)

[3.1. Параметрические критерии однородности средних 83](#_Toc508871289)

[3.1.1. Критерий сравнения двух выборочных средних при известных дисперсиях 83](#_Toc508871290)

[3.1.2. Критерий Стьюдента 84](#_Toc508871291)

[3.1.3. Критерий сравнения двух выборочных средних при неизвестных и неравных дисперсиях 84](#_Toc508871292)

[3.1.4. F-критерий однородности средних 87](#_Toc508871293)

[3.1.5. Об устойчивости параметрических критериев 88](#_Toc508871294)

[3.2. Непараметрические критерии однородности средних 92](#_Toc508871295)

[3.2.1. Критерии Уилкоксона и Манна–Уитни. 92](#_Toc508871296)

[3.2.2. Критерий Краскела–Уаллиса 94](#_Toc508871297)

[3.2.3. Критерий Ван дер Вардена 95](#_Toc508871298)

[3.2.4. Критерий Фишера–Йэйтса–Терри–Гёфдинга 97](#_Toc508871299)

[3.2.5. Многовыборочный критерий Ван дер Вардена 98](#_Toc508871300)

[3.3. Сравнительный анализ мощности критериев 99](#_Toc508871301)

[3.4. Выводы по разделу 109](#_Toc508871302)

[4. КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ ОДНОРОДНОСТИ ДИСПЕРСИЙ 111](#_Toc508871303)

[4.1. Критерий Бартлетта 114](#_Toc508871304)

[4.2. Критерий Кокрена 118](#_Toc508871305)

[4.3. Критерий Хартли 120](#_Toc508871306)

[4.4. Критерий Левене 122](#_Toc508871307)

[4.5. Критерий Фишера 128](#_Toc508871308)

[4.6. Критерий Неймана-Пирсона 129](#_Toc508871309)

[4.7. Критерий О`Брайена. 132](#_Toc508871310)

[4.8. Критерий Линка 135](#_Toc508871311)

[4.9. Критерий Ньюмана 136](#_Toc508871312)

[4.10. Критерий Блиса–Кокрена–Тьюки 138](#_Toc508871313)

[4.11. Критерий Кадуэлла–Лесли–Брауна 140](#_Toc508871314)

[4.12. Z–критерий Оверолла–Вудворда 142](#_Toc508871315)

[4.13. Модифицированный Z–критерий 143](#_Toc508871316)

[4.14. Критерий Ансари–Бредли 146](#_Toc508871317)

[4.15. Критерий Муда 148](#_Toc508871318)

[4.16. Критерий Сижела–Тьюки 149](#_Toc508871319)

[4.17. Критерий Клотца 151](#_Toc508871320)

[4.18. Критерий Кейпена 153](#_Toc508871321)

[4.19. k-выборочный критерий Флайне–Киллина 155](#_Toc508871322)

[4.20. Сравнительный анализ мощности критериев 158](#_Toc508871323)

[4.21. Мощность критериев при нарушении предположения о нормальности 168](#_Toc508871324)

[4.22. Критерий Кокрена при законах, отличных от нормального 174](#_Toc508871325)

[4.23. Что надо учитывать при выборе критерия однородности дисперсий? 175](#_Toc508871326)

[4.24. О вычислении достигнутого уровня значимости 177](#_Toc508871327)

[4.25. Применение критериев в “нестандартных” условиях 179](#_Toc508871328)

[4.26. Выводы по разделу 184](#_Toc508871329)

[5. Заключение 188](#_Toc508871330)

[Библиографический список 189](#_Toc508871331)

[Приложение А 197](#_Toc508871332)

# Предисловие

Необходимость проверки гипотез об однородности законов распределения вероятностей, об однородности средних или однородности дисперсий очень часто возникает в различных приложениях, когда хотят убедиться в неизменности (или наоборот в изменении) статистических свойств некоторого объекта, процесса и т.п. после целенаправленного изменения фактора или факторов (методики, технологии и т.д.), неявным образом влияющих на исследуемый объект. В прикладной математической статистике накопился достаточно обширный арсенал критериев (параметрических и непараметрических), предназначенных для проверки гипотез того или иного вида.

В качестве критериев проверки однородности законов в случае анализа 2-х выборок могут использоваться критерии Смирнова, Лемана–Розенблатта, Андерсона–Дарлинга–Петитта, типа . При большем числе сравниваемых выборок могут применяться -выборочные варианты критериев.

Для проверки гипотез об однородности средних могут использоваться классические критерии (варианты критерия Стьюдента и -критерий), в основе которых лежит предположение о принадлежности выборок нормальным законам, или применяться непараметрические критерии, свободные от этого предположения (Уилкоксона, Манна–Уитни, Краскела–Уаллиса и др.).

Арсенал критериев, ориентированных на проверку гипотез об однородности дисперсий наиболее внушительный. Это длинный и возможно неполный ряд параметрических критериев (Бартлетта, Кокрена, Фишера, Хартли, Левене, Неймана–Пирсона, О’Брайена, Линка, Ньюмана, Блисса–Кокрена–Тьюки, Кадуэлла–Лесли–Брауна, Z-критерий Оверолла–Вудворда, модифи­цированный Z-критерий), в обосновании которых решающая роль принадлежит стандартному предположению о принадлежности анализируемых выборок нормальным законам. Это достаточно представительный перечень непараметрических критериев, предназначенных для проверки однородности характеристик рассеяния (Ансари–Бредли, Муда, Сижела–Тьюки, Кейпена, Клотца, Флайне–Киллина).

Применяемое множество критериев создавалось на протяжении практически столетия интенсивного развития математической статистики. Однако до сих пор не сформировалось устойчивого мнения о том, какие из этого множества критериев наиболее предпочтительны при проверке соответствующих гипотез? Какие критерии обладают большей мощностью? Какие достоинства или недостатки связаны с отдельными критериями?

Давно известно, что параметрические критерии проверки однородности средних достаточно устойчивы к нарушению стандартного предположения о нормальности. Выводы могут оставаться корректными при значительных отклонениях наблюдаемого закона от нормального. Однако у устойчивости параметрических критериев есть вторая сторона медали: их преимущество в мощности по сравнению с непараметрическими критериями весьма незначительно.

В свою очередь параметрические критерии проверки однородности дисперсий, за редким исключением, чрезвычайно чувствительны к малейшим отклонениям от нормальности, что негативно отражается на корректности статистических выводов. В то же время в основной массе параметрические критерии имеют заметное преимущество в мощности перед непараметрическими. Причём преимущество в мощности сохраняется за параметрическими критериями и в условиях нарушения предположения о нормальности (если только выборки не принадлежат законам с “тяжёлыми хвостами”). По этой причине очень желательно иметь возможность корректного применения параметрических критериев в условиях нарушения стандартного предположения о нормальности. Для реализации такой возможности необходимо лишь знание распределений статистик критериев в таких нестандартных условиях, что в настоящее время, благодаря использованию компьютерных технологий и имитационного моделирования, отнюдь не является неразрешимой задачей.

Данное руководство подготовлено с учетом наших исследований, проведенных в предшествующих работах и непосредственно при формировании его содержания. Исследования позволили провести сравнительный анализ мощности групп критериев относительно различных альтернатив, позволили указать на нюансы применения или существенные недостатки некоторых критериев, проявляющиеся при проверке гипотез.

Нельзя утверждать, что в каждом из разделов настоящего руководства проанализированы абсолютно все сущес­твующие критерии, предназначенные для проверки гипотез определённого вида, по-видимому, наиболее упоминаемые и чаще используемые. И всё-таки хочется надеяться, что настоящая книга, как и предшествующие [73, 76, 77, 99] окажет реальную помощь специалистам, заинтересованным в корректности проводимого статистического анализа.

Я очень признателен своим коллегам и ученикам (Лемешко С.Б., Горбуновой А.А., Сатаевой Т.С.), внёсшим заметный вклад в уточнение знаний о свойствах критериев, что позволило подготовить данное руководство.

Значительная часть исследований, способствующих подготовке руководства, проведена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках выполнения государственной работы «Обеспечение проведения научных исследований» и проектной части государ­ственного задания (проект № 2.541.2014К).

Б.Ю. Лемешко

*Июль 2016*

# ВВЕДЕНИЕ

Необходимость в проверке гипотез об однородности выборок случайных величин очень часто возникает в различных приложе­ниях при решении задач статистического анализа результатов экспериментальных исследований.

При этом речь может идти или о про­верке гипотез об од­нородности законов распределения вероятностей, соответ­ствую­щих анализируемым выбор­кам, или об однородности матема­тических ожиданий, или об однородности дисперсий. Естественно, что наиболее полные выводы могут быть получены на основании решения первой задачи. Однако исследо­вателя в большей степени может интересовать ответ на вопрос об отсутствии (наличии) возможных отклонений в средних значениях анализируемых выборок или в характеристиках рассеяния результатов измерений.

Задача проверки гипотезы об однородности законов, соответствующих  выборкам, формулируется следующим образом. Имеется  выборок

, , , ,

где – объём -й выборки, . Проверяется гипотеза о том, что все выборки извлечены из одной и той же генеральной сово­купности, т. е.

: 

при любом . Конкурирующая гипотеза может иметь вид

: 

для некоторых .

Как правило, критерии проверки гипотезы об однородности законов непараметрические.

При проверке гипотезы об однородности средних (о равенстве математических ожиданий) предполагается, что анализируемые выборки принадлежат какому-то одному закону: неизвестному в случае непараметрических критериев и известному в случае параметрических. Проверяемая гипотеза имеет вид



при конкурирующей гипотезе

,

где неравенство выполняется хотя бы для некоторой пары индексов , .

Для проверки гипотез о равенстве математических ожиданий может использоваться ряд параметрических критериев, применение которых, как правило, опирается на стандартное предположение о принадлежности анализируемых выборок нормальным законам, а также непараметрические критерии, свободные от этого предположения. В то же время следует иметь в виду, что применение непараметрических критериев базируется на предположении, что законы, которым принадлежат сравниваемые выборки, могут отличаться только параметрами сдвига.

В критериях проверки однородности дисперсий проверяемая гипотеза о постоянстве дисперсий  выборок имеет вид

,

а конкурирующая с ней гипотеза

,

где неравенство выполняется, по крайней мере, для одной пары индексов .

Для проверки такого рода гипотез может использоваться значительный перечень классических параметрических критериев. Обоснованное применение этих критериев требует выполнения стандартного предположения о принадлежности анализируемых выборок нормальному закону.

В случае непараметрических аналогов речи о принадлежности выборок нормальным законам не идёт. Однако предполагается, что анализируемые выборки принадлежат пусть неизвестному, но одному и тому же виду закона с одинаковыми математическими ожиданиями. Именно тогда обеспечивается корректность применения критериев.

У исследователя, стоящего перед проблемой выбора критерия, несмотря на обилие публикаций, возникает множество вопросов, так как оста­ется не ясным, в каких случаях применение какого критерия предпочтительней.

В случае критериев проверки гипотез об однородности законов распределений, перечень которых достаточно узок, специалиста может интересовать, насколько хорошо при ограниченных объёмах выборок распределения статистик хорошо описываются предельными распределениями? Или какой из критериев является более мощным (лучше распознаёт альтернативы)?

Такие же вопросы возникают относительно критериев проверки гипотез о средних, где мы имеем множество критериев (параметрических и непара­метрических), но нет четких указаний и сведений о преимуществе тех или иных, например, о степени устойчивости параметрических критериев к отклонениям от стан­дартного предположения о нормальности, о результатах сравнения мощности параметрических и непараметрических критериев. Отсутствие указаний не позволяет в конкретной ситуации выбрать наиболее мощный критерий. По некоторым параметрическим критериям проверки гипотез о сред­них имеется информация об относительной устойчивости распреде­ле­ний статистик к отклонениям наблюдаемого закона от нормального [, ]. По другим критериям это требует дополнительных исследований.

Параметрические критерии проверки гипотез о дисперсиях, наоборот, весьма чувствительны к любым отклонениям от предположений, в условиях которых они были получены. И также отсутствует или противоречива информация о мощности соответствующих критериев [, , ].

Множества критериев, построенных для проверки гипотез о равенстве математических ожиданий или о равенстве дисперсий, заметно шире множества критериев проверки однородности законов. Поэтому проблема выбора наиболее предпочтительного критерия стоит более остро. Особенно важна объективная информация относительно свойств критериев проверки гипотез об однородности дисперсий (об однородности характеристик рассеяния).

# 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ПРОВЕРКЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

С каждым из используемых для проверки гипотезы  критериев связана статистика , которая представляет собой некоторую меру для измерения вероятности соответствия (несоответствия) анализируемых выборок проверяемой гипотезе . В силу случайности извлекаемых выборок случайными оказываются и значения статистики , вычисляемые в соответствии с этими выборками. При справедливости проверяемой гипотезы  статистика  подчиняется некоторому распределению .

Схема проверки гипотезы заключается в следующем. Область определения статистики разбивается на два подмножества, одно из которых представляет собой критическую область, попадание в которую при справедливости  маловероятно. При попадании вычисленного по выборке значения  статистики  в критическую область проверяемая гипотеза  отклоняется (отвергается). В противном случае считается, что нет оснований для отклонения гипотезы .

Заметим, что неотклонение гипотезы  в процессе проверки не означает, что она справедлива. Результат проверки свидетельствует лишь о том, что реальное положение вещей, возможно, не очень сильно отличается от предполагаемого состояния, соответствующего .

С другой стороны, справедливая гипотеза  может быть отклонена и эти самым совершена ошибка 1-го рода. При проверке гипотез вероятность ошибки 1-го рода  (уровень значимости), как правило, задают, допуская тем самым возможность отклонения  и возможность такой ошибки.

При построении критериев стремятся к использованию одномерных статистик, что упрощает построение критической области. При этом критерии могут быть правосторонними, левосторонними и двусторонними, что определяет построение критической области.

Все критерии проверки однородности, как правило, являются правосторонними или двусторонними.

В случае правостороннего критерия граница критической области (критическое значение) , определяется уравнением

, (1.1)

где  − условная плотность распределения статистики при справедливости .

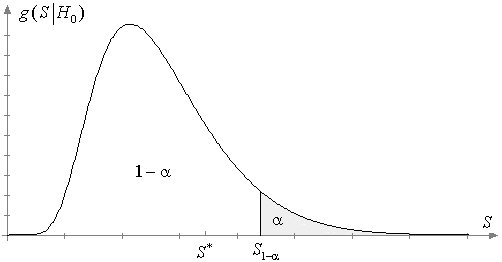
Для используемых на прак­тике критериев в благоприятных случаях известны асимптотические (предельные) распределения  со­от­­ветствующих статистик при условии справедливости гипотезы . В тех ситуациях, когда распределения статистик существенно зависят от объёмов выборок , информация о законе распределения статистики бывает представлена таблицей процентных точек (квантилей распределения ). Критическое значение  вычисляют в соответствии с  или берут из соответствующей таблицы процентных точек.

В случае правостороннего критерия в принятой практике статистического анализа обычно полученное значение статистики  сравнивают с критическим значением  при заданном уровне значимости . Проверяемую гипотезу  отклоняют, если  (см. рис. 1.1).

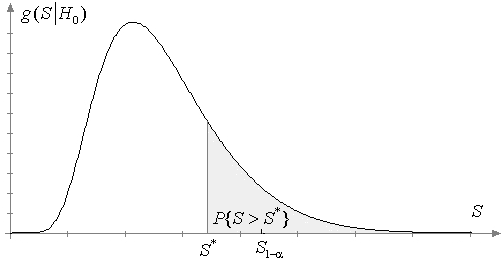
Больше информации о степени соответствия выборки теоретическому закону можно почерпнуть из достигнутого уровня значимости  – вероятности возможного пре­вышения по­лученного значения статистики при справедливости :

. (1.2)

Именно эта вероятность позволяет судить о том, насколько хорошо анализируемые выборки согласуются с проверяемой гипотезой, так как по существу представляет собой вероятностную меру истинности нулевой гипотезы (см. рис. 1.2). Проверяемую гипотезу  не отвергают, если .



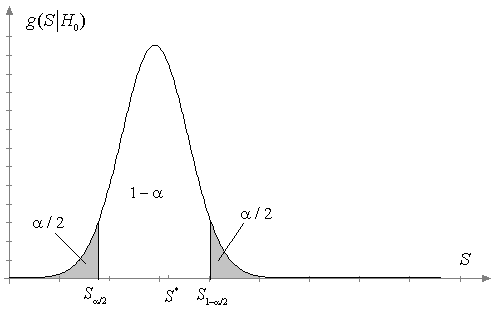
*Рис. 1.1.* Плотность распределения статистики при справедливости гипотезы  и критическое значение для правостороннего критерия



*Рис. 1.2.* Плотность распределения статистики при справедливости гипотезы  и достигнутый уровень значимости

В случае двустороннего критерия критическая область состоит из двух частей. И проверяемая гипотеза  отклоняется, если  или  (см. рис. 1.3). А достигнутый уровень значимости в этом случае определяется соотношением

. (1.3)



*Рис. 1.3.* Плотность распределения статистики при справедливости   
гипотезы  и критические значения для двустороннего критерия

Задачи оценивания параметров и проверки гипотез опираются на вы­борки независимых случайных величин. Случайность самой вы­борки пред­о­пределяет, что возможны и ошибки в результатах статистических выводов. С результатами проверки гипотез связывают ошибки двух видов: ошибка первого рода состоит в том, что отклоняют гипотезу , когда она верна; ошибка второго рода состоит в том, что принимают (не отклоняют) гипотезу , в то время как справедлива конкурирующая гипотеза . Уровень значимости  задает вероят­ность ошибки первого рода. Обычно, используя критерии проверки гипотез, не рассматривают кон­кретную конкурирующую гипотезу.

Если же гипотеза  задана и имеет некоторый конкретный вид, то задание величины  для исполь­зуемого кри­терия проверки гипотез определяет и вероятность ошибки второго рода . Ошибка второго рода заключается в том, что не отклоняется гипотеза , когда на самом деле справедлива гипотеза .

Вероятность ошибки второго рода  для правостороннего критерия определяется выражением

, (1.4)

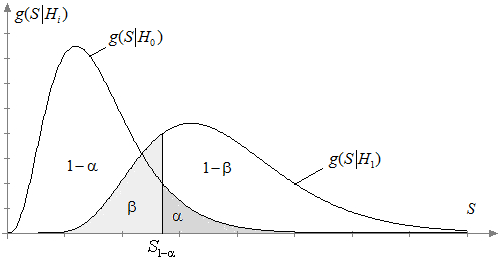
а для двустороннего – соотношением

. (1.5)

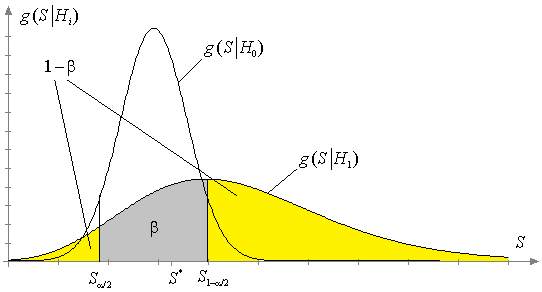
Для конкретной альтернативы  и  задание вероятности ошибки 1-го рода определяет и вероятность ошибки 2-го рода. Рис. 1.4 поясняет это для правостороннего критерия. На рис. 1.4  отображает плотность распределения статистики  при спра­ведливости гипотезы , а  – плотность распределения при справедливости .

Мощность критерия представляет собой величину . Оче­видно, что чем выше мощность используемого критерия при заданном значении , тем лучше он различает гипотезы  и . Особенно важно, чтобы используемый критерий хорошо различал близкие конкурирующие гипотезы. Графически требование максимальной мощности критерия означает, что на рис. 1.4 плотности распределений статистики  и  должны быть максимально “раздвинуты”.

Аналогичным образом можно проиллюстрировать вероятности ошибок второго рода и мощности для двустороннего критериев (см. рис.1.5).



*Рис. 1.4.* Плотности распределения статистик при справедливости соответственно гипотез  и  в случае правостороннего критерия



*Рис. 1.5.* Плотности распределения статистик при справедливости соответственно гипотез  и  в случае двустороннего критерия

Очевидно, что при проверке любой статистической гипотезы желательно использовать наиболее мощный критерий, который для заданной вероятности ошибки первого рода обеспечивает мини­мальную вероятность ошибки второго рода относительно любой конкурирующей гипотезы . Ещё лучше использовать равномер­но наиболее мощный критерий, который для любого заданного  обеспечивает минимальное значение . Однако существование такого критерия для проверки конкретной гипотезы  является редчайшим исключением. Нет такого и среди критериев, которые могут использоваться для проверки гипотез об однородности законов, о равенстве математических ожиданий или дисперсий.

В последние годы в публикациях, посвященных предлагаемым критериям или модификациям критериев, как правило, пытаются сравнивать критерии по мощности, используя методы статистического моделирования. При этом перечень рас­сматриваемых критериев и рассматриваемых альтернатив бывает достаточно широк.

# 2. КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ ОДНОРОДНОСТИ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

С необходимостью решения задач проверки гипотез о принад­лежности двух (или более) выборок случайных величин одной и той же генеральной совокуп­ности (проверки однородности) постоянно сталкиваются при анализе случайных ошибок средств измерений, при статистическом управлении качеством процессов. Такая задача естественно возникает при проверке средств измерений, когда пытаются убе­диться в том, что закон распределения случайных ошибок измерений не пре­терпел существенных изменений по истечении некоторого интервала вре­мени. При обработке экспериментального материала очень часто эту задачу приходится решать технологам, медикам, биологам.

Задача проверки однородности двух выборок формулируется следующим образом. Пусть имеются две упорядоченные по возрастанию выборки размером  и :

 и .

Для определенности обычно полагают, что , но это совсем необязательно. Проверяется гипо­теза о том, что две выборки извлечены из одной и той же генеральной сово­купности, т. е. :  при любом .

Как правило, на практике используется либо критерий Смирнова [], либо критерий Лемана–Розенблатта [, , ]. Предпо­чтитель­ность использования данных критериев для проверки однородности обсуж­далась в []. В русскоязычной литературе практически не упоминается применение двухвыборочного критерия Андерсона–Дарлинга [] (Андерсона–Дарлинга–Петита) или, тем более, об использовании многовыборочного варианта критерия Андерсона–Дарлинга [].

Цель предшествующих работ [, ] состояла в исследовании распределений статистик и мощности критериев Смирнова и Лемана–Розенблатта при ограничен­ных объемах выборок, в уточнении объемов, начиная с которых можно ре­ально пользоваться предельными распределениями, в выяснении характера альтернатив, относительно которых тот или иной критерий имеет преимуще­ство в мощности. При проведении исследований использовалась методика компьютерного моделирования и анализа статистических закономерностей, хорошо зарекомендовавшая себя в аналогичных работах (например, [, , ]), базирующаяся в основном на методе статистического моделирования. Этот же подход использован при исследовании свойств критериев, рассмотренных в данном разделе.

Мощность критериев проверки однородности исследо­валась в случае ряда альтернатив. Для определенности проверяемой гипотезе  соответствовала принад­лежность выборок одному и тому же стандартному нормальному закону распределения с плотностью



и параметрами сдвига  и масштаба .

При всех альтернативах пер­вая выборка всегда соответствовала стандартному нормальному закону, а вторая – некоторому другому.

В частности, при альтернативе сдвига в случае конкурирующей гипотезы  вторая вы­борка соответствовала нормальному закону с параметром сдвига  и па­раметром масштаба , в случае конкурирующей гипотезы  – нормальному закону с параметрами  и .

При изменении масштаба в случае конкурирующей гипотезы  вторая вы­борка соответствовала нормальному закону с параметрами  и , в случае конкурирующей гипотезы  – нормальному за­кону с параметрами  и .

В случае конкурирующей гипотезы  вторая вы­борка соответствовала логистическому закону с плотностью



и параметрами  и . Нормальный и логистический законы очень близки и трудноразличимы с помощью критериев согласия.

## 2.1. Критерий Смирнова

Критерий однородности Смирнова предложен в работе []. Предполагается, что функции распределения  и  являются непрерывными. Статистика критерия Смирнова измеряет расстояние ме­жду эмпирическими функциями распределения, построенными по выборкам

.

При практическом использовании критерия значение статистики  рекомен­дуется вычислять в соответствии с соотношениями []:

,

,

.

Если гипотеза  справедлива, то при неограниченном увеличении объемов выборок [] , т. е. статис­тика

 (2.1)

в пределе подчиняется распределению Колмогорова  [] с функцией распределения

. (2.2)

Значения  представлены в таблице **А.1** приложения, критические значения – в таблице **А.4**.

Однако при ограниченных значениях  и  случайные величины  и  являются дискретными, и множество их возможных значений представляет собой решетку с шагом , где  – наименьшее общее кратное  и  []. Для значений  таблицы процентных точек для статистики  приводятся в []. Условное распределение  статистики  при справедливости гипотезы  медленно сходится к  и существенно отличается от него при не очень больших  и . Асимптотические формулы для распределений  и  рассматривались в [, , ].

На рис. 2.1 показаны условные распределения статистики (2.1) при спра­ведливости  в зависимости от  и  (при =).



*Рис. 2.1.* Распределения статистики (2.1) при справедливости    
 в зависимости от  и 

Как следует из получен­ной кар­тины, даже при  и  ступенчатость  сохраня­ется. Другим недостатком применения критерия со статистикой (2.1) является то (рис. 2.1), что распределения  с ростом  и  приближаются к предельному распреде­лению  слева.

Гладкость распределения статистики сильно зависит от величины . Поэтому предпочтительнее применять критерий, когда объемы выборок  и  не равны и представляют собой вза­имно простые числа. В таких случаях наименьшее общее кратное  и  максимально и равно , а распределе­ние статистики больше напоминает непрерывную функцию распределения. И вот тогда при небольших и умеренных значениях  и  проявляется существенное отличие распределения  от предельного , так как  заметно сдвинуто влево от .

В этой связи можно предложить [, ] следующую простую модификацию статистики (2.1):

, (2.3)

у которой практически отсутствует последний недостаток. Условные распределения статистики (2.3) при справедливости  в зависимости от  и  (при  = ) иллюстрирует рис. 2.2.

Как было сказано выше, гладкость распределения статистики зависит от величины . В качестве иллюстрации этого факта и различий в распределе­ниях статистик (2.1) и (2.3) на рис. 2.3 приведены предельное распределение Колмогорова  и полученные в результате моделирования эмпирические распределения  статистики (2.1) и  статистики (2.3) при  и .

Как видим, распределение статистики (2.1) суще­ственно отличается от распределения Колмогорова , а распределе­ние статистики (2.3) визуально практически совпадает с ним. Объем выборок смоделированных значений статистик в данном случае, как и в работах [, ], составил 10 000 наблюдений.



*Рис. 2.2.* Распределения статистики (2.3) при справедливости    
 в зависимости от  и 



*Рис. 2.3.* Распределения статистики (2.1) и (2.3) при справедливости ,  и 

При проверке согласия полученного эмпирического рас­пределения статистики (2.3) с распределением Колмогорова достигнутые уровни значимости по соответствующим критериям составили: 0.72 по критерию  Пирсона (при 10 равновероятных интервалах); 0.83 по критерию Колмогорова; 0.97 по критерию  Крамера–Мизеса–Смирнова; 0.94 по критерию  Андерсона–Дарлинга.

Использование в критерии Смирнова со статистикой (2.3) взаимно про­стых  и  делает более обоснованным вычисление достигаемого уровня значимости , где  – значение ста­тистики (2.3), найденное при проверке гипотезы  по конкретным выборкам, в соответствии с распределением Колмогорова: . Соответственно более правомерно применение в критерии процентных точек (квантилей) распределения Колмогорова. Этого нельзя сказать о критерии Смирнова со статистикой (2.1), так как в этом случае критиче­ские значения, определяемые по распределению Колмогорова, оказываются завышенными по сравнению с истинными. Следовательно, проверяемая ги­потеза может необоснованно приниматься (не отклоняться).

Коэффициент 4.6 в статистике (2.3) подобран эмпирически. Он удовле­творительно действует от малых до достаточно больших объемов выборок ( =  = 1000). Однако при больших значениях наименьшего общего кратного  и , когда они представляют собой взаимно простые числа, величина этого коэффициента должна быть несколько уменьшена. Например, при про­стых  и  коэффициент 4.6 следует заменить на 3.4.

Ниже при исследовании мощности критерия Смирнова рассматривались распределения статистики (2.1). Но все выводы справедливы и для кри­те­рия со статистикой (2.3), так как все распределения при одинаковых объемах выборок оказываются сдвинутыми на одну и ту же величину [см. (2.3)].

На рис. 2.4 представлены полученные в результате моделирования условные распределения статистики  при справедливости , на основании которых можно оценить значения мощности при различных значениях объемов выборок  и .



*Рис. 2.4.* Распределения статистики (2.1) при справедливости 

Аналогично на рис. 2.5 приведены условные распределения статистики , на рис. 2.6 – условные распределения статистики , на рис. 2.7 – условные распределения статистики , на рис. 2.8 – условные распределения статистики .

В табл. 2.1 представлены найденные оценки мощности  критерия Смирнова, где  – вероятность ошибки второго рода, относительно рассматривае­мых конкурирующих гипотез  –  при различных объемах выборок для уровней значимости (вероятностей   
ошибок первого рода)  = 0.1, 0.05, 0.025. Значения мощностей, приведенные в табл. 2.1, получены относительно ()-квантилей предельного распределения Колмогорова .

Вследствие того, что распределения  статистики существенно отличаются от , действительные уровни значимости отличаются от заданных  = 0.1, 0.05, 0.025.



*Рис. 2.5.* Распределения статистики (2.1) при справедливости 



*Рис. 2.6.* Распределения статистики (2.1) при справедливости 



*Рис. 2.7.* Распределения статистики (2.1) при справедливости 



*Рис. 2.8.* Распределения статистики (2.1) при справедливости 

Таблица 2.1

Оценки мощности критерия однородности Смирнова относительно альтернатив – в зависимости от объемов выборок ()

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Уровень значимости | *n* = 20 | *n* = 50 | *n* = 100 | *n* = 300 | *n* = 500 | *n* = 1000 | *n* = 2000 |
|  | Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.111 | 0.132 | 0.164 | 0.280 | 0.381 | 0.617 | 0.869 |
| 0.05 | 0.061 | 0.067 | 0.086 | 0.171 | 0.268 | 0.490 | 0.776 |
| 0.025 | 0.028 | 0.037 | 0.052 | 0.119 | 0.183 | 0.386 | 0.674 |
|  | Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.365 | 0.703 | 0.910 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0.05 | 0.231 | 0.539 | 0.840 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0.025 | 0.129 | 0.435 | 0.779 | 0.999 | 1 | 1 | 1 |
|  | Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.105 | 0.108 | 0.120 | 0.150 | 0.186 | 0.297 | 0.551 |
| 0.05 | 0.054 | 0.053 | 0.060 | 0.080 | 0.102 | 0.168 | 0.352 |
| 0.025 | 0.027 | 0.027 | 0.030 | 0.041 | 0.052 | 0.097 | 0.210 |
|  | Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.152 | 0.288 | 0.510 | 0.964 | 0.999 | 1 | 1 |
| 0.05 | 0.074 | 0.135 | 0.258 | 0.893 | 0.995 | 1 | 1 |
| 0.025 | 0.035 | 0.076 | 0.179 | 0.773 | 0.979 | 1 | 1 |
|  | Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.104 | 0.110 | 0.121 | 0.159 | 0.198 | 0.319 | 0.564 |
| 0.05 | 0.052 | 0.054 | 0.061 | 0.080 | 0.116 | 0.188 | 0.375 |
| 0.025 | 0.026 | 0.027 | 0.031 | 0.044 | 0.062 | 0.112 | 0.239 |

В табл. 2.2 приведены действительные уровни значимости для критерия Смирнова, соответствующие значениям мощности, представленным в табл. 2.1.

Таблица 2.2

Действительные уровни значимости критерия однородности Смирнова, соответствующие (1 – )-квантилям распределения Колмогорова,   
 в зависимости от объемов выборок ()

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Заданный уровень значимости | Действительные уровни значимости | | | | | | |
| *n* = 20 | *n* = 50 | *n* = 100 | *n* = 300 | *n* = 500 | *n* = 1000 | *n* = 2000 |
| 0.1 | 0.0835 | 0.1120 | 0.1085 | 0.0927 | 0.0970 | 0.0980 | 0.1041 |
| 0.05 | 0.0334 | 0.0410 | 0.0543 | 0.0496 | 0.0514 | 0.0471 | 0.0480 |
| 0.025 | 0.0334 | 0.0240 | 0.0252 | 0.0254 | 0.0238 | 0.0259 | 0.0245 |

Вследствие ступенчатости  действительные значения  особенно сильно отличаются от задаваемых при малых объемах выборок. Например, для  при задаваемом уровне значимости 0.1 мы имеем действительный уровень значимости 0.0835.

## 2.2. Критерий Лемана–Розенблатта

Критерий однородности Лемана–Розенблатта представляет собой критерий типа . Критерий предложен в работе [] и исследован в []. Статистика критерия имеет вид []

,

где  – эмпирическая функция распределения, построенная по вариационному ряду объединения двух выборок. Статистика  используется в форме []

, (2.4)

где  – порядковый номер (ранг) ;  – порядковый номер (ранг)  в объе­диненном вариационном ряде.

В [] было показано, что статистика (2.4) в пределе распределена как :

.

Функция распределения  имеет вид []:



, (2.5)

где  – модифицированные функции Бесселя вида

.

В отличие от критерия Смирнова распределение статистики  быстро сходится к предельному  [], значения которой и процентные точки представлены в таблицах **А.2** и **А.5** приложения.

На рис. 2.9 условные распределения  статистики (2.4) приведены при  и , равных 20, 100 и 1000. Уже при  и  распределение  визуально совпадает с .

На рис. 2.10 представлены полученные в результате моделирования условные распределения статистики  при справедливости . На основании этих распределений можно оценить значения мощности критерия Лемана–Розенблатта при различных значениях объемов выборок  и .



*Рис. 2.9.* Распределения статистики (2.4) при справедливости    
в зависимости от  и 



*Рис. 2.10.* Распределения статистики (2.4) при справедливости 

Аналогично на рис. 2.11–2.14 приведены распределения статистики , , ,  при справедливости соответ­ствующих конкурирующих гипотез.



*Рис. 2.11.* Распределения статистики (2.4) при справедливости 



*Рис. 2.12.* Распределения статистики (2.4) при справедливости 



*Рис. 2.13.* Распределения статистики (2.4) при справедливости 



*Рис. 2.14.* Распределения статистики (2.4) при справедливости 

Вычисленные оценки мощности  критерия Лемана–Розенблатта представлены в табл. 2.3. Как правило, мощность критерия Лемана–Розенблатта оказывается выше мощности критерия однородности Смирнова.

Таблица 2.3

Оценки мощности критерия однородности Лемана–Розенблатта относительно альтернатив – в зависимости от объемов выборок   
()

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Уровень значимости | *n* =20 | | *n* =50 | | *n* = 100 | | *n* = 300 | *n* = 500 | *n* = 1000 | *n* = 2000 |
|  | Относительно альтернативы | | | | | | | | | |
| 0.1 | 0.115 | | 0.136 | | 0.173 | | 0.313 | 0.438 | 0.678 | 0.910 |
| 0.05 | 0.060 | | 0.075 | | 0.101 | | 0.210 | 0.320 | 0.561 | 0.849 |
| 0.025 | 0.031 | | 0.041 | | 0.059 | | 0.138 | 0.228 | 0.449 | 0.776 |
|  | Относительно альтернативы | | | | | | | | | |
| 0.1 | 0.430 | | 0.757 | | 0.954 | | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0.05 | 0.309 | | 0.649 | | 0.915 | | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0.025 | 0.215 | | 0.540 | | 0.863 | | 1 | 1 | 1 | 1 |
|  | Относительно альтернативы | | | | | | | | | |
| 0.1 | 0.103 | | 0.107 | | 0.114 | | 0.149 | 0.1908 | 0.324 | 0.624 |
| 0.05 | 0.051 | | 0.053 | | 0.057 | | 0.072 | 0.093 | 0.167 | 0.399 |
| 0.025 | 0.026 | | 0.026 | | 0.028 | | 0.035 | 0.041 | 0.081 | 0.226 |
|  | Относительно альтернативы | | | | | | | | | |
| 0.1 | 0.154 | | 0.280 | | 0.548 | | 0.989 | 1 | 1 | 1 |
| 0.05 | 0.074 | | 0.140 | | 0.326 | | 0.951 | 0.999 | 1 | 1 |
| 0.025 | 0.037 | | 0.067 | | 0.172 | | 0.860 | 0.996 | 1 | 1 |
|  | | Относительно альтернативы | | | | | | | | |
| 0.1 | | 0.103 | | 0.106 | | 0.113 | 0.142 | 0.178 | 0.288 | 0.547 |
| 0.05 | | 0.051 | | 0.053 | | 0.056 | 0.069 | 0.087 | 0.146 | 0.332 |
| 0.025 | | 0.026 | | 0.026 | | 0.028 | 0.034 | 0.042 | 0.070 | 0.180 |

## 2.3. Критерий Андерсона–Дарлинга

Двухвыборочный критерий Андерсона–Дарлинга (критерий однородности) рассмотрен в работе []. Статистика критерия определяется выражением

. (2.6)

Для выборок непрерывных случайных величин выражение для этой статистики принимает простой вид []

, (2.7)

где  – число элементов первой выборки, меньших или равных *i*-му элементу вариационного ряда объединенной выборки.

Предельным распределением статистики (2.7) при справедливости проверяемой гипотезы  является то же самое распределение  [], которое является предельным для статистики критерия согласия Андерсона–Дарлинга []. Функция распределения , имеет вид []



, (2.8)

а её значения и процентные точки представлены в таблицах **А.3** и **А.6** приложения.

Сходимость распределения  статистики (2.7) к  при ограниченных объёмах выборок была исследована в [], где было показано, что при  отклонение функции распределения  от  не превышает 0.01.

Рис. 2.15 – 2.19 иллюстрируют условные распределения статистики  при справедливости конкурирующих гипотез , полученные в результате моделирования.

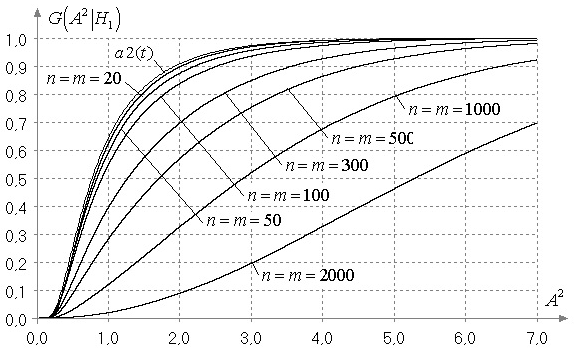


Рис. 2.15. Распределения статистики (2.7) при справедливости 

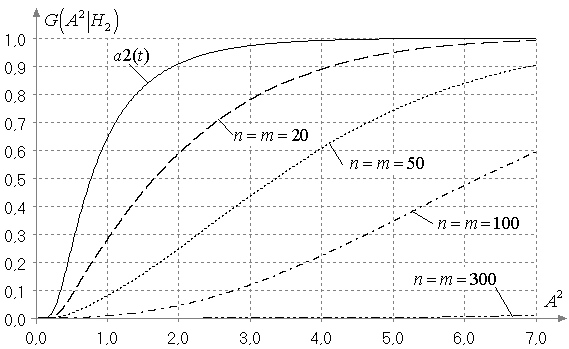


Рис. 2.16. Распределения статистики (2.7) при справедливости 

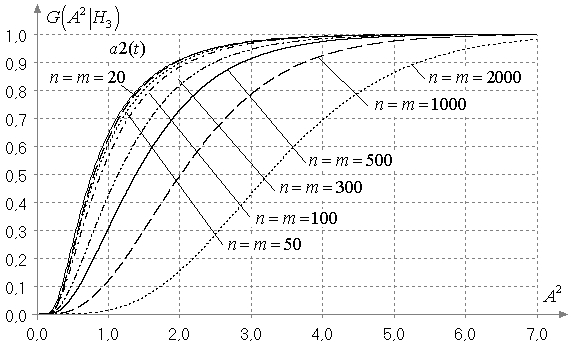


Рис. 2.17. Распределения статистики (2.7) при справедливости 

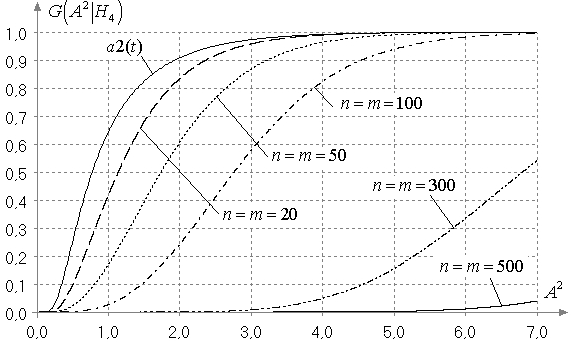


Рис. 2.18. Распределения статистики (2.7) при справедливости 

Вопросы мощности критерия рассматривались в [, ], мощность критерия исследовалась в [].

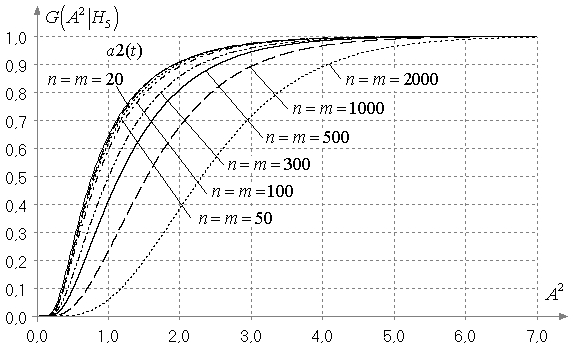


Рис. 2.19. Распределения статистики (2.7) при справедливости 

Полученные в данной работе оценки мощности критерия Андерсона–Дарлинга при различных значениях равных объемов выборок  представлены в таблице 2.4.

Так как при ограниченных объёмах выборок распределения статистики  существенно отличаются от предельного распределения , оценки мощности находились по результатам моделирования распределений статистики (2.7)  при справедливости проверяемой и  конкурирующих гипотез   
,  при конкретных объёмах выборок .

Сравнивая оценки мощности критерия с соответствующими оценками мощности критерия Лемана–Розенблатта, можно отметить, что критерий Андерсона–Дарлинга, как правило, обладает несколько большей мощностью, особенно, относительно ситуаций отличия анализируемых выборок в характеристиках рассеяния. В то же время относительно (очень) близких конкурирующих гипотез при малых объёмах выборок (см. при  для ,  и ) преимущество в мощности может быть за критерием Лемана–Розенблатта.

Таблица 2.4

Оценки мощности критерия однородности Андерсона–Дарлинга относительно альтернатив – в зависимости от объемов выборок  
()

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Уровень значимости | *n* =20 | | *n* =50 | | *n* = 100 | | *n* = 300 | | *n* = 500 | | *n* = 1000 | | *n* = 2000 |
|  | Относительно альтернативы | | | | | | | | | | | | |
| 0.1 | 0.114 | | 0.137 | | 0.175 | | 0.319 | | 0.447 | | 0.691 | | 0.919 |
| 0.05 | 0.056 | | 0.076 | | 0.103 | | 0.217 | | 0.330 | | 0.578 | | 0.864 |
| 0.025 | 0.031 | | 0.042 | | 0.060 | | 0.144 | | 0.238 | | 0.469 | | 0.796 |
|  | Относительно альтернативы | | | | | | | | | | | | |
| 0.1 | 0.435 | | 0.768 | | 0.959 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 |
| 0.05 | 0.315 | | 0.665 | | 0.925 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 |
| 0.025 | 0.221 | | 0.558 | | 0.878 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 |
|  | Относительно альтернативы | | | | | | | | | | | | |
| 0.1 | 0.104 | | 0.112 | | 0.128 | | 0.202 | | | 0.290 | | 0.528 | 0.861 |
| 0.05 | 0.052 | | 0.056 | | 0.063 | | 0.102 | | | 0.156 | | 0.338 | 0.718 |
| 0.025 | 0.026 | | 0.028 | | 0.031 | | 0.050 | | | 0.080 | | 0.198 | 0.547 |
|  | Относительно альтернативы | | | | | | | | | | | | |
| 0.1 | 0.185 | | 0.424 | | 0.777 | | 1 | | | 1 | | 1 | 1 |
| 0.05 | 0.088 | | 0.241 | | 0.592 | | 0.998 | | | 1 | | 1 | 1 |
| 0.025 | 0.041 | | 0.123 | | 0.402 | | 0.991 | | | 1 | | 1 | 1 |
|  | | Относительно альтернативы | | | | | | | | | | | |
| 0.1 | | 0.103 | | 0.108 | | 0.117 | | 0.156 | | 0.203 | | 0.343 | 0.640 |
| 0.05 | | 0.051 | | 0.054 | | 0.058 | | 0.078 | | 0.103 | | 0.189 | 0.436 |
| 0.025 | | 0.026 | | 0.027 | | 0.029 | | 0.038 | | 0.051 | | 0.097 | 0.267 |

## 2.4. Многовыборочный критерий Андерсона–Дарлинга

Вопросы построения -выборочных критериев однородности законов, являющихся аналогами критериев согласия Колмогорова–Смирнова и Крамера–Мизеса (-выборочными аналогами критериев однородности Смирнова и Лемана–Розенблатта), рассматривались в работе [].

Многовыборочный вариант критерия согласия Андерсона–Дарлинга предложен в [].

Задача проверки однородности  выборок формулируется следующим образом. Пусть  -е наблюдение -й выборки , . Предположим, что -й выборке соответствует непрерывная функция распределения . Необходимо проверить гипотезу вида  без указания общего для них закона распределения. Обозначим эмпирическую функцию распределения, соответствующую -й выборке, как , а эмпирическую функцию распределения, соответствующую объединённой выборке объёмом , как . Статистика -выборочного критерия Андерсона–Дарлинга определяется выражением

, (2.9)

где . Для  соотношение (2.9) сводится к (2.6). В предположении о непрерывности , упорядочив объединённую выборку , непосредственно из (2.9) можно получить простое выражение для вычисления статистики []:

, (2.10)

где  – число элементов в -й выборке, которые не больше чем . Проверяемая гипотеза  отклоняется при больших значениях статистики (2.10).

В работе [] таблица верхних процентных точек представлена не для статистики (2.10), а для статистики вида:

. (2.11)

Дисперсия статистики  определяется выражением []

 (2.12)

при

,

,

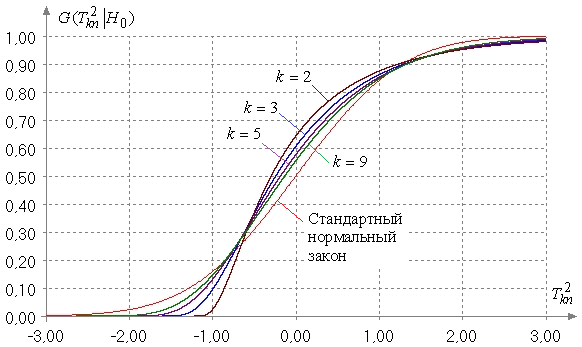
,

,

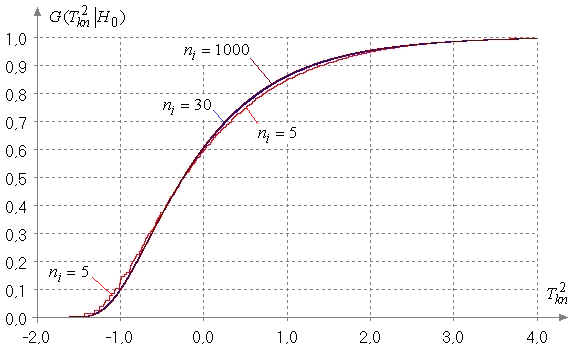
где

, , .

Зависимость предельных распределений статистики (2.11) от числа сравниваемых выборок  иллюстрирует рис. 2.20. С ростом числа сравниваемых выборок это распределение медленно сходится к стандартному нормальному закону. Сходимость распределений статистики к предельному с ростом объёмов выборок (при равных ) для  демонстрирует рис. 2.21.



*Рис. 2.20*. Зависимость предельных распределений статистики (2.11)   
от числа сравниваемых выборок



*Рис. 2.21*. Сходимость распределений статистики (2.11)   
к предельному при 

Исследование распределений статистик методами статистического моделирования показало, что при использовании критериев отличие распределений статистик от соответствующих предельных не имеет практического значения при .

Верхние процентные точки предельных распределений для статистики (2.11), заимствованные в [], приведены в таблице 2.5. Последняя строка при  соответствует процентным точкам стандартного нормального закона, использование которого возможно только при очень большом числе анализируемых выборок. В [] построены интерполяци­онные полиномы вида

,

которые позволяют находить критические значения  для количеств сравниваемых выборок , отсутствующих в таблице 2.5. Коэффициенты полиномов приведены в таблице 2.6.

В результате исследований распределений статистики (2.11) методами статистического моделирования (при  и числе экспериментов имитационного моделирования ) таблица критических значений была уточнена и расширена (см. таблицу 2.7).

Таблица 2.5

**Верхние критические значения**  **статистики (2.11) []**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | | |
| 0.75 | 0.90 | 0.95 | 0.975 | 0.99 |
| 2 | 0.326 | 1.225 | 1.960 | 2.719 | 3.752 |
| 3 | 0.449 | 1.309 | 1.945 | 2.576 | 3.414 |
| 4 | 0.498 | 1.324 | 1.915 | 2.493 | 3.246 |
| 5 | 0.525 | 1.329 | 1,894 | 2.438 | 3.139 |
| 7 | 0.557 | 1.332 | 1.859 | 2.365 | 3.005 |
| 9 | 0.576 | 1.330 | 1.839 | 2.318 | 2.920 |
| 11 | 0.590 | 1.329 | 1.823 | 2.284 | 2.862 |
|  | 0.674 | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.326 |

Таблица 2.6

**Интерполяционные коэффициенты для вычисления**  **[]**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 0.75 | 0.675 | –0.245 | –0.105 |
| 0.90 | 1.281 | 0.250 | –0.305 |
| 0.95 | 1.645 | 0.678 | –0.362 |
| 0.975 | 1.960 | 1.149 | –0.391 |
| 0.99 | 2.326 | 1.822 | –0.396 |

Таблица 2.7

**Уточненные верхние критические значения**  **статистики (2.11)**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | | |
| 0.75 | 0.90 | 0.95 | 0.975 | 0.99 |
| 2 | 0.325 | 1.228 | 1.966 | 2.731 | 3.784 |
| 3 | 0.439 | 1.300 | 1.944 | 2.592 | 3.429 |
| 4 | 0.491 | 1.321 | 1.925 | 2.511 | 3.277 |
| 5 | 0.523 | 1.331 | 1.900 | 2.453 | 3.153 |
| 6 | 0.543 | 1.333 | 1.885 | 2.410 | 3.078 |
| 7 | 0.557 | 1.337 | 1.870 | 2.372 | 3.017 |
| 8 | 0.567 | 1.335 | 1.853 | 2.344 | 2.970 |
| 9 | 0.577 | 1.334 | 1.847 | 2.323 | 2.927 |
| 10 | 0.582 | 1.3345 | 1.838 | 2.306 | 2.899 |
| 11 | 0.589 | 1.332 | 1.827 | 2.290 | 2.867 |
|  | 0.674 | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.326 |

Одновременно для предельных распределений статистик (для ) были построены приближенные модели законов для распределений статистики (2.11) [30, 82]. Хорошими моделями оказались законы семейства бета-распределений III рода с плотностью

 (2.13)

при конкретных значениях параметров этого закона , найденными по выборкам статистик объёмом , полученным в результате моделирования.

Представленные в таблице 2.8 модели , с приведенными значениями параметров, позволяют по значениям статистики, вычисленным в соответствии с соотношением (2.11), находить оценки  при соответствующем числе  сравниваемых выборок.

Таблица 2.8

**Модели предельных распределений статистики (2.11)**

|  |  |
| --- | --- |
|  | Модель |
| 2 | (3.1575, 2.8730, 18.1238, 15.0000, –1.1600) |
| 3 | (3.5907, 4.5984, 7.8040, 14.1310, –1.5000) |
| 4 | (4.2657, 5.7035, 5.3533, 12.8243, –1.7500) |
| 5 | (6.2992, 6.5558, 5.6833, 13.010, –2.0640) |
| 6 | (6.7446, 7.1047, 5.0450, 12.8562, –2.2000) |
| 7 | (6.7615, 7.4823, 4.0083, 11.800, –2.3150) |
| 8 | (5.8057, 7.8755, 2.9244, 10.900, –2.3100) |
| 9 | (9.0736, 7.4112, 4.1072, 10.800, –2.6310) |
| 10 | (10.2571, 7.9758, 4.1383, 11.186, –2.7988) |
| 11 | (10.6848, 7.5950, 4.2041, 10.734, –2.8400) |
|  | N(0.0, 1.0) |

При  критерий со статистикой (2.11) эквивалентен по мощности двухвыборочному критерию Андерсона–Дарлинга со статистикой (2.7).

В таблицах 2.9 и 2.10 приведены оценки мощности -выборочного критерия Андерсона–Дарлинга при  и , когда в качестве проверяемой гипотезы  рассматривалась принадлежность всех выборок стандартному нормальному закону, в качестве конкурирующей гипотезы  – принадлежность трёх выборок стандартному нормальному закону, а четвёртой – нормальному закону с параметром сдвига  и па­раметром масштаба , в качестве гипотезы  – принадлежность трёх выборок стандартному нормальному закону, а четвёртой – нормальному закону с параметром сдвига  и па­раметром масштаба , в качестве конкурирующей гипотезы  – принадлежность трёх выборок стандартному нормальному закону, а четвёртой – логистическому закону с плотностью



и параметрами  и . Рассматривалась ситуация с анализом выборок одинакового объёма.

Оценки мощности находились по результатам моделирования распределений статистики (2.11) при справедливости проверяемой  и конкурирующих гипотез ,  и  при конкретных объёмах выборок .

Как можно видеть, с ростом количества сравниваемых выборок тех же объёмов мощность критерия относительно аналогичных конкурирующих гипотез снижается, что абсолютно естественно. Например, сложнее выделить ситуацию и отдать предпочтение конкурирующей гипотезе, когда лишь одна из анализируемых выборок принадлежит некоторому другому закону. В сказанном легко убедиться, сравнивая соответствующие оценки мощности в таблицах 2.4 , 2.9 и 2.10.

Таблица 2.9

Оценки мощности -выборочного критерия однородности Андерсона–Дарлинга относительно альтернатив ,  и  в зависимости от объемов выборок (, )

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Уровень  значимости | *n* =20 | *n* =50 | *n* = 100 | *n* = 300 | *n* = 500 | *n* = 1000 |
| Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.113 | 0.134 | 0.171 | 0.313 | 0.449 | 0.711 |
| 0.05 | 0.059 | 0.073 | 0.098 | 0.209 | 0.329 | 0.599 |
| 0.025 | 0.030 | 0.040 | 0.057 | 0.138 | 0.236 | 0.490 |
| 0.01 | 0.013 | 0.017 | 0.027 | 0.077 | 0.147 | 0.365 |
| Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.104 | 0.111 | 0.124 | 0.191 | 0.273 | 0.509 |
| 0.05 | 0.052 | 0.056 | 0.063 | 0.100 | 0.150 | 0.330 |
| 0.025 | 0.026 | 0.028 | 0.031 | 0.051 | 0.080 | 0.201 |
| 0.01 | 0.010 | 0.011 | 0.013 | 0.021 | 0.034 | 0.095 |
| Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.103 | 0.107 | 0.114 | 0.148 | 0.189 | 0.315 |
| 0.05 | 0.051 | 0.053 | 0.058 | 0.075 | 0.097 | 0.177 |
| 0.025 | 0.026 | 0.027 | 0.029 | 0.038 | 0.050 | 0.094 |
| 0.01 | 0.010 | 0.011 | 0.011 | 0.015 | 0.020 | 0.040 |

Таблица 2.10

Оценки мощности -выборочного критерия однородности Андерсона–Дарлинга относительно альтернатив ,  и  в зависимости от объемов выборок (, )

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Уровень значимости | *n* =20 | | *n* =50 | | *n* = 100 | *n* = 300 | *n* = 500 | *n* = 1000 |
| Относительно альтернативы | | | | | | | | |
| 0.1 | 0.112 | | 0.131 | | 0.164 | 0.301 | 0.433 | 0.701 |
| 0.05 | 0.058 | | 0.070 | | 0.094 | 0.198 | 0.314 | 0.585 |
| 0.025 | 0.030 | | 0.038 | | 0.053 | 0.128 | 0.221 | 0.476 |
| Относительно альтернативы | | | | | | | | |
| 0.1 | 0.104 | | 0.110 | | 0.123 | 0.180 | 0.254 | 0.474 |
| 0.05 | 0.052 | | 0.055 | | 0.062 | 0.096 | 0.142 | 0.307 |
| 0.025 | 0.026 | | 0.028 | | 0.031 | 0.050 | 0.077 | 0.188 |
| Относительно альтернативы | | | | | | | | |
| 0.1 | | 0.102 | | 0.106 | 0.113 | 0.143 | 0.179 | 0.291 |
| 0.05 | | 0.051 | | 0.053 | 0.057 | 0.073 | 0.094 | 0.163 |
| 0.025 | | 0.026 | | 0.027 | 0.029 | 0.037 | 0.048 | 0.088 |

## 2.5. Критерии однородности Жанга

Кроме рассмотренных выше, можно указать непараметрические критерии, предложенные в работах Жанга [64, 65, 66], которые дают возможность сравнивать  выборок [64]. Предложенные Жангом критерии являются развитием критериев однородности Смирнова, Лемана–Розенблатта и Андерсона–Дарлинга.

Критерии согласия Жанга [64] показывают некоторое преимущество в мощности по сравнению с критериями согласия Крамера–Мизеса–Смирнова и Андерсона–Дарлинга [75], а определённым недостатком, ограничивающим их применение, является зависимость распределений статистик от объёмов выборок.

Аналогичным недостатком (зависимостью от объёмов сравниваемых выборок) обладают и варианты критериев Жанга, предназначенные для проверки однородности законов. В случае применения указанных критериев автор рекомендует для оценивания  использовать метод Монте–Карло [64].

Задача моделирования распределений статистик критериев однородности Жанга, по сравнению с аналогичной задачей для критериев согласия, оказывается много проще, так как приходится моделировать распределения статистик  критериев в случае принадлежности анализируемых выборок равномерному закону. Это делает применение критериев очень перспективным (см. п. 4.24).

Пусть  упорядоченные выборки непрерывных случайных величин с функциями распределения , () и пусть , где , объединённая упорядоченная выборка.

Обозначим  ранг -го упорядоченного наблюдения  -й выборки в объединённой выборке. Пусть , , а ранги , .

В критериях используется модификация эмпирической функции распределения , принимающая в точках разрыва , , значения  [64].

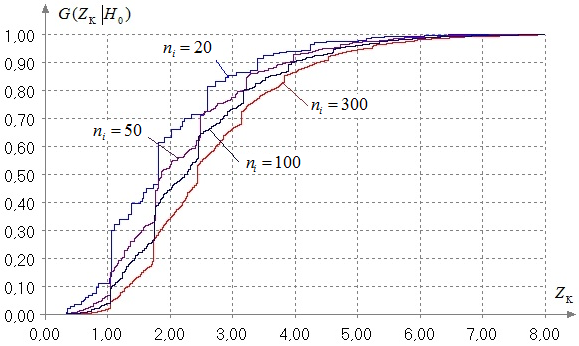
**Статистика  критерия однород­ности Жанга** имеет вид []:

, (2.14)

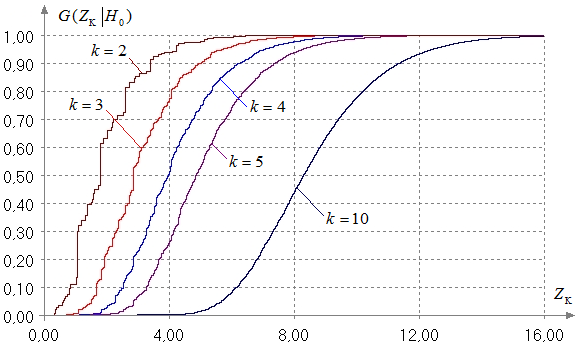
где , так что , а вычисление  осуществляется следующим образом. В начальный момент значения , . Если , то  и , в противном случае если , то .

Критерий *правосторонний*: проверяемая гипотеза  отклоняется при *больших* значениях статистики (2.14).

Зависимость распределений  статистики от объёмов вы­борок (при равных  и ) иллюстрирует рис. 2.22, а зависи­мость от числа сравниваемых выборок  при  – рис. 2.23.



*Рис. 2.22.* Зависимость распределений статистики (2.14) от объёмов выборок



*Рис. 2.23.* Зависимость распределений статистики (2.14) от при 

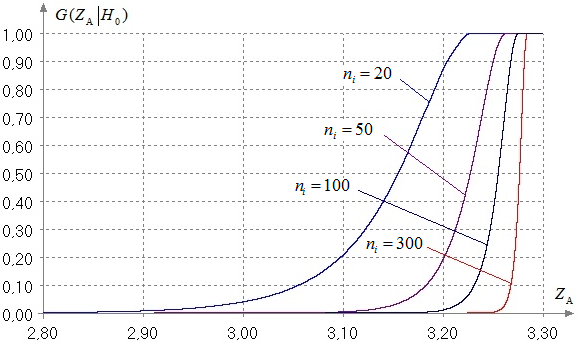
**Статистика  критерия однородности** выборок определяется выражением []:

, (2.15)

где  и  вычисляются, как определено выше.

Критерий *левосторонний*: проверяемая гипотеза  отклоняется при *малых* значениях статистики (2.15).

Зависимость распределений  статистики от объёмов выборок при равных  и  показана на рис. 2.24, а зависимость от числа сравниваемых выборок  при  – на рис. 2.25.

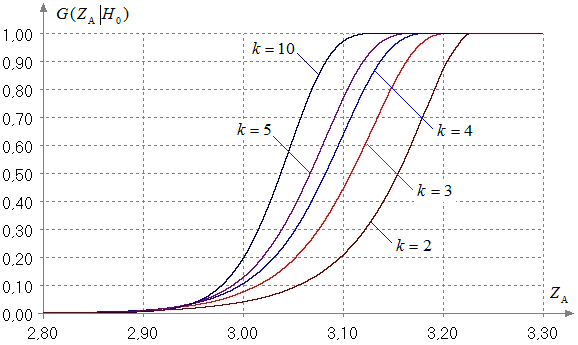


*Рис. 2.24.* Зависимость распределений статистики (2.15) от объёмов выборок

Статистика  критерия однородности  выборок определяется выражением []:

. (2.16)

Этот критерий также *левосторонний*: проверяемая гипотеза  отклоняется при *малых* значениях статистики (2.16).



*Рис. 2.25.* Зависимость распределений статистики (2.15) от при 

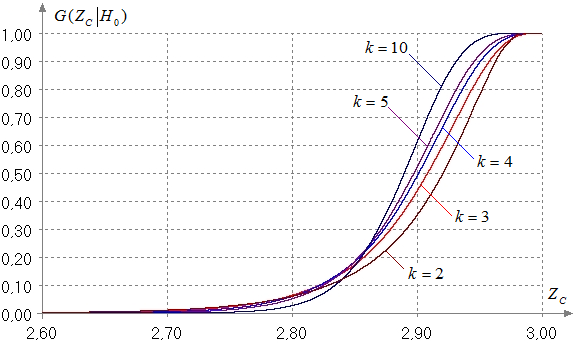
Изменение распределений  статистики от объёмов выборок при равных  и  демонстрируется на рис. 2.26, а зависимость от числа сравниваемых выборок  при  – на рис. 2.27.

Полученные оценки мощности критериев Жанга при равных  в случае  относительно рассматриваемых конкурирующих гипотез представлены в таблицах 2.11 – 2.13, оценки мощности при равных  в случае  и  относительно более близких конкурирующих гипотез  приведены в таблицах 2.14 – 2.19.

Сравнивая мощности критериев Жанга с мощностью критериев Андерсона–Дарлинга, Лемана–Розенблатта и Смирнова, можно обратить внимание на то, что критерии Жанга имеют преимущество в мощности относительно альтернатив, связанных с изменением характеристик масштаба, и уступают в мощности при альтернативах сдвига.



*Рис. 2.26.* Зависимость распределений статистики (2.16) от объёмов выборок



*Рис. 2.27.* Зависимость распределений статистики (2.16) от при 

Отсутствие информации о законах распределения статистик и таблиц критических значений в современных условиях не является серьёзным недостатком критериев Жанга, так как в программном обеспечении, осуществляющем поддержку применения критериев, несложно организовать вычисление достигнутых уровней значимостей , используя методы статистического моделирования. Поэтому интерес к данным критериям, к сравнению их свойств с традиционными в последнее время возрастает [7].

Таблица 2.11

Оценки мощности критерия однородности Жанга со статистикой  относительно альтернатив – в зависимости от 

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *n* = 20 | *n* = 50 | *n* = 100 | *n* = 300 | *n* = 500 | *n* = 1000 | *n* = 2000 |
|  | Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.111 | 0.126 | 0.152 | 0.238 | 0.333 | 0.526 | 0.798 |
| 0.05 | 0.057 | 0.068 | 0.085 | 0.147 | 0.223 | 0.396 | 0.691 |
| 0.025 | 0.028 | 0.036 | 0.048 | 0.090 | 0.148 | 0.292 | 0.583 |
|  | Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.344 | 0.650 | 0.906 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0.05 | 0.220 | 0.524 | 0.835 | 0.999 | 1 | 1 | 1 |
| 0.025 | 0.135 | 0.410 | 0.754 | 0.998 | 1 | 1 | 1 |
|  | Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.107 | 0.127 | 0.154 | 0.268 | 0.390 | 0.624 | 0.892 |
| 0.05 | 0.053 | 0.067 | 0.084 | 0.168 | 0.256 | 0.475 | 0.798 |
| 0.025 | 0.026 | 0.034 | 0.047 | 0.099 | 0.165 | 0.352 | 0.687 |
|  | Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.248 | 0.552 | 0.849 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0.05 | 0.123 | 0.394 | 0.730 | 0.999 | 1 | 1 | 1 |
| 0.025 | 0.055 | 0.262 | 0.604 | 0.996 | 1 | 1 | 1 |
|  | Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.105 | 0.110 | 0.122 | 0.179 | 0.266 | 0.429 | 0.759 |
| 0.05 | 0.052 | 0.056 | 0.063 | 0.098 | 0.140 | 0.279 | 0.602 |
| 0.025 | 0.027 | 0.029 | 0.033 | 0.053 | 0.079 | 0.179 | 0.450 |

Таблица 2.12

Оценки мощности критерия однородности Жанга со статистикой  относительно альтернатив – в зависимости от 

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *n* = 20 | *n* = 50 | *n* = 100 | *n* = 300 | *n* = 500 | *n* = 1000 | *n* = 2000 |
|  | Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.113 | 0.133 | 0.162 | 0.272 | 0.374 | 0.583 | 0.851 |
| 0.05 | 0.059 | 0.073 | 0.095 | 0.181 | 0.268 | 0.466 | 0.775 |
| 0.025 | 0.031 | 0.040 | 0.056 | 0.119 | 0.189 | 0.361 | 0.691 |
|  | Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.419 | 0.733 | 0.941 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0.05 | 0.306 | 0.631 | 0.901 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0.025 | 0.216 | 0.530 | 0.850 | 1 | 1 | 1 | 1 |
|  | Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.108 | 0.128 | 0.164 | 0.318 | 0.464 | 0.745 | 0.958 |
| 0.05 | 0.054 | 0.065 | 0.089 | 0.205 | 0.333 | 0.626 | 0.921 |
| 0.025 | 0.026 | 0.033 | 0.047 | 0.128 | 0.231 | 0.506 | 0.869 |
|  | Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.267 | 0.651 | 0.937 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0.05 | 0.142 | 0.492 | 0.878 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0.025 | 0.067 | 0.344 | 0.795 | 1 | 1 | 1 | 1 |
|  | Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.104 | 0.108 | 0.115 | 0.177 | 0.275 | 0.563 | 0.916 |
| 0.05 | 0.052 | 0.054 | 0.058 | 0.089 | 0.150 | 0.387 | 0.831 |
| 0.025 | 0.026 | 0.027 | 0.029 | 0.044 | 0.077 | 0.237 | 0.717 |

Таблица 2.13

Оценки мощности критерия однородности Жанга со статистикой  относительно альтернатив – в зависимости от 

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *n* = 20 | *n* = 50 | *n* = 100 | *n* = 300 | *n* = 500 | *n* = 1000 | *n* = 2000 |
|  | Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.114 | 0.134 | 0.164 | 0.278 | 0.382 | 0.600 | 0.859 |
| 0.05 | 0.059 | 0.073 | 0.097 | 0.185 | 0.275 | 0.485 | 0.784 |
| 0.025 | 0.031 | 0.041 | 0.057 | 0.122 | 0.194 | 0.384 | 0.702 |
|  | Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.425 | 0.743 | 0.946 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0.05 | 0.310 | 0.641 | 0.907 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0.025 | 0.219 | 0.540 | 0.858 | 1 | 1 | 1 | 1 |
|  | Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.107 | 0.127 | 0.163 | 0.320 | 0.468 | 0.748 | 0.961 |
| 0.05 | 0.053 | 0.064 | 0.088 | 0.205 | 0.336 | 0.632 | 0.925 |
| 0.025 | 0.026 | 0.032 | 0.046 | 0.127 | 0.136 | 0.516 | 0.874 |
|  | Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.256 | 0.640 | 0.936 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0.05 | 0.133 | 0.476 | 0.874 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0.025 | 0.062 | 0.327 | 0.787 | 1 | 1 | 1 | 1 |
|  | Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.104 | 0.108 | 0.116 | 0.1721 | 0.265 | 0.556 | 0.913 |
| 0.05 | 0.052 | 0.054 | 0.058 | 0.087 | 0.143 | 0.379 | 0.825 |
| 0.025 | 0.025 | 0.027 | 0.029 | 0.043 | 0.073 | 0.238 | 0.706 |

Таблица 2.14

Оценки мощности критерия однородности Жанга со статистикой  относительно альтернатив  в зависимости от  при 

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *n* = 20 | *n* = 50 | *n* = 100 | *n* = 300 | *n* = 500 | *n* = 1000 | *n* = 2000 |
|  | Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.110 | 0.125 | 0.144 | 0.231 | 0.321 | 0.525 | 0.822 |
| 0.05 | 0.056 | 0.066 | 0.080 | 0.144 | 0.210 | 0.397 | 0.728 |
| 0.025 | 0.028 | 0.035 | 0.043 | 0.087 | 0.135 | 0.292 | 0.624 |
|  | Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.107 | 0.123 | 0.147 | 0.263 | 0.376 | 0.621 | 0.914 |
| 0.05 | 0.054 | 0.064 | 0.080 | 0.162 | 0.250 | 0.480 | 0.840 |
| 0.025 | 0.027 | 0.033 | 0.044 | 0.097 | 0.160 | 0.354 | 0.738 |
|  | Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.104 | 0.110 | 0.117 | 0.170 | 0.233 | 0.423 | 0.779 |
| 0.05 | 0.053 | 0.055 | 0.060 | 0.092 | 0.137 | 0.300 | 0.641 |
| 0.025 | 0.026 | 0.029 | 0.031 | 0.049 | 0.075 | 0.191 | 0.496 |

Таблица 2.15

Оценки мощности критерия однородности Жанга со статистикой  относительно альтернатив  в зависимости от  при 

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *n* = 20 | *n* = 50 | *n* = 100 | *n* = 300 | *n* = 500 | *n* = 1000 | *n* = 2000 |
|  | Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.109 | 0.121 | 0.141 | 0.219 | 0.300 | 0.502 | 0.814 |
| 0.05 | 0.056 | 0.063 | 0.077 | 0.132 | 0.190 | 0.376 | 0.720 |
| 0.025 | 0.029 | 0.033 | 0.041 | 0.078 | 0.118 | 0.259 | 0.619 |
|  | Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.106 | 0.120 | 0.145 | 0.249 | 0.367 | 0.606 | 0.913 |
| 0.05 | 0.054 | 0.062 | 0.079 | 0.152 | 0.237 | 0.461 | 0.748 |
| 0.025 | 0.027 | 0.032 | 0.042 | 0.091 | 0.145 | 0.336 | 0.619 |
|  | Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.103 | 0.107 | 0.114 | 0.161 | 0.222 | 0.410 | 0.771 |
| 0.05 | 0.052 | 0.055 | 0.059 | 0.086 | 0.122 | 0.272 | 0.643 |
| 0.025 | 0.026 | 0.028 | 0.030 | 0.047 | 0.063 | 0.166 | 0.354 |

Таблица 2.16

Оценки мощности критерия однородности Жанга со статистикой  относительно альтернатив  в зависимости от  при 

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *n* = 20 | *n* = 50 | *n* = 100 | *n* = 300 | *n* = 500 | *n* = 1000 | *n* = 2000 |
|  | Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.112 | 0.130 | 0.158 | 0.268 | 0.371 | 0.599 | 0.871 |
| 0.05 | 0.058 | 0.070 | 0.091 | 0.174 | 0.261 | 0.480 | 0.799 |
| 0.025 | 0.030 | 0.038 | 0.052 | 0.113 | 0.183 | 0.379 | 0.718 |
|  | Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.107 | 0.126 | 0.162 | 0.319 | 0.470 | 0.767 | 0.972 |
| 0.05 | 0.053 | 0.065 | 0.088 | 0.207 | 0.340 | 0.655 | 0.945 |
| 0.025 | 0.027 | 0.033 | 0.047 | 0.131 | 0.243 | 0.550 | 0.906 |
|  | Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.103 | 0.108 | 0.116 | 0.181 | 0.279 | 0.580 | 0.972 |
| 0.05 | 0.052 | 0.054 | 0.059 | 0.096 | 0.161 | 0.420 | 0.945 |
| 0.025 | 0.026 | 0.027 | 0.030 | 0.049 | 0.090 | 0.288 | 0.906 |

Таблица 2.17

Оценки мощности критерия однородности Жанга со статистикой  относительно альтернатив  в зависимости от  при 

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *n* = 20 | *n* = 50 | *n* = 100 | *n* = 300 | *n* = 500 | *n* = 1000 | *n* = 2000 |
|  | Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.111 | 0.127 | 0.153 | 0.255 | 0.360 | 0.579 | 0.868 |
| 0.05 | 0.057 | 0.068 | 0.086 | 0.162 | 0.244 | 0.458 | 0.797 |
| 0.025 | 0.029 | 0.036 | 0.048 | 0.103 | 0.158 | 0.349 | 0.723 |
|  | Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.107 | 0.124 | 0.158 | 0.305 | 0.463 | 0.745 | 0.972 |
| 0.05 | 0.054 | 0.064 | 0.086 | 0.197 | 0.332 | 0.637 | 0.946 |
| 0.025 | 0.027 | 0.033 | 0.046 | 0.124 | 0.220 | 0.516 | 0.912 |
|  | Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.103 | 0.107 | 0.116 | 0.179 | 0.274 | 0.566 | 0.926 |
| 0.05 | 0.052 | 0.054 | 0.059 | 0.096 | 0.160 | 0.412 | 0.863 |
| 0.025 | 0.026 | 0.027 | 0.030 | 0.050 | 0.091 | 0.275 | 0.782 |

Таблица 2.18

Оценки мощности критерия однородности Жанга со статистикой  относительно альтернатив  в зависимости от  при 

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *n* = 20 | *n* = 50 | *n* = 100 | *n* = 300 | *n* = 500 | *n* = 1000 | *n* = 2000 |
|  | Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.113 | 0.131 | 0.160 | 0.273 | 0.380 | 0.612 | 0.880 |
| 0.05 | 0.058 | 0.071 | 0.092 | 0.178 | 0.269 | 0.493 | 0.808 |
| 0.025 | 0.030 | 0.038 | 0.053 | 0.115 | 0.188 | 0.389 | 0.729 |
|  | Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.107 | 0.125 | 0.160 | 0.319 | 0.475 | 0.771 | 0.975 |
| 0.05 | 0.053 | 0.063 | 0.087 | 0.206 | 0.345 | 0.662 | 0.949 |
| 0.025 | 0.026 | 0.032 | 0.046 | 0.130 | 0.243 | 0.551 | 0.912 |
|  | Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.103 | 0.108 | 0.116 | 0.176 | 0.270 | 0.568 | 0.928 |
| 0.05 | 0.052 | 0.054 | 0.059 | 0.092 | 0.153 | 0.405 | 0.856 |
| 0.025 | 0.026 | 0.027 | 0.030 | 0.047 | 0.084 | 0.271 | 0.761 |

Таблица 2.19

Оценки мощности критерия однородности Жанга со статистикой  относительно альтернатив  в зависимости от  при 

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *n* = 20 | *n* = 50 | *n* = 100 | *n* = 300 | *n* = 500 | *n* = 1000 | *n* = 2000 |
|  | Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.111 | 0.126 | 0.155 | 0.260 | 0.368 | 0.595 | 0.872 |
| 0.05 | 0.057 | 0.068 | 0.087 | 0.167 | 0.249 | 0.474 | 0.800 |
| 0.025 | 0.030 | 0.037 | 0.049 | 0.106 | 0.162 | 0.370 | 0.721 |
|  | Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.106 | 0.122 | 0.158 | 0.306 | 0.468 | 0.761 | 0.973 |
| 0.05 | 0.053 | 0.063 | 0.086 | 0.196 | 0.332 | 0.649 | 0.950 |
| 0.025 | 0.027 | 0.032 | 0.046 | 0.123 | 0.221 | 0.540 | 0.913 |
|  | Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.103 | 0.107 | 0.115 | 0.173 | 0.257 | 0.555 | 0.923 |
| 0.05 | 0.052 | 0.054 | 0.058 | 0.092 | 0.149 | 0.398 | 0.851 |
| 0.025 | 0.026 | 0.027 | 0.030 | 0.048 | 0.078 | 0.270 | 0.758 |

## 2.6. Анализ k выборок с использованием двухвыборочных критериев

Различные подходы к построению -выборочных аналогов критериев Смирнова, Лемана–Розенблатта и Андерсона–Дарлинга рассматривались в работе []. -выборочный вариант критерия Колмогорова–Смирнова, основанный на таком подходе, был построен в [] и рассматривается в последовательных изданиях книги []. На использовании такого же подхода построен -выборочный критерий Андерсона–Дарлинга [54], рассмотренный выше (см. п. 2.4), для которого нами были построены модели предельных распределений, представленные, в том числе, в [82, 30]. В этих критериях, так же как и в критериях однородности Жанга, строится объединённая выборка, а статистики измеряют отклонение эмпирических распределений отдельных выборок от эмпирического распределения, построенного по совокупности анализируемых выборок.

Возможен другой путь. Для анализа  выборок можно к каждой паре выборок применить двухвыборочный критерий со статистикой  (всего  вариантов), а решение принимать по совокупности результатов. В качестве статистики такого -выборочного критерия (в случае использования правостороннего двухвыборочного критерия) можно рассмотреть, например, статистику вида

, (2.17)

где  – значения статистик используемого двухвыборочного критерия, полученные при анализе -й и -й выборок.

Проверяемая гипотеза  будет отклоняться при **больших** значениях статистики .

Преимуществом такого рода критерия является и то, что в результате будет определена пара выборок, различие между которыми оказывается наиболее значимым с позиций используемого двухвыборочного критерия.

В качестве  можно использовать статистики двухвыборочных критериев Смирнова (лучше в модифицированном виде), Лемана–Розенблата, Андерсона–Дарлинга. В этом случае распределения соответствующих статистик  сходятся к некоторым предельным, модели которых могут быть найдены по результатам статистического моделирования.

Конечно, в критериях такого рода можно использовать и двухвыборочный вариант статистики  критерия Жанга, однако тогда распределение статистики  будет зависеть от объёмов сравниваемых выборок. Следовательно, применение критерия будет возможно лишь при использовании компьютерных технологий, обеспечивающих исследование распределения статистики критерия в интерактивном режиме.

При использовании левосторонних двухвыборочных критериев Жанга со статистиками  и  статистика -выборочного критерия примет вид:

. (2.18)

В этом случае проверяемая гипотеза  будет отклоняться при **малых** значениях статистики . Однако строить варианты критериев, предусматривающие использование двухвыборочных критериев Жанга, большого смысла нет из-за зависимости в таком случае распределений статистик (2.17) и (2.18) от объемов выборок.

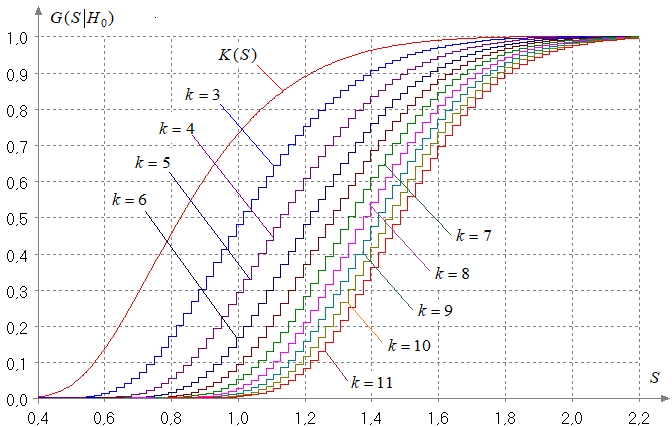
### 2.6.1. k –выборочный критерий максимума статистик Смирнова

В качестве  в (2.17) в этом случае будет рассматриваться модификация статистики Смирнова (2.3), распределение которой всегда ближе к предельному распределению Колмогорова . Статистику  в этом случае будем обозначать как .

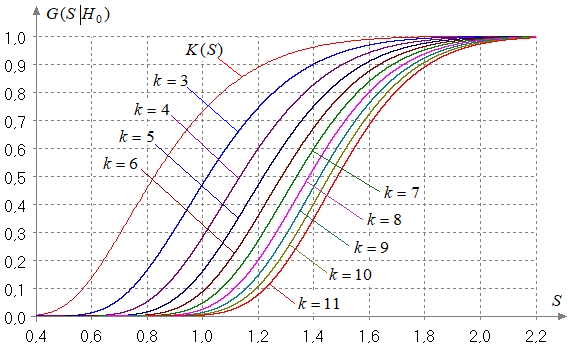
При равных объёмах сравниваемых выборок распределения статистики  (как и в двухвыборочном варианте) обладают существенной дискретностью (см. рис. 2.28) и отличаются от асимптотических (предельных) распределений (см. рис. 2.29). Если есть такая возможность, то предпочтительней в качестве  выбирать взаимно простые числа, тогда распределения  статистики  практически не будут отличаться от асимптотических.

Верхние критические значения для статистики , построенные по эмпирическим распределениям статистик, полученным методом Монте–Карло при количестве имитационных экспериментов , представлены в таблице 2.20, а в таблице 2.21 приведены построенные модели асимптотических (предельных) распределений статистики  при числе сравниваемых выборок .

Представленные в таблице 2.21 модели  бета-распределения 3-го рода (2.13) с приведенными значениями параметров, позволяют по значениям статистики, вычисленным в соответствии с соотношением (2.17) с использованием в качестве  статистики Смирнова (2.1) или её модификации (2.3), находить оценки  при соответствующем числе  сравниваемых выборок.



*Рис. 2.28.* Распределения статистики **** -выборочного   
критерия Смирнова при ****

**

*Рис. 2.29.* Асимптотические распределения статистики ****   
-выборочного критерия Смирнова

Таблица 2.20

**Верхние критические значения статистики  Смирнова**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | | |
| 0.75 | 0.90 | 0.95 | 0.975 | 0.99 |
| 2 | 1.0192 | 1.2238 | 1.3581 | 1.4802 | 1.6276 |
| 3 | 1.2059 | 1.4006 | 1.5266 | 1.6396 | 1.7782 |
| 4 | 1.3194 | 1.5070 | 1.6278 | 1.7372 | 1.8701 |
| 5 | 1.4002 | 1.5822 | 1.6997 | 1.8057 | 1.9329 |
| 6 | 1.4620 | 1.6396 | 1.7545 | 1.8573 | 1.9833 |
| 7 | 1.5127 | 1.6867 | 1.7989 | 1.9009 | 2.0245 |
| 8 | 1.5546 | 1.7264 | 1.8362 | 1.9362 | 2.0596 |
| 9 | 1.5911 | 1.7598 | 1.8682 | 1.9672 | 2.0879 |
| 10 | 1.6224 | 1.7893 | 1.8969 | 1.9940 | 2.1148 |
| 11 | 1.6506 | 1.8156 | 1.9217 | 2.0182 | 2.1371 |

Таблица 2.21

**Модели предельных распределений статистики **

|  |  |
| --- | --- |
|  | Модель |
| 2 |  |
| 3 | (6.3274, 6.6162, 2.8238, 2.4073, 0.4100) |
| 4 | (7.2729, 7.2061, 2.6170, 2.3775, 0.4740) |
| 5 | (7.1318, 7.3365, 2.4813, 2.3353, 0.5630) |
| 6 | (7.0755, 8.0449, 2.3163, 2.3818, 0.6320) |
| 7 | (7.7347, 8.6845, 2.3492, 2.4479, 0.6675) |
| 8 | (7.8162, 8.9073, 2.2688, 2.4161, 0.7120) |
| 9 | (7.8436, 8.8805, 2.1696, 2.3309, 0.7500) |
| 10 | (7.8756, 8.9051, 2.1977, 2.3280, 0.7900) |
| 11 | (7.9122, 9.0411, 2.1173, 2.2860, 0.8200) |

Оценки мощности -выборочного критерия со статистикой  при  и  при проверке гипотезы  относительно конкурирующих гипотез , ,  приведены в таблицах 2.22 и 2.23 соответственно. Эти оценки можно сравнить с оценками мощности -выборочных критериев Андерсона–Дарлинга и Жанга (см. пп. 2.4 и 2.5). В таблицах оценки мощности отсчитывались от асимптотических распределений .

Таблица 2.22

Оценки мощности -выборочного критерия однородности со статистикой  относительно альтернатив ,  и    
в зависимости от объемов выборок (, )

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Уровень  значимости | *n* =20 | *n* =50 | *n* = 100 | *n* = 300 | *n* = 500 | *n* = 1000 |
| Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.110 | 0.128 | 0.155 | 0.272 | 0.383 | 0.622 |
| 0.05 | 0.058 | 0.070 | 0.088 | 0.173 | 0.267 | 0.489 |
| 0.025 | 0.029 | 0.037 | 0.049 | 0.107 | 0.177 | 0.370 |
| 0.01 | 0.012 | 0.016 | 0.022 | 0.057 | 0.104 | 0.247 |
| Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.103 | 0.104 | 0.114 | 0.136 | 0.164 | 0.253 |
| 0.05 | 0.052 | 0.053 | 0.056 | 0.069 | 0.088 | 0.143 |
| 0.025 | 0.025 | 0.026 | 0.027 | 0.036 | 0.045 | 0.074 |
| 0.01 | 0.010 | 0.011 | 0.011 | 0.015 | 0.018 | 0.031 |
| Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.102 | 0.105 | 0.111 | 0.148 | 0.183 | 0.288 |
| 0.05 | 0.052 | 0.051 | 0.058 | 0.078 | 0.100 | 0.168 |
| 0.025 | 0.026 | 0.026 | 0.030 | 0.039 | 0.052 | 0.091 |
| 0.01 | 0.011 | 0.012 | 0.012 | 0.017 | 0.022 | 0.040 |

Таблица 2.23

Оценки мощности -выборочного критерия однородности со статистикой  относительно альтернатив ,  и    
в зависимости от объемов выборок (, )

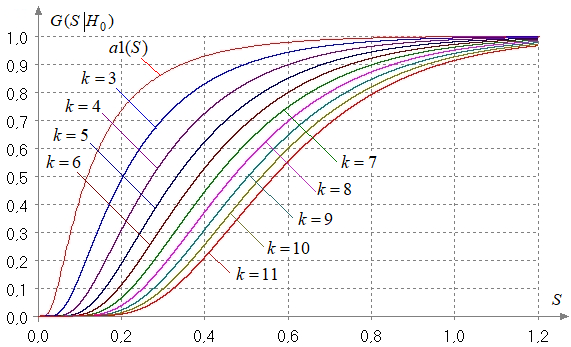
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Уровень  значимости | *n* =20 | *n* =50 | | *n* = 100 | | *n* = 300 | | *n* = 500 | | *n* = 1000 |
| Относительно альтернативы | | | | | | | | | | |
| 0.1 | 0.111 | 0.125 | | 0.151 | | 0.261 | | 0.366 | | 0.605 |
| 0.05 | 0.057 | 0.066 | | 0.083 | | 0.163 | | 0.251 | | 0.473 |
| 0.025 | 0.028 | 0.035 | | 0.046 | | 0.102 | | 0.168 | | 0.363 |
| 0.01 | 0.012 | 0.015 | | 0.020 | | 0.051 | | 0.096 | | 0.244 |
| Относительно альтернативы | | | | | | | | | | |
| 0.1 | 0.102 | 0.105 | 0.108 | | 0.128 | | 0.153 | | 0.221 | |
| 0.05 | 0.051 | 0.052 | 0.055 | | 0.065 | | 0.078 | | 0.120 | |
| 0.025 | 0.025 | 0.027 | 0.028 | | 0.033 | | 0.041 | | 0.065 | |
| 0.01 | 0.010 | 0.011 | 0.011 | | 0.013 | | 0.017 | | 0.028 | |
| Относительно альтернативы | | | | | | | | | | |
| 0.1 | 0.103 | 0.104 | 0.112 | | 0.138 | | 0.166 | | 0.257 | |
| 0.05 | 0.052 | 0.053 | 0.055 | | 0.071 | | 0. 090 | | 0.143 | |
| 0.025 | 0.026 | 0.027 | 0.029 | | 0.037 | | 0.046 | | 0.081 | |
| 0.01 | 0.010 | 0.011 | 0.011 | | 0.015 | | 0.020 | | 0.038 | |

Подчеркнём, что все приводимые результаты справедливы при использования в статистике  в качестве статистик  как статистики (2.3), так и статистики (2.1).

### 2.6.2. k –выборочный критерий максимума статистик Лемана–Розенблатта

В качестве  в статистике  вида  (2.17) в этом случае используется статистика (2.4) Лемана–Розенблатта. Зависимость распределений статистики при справедливости  от числа выборок иллюстрирует рис. 2.30.

Верхние критические значения для статистики , построенные по результатам статистического моделирования при количестве имитационных экспериментов , представлены в таблице 2.24.



*Рис. 2.30.* Распределения статистики **** -выборочного   
критерия Лемана–Розенблатта

Построенные модели асимптотических (предельных) распределений статистики  при числе сравниваемых выборок  представлены в таблице 2.25. В данном случае наилучшими моделями оказались распределения Sb–Джонсона с плотностью



при конкретных значениях параметров этого закона, обозначенного в таблице 2.25 как . Представленные модели позволяют по значениям статистики  при соответствующем числе  сравниваемых выборок находить оценки .

Таблица 2.24

**Верхние критические значения статистики  Лемана–Розенблатта**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | | |
| 0.75 | 0.90 | 0.95 | 0.975 | 0.99 |
| 2 | 0.2094 | 0.3473 | 0.4614 | 0.5806 | 0.7435 |
| 3 | 0.3306 | 0.4995 | 0.6283 | 0.7581 | 0.9308 |
| 4 | 0.4206 | 0.6050 | 0.7413 | 0.8770 | 1.0550 |
| 5 | 0.4924 | 0.6856 | 0.8267 | 0.9653 | 1.1429 |
| 6 | 0.5521 | 0.7512 | 0.8959 | 1.0365 | 1.2175 |
| 7 | 0.6037 | 0.8072 | 0.9524 | 1.0947 | 1.2774 |
| 8 | 0.6481 | 0.8550 | 1.0015 | 1.1444 | 1.3298 |
| 9 | 0.6876 | 0.8976 | 1.0457 | 1.1902 | 1.3781 |
| 10 | 0.7237 | 0.9355 | 1.0858 | 1.2303 | 1.4171 |
| 11 | 0.7563 | 0.9703 | 1.1214 | 1.2655 | 1.4535 |

Таблица 2.25

**Модели предельных распределений статистики **

|  |  |
| --- | --- |
|  | Модель |
| 2 |  |
| 3 | Sb(3.2854, 1.2036, 3.0000, 0.0215) |
| 4 | Sb(2.5801, 1.2167, 2.2367, 0.0356) |
| 5 | Sb(3.1719, 1.4134, 3.1500, 0.0320) |
| 6 | Sb(2.9979, 1.4768, 2.9850, 0.0380) |
| 7 | Sb(3.2030, 1.5526, 3.4050, 0.0450) |
| 8 | Sb(3.2671, 1.6302, 3.5522, 0.0470) |
| 9 | Sb(3.4548, 1.7127, 3.8800, 0.0490) |
| 10 | Sb(3.4887, 1.7729, 3.9680, 0.0510) |
| 11 | Sb(3.4627, 1.8168, 3.9680, 0.0544) |

Оценки мощности -выборочного критерия со статистикой  для  и  при проверке гипотезы  относительно конкурирующих гипотез , ,  приведены в таблицах 2.26, 2.27 соответственно.

Таблица 2.26

Оценки мощности -выборочного критерия однородности со статистикой  относительно альтернатив ,  и    
в зависимости от объемов выборок (, )

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Уровень значимости | *n* =20 | *n* =50 | *n* = 100 | *n* = 300 | *n* = 500 | *n* = 1000 |
| Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.114 | 0.134 | 0.168 | 0.306 | 0.437 | 0.694 |
| 0.05 | 0.059 | 0.072 | 0.097 | 0.201 | 0.316 | 0.574 |
| 0.025 | 0.030 | 0.039 | 0.055 | 0.131 | 0.222 | 0.461 |
| 0.01 | 0.013 | 0.017 | 0.026 | 0.072 | 0.134 | 0.332 |
| Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.103 | 0.104 | 0.108 | 0.127 | 0.152 | 0.241 |
| 0.05 | 0.051 | 0.052 | 0.053 | 0.063 | 0.074 | 0.119 |
| 0.025 | 0.025 | 0.026 | 0.026 | 0.031 | 0.036 | 0.058 |
| 0.01 | 0.010 | 0.010 | 0.010 | 0.012 | 0.014 | 0.022 |
| Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.103 | 0.104 | 0.107 | 0.124 | 0.145 | 0.218 |
| 0.05 | 0.051 | 0.052 | 0.053 | 0.061 | 0.071 | 0.107 |
| 0.025 | 0.025 | 0.026 | 0.027 | 0.030 | 0.035 | 0.052 |
| 0.01 | 0.010 | 0.010 | 0.011 | 0.012 | 0.014 | 0.020 |

Таблица 2.27

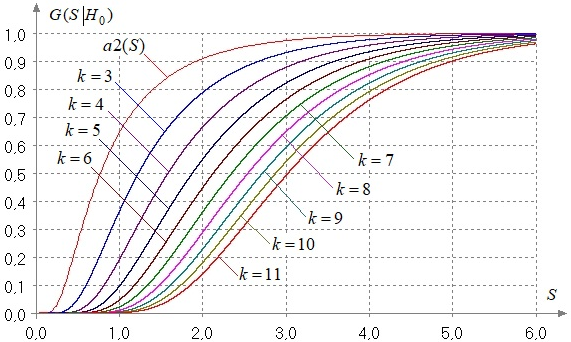
Оценки мощности -выборочного критерия однородности со статистикой  относительно альтернатив ,  и    
в зависимости от объемов выборок (, )

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Уровень  значимости | *n* =20 | *n* =50 | | *n* = 100 | | *n* = 300 | | *n* = 500 | | *n* = 1000 | |
| Относительно альтернативы | | | | | | | | | | | |
| 0.1 | 0.113 | 0.130 | | 0.162 | | 0.293 | | 0.425 | | 0.686 | |
| 0.05 | 0.058 | 0.069 | | 0.092 | | 0.191 | | 0.302 | | 0.566 | |
| 0.025 | 0.030 | 0.037 | | 0.051 | | 0.122 | | 0.211 | | 0.453 | |
| 0.01 | 0.012 | 0.016 | | 0.024 | | 0.067 | | 0.127 | | 0.324 | |
| Относительно альтернативы | | | | | | | | | | | |
| 0.1 | 0.102 | 0.103 | 0.105 | | 0.118 | | 0.135 | | 0.197 | |
| 0.05 | 0.051 | 0.051 | 0.052 | | 0.059 | | 0.067 | | 0.097 | |
| 0.025 | 0.025 | 0.026 | 0.026 | | 0.029 | | 0.033 | | 0.047 | |
| 0.01 | 0.010 | 0.010 | 0.010 | | 0.011 | | 0.013 | | 0.019 | |
| Относительно альтернативы | | | | | | | | | | | |
| 0.1 | 0.102 | 0.102 | 0.105 | | 0.116 | | 0.130 | | 0.183 | |
| 0.05 | 0.051 | 0.051 | 0.053 | | 0.058 | | 0.065 | | 0.090 | |
| 0.025 | 0.025 | 0.026 | 0.026 | | 0.029 | | 0.032 | | 0.044 | |
| 0.01 | 0.010 | 0.010 | 0.010 | | 0.012 | | 0.013 | | 0.017 | |

### 2.6.3. k –выборочный критерий максимума статистик Андерсона–Дарлинга

В статистике  вида  (2.17) качестве  используется статистика (2.7) Андерсона–Дарлинга. Зависимость распределений статистики  при справедливости  от числа выборок иллюстрирует рис. 2.31.

Верхние критические значения для статистики , построенные по результатам статистического моделирования при количестве имитационных экспериментов , представлены в таблице 2.28.



*Рис. 2.31.* Распределения статистики **** -выборочного   
критерия Андерсона–Дарлинга

Для распределений  также построены модели асимптотических (предельных) распределений статистики  для числа сравниваемых выборок , которые представлены в таблице 2.29. В этом случае лучшими моделями оказались бета-распределения 3-го рода (2.13), которые в виде  с конкретными значениями параметров приведены в таблице 2.29 и могут использоваться для оценки  при  сравниваемых выборках.

Таблица 2.28

**Верхние критические значения статистики  Андерсона–Дарлинга**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | | |
| 0.75 | 0.90 | 0.95 | 0.975 | 0.99 |
| 2 | 1.2479 | 1.9330 | 2.4924 | 3.0775 | 3.8781 |
| 3 | 1.8535 | 2.6796 | 3.31215 | 3.95176 | 4.7924 |
| 4 | 2.2990 | 3.1966 | 3.8682 | 4.5368 | 5.4076 |
| 5 | 2.6514 | 3.5948 | 4.2877 | 4.9686 | 5.8472 |
| 6 | 2.9431 | 3.9187 | 4.6292 | 5.3175 | 6.2089 |
| 7 | 3.1943 | 4.1950 | 4.9097 | 5.6063 | 6.5118 |
| 8 | 3.4135 | 4.4292 | 5.1501 | 5.8531 | 6.7710 |
| 9 | 3.6094 | 4.6395 | 5.3660 | 6.0733 | 7.0076 |
| 10 | 3.7867 | 4.8270 | 5.5616 | 6.2720 | 7.2042 |
| 11 | 3.9466 | 4.9974 | 5.7384 | 6.4512 | 7.3837 |

Таблица 2.29

**Модели предельных распределений статистики **

|  |  |
| --- | --- |
|  | Модель |
| 2 |  |
| 3 | (4.4325, 2.7425, 12.1134, 8.500, 0.1850) |
| 4 | (5.2036, 3.2160, 10.7792, 10.000, 0.2320) |
| 5 | (5.7527, 3.3017, 9.7365, 10.000, 0.3000) |
| 6 | (5.5739, 3.4939, 7.7710, 10.000, 0.3750) |
| 7 | (6.4892, 3.6656, 8.0529, 10.500, 0.3920) |
| 8 | (6.3877, 3.8143, 7.3602, 10.800, 0.4800) |
| 9 | (6.7910, 3.9858, 7.1280, 11.100, 0.5150) |
| 10 | (6.7533, 4.2779, 6.6457, 11.700, 0.5800) |
| 11 | (7.1745, 4.3469, 6.6161, 11.800, 0.6100) |

Оценки мощности -выборочного критерия со статистикой  для  и  относительно конкурирующих гипотез , ,  приведены в таблицах 2.30, 2.31 соответственно.

Таблица 2.30

Оценки мощности -выборочного критерия однородности со статистикой  относительно альтернатив ,  и    
в зависимости от объемов выборок (, )

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Уровень  значимости | *n* =20 | *n* =50 | *n* = 100 | *n* = 300 | *n* = 500 | *n* = 1000 |
| Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.113 | 0.134 | 0.171 | 0.314 | 0.450 | 0.712 |
| 0.05 | 0.058 | 0.073 | 0.098 | 0.209 | 0.329 | 0.595 |
| 0.025 | 0.030 | 0.040 | 0.057 | 0.137 | 0.234 | 0.484 |
| 0.01 | 0.013 | 0.018 | 0.027 | 0.077 | 0.144 | 0.355 |
| Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.102 | 0.107 | 0.114 | 0.165 | 0.231 | 0.446 |
| 0.05 | 0.051 | 0.053 | 0.056 | 0.081 | 0.117 | 0.263 |
| 0.025 | 0.025 | 0.026 | 0.027 | 0.040 | 0.058 | 0.143 |
| 0.01 | 0.010 | 0.010 | 0.011 | 0.015 | 0.022 | 0.059 |
| Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.102 | 0.104 | 0.110 | 0.134 | 0.166 | 0.272 |
| 0.05 | 0.051 | 0.052 | 0.055 | 0.066 | 0.086 | 0.142 |
| 0.025 | 0.025 | 0.026 | 0.027 | 0.033 | 0.040 | 0.070 |
| 0.01 | 0.010 | 0.010 | 0.011 | 0.013 | 0.016 | 0.028 |

Таблица 2.31

Оценки мощности -выборочного критерия однородности со статистикой  относительно альтернатив ,  и    
в зависимости от объемов выборок (, )

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Уровень  значимости | *n* =20 | *n* =50 | *n* = 100 | *n* = 300 | *n* = 500 | *n* = 1000 |
| Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.112 | 0.131 | 0.165 | 0.302 | 0.438 | 0.706 |
| 0.05 | 0.058 | 0.070 | 0.094 | 0.198 | 0.317 | 0.589 |
| 0.025 | 0.030 | 0.037 | 0.053 | 0.129 | 0.223 | 0.477 |
| 0.01 | 0.012 | 0.017 | 0.024 | 0.071 | 0.135 | 0.347 |
| Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.101 | 0.104 | 0.111 | 0.145 | 0.195 | 0.381 |
| 0.05 | 0.051 | 0.052 | 0.055 | 0.071 | 0.097 | 0.214 |
| 0.025 | 0.025 | 0.026 | 0.027 | 0.035 | 0.048 | 0.112 |
| 0.01 | 0.010 | 0.010 | 0.011 | 0.014 | 0.019 | 0.045 |
| Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.101 | 0.103 | 0.107 | 0.124 | 0.147 | 0.229 |
| 0.05 | 0.051 | 0.052 | 0.053 | 0.061 | 0.073 | 0.116 |
| 0.025 | 0.025 | 0.026 | 0.027 | 0.031 | 0.036 | 0.057 |
| 0.01 | 0.010 | 0.010 | 0.011 | 0.012 | 0.014 | 0.022 |

Критерий со статистикой  демонстрирует более высокую мощность относительно рассматриваемых конкурирующих гипотез по сравнению с критериями со статистиками  и .

## 2.7. Критерий однородности χ2

Пусть имеется  выборок , , непрерывных случайных величин и . Общая область, которой принадлежат выборки, разбивается на  интервалов (групп). Пусть  – количество элементов -й выборки, попавших в -й интервал, тогда .

Статистика критерия однородности  имеет вид

, (2.19)

где  – общее число элементов всех выборок, попавших -й интервал.

Асимптотическим распределением статистики (2.19) является -распределение с числом степеней свободы  [74].

Оценки мощности критерия со статистикой (2.19) для ,  и  при разбиении объединённой выборки на  равно­частотных интервалов относительно конкурирующих гипотез , ,  представлены в таблицах 2.32, 2.33 и 2.34.

Сравнивая оценки мощности критерия однородности  с мощностью других крнтериев, можно отметить, что он уступает большинству критериев относительно альтернативы сдвига, но вполне может конкурировать в других ситуациях.

Очевидно, что выбор числа интервалов и способ разбиения на интервалы влияют на мощность критерия.

При наличии предположений о виде наиболее предпочтительной параметрической модели закона для анализируемых данных можно повысить мощность критерия, например, за счёт использования асимптотически оптимального группирования [87]. В частности, критерий согласия  в случае использования асимптотически оптимального группирования при проверке простых гипотез зачастую имеет преимущество в мощности относительно близких конкурирующих гипотез (по сравнению с непараметрическими критериями согласия) [87].

Таблица 2.32

Оценки мощности -выборочного критерия χ2 относительно   
,  и  в зависимости от объемов выборок (, , )

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Уровень  значимости | *n* =20 | *n* =50 | *n* = 100 | *n* = 300 | *n* = 500 | *n* = 1000 |
| Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.103 | 0.111 | 0.120 | 0.174 | 0.231 | 0.384 |
| 0.05 | 0.051 | 0.056 | 0.061 | 0.103 | 0.138 | 0.277 |
| 0.025 | 0.026 | 0.029 | 0.030 | 0.056 | 0.082 | 0.183 |
| 0.01 | 0.011 | 0.012 | 0.012 | 0.028 | 0.047 | 0.098 |
| Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.105 | 0.115 | 0.132 | 0.201 | 0.284 | 0.479 |
| 0.05 | 0.053 | 0.060 | 0.072 | 0.123 | 0.178 | 0.359 |
| 0.025 | 0.026 | 0.031 | 0.040 | 0.069 | 0.110 | 0.257 |
| 0.01 | 0.010 | 0.013 | 0.017 | 0.036 | 0.066 | 0.152 |
| Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.102 | 0.110 | 0.119 | 0.175 | 0.230 | 0.381 |
| 0.05 | 0.051 | 0.058 | 0.064 | 0.103 | 0.139 | 0.267 |
| 0.025 | 0.026 | 0.030 | 0.035 | 0.058 | 0.080 | 0.178 |
| 0.01 | 0.010 | 0.012 | 0.013 | 0.029 | 0.046 | 0.097 |

Таблица 2.33

Оценки мощности -выборочного критерия χ2 относительно   
,  и  в зависимости от объемов выборок (, , )

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Уровень  значимости | *n* =20 | *n* =50 | *n* = 100 | *n* = 300 | *n* = 500 | *n* = 1000 |
| Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.100 | 0.108 | 0.120 | 0.173 | 0.226 | 0.385 |
| 0.05 | 0.050 | 0.058 | 0.064 | 0.098 | 0.135 | 0.256 |
| 0.025 | 0.025 | 0.029 | 0.032 | 0.055 | 0.080 | 0.182 |
| 0.01 | 0.010 | 0.012 | 0.013 | 0.024 | 0.039 | 0.114 |
| Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.105 | 0.114 | 0.129 | 0.202 | 0.277 | 0.495 |
| 0.05 | 0.053 | 0.060 | 0.069 | 0.118 | 0.184 | 0.350 |
| 0.025 | 0.026 | 0.030 | 0.035 | 0.070 | 0.113 | 0.261 |
| 0.01 | 0.012 | 0.013 | 0.014 | 0.032 | 0.057 | 0.178 |
| Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.100 | 0.113 | 0.121 | 0.173 | 0.226 | 0.382 |
| 0.05 | 0.051 | 0.059 | 0.064 | 0.097 | 0.140 | 0.250 |
| 0.025 | 0.025 | 0.029 | 0.032 | 0.054 | 0.081 | 0.176 |
| 0.01 | 0.009 | 0.013 | 0.013 | 0.024 | 0.036 | 0.109 |

Таблица 2.34

Оценки мощности -выборочного критерия χ2 относительно   
,  и  в зависимости от объемов выборок (, , )

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Уровень  значимости | *n* =20 | *n* =50 | *n* = 100 | *n* = 300 | *n* = 500 | *n* = 1000 |
| Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.102 | 0.109 | 0.118 | 0.167 | 0.221 | 0.358 |
| 0.05 | 0.052 | 0.055 | 0.060 | 0.092 | 0.138 | 0.244 |
| 0.025 | 0.026 | 0.030 | 0.031 | 0.049 | 0.081 | 0.172 |
| 0.01 | 0.010 | 0.012 | 0.015 | 0.021 | 0.042 | 0.084 |
| Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.107 | 0.113 | 0.127 | 0.189 | 0.271 | 0.458 |
| 0.05 | 0.052 | 0.056 | 0.068 | 0.111 | 0.172 | 0.335 |
| 0.025 | 0.025 | 0.029 | 0.034 | 0.063 | 0.107 | 0.249 |
| 0.01 | 0.010 | 0.014 | 0.016 | 0.029 | 0.056 | 0.137 |
| Относительно альтернативы | | | | | | |
| 0.1 | 0.102 | 0.110 | 0.116 | 0.164 | 0.218 | 0.357 |
| 0.05 | 0.049 | 0.054 | 0.062 | 0.093 | 0.135 | 0.245 |
| 0.025 | 0.026 | 0.028 | 0.032 | 0.050 | 0.080 | 0.166 |
| 0.01 | 0.011 | 0.013 | 0.015 | 0.020 | 0.037 | 0.086 |

## 2.7. Примеры применения

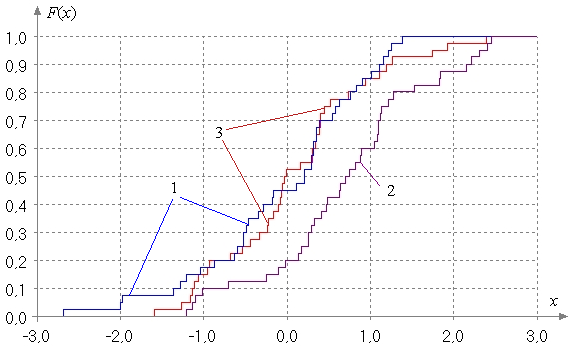
Рассмотрим применение рассмотренных в разделе критериев проверки однородности законов на примере анализа 3-х нижеприведенных выборок, каждой объёмом в 40 наблюдений.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0.321 | 0.359 | -0.341 | 1.016 | 0.207 | 1.115 | 1.163 | 0.900 | -0.629 | -0.524 |
| -0.528 | -0.177 | 1.213 | -0.158 | -2.002 | 0.632 | -1.211 | 0.834 | -0.591 | -1.975 |
| -2.680 | -1.042 | -0.872 | 0.118 | -1.282 | 0.766 | 0.582 | 0.323 | 0.291 | 1.387 |
| -0.481 | -1.366 | 0.351 | 0.292 | 0.550 | 0.207 | 0.389 | 1.259 | -0.461 | -0.283 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0.890 | -0.700 | 0.825 | 1.212 | 1.046 | 0.260 | 0.473 | 0.481 | 0.417 | 1.825 |
| 1.841 | 2.154 | -0.101 | 1.093 | -1.099 | 0.334 | 1.089 | 0.876 | 2.304 | 1.126 |
| -1.134 | 2.405 | 0.755 | -1.014 | 2.459 | 1.135 | 0.626 | 1.283 | 0.645 | 1.100 |
| 2.212 | 0.135 | 0.173 | -0.243 | -1.203 | -0.017 | 0.259 | 0.702 | 1.531 | 0.289 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0.390 | 0.346 | 1.108 | 0.352 | 0.837 | 1.748 | -1.264 | -0.952 | 0.455 | -0.072 |
| -0.054 | -0.157 | 0.517 | 1.928 | -1.158 | -1.063 | -0.540 | -0.076 | 0.310 | -0.237 |
| -1.109 | 0.732 | 2.395 | 0.310 | 0.936 | 0.407 | -0.327 | 1.264 | -0.025 | -0.007 |
| 0.164 | 0.396 | -1.130 | 1.197 | -0.221 | -1.586 | -0.933 | -0.676 | -0.443 | -0.101 |

Эмпирические распределения, соответствующие данным выборкам, представлены на рис. 2.32



*Рис. 2.32.* Эмпирические распределения, соответствующие выборкам

Проверим гипотезу об однородности 1-й и 2-й выборок. В таблице 2.35 приведены результаты проверки: значения статистик критериев и достигнутые уровни значимости . Оценки  вычислялись по значению статистики в соответствии с распределением (2.8) для критерия Андерсона–Дарлинга, в соответствии с распределением (2.5) для критерия Лемана–Розенблатта, в соответствии с распределением (2.2) для критерия Смирнова, в соответствии с бета-распределением 3-го рода из таблицы 2.8 при  для -выборочного критерия Андерсона–Дарлинга. Распределения статистик (2.12), (2.13) и (2.14) критериев Жанга и оценки  находились в результате моделирования. По приведенным оценкам  очевидно, что гипотеза об однородности по всем критериям должна быть отклонена.

Таблица 2.35

**Результаты проверки однородности 1-й и 2-й выборок**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Критерий | Статистика |  |
| Андерсона–Дарлинга | 5.19801 | 0.002314 |
| -выборочный Андерсона–Дарлинга | 5.66112 | 0.003259 |
| Лемана–Розенблатта | 0.9650 | 0.002973 |
| Смирнова | 1.56525 | 0.014893 |
| Смирнова модифицированный | 1.61386 | 0.010933 |
| Жанга | 2.99412 | 0.0007 |
| Жанга | 2.87333 | 0.0008 |
| Жанга | 5.58723 | 0.0150 |

В таблице 2.36 приведены результаты проверки гипотезы об однородности 1-й и 3-й выборок. Здесь оценки  по всем критериям очень высокие, поэтому проверяемая гипотеза об однородности не должна отклоняться.

Таблица 2.36

**Результаты проверки однородности 1-й и 3-й выборок**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Критерий | Статистика |  |
| Андерсона–Дарлинга | 0.49354 | 0.753415 |
| -выборочный Андерсона–Дарлинга | -0.68252 | 0.767730 |
| Лемана–Розенблатта | 0.0500 | 0.876281 |
| Смирнова | 0.447214 | 0.989261 |
| Смирнова модифицированный | 0.495824 | 0.966553 |
| Жанга | 3.1998 | 0.332 |
| Жанга | 3.07077 | 0.384 |
| Жанга | 1.7732 | 0.531 |

В таблице 2.37 показаны результаты проверки гипотезы об однородности трёх рассматриваемых выборок по -выборочному критерию Андерсона–Дарлинга, по критериям Жанга и по критериям со статистиками , , .

В этом случае оценка  для критерия Андерсона–Дарлинга вычислялась в соответствии с бета-распределением 3-го рода из таблицы 2.8 при , а для критериев Жанга на основании статистического моделирования, проведенного в интерактивном режиме, при числе имитационных экспериментов . Для критерия со статистикой  оценка  при вычислялась в соответствии с бета-распределением 3-го рода из таблицы 2.21, для критерия со статистикой  – в соответствии с распределением Sb-Джонсона из таблицы 2.25, для критерия со статистикой  – в соответствии с бета-распределением 3-го рода из таблицы 2.29.

Заметим, что критерии Андерсона–Дарлинга  и Лемана–Розенблатта  зафиксировали максимальное отклонении между 1-й и 2-й выборками, а критерий Смирнова  – между 2-й и 3-й. Общий результат показывает, что проверяемая гипотеза об однородности 3-х выборок должна быть отклонена.

Таблица 2.37

**Результаты проверки однородности 3-х выборок**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Критерий | Статистика |  |
| -выборочный Андерсона–Дарлинга | 4.73219 | 0.0028 |
| Жанга | 3.02845 | 0.0015 |
| Жанга | 2.92222 | 0.0017 |
| Жанга | 7.00231 | 0.0217 |
| max Андерсона–Дарлинга | 5.19801 | 0.0064 |
| max Лемана–Розенблатта | 0.9650 | 0.0094 |
| max Смирнова модифицированный | 1.72566 | 0.0144 |

В данном случае результаты проверки были достаточно предсказуемы, так как 1-я и 3-я выборки были смоделированы в соответствии со стандартным нормальным законом, а полученные значения псевдослучайных величин округлены до 3-х значащих цифр после десятичной точки. В то время как 2-я выборка получена в соответствии с нормальным законом с параметром сдвига 0.5 и стандартным отклонением 1.1.

## 2.8. Выводы по разделу

Мощность рассматриваемых критериев однородности исследова­лась методами статистического моделирования относительно трёх видов альтернатив: изменения параметра сдвига, изменения масштаба и относительно ситуации, когда пара выборок принадлежала близким, но различным законам (нормальному и логистическому). Анализ полученных оценок мощности позволяют сделать следующие выводы.

Относительно конкурирующих гипотез, соответствующих изменению параметра сдвига, двухвыборочные критерии Смирнова Лемана–Розенблатта, Андерсона–Дарлинга–Петита, критерии Жанга со статистиками , ,  и критерий  по убыванию мощности располагаются в следующем порядке:

Андерсона–Дарлинга  Лемана–Розенблатта  Жанга  Жанга** Смирнова Жанга  .

Относительно конкурирующих гипотез, соответствующих изменению параметра масштаба, критерии располагаются уже в другом порядке:

Жанга  Жанга ** Жанга ** Андерсона–Дарлинга    Лемана–Розенблатта  Смирнова.

При этом разница в мощности критериев Жанга со статистиками  и  невелика. Относительно более близких конкурирующих гипотез с меньшим сдвигом критерий Смирнова может оказаться впереди критерия Лемана–Розенблатта.

В ситуации, когда при конкурирующей гипотезе одна выборка принадлежит нормальному закону, а вторая – логистическому, критерии упорядочиваются по мощности следующим образом:

Жанга  Жанга ** Жанга **   Андерсона–Дарлинга  Смирнова  Лемана–Розенблатта.

В данном случае нельзя не учитывать негативный момент, связанный с дискретностью распределения статистики Смирнова. Это замечание в некоторой степени касается и критерия Жанга со статистикой .

В случае  выборок в аналогичных ситуациях тот же порядок предпочтения сохраняется для -выборочных вариантов критериев Андерсона–Дарлинга и Жанга. Однако в этот порядок вмешиваются критерии, использующие статистики , , . В частности, относительно изменения параметра сдвига порядок предпочтения имеет вид:

  Андерсона–Дарлинга      Жанга     
Жанга   Жанга   .

Относительно изменения параметра масштаба –

Жанга ** Жанга  Жанга ** Андерсона–Дарлинга    
      .

При этом критерии Жанга со статистиками  и  практически эквивалентны по мощности, а критерий Андерсона–Дарлинга заметно уступает критериям Жанга.

Относительно ситуации, когда три выборки принадлежат нормальному закону, а четвёртая – логистическому, критерии располагаются по мощности в следующем порядке:

Жанга  Жанга ** Жанга **   Андерсона–Дарлинга      .

Так как распределение статистики (2.4) очень быстро сходится к распределению , то использование его в качестве распределения статистики критерия Лемана–Розенблатта корректно и при малых объёмах сравниваемых выборок. Это же можно сказать относительно сходимости распределения статистики (2.7) критерия однородности Андерсона–Дарлинга к распределению .

Построенные в данной работе модели предельных распределений статистики (2.11) при использовании -выборочного критерия однородности Андерсона–Дарлинга для анализа  сравниваемых выборок (Табл. 2.8) даёт возможность находить оценки , что, несомненно, сделает результаты статистических выводов более информативными и более обоснованными. Такая же возможность реализована для критериев со статистиками  (Табл. 2.18),  (Табл. 2.22),  (Табл. 2.26).

В случае критерия Смирнова из-за ступенчатого характера распре­деления статистики (2.1) (особенно, при равных объёмах выборок) использование предельного распределения Колмогорова  для экспериментатора будет связано с очень приблизительным знанием действительного уровня значимости (вероятности ошибки первого рода) и соответствующего критического значения. Поэтому при построении процедур проверки однородности по критерию Смирнова рекомендуется: 1) выбирать  так, чтобы они представляли собой взаимно простые числа, а их наименьшее общее кратное  было максимальным и равным ; 2) использовать в критерии Смирнова статистику вида (2.3). Тогда применение распределения Колмогорова в качестве распределения статистики (2.3) критерия Смирнова будет корректным при относительно малых  и .

Критерии Жанга со статистиками , ,  относительно некоторых альтернатив обладают заметным преимуществом в мощности. Недостатком, ограничивающим их применение, является зависимость распределений статистик от объёмов выборок. Этот недостаток легко преодолевается использованием метода Монте–Карло для построения эмпирических распределений  для статистик , ,  при конкретных объемах выборок с последующей оценкой по ним значений . Такая процедура легко реализуется, так как при построении  сравниваемые выборки моделируются по равномерному закону на интервале [0,1].

При обработке результатов измерений в задачах статистического управления качеством обычно имеют дело с выборками достаточно ограниченного или совсем малого объема. Следует отчетливо понимать, что критерии однородности вследствие низкой мощности при малых объемах выборок не способны различать близкие конкурирующие законы. Поэтому проверяемая гипотеза об однородности выборок, даже в случае ее несправедливости, чаще не будет отклоняться. Сдвиг на  или увеличение масштабного параметра (рассеяния) на 10 % при малых объемах выборок критерии однородности, вернее всего, «не заметят», но большие отклонения в законах, соответствующих выборкам, будут отмечаться. Например, для того чтобы в случае применения критерия Лемана–Розенблатта вероятности ошибок первого  и второго рода  не превышали 0.1 при наличии сдвига  (альтернатива ) объемы выборок должны быть порядка 2000, а при сдвиге  (альтернатива ) вероятно­сти ошибок не превысят величин 0.1 при объемах выборок не более 100.

# 3. КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ ОДНОРОДНОСТИ СРЕДНИХ

К критериям проверки гипотез об однородности математических ожиданий (об однородности средних) прибегают при контроле средств измерений, при статистическом анализе результатов экспериментов, при статистическом управлении качеством для проверки наличия возмуще­ния в ходе процесса.

В общем случае проверяемая гипотеза о равенстве математических ожиданий, соответствующих *k* выборкам, имеет вид



при конкурирующей гипотезе

,

где неравенство выполняется хотя бы для одной пары индексов , .

Для проверки гипотезы  может использоваться ряд параметрических критериев: сравнения двух выборочных средних при известных дисперсиях; сравнения двух выборочных средних при неизвестных, но равных дисперсиях (критерий Стьюдента); сравнения двух выборочных средних при неизвестных и неравных дисперсиях; *F*-критерий. В этих же целях применяется целая совокупность непараметрических критериев: критерий Уилкоксона, критерий Манна–Уитни, критерий Краскела–Уаллиса, критерий Ван дер Вардена, - выборочный критерий Ван дер Вардена.

Основным предположением, обусловливающим возможность применения параметрических критериев, является принадлежность анализируемых выборок нормальному закону. Непараметрические критерии свободны от этого требования.

Несмотря, казалось бы, на полную ясность для многих авторов всех нюансов, связанных с применением данных критериев, можно выделить, по крайней мере, два момента, недостаточно четко рассмотренных в литературе и послуживших поводом для проведения исследований [83, 34], которым посвящен данный раздел.

Во-первых: насколько важно убедиться в принадлежности анализируемых выборок нормальному закону при использовании параметрических критериев проверки однородности средних? В настоящее время исследователи в силу различных объективных и субъективных причин зачастую пренебрегают проверкой нормальности наблюдений, а потому и подвергаются справедливой критике за возможную некорректность выводов. Особенно типична такая ситуация при анализе биомедицинских измерений, где встретить выборки, хорошо согласующиеся с нормальным законом, весьма проблематично. С другой стороны, можно сослаться на авторитетные суждения о предпочтительности применения непараметрических критериев или об отсутствии необходимости в проверке нормальности, например, при использовании критерия Стьюдента в случае больших объемов выборок.

Вторая причина обусловлена достаточно туманными сведениями о мощности упомянутых критериев.

В материалах настоящего раздела исследуется влияние нарушений предположения о нормальности на распределения статистик параметрических критериев и приводится сравнительный анализ мощности наиболее популярных критериев проверки однородности средних.

## 3.1. Параметрические критерии однородности средних

### 3.1.1. Критерий сравнения двух выборочных средних при известных дисперсиях

Применение критерия сравнения двух выборочных средних (по двум выборкам) при известных и равных дисперсиях предусматривает вычисление статистики

, (3.1)

где ,  – объем -й выборки, . В случае принадлежности наблюдений (ошибок измерений) нормальным законам статистика  подчиняется стандартному нормальному закону. Если в статистике (3.1) опустить  и , то будет проверяться гипотеза о равенстве математических ожиданий.

Критерий двусторонний. Проверяемая гипотеза отклоняется при больших по модулю значениях статистики (3.1).

### 3.1.2. Критерий Стьюдента

Это критерий проверки гипотезы о равенстве математических ожиданий при неизвестных, но равных дисперсиях. Критерий предусматривает вычисление статистики  [65]:

, (3.2)

где

.

Аналогично, если в статистике (3.2) опустить  и , то проверяется гипотеза о равенстве математических ожиданий.

В случае принадлежности выборок нормальному закону при справедливости гипотезы  эта статистика подчиняется -распределению Стьюдента с числом степеней свободы . Критерий двусторонний.

### 3.1.3. Критерий сравнения двух выборочных средних при неизвестных и неравных дисперсиях

При неравных объемах выборок  статистика критерия, предложенная в [61], имеет вид [71]

. (3.3)

Критерий также двусторонний. В случае нормального закона и справедливости гипотезы  статистика (3.3) подчиняется распределению -Стьюдента с числом степеней свободы

. (3.4)

Задача, связанная с поиском распределения статистики (3.3), долгое время носила название проблемы Беренса–Фишера [3, 12, 13]. Её настоящее решение получено в работах [62, 52, 53].

В случае равенства неизвестных дисперсий статистика (3.3) эквивалентна статистике (3.2). При неравенстве дисперсий всегда число степеней свободы . Чем больше разница в дисперсиях, соответствующих анализируемым выборкам, тем сильнее распределение статистики (3.3) отличается от распределения статистики (3.2).

Распределения статистик (3.1) и (3.2) при справедливости  известны точно, а решение проблемы Беренса–Фишера носит приближенный характер. В то же время это решение обладает хорошей точностью.

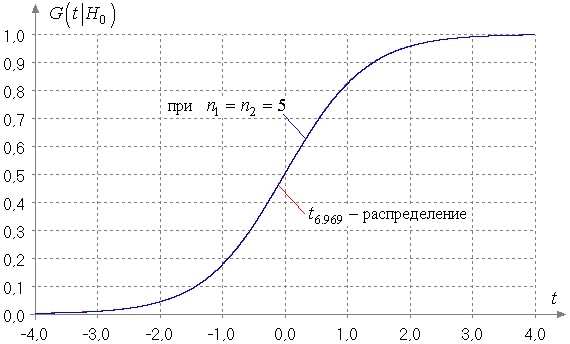
На рис.3.1 представлено эмпирическое распределение  статистики (3.3), полученное при моделировании  значений статистики (3.3) в случае справедливости  при . Здесь же показано -распределение Стьюдента с числом степеней свободы , вычисленным в соответствии с (3.4) для , . На рисунке эти распределения визуально совпадают.

В первой строке таблицы 3.1 приведены результаты проверки простой гипотезы о согласии этого эмпирического распределения с теоретическим по критериям Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова и Андерсона–Дарлинга (значения статистик  и достигнутый уровень значимости). Во второй строке приведены результаты для аналогичного эксперимента при  и вычисленном по (3.4) . В этом случае величины  ещё выше. Всё это подтверждает близость -распределений при , соответствующим (3.4), к истинным распределениям статистики (3.3).

Таблица 3.1

**Результаты проверки согласия эмпирических распределений   
статистики (3.3) с теоретическими -распределениями**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Критерий | | | | | |
| Колмогорова | | Крамера–Мизеса–Смирнова | | Андерсона–Дарлинга | |
|  |  |  |  |  |  |
|  | 0.9730 | 0.300 | 0.1926 | 0.282 | 1.1777 | 0.276 |
|  | 0.8748 | 0.428 | 0.1101 | 0.534 | 0.9948 | 0.360 |



*Рис. 3.1.* Теоретическое и эмпирическое распределения статистики (3.3)   
при 

Отметим, что при  различие между критериями со статистиками (3.1) – (3.3) практически исчезает, так как с ростом числа степеней свободы распределение Стьюдента сходится к стандартному нормальному закону. При  соответствующие распреде­ления Стьюдента практически не отличаются от стандартного нормального. При использовании в таких ситуациях для вычисления достигаемых уровней значимости стандартного нормального закона вместо соответствующего распределения Стьюдента погрешности в определении вероятностей не превышают 0.001.

### 3.1.4. F-критерий однородности средних

В случае справедливости гипотезы о постоянстве (о равенстве) дис­персий с по­мощью *F*-критерия можно проверять гипотезу об однородности математических ожиданий по *k* выборкам [95].

Пусть у нас имеется *k* выборок объемом . Сумма квадратов отклонений по всем выборкам определяется соотношением

,

где



– среднее по всем выборкам. Общая сумма  раскладывается на два компонента

,

,

.

Компонент , например, в задачах контроля качества является мерой различия в уровнях настройки между *k* выборками, в то время как  определяет различие в уровнях настройки внутри этих *k* вы­борок.

Для проверки гипотезы используется критерий со статистикой

. (3.5)

Если все выборки извлекаются из нормальной генеральной совокупно­сти, то при справедливости гипотезы  статистка (3.5) подчиняется -распределе­нию Фишера со степенями сво­боды  и  [95]. Критерий правосторонний. Проверяемая гипотеза отклоняется при больших значениях статистики (3.5).

### 3.1.5. Об устойчивости параметрических критериев

Принадлежность выборок нормальному закону является основным предположением, обуславливающим возможность применения перечисленных выше параметрических критериев. Именно в предположении о нормальности имеют место указанные распределения статистик соответствующих критериев при справедливости проверяемой гипотезы .

В то же время давно известно, что параметрические критерии, предназначенные для проверки гипотез об однородности средних анализируемых выборок, достаточно устойчивы к нарушению стандартного предположения о нормальности.

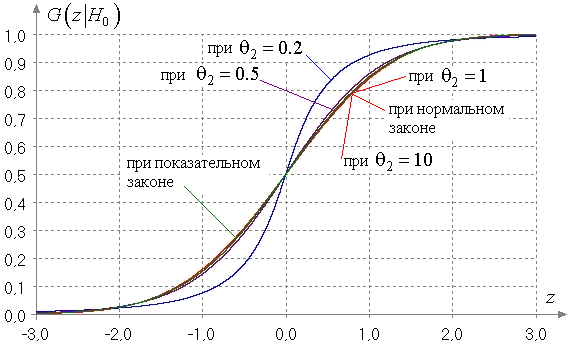
При исследовании степени устойчивости параметрических критериев в данном случае использовалась та же методика компьютерного моделирования и анализа статистических закономерностей, что и в других наших работах, например [97, 100]. Распределения статистик (3.1)–(3.3) и (3.5) при справедливой проверяемой гипотезе  исследовались для различных законов, в частности, в случае принадлежности наблюдений обобщённому нормальному закону с плотностью

 (3.6)

с различными значениями параметра формы . При  выражение (3.6) дает плотность нормального закона распределения. При больших значениях  распределение (3.6) стремится к равномерному, при малых  получаем симметричные законы с «тяжелыми хвостами».

На рис. 3.2 показаны полученные в результате моделирования распределения статистики (3.1) в случае принадлежности наблюдаемых величин законам распределения семейства (3.6) при различных значениях параметра формы и в случае показательного закона с плотностью

.



*Рис. 3.2.* Эмпирические распределения статистики (3.1) при различных законах распределения наблюдаемых величин и справедливости гипотезы  при объемах выборок 

Результаты исследований позволяют сделать следующие выводы. Конечно, распределение статистики (3.1) зависит от законов, которым при­надлежат анализируемые выборки. Асимметрия наблюдаемых законов приводит к отличию распределения статистики от стандартного нор­маль­ного, однако это отличие не настолько велико, чтобы приводить к серьезным ошибкам при использовании критерия. В случае симметричных законов наблюдается устойчивость распределения статистики к значительным отклонениям наблюдаемых законов от нормального (вплоть до равномерного): распределения статистики существенно отличаются от стандартного нормального только в случае законов с «тяжелыми хвостами» (например, при распределении Коши или в случае распределения (3.6) при малых значениях  (см. рис. 3.2, при  и ).

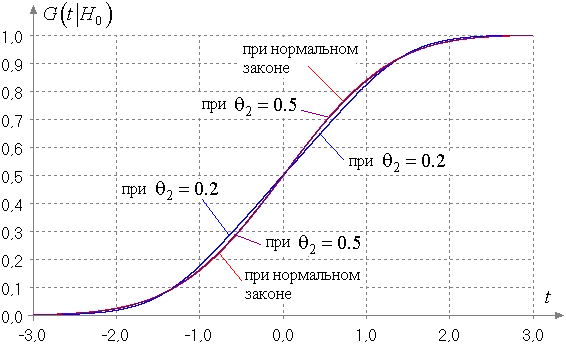
Рис. 3.3 отражает аналогичную картину зависимости распределений статистики (3.2) от законов распределения наблюдаемых величин, которая позволяет сделать идентичные выводы об устойчивости критерия Стьюдента.



*Рис. 3.3.* Эмпирические распределения статистики (3.2) при различных законах распределения наблюдаемых величин и спра-  
ведливости гипотезы  при объемах выборок 

С ростом объемов выборок критерий становится еще более устойчивым к отклонениям наблюдаемых законов от нормального. На рис. 3.4 показаны распределения статистики (3.2) при объемах выборок  в случае принадлежности выборок нормальному закону и распределениям семейства (3.6) при  и .

Подобным же образом от наблюдаемых законов зависят распределения статистики (3.3), используемой в критерии при неравных неизвестных дисперсиях.



*Рис. 3.4.* Эмпирические распределения статистики (3.2) при различных законах распределения наблюдаемых величии и спра-  
ведливости гипотезы  при объемах выборок 

Распределения статистики (3.4) *F*-критерия также устойчивы к откло­нениям законов, соответствующих анализируемым выборкам, от нормального. Однако следует подчеркнуть, что применение данного критерия для проверки однородности средних предполагает примерное равенство дисперсий анализируемых выборок. При невыполнении данного условия распределения статистики  становятся отлич­ными от соответству­ющего -распределения. Если отношение макси­мальной дисперсии к минимальной соответствующих анализи­руемых выборок не превышает 4, то отклонение распределения статистики  от -распределения Фишера не превосходит величины 0.01.

Данные результаты подтверждают общую закономерность: пара­метрические критерии, связанные с проверкой гипотез о математических ожиданиях, весьма устойчивы к отклонениям наблюдаемых законов от нормального. Это справедливо даже в случае многомерных случайных величин [89].

## 3.2. Непараметрические критерии однородности средних

Строго говоря, применение непараметрических критериев проверки гипотез о равенстве математических ожиданий предполагает, что анализируемые выборки принадлежат законам, которые могут отличаться разве что параметрами сдвига. И проверка гипотезы об однородности направлена именно на обнаружение возможного сдвига.

Нарушение данного предположения отражается на распределениях статистик критериев, имеющих место при справедливости проверяемой гипотезы  о равенстве математических ожиданий. Однако на этом факте, как правило, не акцентируют внимания, так как заметные изменения распределений статистик (при справедливости ) проявляются при существенно (на порядок) отличающихся параметрах масштаба закона, соответствующего анализируемым выборкам.

### 3.2.1. Критерии Уилкоксона и Манна–Уитни.

Ранговый критерий Манна и Уитни [45, 46, 21, ] является непараметрическим аналогом *t*-критерия для сравнения двух средних значений непрерывных распределений. Критерий Манна и Уитни представляет собой развитие критерия Уилкоксона [63].

Для вычисления статистикиУилкоксона две независимые выборки объединяют в одну объёмом в  значений и упорядочивают. По объединенной выборке определяют сумму рангов , соответствующую элементам первой выборки, и сумму рангов второй . Статистика критерия Уилкоксона [63] имеет вид

, (3.7)

где

,

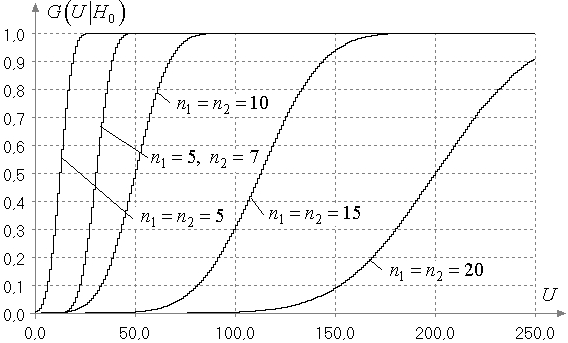
.

Дискретные распределения *U*-статистики сильно зависят от размера выборок, что затрудняет применение критерия. Эту зависимость иллюстрирует рис. 3.5, на котором представлены распределения статистики  при различных комбинациях объёмов выборок в случае справедливости проверяемой гипотезы .

В критерии Манна–Уитни (Манна–Уитни–Уилкоксона) вместо *U*-статистики используется нормализованная статистика

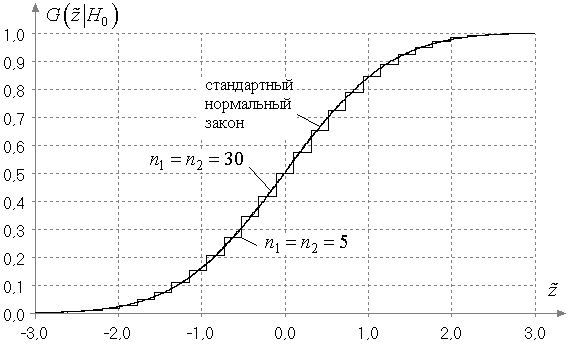
. (3.8)

Дискретное распределение статистики (3.8) в случае справедливости проверяемой гипотезы  хорошо приближается стандартным нормальным законом при  (см. рис. 3.6), если объем каждой из выборок не слишком мал: , .



*Рис. 3.5.* Распределения статистики Уилкоксона при различных объёмах сравниваемых выборок

При меньших объемах выборок следует учитывать, что достигаемый уровень значимости , вычисляемый по значению статистики в соответствии с функцией распределения стандартного нормального закона, может заметно отличаться от истинного.



*Рис. 3.6.* Сходимость распределения статистики Манна–Уитни к стандартному нормальному закону

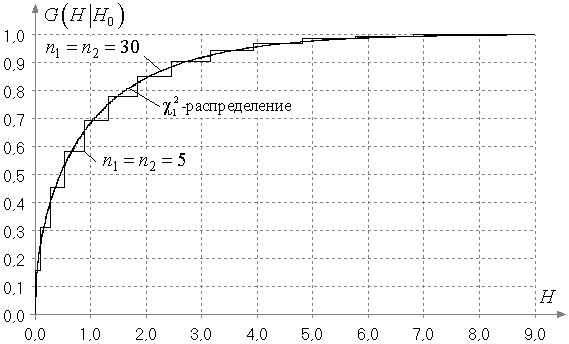
### 3.2.2. Критерий Краскела–Уаллиса

*Н*-критерий Краскела–Уаллиса [24, 25] является развитием *U*-критерия для проверки гипотезы о равенстве средних по *k* выборкам. Объединенную выборку объёмом  упорядочивают и вычисляют суммы рангов  для -й выборки, . Статистика для проверки гипотезы  имеет вид

. (3.9)

Статистика  представляет собой дисперсию ранговых сумм. При больших  и *k* в случае справедливости проверяемой гипотезы  распределение статистики хорошо аппроксимируется -распределением [25]. В описаниях критерия говорится, что -распределением практически можно пользоваться при .

Исследования показали, что на практике в случае  можно пренебречь дискретностью при  (см. рис. 3.7).



*Рис. 3.7.* Сходимость распределения статистики (3.9) Краскела–Уаллиса   
к -распределению при 

С ростом числа выборок влияние дискретности быстро убывает. При  распределение статистики достаточно хорошо приближается -распределением, начиная с , а при  согласие распределения статистики с -распределением не отклоняется по всем применяемым критериям согласия [99, 100]. При  согласие распределения статистики с -распределением не отклоняется при .

### 3.2.3. Критерий Ван дер Вардена

Критерий предназначен для анализа 2-х выборок. Статистика непараметрического критерия Ван дер Вардена вычисляется в соответствии с выражением [69]:

, (3.10)

где  – -квантиль стандартного нормального закона,  – ранг -го наблюдения, например, как в (3.10), второй выборки в общем вариационном ряду объединенной выборки из  наблюдений.

Считается [72], что при  распределение статистики (3.10) удовлетворительно описывается нормальным законом с нулевым математическим ожиданием и дисперсией

.

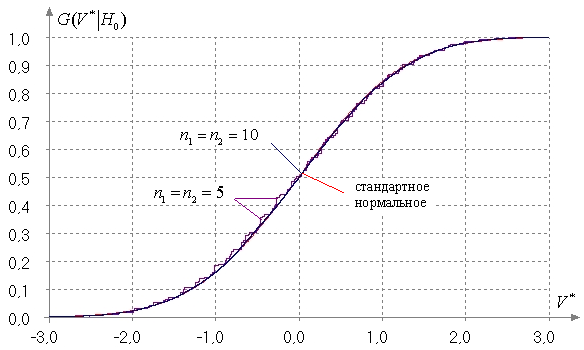
Нормализованная статистика

 (3.11)

должна подчиняться стандартному нормальному закону.

Критерий двусторонний, проверяемая гипотеза отклоняется при больших по модулю значениях статистики (3.11).

Исследование распределений статистики (3.11) методами статистического моделирования показало, что при  отличием распределения  статистики (3.11) от стандартного нормального закона можно пренебречь. Величина отклонения не имеет практического значения уже при . Например, на рис. 3.8 приведены распределения  статистики (3.11) при  и , а также функция распределения стандартного нормального закона. При  хорошо заметна дискретность распределения статистики, а при  распределение статистики визуально совпадает со стандартным нормальным законом.



*Рис. 3.8.* Сходимость распределения нормализованной статистики (3.11) критерия Вандер Вардена к стандартному нормальному закону

Из непараметрических критериев однородности средних критерий Ван дер Вардена, по-видимому, является наиболее предпочтительным.

### 3.2.4. Критерий Фишера–Йэйтса–Терри–Гёфдинга

Этот критерий, рассмотренный в работах [14, 57, 20], очень близок к критерию Ван дер Вардена. В качестве меток в критерии выбраны математические ожидания соответствующих порядковых статистик в выборке объёмом  из стандартного нормального закона. Статистика критерия имеет вид:

, (3.12)

где  – -квантиль стандартного нормального закона,  – ранг -го наблюдения, например, второй выборки в общем вариационном ряду объединенной выборки из  наблюдений.

Так же как и в случае критерия Ван дер Вардена, статистика (3.12) достаточно хорошо описывается нормальным законом с нулевым математическим ожиданием и дисперсией

,

а нормализованная статистика

 (3.13)

– стандартным нормальным законом.

По своим свойствам и мощности критерий со статистикой (3.13) эквивалентен критерию Ван дер Вардена.

### 3.2.5. Многовыборочный критерий Ван дер Вардена

Статистика критерия Ван дер Вардена для проверки гипотезы о равенстве средних по *k* выборкам имеет вид

, (3.14)

где ,  – -квантиль стандартного нормального закона, , – ранг -го элемента -й выборки в вариационном ряду объединённой выборки объёма .

При справедливости проверяемой гипотезы  статистика (3.14) хорошо описывается -распределением. Отклонением распреде­ления статистики от -распределения можно пренебречь при .

При  в интервале значений функции распределения статистики от 0.9 до 1 функция -распределения максимально отклоняется от реального распределения статистики в сторону меньших значений на величину порядка . То есть на такую величину может быть завышен достигнутый уровень значимости , вычисляемый по -распределению.

-выборочный критерий Ван дер Вардена демонстрирует более высокую мощность по сравнению с критерием Краскела–Уаллиса.

## 3.3. Сравнительный анализ мощности критериев

Большая часть рассмотренных в руководстве критериев проверки гипотез об однородности средних предназначены для анализа двух выборок.

Мощность исследуемых критериев сравнивалась при одинаковых дисперсиях анализируемых выборок относи­тельно следующих конкурирующих гипотез : ; : ;   
: ; : ; : ;   
: .

Естественно, что на результатах сравнительного анализа в определённой степени отразилась существенная дискретность распределений статистик некоторых непараметрических критериев. Например, на рис. 3.9 приведены распределения -статистики (3.7) критерия Манна–Уитни при справед­ливости проверяемой  и конкурирующих гипотез  при объемах выборок . Рисунок, с одной стороны, позволяет судить о мощности критерия относительно рассматриваемых альтер­натив, а с другой – демонстрирует дискретность распределений ста­тистики, которую следует учиты­вать, применяя критерии и анализируя их мощность.

Вычисленные на основании результатов моделирования оценки мощности  критериев, где  – вероятность ошибки второго рода, для различных значений уровня значимости  (вероятностей ошибок первого рода) и при одинаковых объемах сравниваемых выборок  представлены в табл. 3.2–3.7. Критерии в таблицах упорядочены по мощности. Выборки распределений статистик моделировались объемом , что позволило оценивать значения мощ­ности с погрешностью в пределах .



*Рис. 3.9.* Эмпирические распределения статистики (3.7) Манна–Уитни при справедливости различных конкурирующих гипотез   
при объемах выборок 

Какие выводы можно сделать на основе результатов, представ­ленных в таблицах? Во-первых, очевидно, что параметрические критерии обладают несколько большей мощностью по сравнению с непараметрическими, но это преимущество весьма незначительно.

-критерий Стьюдента со статистикой (3.2) слегка уступает в мощности -критерию со статистикой (3.1) при известных дисперсиях. В рассматриваемой ситуации равенства дисперсий критерий со статистикой (3.3) эквивалентен критерию со статистикой (3.2) и имеет ту же мощность.

Можно полагать, что *F*-критерий в случае анализа 2-х выборок эквивалентен критерию со статистикой (3.3), применяемому при неравенстве неизвестных дисперсий.

Следует отметить, что непараметрические критерии Ван дер Вардена практически не уступают в мощности параметрическому *F*-критерию.

Таблица 3.2

Мощность критериев относительно : 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| -критерий при известных дисперсиях | | | | | |
| α | *n* = 10 | *n* = 20 | *n* = 30 | *n* = 50 | *n* = 100 |
| 0.1 | 0.108 | 0.117 | 0.126 | 0.142 | 0.184 |
| 0.05 | 0.056 | 0.61 | 0.068 | 0.079 | 0.109 |
| 0.01 | 0.012 | 0.014 | 0.016 | 0.020 | 0.032 |
| -критерий Стьюдента при неизвестных и равных дисперсиях | | | | | |
| 0.1 | 0.108 | 0.117 | 0.126 | 0.141 | 0.183 |
| 0.05 | 0.055 | 0.061 | 0.067 | 0.078 | 0.108 |
| 0.01 | 0.012 | 0.013 | 0.016 | 0.020 | 0.031 |
| -критерий Стьюдента при неизвестных и неравных дисперсиях | | | | | |
| 0.1 | 0.108 | 0.117 | 0.126 | 0.141 | 0.183 |
| 0.05 | 0.055 | 0.061 | 0.067 | 0.078 | 0.108 |
| 0.01 | 0.012 | 0.013 | 0.016 | 0.020 | 0.031 |
| *F*-критерий | | | | | |
| 0.1 | 0.108 | 0.116 | 0.125 | 0.141 | 0.183 |
| 0.05 | 0.055 | 0.060 | 0.067 | 0.078 | 0.108 |
| 0.01 | 0.012 | 0.013 | 0.015 | 0.020 | 0.031 |
| Критерий Ван дер Вардена | | | | | |
| 0.1 | 0.108 | 0.116 | 0.125 | 0.141 | 0.183 |
| 0.05 | 0.055 | 0.061 | 0.067 | 0.078 | 0.108 |
| 0.01 | 0.012 | 0.013 | 0.015 | 0.020 | 0.031 |
| Многовыборочный критерий Ван дер Вардена | | | | | |
| 0.1 | 0.108 | 0.116 | 0.125 | 0.141 | 0.182 |
| 0.05 | 0.055 | 0.060 | 0.067 | 0.078 | 0.107 |
| 0.01 | 0.012 | 0.013 | 0.015 | 0.020 | 0.031 |
| *H*-критерий Краскела–Уаллиса | | | | | |
| 0.1 | 0.113 | 0.118 | 0.126 | 0.140 | 0.179 |
| 0.05 | 0.057 | 0.063 | 0.066 | 0.077 | 0.105 |
| 0.01 | 0.013 | 0.014 | 0.015 | 0.019 | 0.030 |
| -критерий Манна–Уитни | | | | | |
| 0.1 | 0.102 | 0.113 | 0.124 | 0.138 | 0.179 |
| 0.05 | 0.051 | 0.060 | 0.066 | 0.076 | 0.105 |
| 0.01 | 0.011 | 0.013 | 0.015 | 0.019 | 0.030 |

Таблица 3.3

Мощность критериев относительно : 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *-*критерий при известных дисперсиях | | | | | |
| α | *n* = 10 | *n* = 20 | *n* = 30 | *n* = 50 | *n* = 100 |
| 0.1 | 0.133 | 0.167 | 0.200 | 0.263 | 0.411 |
| 0.05 | 0.073 | 0.097 | 0.122 | 0.170 | 0.293 |
| 0.01 | 0.018 | 0.027 | 0.036 | 0.058 | 0.125 |
| -критерий Стьюдента при неизвестных и равных дисперсиях | | | | | |
| 0.1 | 0.131 | 0.166 | 0.198 | 0.261 | 0.408 |
| 0.05 | 0.071 | 0.095 | 0.119 | 0.167 | 0.291 |
| 0.01 | 0.017 | 0.025 | 0.035 | 0.056 | 0.122 |
| -критерий Стьюдента при неизвестных и неравных дисперсиях | | | | | |
| 0.1 | 0.131 | 0.166 | 0.198 | 0.261 | 0.408 |
| 0.05 | 0.071 | 0.095 | 0.119 | 0.167 | 0.291 |
| 0.01 | 0.017 | 0.025 | 0.035 | 0.056 | 0.122 |
| *F*-критерий | | | | | |
| 0.1 | 0.131 | 0.165 | 0.198 | 0.261 | 0.408 |
| 0.05 | 0.071 | 0.094 | 0.119 | 0.168 | 0.290 |
| 0.01 | 0.016 | 0.025 | 0.035 | 0.056 | 0.121 |
| Критерий Ван дер Вардена | | | | | |
| 0.1 | 0.130 | 0.163 | 0.197 | 0.259 | 0.407 |
| 0.05 | 0.070 | 0.093 | 0.118 | 0.166 | 0.289 |
| 0.01 | 0.016 | 0.025 | 0.034 | 0.056 | 0.120 |
| Многовыборочный критерий Ван дер Вардена | | | | | |
| 0.1 | 0.129 | 0.163 | 0.196 | 0.259 | 0.406 |
| 0.05 | 0.070 | 0.093 | 0.118 | 0.166 | 0.288 |
| 0.01 | 0.016 | 0.025 | 0.034 | 0.056 | 0.120 |
| *H*-критерий Краскела–Уаллиса | | | | | |
| 0.1 | 0.136 | 0.164 | 0.196 | 0.254 | 0.395 |
| 0.05 | 0.073 | 0.096 | 0.115 | 0.162 | 0.279 |
| 0.01 | 0.019 | 0.025 | 0.033 | 0.054 | 0.114 |
| -критерий Манна–Уитни | | | | | |
| 0.1 | 0.121 | 0.158 | 0.192 | 0.252 | 0.395 |
| 0.05 | 0.063 | 0.091 | 0.115 | 0.161 | 0.279 |
| 0.01 | 0.015 | 0.023 | 0.033 | 0.053 | 0.114 |

Таблица 3.4

Мощность критериев относительно : 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| -критерий при известных дисперсиях | | | | | |
| α | *n* = 10 | *n* = 20 | *n* = 30 | *n* = 50 | *n* = 100 |
| 0.1 | 0.175 | 0.249 | 0.317 | 0.443 | 0.683 |
| 0.05 | 0.103 | 0.158 | 0.214 | 0.323 | 0.563 |
| 0.01 | 0.029 | 0.053 | 0.079 | 0.142 | 0.328 |
| -критерий Стьюдента при неизвестных и равных дисперсиях | | | | | |
| 0.1 | 0.169 | 0.244 | 0.314 | 0.439 | 0.680 |
| 0.05 | 0.097 | 0.153 | 0.208 | 0.317 | 0.559 |
| 0.01 | 0.026 | 0.048 | 0.075 | 0.137 | 0.321 |
| -критерий Стьюдента при неизвестных и неравных дисперсиях | | | | | |
| 0.1 | 0.169 | 0.244 | 0.314 | 0.439 | 0.680 |
| 0.05 | 0.097 | 0.153 | 0.208 | 0.317 | 0.559 |
| 0.01 | 0.026 | 0.048 | 0.075 | 0.137 | 0.321 |
| *F*-критерий | | | | | |
| 0.1 | 0.169 | 0.243 | 0.313 | 0.439 | 0.680 |
| 0.05 | 0.097 | 0.152 | 0.208 | 0.317 | 0.558 |
| 0.01 | 0.025 | 0.047 | 0.074 | 0.136 | 0.320 |
| Критерий Ван дер Вардена | | | | | |
| 0.1 | 0.167 | 0.240 | 0.309 | 0.435 | 0.678 |
| 0.05 | 0.095 | 0.150 | 0.205 | 0.314 | 0.556 |
| 0.01 | 0.025 | 0.047 | 0.073 | 0.135 | 0.318 |
| Многовыборочный критерий Ван дер Вардена | | | | | |
| 0.1 | 0.167 | 0.239 | 0.309 | 0.435 | 0.677 |
| 0.05 | 0.095 | 0.149 | 0.205 | 0.314 | 0.555 |
| 0.01 | 0.025 | 0.047 | 0.073 | 0.134 | 0.317 |
| *H*-критерий Краскела–Уаллиса | | | | | |
| 0.1 | 0.173 | 0.239 | 0.307 | 0.425 | 0.662 |
| 0.05 | 0.099 | 0.152 | 0.199 | 0.306 | 0.539 |
| 0.01 | 0.028 | 0.047 | 0.071 | 0.130 | 0.302 |
| -критерий Манна–Уитни | | | | | |
| 0.1 | 0.154 | 0.231 | 0.302 | 0.422 | 0.662 |
| 0.05 | 0.086 | 0.145 | 0.199 | 0.303 | 0.539 |
| 0.01 | 0.023 | 0.044 | 0.071 | 0.128 | 0.302 |

Таблица 3.5

Мощность критериев относительно : 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| -критерий при известных дисперсиях | | | | | |
| α | *n* = 10 | *n* = 20 | *n* = 30 | *n* = 50 | *n* = 100 |
| 0.1 | 0.232 | 0.355 | 0.462 | 0.638 | 0.881 |
| 0.05 | 0.146 | 0.246 | 0.342 | 0.516 | 0.806 |
| 0.01 | 0.047 | 0.096 | 0.153 | 0.283 | 0.603 |
| -критерий Стьюдента при неизвестных и равных дисперсиях | | | | | |
| 0.1 | 0.222 | 0.348 | 0.456 | 0.633 | 0.879 |
| 0.05 | 0.135 | 0.235 | 0.332 | 0.507 | 0.803 |
| 0.01 | 0.040 | 0.087 | 0.144 | 0.272 | 0.592 |
| -критерий Стьюдента при неизвестных и неравных дисперсиях | | | | | |
| 0.1 | 0.222 | 0.348 | 0.456 | 0.633 | 0.879 |
| 0.05 | 0.135 | 0.235 | 0.332 | 0.507 | 0.803 |
| 0.01 | 0.040 | 0.087 | 0.144 | 0.272 | 0.592 |
| *F*-критерий | | | | | |
| 0.1 | 0.222 | 0.346 | 0.455 | 0.633 | 0.879 |
| 0.05 | 0.135 | 0.234 | 0.332 | 0.508 | 0.802 |
| 0.01 | 0.040 | 0.086 | 0.143 | 0.271 | 0.591 |
| Критерий Ван дер Вардена | | | | | |
| 0.1 | 0.218 | 0.339 | 0.449 | 0.628 | 0.877 |
| 0.05 | 0.132 | 0.228 | 0.328 | 0.503 | 0.800 |
| 0.01 | 0.039 | 0.083 | 0.140 | 0.269 | 0.588 |
| Многовыборочный критерий Ван дер Вардена | | | | | |
| 0.1 | 0.217 | 0.340 | 0.449 | 0.628 | 0.877 |
| 0.05 | 0.131 | 0.229 | 0.327 | 0.503 | 0.799 |
| 0.01 | 0.038 | 0.083 | 0.140 | 0.268 | 0.587 |
| *H***-**критерий Краскела–Уаллиса | | | | | |
| 0.1 | 0.224 | 0.338 | 0.445 | 0.616 | 0.865 |
| 0.05 | 0.136 | 0.231 | 0.317 | 0.490 | 0.784 |
| 0.01 | 0.043 | 0.083 | 0.135 | 0.259 | 0.565 |
| -критерий Манна–Уитни | | | | | |
| 0.1 | 0.201 | 0.327 | 0.439 | 0.613 | 0.865 |
| 0.05 | 0.118 | 0.223 | 0.317 | 0.487 | 0.784 |
| 0.01 | 0.035 | 0.079 | 0.135 | 0.256 | 0.565 |

Таблица 3.6

Мощность критериев относительно : 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| -критерий при известных дисперсиях | | | | | |
| α | *n* = 10 | *n* = 20 | *n* = 30 | *n* = 50 | *n* = 100 |
| 0.1 | 0.301 | 0.477 | 0.615 | 0.803 | 0.971 |
| 0.05 | 0.201 | 0.354 | 0.492 | 0.706 | 0.942 |
| 0.01 | 0.073 | 0.162 | 0.262 | 0.470 | 0.833 |
| -критерий Стьюдента при неизвестных и равных дисперсиях | | | | | |
| 0.1 | 0.287 | 0.466 | 0.607 | 0.799 | 0.970 |
| 0.05 | 0.185 | 0.339 | 0.478 | 0.696 | 0.940 |
| 0.01 | 0.060 | 0.145 | 0.246 | 0.455 | 0.825 |
| -критерий Стьюдента при неизвестных и неравных дисперсиях | | | | | |
| 0.1 | 0.287 | 0.466 | 0.607 | 0.799 | 0.970 |
| 0.05 | 0.185 | 0.339 | 0.478 | 0.696 | 0.940 |
| 0.01 | 0.060 | 0.145 | 0.246 | 0.455 | 0.825 |
| *F*-критерий | | | | | |
| 0.1 | 0.287 | 0.464 | 0.606 | 0.799 | 0.970 |
| 0.05 | 0.184 | 0.338 | 0.477 | 0.697 | 0.940 |
| 0.01 | 0.060 | 0.144 | 0.245 | 0.453 | 0.824 |
| Критерий Ван дер Вардена | | | | | |
| 0.1 | 0.280 | 0.457 | 0.600 | 0.795 | 0.969 |
| 0.05 | 0.179 | 0.333 | 0.471 | 0.691 | 0.938 |
| 0.01 | 0.058 | 0.141 | 0.239 | 0.449 | 0.821 |
| Многовыборочный критерий Ван дер Вардена | | | | | |
| 0.1 | 0.280 | 0.456 | 0.599 | 0.794 | 0.969 |
| 0.05 | 0.179 | 0.330 | 0.471 | 0.691 | 0.938 |
| 0.01 | 0.058 | 0.140 | 0.239 | 0.448 | 0.821 |
| *H***-**критерий Краскела–Уаллиса | | | | | |
| 0.1 | 0.286 | 0.452 | 0.592 | 0.781 | 0.963 |
| 0.05 | 0.184 | 0.331 | 0.457 | 0.679 | 0.930 |
| 0.01 | 0.064 | 0.139 | 0.231 | 0.434 | 0.802 |
| -критерий Манна–Уитни | | | | | |
| 0.1 | 0.259 | 0.441 | 0.586 | 0.779 | 0.963 |
| 0.05 | 0.162 | 0.321 | 0.457 | 0.674 | 0.930 |
| 0.01 | 0.053 | 0.132 | 0.231 | 0.431 | 0.802 |

Таблица 3.7

Мощность критериев относительно : 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| -критерий при известных дисперсиях | | | | | |
| α | *n* = 10 | *n* = 20 | *n* = 30 | *n* = 50 | *n* = 100 |
| 0.1 | 0.722 | 0.935 | 0.987 | 1.000 | 1.000 |
| 0.05 | 0.608 | 0.886 | 0.972 | 0.999 | 1.000 |
| 0.01 | 0.367 | 0.724 | 0.903 | 0.992 | 1.000 |
| -критерий Стьюдента при неизвестных и равных дисперсиях | | | | | |
| 0.1 | 0.693 | 0.928 | 0.985 | 1.000 | 1.000 |
| 0.05 | 0.561 | 0.869 | 0.968 | 0.999 | 1.000 |
| 0.01 | 0.294 | 0.675 | 0.883 | 0.990 | 1.000 |
| -критерий Стьюдента при неизвестных и неравных дисперсиях | | | | | |
| 0.1 | 0.693 | 0.928 | 0.985 | 1.000 | 1.000 |
| 0.05 | 0.561 | 0.869 | 0.968 | 0.999 | 1.000 |
| 0.01 | 0.294 | 0.675 | 0.883 | 0.990 | 1.000 |
| *F*-критерий | | | | | |
| 0.1 | 0.692 | 0.927 | 0.985 | 1.000 | 1.000 |
| 0.05 | 0.560 | 0.868 | 0.967 | 0.999 | 1.000 |
| 0.01 | 0.293 | 0.672 | 0.882 | 0.990 | 1.000 |
| Критерий Ван дер Вардена | | | | | |
| 0.1 | 0.677 | 0.922 | 0.984 | 0.999 | 1.000 |
| 0.05 | 0.544 | 0.859 | 0.965 | 0.998 | 1.000 |
| 0.01 | 0.281 | 0.657 | 0.876 | 0.990 | 1.000 |
| Многовыборочный критерий Ван дер Вардена | | | | | |
| 0.1 | 0.676 | 0.921 | 0.984 | 0.999 | 1.000 |
| 0.05 | 0.543 | 0.859 | 0.965 | 0.998 | 1.000 |
| 0.01 | 0.280 | 0.659 | 0.875 | 0.990 | 1.000 |
| *H***-**критерий Краскела–Уаллиса | | | | | |
| 0.1 | 0.680 | 0.917 | 0.982 | 0.999 | 1.000 |
| 0.05 | 0.548 | 0.855 | 0.960 | 0.998 | 1.000 |
| 0.01 | 0.297 | 0.652 | 0.864 | 0.987 | 1.000 |
| -критерий Манна–Уитни | | | | | |
| 0.1 | 0.645 | 0.912 | 0.981 | 0.999 | 1.000 |
| 0.05 | 0.512 | 0.849 | 0.960 | 0.998 | 1.000 |
| 0.01 | 0.264 | 0.640 | 0.864 | 0.987 | 1.000 |

В случае анализа 2-х выборок ранговые -критерий Манна–Уитни и **-**критерий Краскела–Уаллиса асимптотически эквивалентны и слегка уступают в мощности критериям Ван дер Вардена и чуть больше – параметрическим критериям.

Некоторый разнобой в оценках мощности -критерия Манна–Уитни и **-**критерия Краскела–Уаллиса, отраженный в таблицах, является следствием дискретности распределений этих статистик. Из-за дискретности действительные уровни значимости для этих критериев отличаются от заданных в таблице значений  и несколько превышают их. Этим же объясняется «преимущество» в некоторых случаях **-**критерия Краскела–Уаллиса перед параметрическими критериями.

В таблицах 3.8 – 3.9 представлены оценки мощности -выборочных критериев при  относительно конкурирующих гипотез, при которых  выборке соответствовало математическое ожидание , а -й выборке –  и  (при одинаковых объемах сравниваемых выборок ). Здесь особенно заметно преимущество критерия Ван дер Вардена перед критерием Краскела–Уаллиса.

Таблица 3.8

**Мощность критериев относительно : **

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Критерий | α | *k* = 3 | | *k* = 5 | |
| *n* = 30 | *n* = 50 | *n* = 30 | *n* = 50 |
| *F*-критерий | 0.1 | 0.191 | 0.254 | 0.175 | 0.232 |
| 0.05 | 0.112 | 0.160 | 0.101 | 0.142 |
| 0.01 | 0.031 | 0.052 | 0.026 | 0.043 |
| Многовыборочный критерий Ван дер Вардена | 0.1 | 0.190 | 0.252 | 0.174 | 0.231 |
| 0.05 | 0.111 | 0.159 | 0.100 | 0.141 |
| 0.01 | 0.031 | 0.051 | 0.026 | 0.043 |
| *H***-**критерий Краскела–Уаллиса | 0.1 | 0.187 | 0.247 | 0.172 | 0.225 |
| 0.05 | 0.109 | 0.155 | 0.098 | 0.137 |
| 0.01 | 0.030 | 0.049 | 0.025 | 0.041 |

На практике, применяя рассматриваемые критерии для проверки гипотезы об однородности математических ожиданий обычно задаются только вероятностью  ошибки первого рода. Процедуры контроля предусматривают чаще всего небольшие объемы выборок. Как правило, не заходит речи о вероятности  ошибки второго рода: не отклонить проверяемую гипотезу при справедливости конкурирующей. В то же время в процедуре контроля при задании  желательно гарантировать величину .

Таблица 3.9

**Мощность критериев относительно : **

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Критерий | α | *k* = 3 | | *k* = 5 | |
| *n* = 30 | *n* = 50 | *n* = 30 | *n* = 50 |
| *F*-критерий | 0.1 | 0.618 | 0.823 | 0.585 | 0.807 |
| 0.05 | 0.488 | 0.727 | 0.454 | 0.705 |
| 0.01 | 0.252 | 0.491 | 0.226 | 0.468 |
| Многовыборочный критерий Ван дер Вардена | 0.1 | 0.612 | 0.819 | 0.581 | 0.804 |
| 0.05 | 0.482 | 0.723 | 0.449 | 0.701 |
| 0.01 | 0.248 | 0.487 | 0.223 | 0.463 |
| *H***-**критерий Краскела–Уаллиса | 0.1 | 0.598 | 0.806 | 0.564 | 0.786 |
| 0.05 | 0.468 | 0.706 | 0.431 | 0.680 |
| 0.01 | 0.238 | 0.467 | 0.208 | 0.437 |

В данном случае по результатам анализа мощности мы видим, что при конкурирующей гипотезе  для  и объемах выборок  вероятность ошибки второго рода составит величину  для -критерия со статистикой (3.1). При  и объемах выборок  данный критерий обеспечит величину  для более далекой альтернативы , и величину  относительно . А чтобы с заданным качеством различать гипотезы  и , необходимо иметь выборки объемом порядка 1625 наблюдений!

Какие конкурирующие гипотезы можно с таким же качеством (при  и ) различать по выборкам объемом ? Альтернативы, когда  отличается от  на величину не менее чем ! При , когда  отличается от  на величину примерно , при  – примерно , при  – приблизительно , при  – на .

## 3.4. Выводы по разделу

Таким образом, исследования подтвердили устойчивость парамет­рических критериев проверки однородности математических ожиданий. Это означает, что если закон (законы) распределения анализируемых выборок отличается от нормального, но нет оснований полагать, что наблюдаемые величины принадлежат законам с «тяжелыми хвостами», то применение параметрических критериев со статистиками (3.1) – (3.3) остается корректным, по крайней мере, не приводит к существенным погрешностям при оценке достигнутого уровня значимости.

Если дисперсии анализируемых выборок неизвестны и, возможно, различны, лучше воспользоваться критерием со статистикой (3.3), так как при малых объемах выборок распределение статистики (3.2) будет существенно отличаться от -распределения Стьюдента.

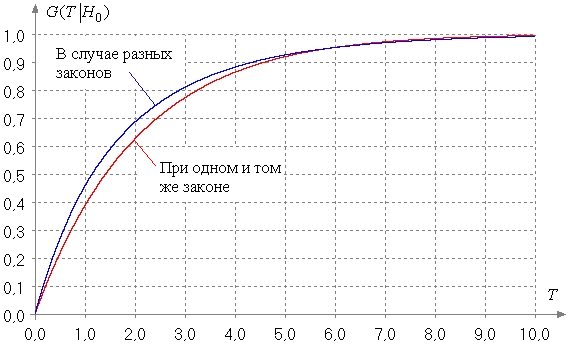
При  для всех критериев со статистиками (3.1) – (3.3) в качестве распределений статистик можно использовать стандартный нормальный закон.

Двухвыборочный критерий Ван дер Вардена является лучшей непарамерической заменой критериям со статистиками (3.2) и (3.3). так как практически не уступает им по мощности.

Недостатком *-*критерия Манна–Уитни является существенная дискретность распределения статистики, что отражается на точности оценок . Это же замечание относится и к **-**критерию Краскела–Уаллиса. В то же время оба эти критерия не столь уж сильно уступают в мощности критериям со статистиками (3.1) – (3.3),.

Применение *F*-критерия проверки однородности математических ожиданий серии выборок целесообразно, если есть основание полагать, что дисперсии, соответствующие выборкам, примерно одинаковы. В противном случае от него следует отказаться и воспользоваться многовыборочным критерием Ван дер Вардена, обладающим практически той же мощностью, или критерием Краскела–Уаллиса, который немного уступает *F*-критерию по мощности.

Напомним, что распределения статистик непараметрических критериев однородности средних при справедливости проверяемой гипотезы  не зависят от вида закона, которому принадлежат выборки, если все они принадлежат одному виду закона. Но если при справедливости  это разные законы, то распределение статистик всё-таки меняется. В качестве примера на рис. 3.10 приведены распределения статистики многовыборочного критерия Ван дер Вардена, соответствующие двум ситуациям: в первом случае все анализируемые выборки принадлежали одному и тому же закону, во втором – обобщённому нормальному закону (3.6) с различными значениями параметра формы  (0.5, 2 и 6).



*Рис. 3.10.* Эмпирические распределения статистики многовыборочного критерия Ван дер Вардена   
при  и объемах выборок 

В аналогичной ситуации распределения статистики **-**критерия Краскела–Уаллиса демонстрируют аналогичную зависимость, но она проявляется в меньшей степени.

Следует помнить, что кроме ошибок первого рода есть ошибки второго рода. Если проверяемая гипотеза при заданном  не была отклонена, это еще не означает, что она справедлива. Организуя процедуру проверки и предполагая, какие альтернативы должны различаться, необходимо выбирать такие объемы выборок, чтобы вероятность ошибки второго рода  оказалась не меньше .

# 4. КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ ОДНОРОДНОСТИ ДИСПЕРСИЙ

Применение классических критериев проверки однородности дисперсий всегда сопряжено с вопросом: насколько полученные выводы корректны в дан­ной конкретной ситуации? Дело в том, что одним из основ­ных предположений при построении этих критериев является принад­лежность наблюдаемых случайных величин (погрешностей изме­рений) нормальному закону распределе­ния. При этом давно известно, что параметрические критерии однородности дисперсий чрезвычайно чувствительны к малейшим отклонениям наблюдаемых случайных величин от нормального закона. При нарушении данного предполо­жения условные распределения статистик критериев при справедливости проверяемой гипотезы, как правило, сильно изменяются. Так как погрешности измерительных приборов или наблюдаемые в различных приложениях величины далеко не всегда подчиняются нормальному закону, то применение классических результатов в таких условиях может приводить к неверным выводам.

В связи с этим вызывает интерес поведение критериев проверки однородности дисперсий (характеристик рассеяния) при определенных отклонениях закона распределения результатов измерений (контролируемого показателя) от нормального. Возможно ли применение какой-то части имеющихся параметрических критериев при определённых нарушениях предположения о нормальности? Каким образом обеспечить возможность корректного применения множества классических критериев в условиях нарушения стандартных предположений?

Пока нет четкого ответа, как соотносятся мощности различных параметрических критериев по отношению к конкретным конкурирующим гипотезам, не ясно, насколько уступают им по мощности непараметрические критерии проверки гипотез о равенстве характеристик рассеяния (параметров масштаба).

Материал данного раздела опирается на работы [84, 36, 85, 16], в которых продолжены исследования устойчивости критериев про­верки гипотез о равенстве дисперсий [88, 31, 91]. Сравниваются классические крите­рии Бартлетта [2], Кокрена [8], Фишера, Хартли [19], Левене [41], рассматрива­ются непараметрические (ранговые) критерии Ансари–Бредли [], Муда [], Сижела–Тьюки [55], Кейпена [6] и Клотца [23].

Цель работ по исследованию параметрических критериев [84, 36, 16] заключалась в следующем. Во-первых, в исследовании распределений статистик перечисленных критериев при законах рас­пре­деления наблю­даемых случайных величин, отличных от нормаль­ного закона. Во-вторых, в сравни­тельном анализе мощности критериев относительно конкретных конкурирую­щих гипотез. В-третьих, в реализации возмож­ности применения классических критериев в условиях нарушения пред­положений о нормальности случайных величин. В-четвертых, в выра­ботке рекомендаций по применению критериев в реальных приложениях.

Перечисленные непараметрические кри­те­рии предназначены для проверки гипотез об однородно­сти параметров масш­таба законов, соответствующих анализируемым выборкам. Как правило, характеристики рассеяния и, следовательно, стандартное отклонение  пропорцио­нальны параметру масштаба за­кона. Поэтому рассматриваемые критерии можно считать непараметрическими аналогами критериев однородности дисперсий. Сравнительному анализу мощности и исследованию распределений статистик непараметрических критериев посвящена работа [85].

Очень важно иметь в виду, что корректность применения непараметрических критериев обусловлена не менее жесткими предположениями. Во-первых, предполагается, что анализируемые выборки принадлежат одному и тому же закону распределения [70]. В противном случае даже при справедливости проверяемой гипотезы  о равенстве дисперсий распределения статистик этих критериев будут отличаться от имеющих место при выполнении данного предположения [85]. Во-вторых, предполагается равенство математических ожиданий [70]. Следовательно, прежде чем применять некоторый непараметрический критерий для проверки гипотезы об однородности дисперсий выборки должны быть соответствующим образом преобразованы.

В критериях проверки однородности дисперсий проверяемая гипотеза о постоянстве дисперсий  выборок имеет вид

, (4.1)

а конкурирующая с ней гипотеза

, (4.2)

где неравенство выполняется, по крайней мере, для одной пары индексов .

При исследовании распределений статистик, построении для этих распре­делений процентных точек и оценке мощности критериев относительно различных конкурирующих гипотез использовались методика статистического мо­делирования [92] и развиваемая на базе [78] программная система ISW (Интер­вальная статистика под Windows) [98]. При этом объем моделируемых выборок ис­следуемых статистик составлял величину . При таких  разность между истинным зако­ном распределения статистики и смоделирован­ным эмпирическим по модулю не превышает величины 10–3.

Исследования распределений статистик проводились при различных наблюдаемых законах, в частности в случае принадлежности моделируемых вы­борок семейству с плотностью

 (4.3)

при различных значениях параметра формы . Это семейство может быть хоро­шей моделью для законов распределения погрешностей различных изме­рительных систем. Распределение  включает в каче­стве частных случаев распределение Лапласа  и нормальное . Семейство (4.3) позволяет задавать различные симметричные законы рас­пределения, в той или иной мере отличающиеся от нормального: чем меньше значение параметра формы , тем «тяжелее» хвосты распре­деле­ния , чем больше параметр, тем хвосты «легче».

При сравнительном анализе мощности критериев рассматривались следующие конкурирующие гипотезы: ; ; . Таким образом, конкурирующей гипотезе соответствует ситуация, когда  выборка принадлежат закону с некоторым , в то время как одна из выборок, например с номером  имеет некоторую от­личную дисперсию. Проверяемой гипотезе соответствует ситуация .

## 4.1. Критерий Бартлетта

Статистика критерия Бартлетта [67] вычисляется в соответствии с соотношением

, (4.4)

где

;

 – количество выборок;  – объемы выборок; , если математическое ожидание известно, и , если не известно; ;  – оценки выборочных дисперсий. При неизвестном математическом ожидании оценки , , где  – -е наблюдение в -й выборке.

Если гипотеза  верна, все  и вы­борки извлекаются из нормальной генеральной совокуп­ности, то статистика (4.4) приближенно подчиняется -распределению. Если вычисленное значение статистики , то проверяемая гипотеза отклоняется на заданном уровне значимости .

При нормально распределенных результатах измерений распределение статистики (4.4) практически не зависит от изменения объемов выборок [88, 31]. При малых величинах  можно воспользоваться таблицей процентных точек для критерия Бартлетта, приводимой в [67]. Использование этой таблицы несколько затруднительно.

В более удобной таблице **А.7** приложения представлены критические значения статистики критерия Бартлетта, полученные методами статистического моделирования при числе экспериментов 6×106 для числа анализируемых выборок  при равных объемах выборок .

Если при малых объёмах выборок для оценки достигнутого уровня значимости  мы будем использовать предельное -распределение, то о величине погрешности оценки  можно судить по величине отклонения реального распределения статистики  от -распределения в критических точках -распределения, соответствующих значениях , равным 0.9 и 0.95. Оценки отклонения  при равных  приведены в таблице 4.1.

##### Таблица 4.1

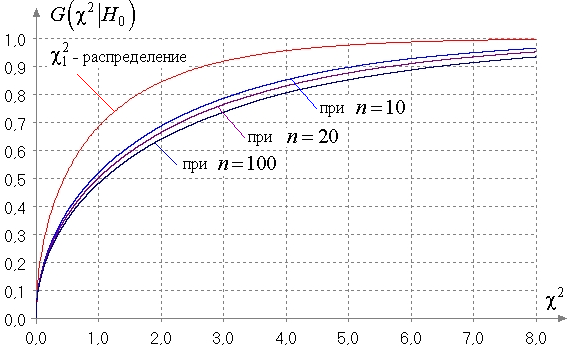
#### Отклонения распределения от -распределения

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  | | | | | |
| 10 | 0.00008 | –0.0015 | –0.0023 | –0.0031 | –0.0032 |
| 20 | 0.00012 | –0.0010 | –0.0013 | –0.0017 | –0.0020 |
| 30 | –0.00015 | –0.0009 | –0.0008 | –0.0012 | –0.0013 |
|  | | | | | |
| 10 | 0.00011 | –0.0012 | –0.0018 | –0.00217 | –0.0022 |
| 20 | 0.00010 | –0.0009 | –0.0013 | –0.0015 | –0.0017 |
| 30 | –0.00007 | –0.0007 | –0.0009 | –0.0011 | –0.0012 |

Сходимость распределений  статистики критерия Бартлетта к -распределениям ухудшается с ростом числа сравниваемых выборок.

То, что асимптотическое распределение статистики критерия известно и его можно использовать при достаточно малых объемах выборок, является серьезным преимуществом критерия Бартлетта.

При отклонении закона распределения наблюдаемого показателя от нормального закона распределение  статистики (4.4) становится *зависящим от объема выборки* и отличным от -распределения. Этот факт иллюстрирует рис. 4.1, на кото­ром показаны распределения статистики при различ­ных объемах двух сравни­ваемых выборок в случае принадлежности их за­кону распределения Лапласа (семейству (4.3) с параметром формы ), а также приведено предельное -распределение статистики (для классиче­ской ситуации с нормальным законом).



*Рис. 4.1.* Функции распределения статистики критерия Бартлетта при различных объемах выборок в случае распределения Лапласа   
при 

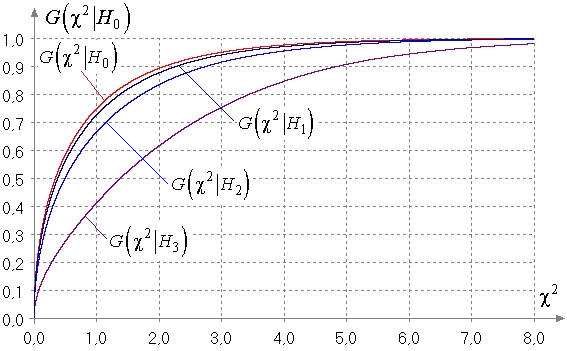
Распределения статистики (4.4) очень чувствительны к отклонениям наблю­даемого закона от нормального. На рис. 4.2 показано, как меняется распределение статистики критерия Бартлетта, если результаты измерений подчиняются семейству распределений (4.3) с различными значениями параметра формы.



*Рис. 4.2.* Функции распределения статистики критерия Бартлетта в случае принадлежности выборок законам семейства (4.3) с различными значениями параметра формы ()

На рис. 4.3 приведены графики распределения статистики (4.4) при справедливости конкурирующих гипотез , ,  в ситуации, когда выборки принадлежат закону распределения семейства (4.3) с параметром формы  с несколько более тяжелыми хвостами, чем у нормального закона.

Отметим, что мощность критерия Бартлетта относительно тех же конкурирующих гипотез при законах отличных от нормального возрастает по сравнению с имеющейся при нормальном законе, если реальный закон, которому соответствуют анализируемые выборки, обладает более лёгкими хвостами, чем нормальный. И наоборот, мощность падает, если у реального закона хвосты более тяжелые. Это замечание справедливо относительно всех параметрических критериев проверки гипотез об однородности дисперсий. Оно справедливо и относительно непараметрических критериев.



*Рис. 4.3.* Распределения  статистики критерия Бартлетта при , в случае принадлежности выборок семейству (4.3) с параметром формы 

## 4.2. Критерий Кокрена

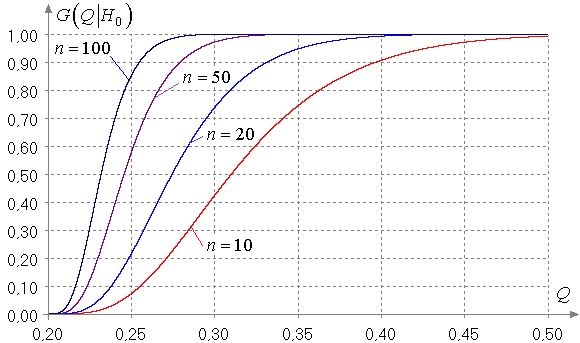
Статистика критерия Кокрена [8] выражается формулой

, (4.5)

где ;  – число независимых оценок дисперсий (число выборок); , – оценки выборочных дисперсий. Проверяемая гипотеза отклоняется при больших значениях статистики.

В [67] критерий Кокрена называется более простым и менее мощным по сравнению с критерием Бартлетта. Второе не соответствует действительности: при выполнении стандартного предположения о нормальности при  эти критерии по мощности эквивалентны, а при  преимущество в мощности за критерием Кокрена.

Распределения статистики Кокрена сильно зависят от объемов наблюдаемых выборок (рис. 4.4) и их числа (рис. 4.5).

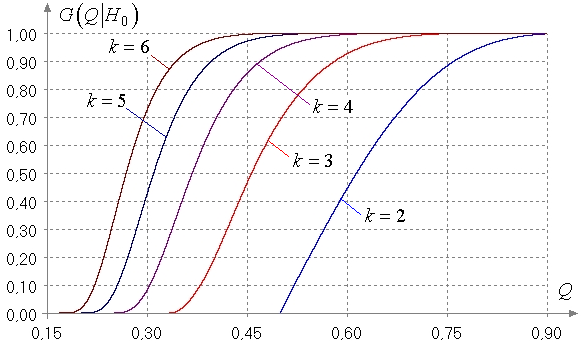


*Рис. 4.4.* Функции распределения статистики критерия Кокрена   
при равных объемах выборок  в случае 

Аналитический вид распределений статистики неизвестен. В справочной литературе можно найти только таблицы процентных точек для ситуации равных объёмов сравниваемых выборок  [67], которые и используются при проверке гипотез.

Встречающиеся в литературе указания о применимости критерия Кокрена только при условии равенства всех  связаны лишь с отсутствием соответствующих таблиц процентных точек. Других возражений против применения критерия при неравных  нет. Возможность применения упирается лишь в наличие соответствующего программного обеспечения.

Критические значения статистики критерия Кокрена, полученные нами методами статистического моделирования при числе экспериментов 2×106 для числа анализируемых выборок  при равных объемах выборок , представлены в таблице **А.8** приложения.



*Рис. 4.5.* Зависимость функций распределения статистики критерия   
Кокрена от числа сравниваемых выборок  при 

Характер зависимости распределений  статистики (4.5) критерия Кокрена при справедливости проверяемой гипотезы  от закона распределения наблюдаемых выборок аналогичен зависимости для критерия Бартлетта [88].

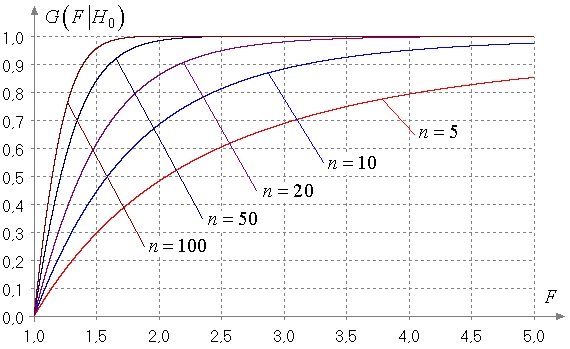
## 4.3. Критерий Хартли

Статистика критерия Хартли [19], применяемого для проверки гипотезы об однородности дисперсий, имеет вид

, (4.6)

где ; ;  – число независимых оценок дисперсий (число выборок);  – оценки выборочных дисперсий. Проверяемая гипотеза отклоняется при больших зна­чениях статистики.

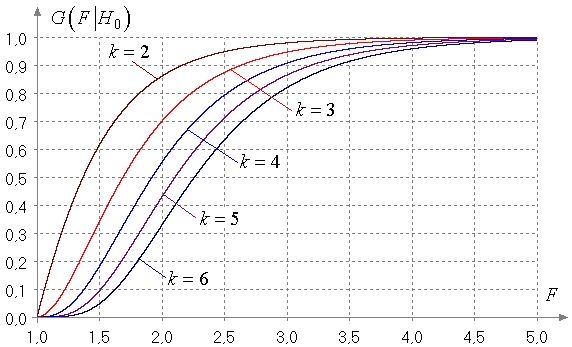
Распределения статистики сущест­венно зави­сят от числа сравниваемых выборок  и их объемов . Зависимость распределения  статистики (4.6) от объемов сравниваемых выборок  иллюстрирует рис. 4.6, а от числа  анализируемых выборок – рис. 4.7.



*Рис. 4.6.* Функции распределения статистики критерия Хартли   
при равных объемах выборок  в случае 

В литературных источниках для статистики (4.6) приводятся лишь ограниченные таблицы процентных точек, как правило, при равных объемах анализируемых выборок. Именно с этим связано часто встречаемое упоминание о возможности применения критерия Хартли только в случае выборок равного объема. Такое ограничение вызвано лишь отсутствием таблиц критических значений для произвольных (не равных) объёмов выборок.

Полученные с использованием методов статистического моделирования при числе экспериментов 2×106 критические значения статистики критерия Хартли для числа анализируемых выборок  при равных объемах выборок  представлены в таблице **А.13** приложения.



*Рис. 4.7.* Зависимость функций распределения статистики критерия Хартли от числа сравниваемых выборок при 

Характер зависимости распределений  статистики (4.6) критерия Хартли при справедливости проверяемой гипотезы  от закона распределения наблюдаемых выборок аналогичен зависимостям для критериев Бартлетта и Кокрена.

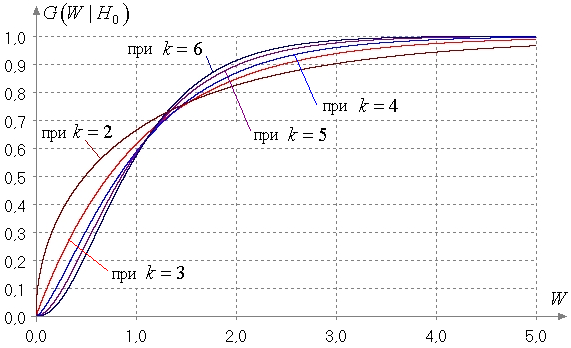
## 4.4. Критерий Левене

Статистика критерия Левене [41] имеет вид

, (4.7)

где  – количество выборок;  − объем -й выборки; ;   
 –-е наблю­дение в -й выборке; , в котором  − среднее в -й вы­борке;  − среднее  по -й выборке;   
 − среднее  по всем выборкам. Проверяемая гипотеза отклоняется при больших значениях статистики.

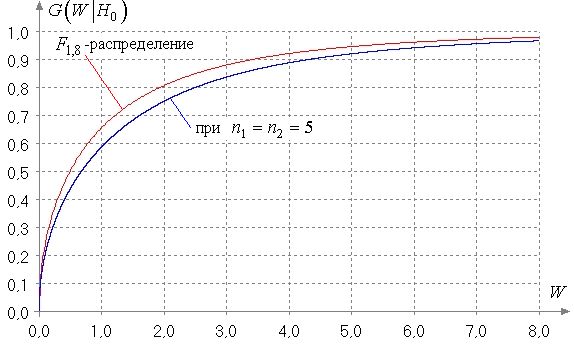
Зависимость от числа анализируемых выборок демонстрирует рис. 4.8, на котором приведены распределения статистики при равных объёмах выборок , .



*Рис. 4.8.* Зависимость функций распределения статистики   
критерия Левене от числа выборок при 

В многочисленных описаниях критерия, например [42], говорится, что в случае принадлежности выборок нормальному закону и спра­ведли­вости  эта статистика подчинятся -распределению Фишера с числом степеней сво­боды  и . На самом деле при объемах выборок в 10…20 элементов *распределения статистики*  *существенно отличаются от -распределения*, и это надо иметь в виду при использовании критерия (см. рис. 4.9).

То, что распределение статистики (4.7) не является -распределением Фишера, очевидно из определения вели­чин , которые в любом случае не принадлежат нормальному закону, а следовательно, (4.7) не может подчиняться - распре­делению. В этой связи процентные точки распределения исследовались ме­тодами статис­тического моделирования [48].



*Рис. 4.9.* Функция распределения статистики критерия Левене при  и соответствующее -распределение Фишера

В то же время, как показали наши исследования, уже при объемах выборок  максимальное отклонение распределения статистики от -распределения Фишера при  не превышает величины 0.005 (в случае принад­лежности анализируемых выборок нор­маль­ному закону). Для  отклонением  от -распределения можно пренебречь при . Заметим, что использование -распределения для оценки достигнутого уровня значимости  занижает эту оценку по сравнению с реальным его значением.

Критические значения статистики критерия Левене для числа анализируемых выборок  при равных объемах выборок , построенные с использованием методов статистического моделирования при числе экспериментов 2×106, представлены в таблице **А.14** приложения.

Поведение условного распределения  статистики крите­рия Левене при справедливости проверяемой гипотезы  в зависимости от вида закона распределения, соответствующего наблюдаемым выборкам, иллюстрирует рис. 4.10. Очевидно, что критерий Левене менее чувствителен к отклонениям анализируемых выборок от нормального закона (сравните рис. 4.2 и 4.10).

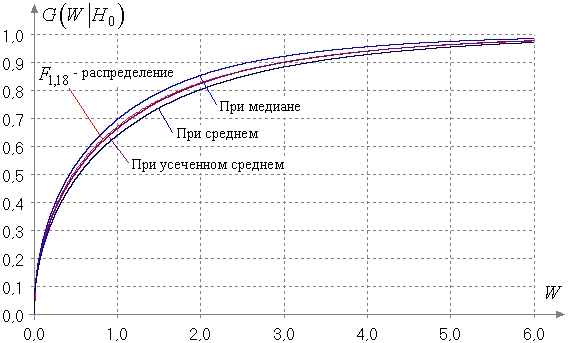


*Рис. 4.10.* Функции распределения статистики критерия Левене   
в случае распределений семейства (4.3) с различными значениями   
параметра формы ()

В оригинальном критерии Левене предусмотрено использование только выборочных средних. В работе [5] предложено в статистике вида (4.7) вместо оценок среднего использовать выборочные медиану и усеченное среднее (, где  − медиана в -й выборке; , где  − усеченное среднее в -й выборке). Считается, что в этих случаях критерий становится еще устойчивей к нарушению предположений о нор­мальности.

Как это обычно бывает, используемый метод оценивания влияет на распределение статистики. В случае использования медианы распределение статистики (4.7) при выполнении предположений о нормальности существенно отличается от распределения статистики при использовании обычного среднего, но меньше отличается от -распределения Фишера.

Рис. 4.11 показывает, как в случае  выборок объемом , принадлежащих нормальному закону, изменяется распреде­ление статистики (4.7) в зависимости от того, используется ли оценка среднего, или оценка усеченного среднего, или оценка медианы. Там же приведено соответствующее -распределение Фишера.

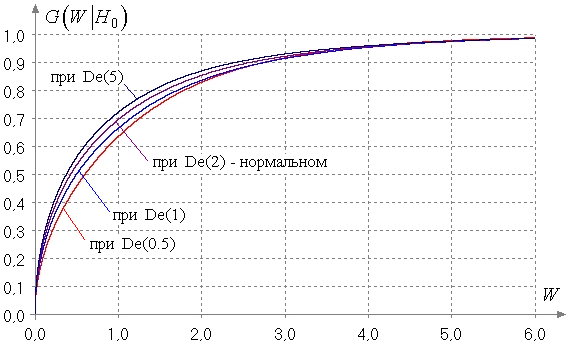


*Рис. 4.11.* Функции распределения статистики критерия Левене   
в случае принадлежности выборок нормальному закону при и -распределение Фишера

В данном случае при оценивании усеченного среднего отбрасывалось по два крайних наблюдения слева и справа. Карти­на, представленная на рис. 4.11, подчеркивает, что при ограниченных объемах выборок необходимо учитывать различие в распределениях статистики, связанное с различием используемых оценок. Можно отметить, что при использовании усеченного среднего распределение статистики оказалось наиболее близким -распределению Фишера

Становится ли критерий более устойчивым в случае использования оценки медианы? В какой-то степени, да. Однако характер поведения распределений статистики кардинально изменился, и это также следует учитывать.

Например, рис. 4.12 иллюстрирует изменение распределений  статистики критерия Левене при справедливости проверяемой гипотезы  в зависимости от вида закона распределения, соответствующего наблюдаемым выборкам, при использовании оценки медианы (сравните с рис. 4.10).



*Рис. 4.12.* Распределения статистики критерия Левене при использовании медианы в случае принадлежности выборок законам семейства (4.3) с различными значениями параметра формы ()

При выполнении стандартного предположения о нормальности или при законах с более лёгкими хвостами по сравнению с нормальным законом критерий Левене заметно уступает в мощности критериям Бартлетта, Кокрена, Хартли и ряда другим, а выигрывает при законах с тяжёлыми хвостами.

Вопросы мощности и поведения модификаций критерия Левене, в том числе в случае нарушения предположений о нормальности, рассматривались в [20, 64].

## 4.5. Критерий Фишера

Критерий Фишера используется для проверки гипотезы о равенстве дисперсий *двух* выборок случайных величин. Статистика критерия имеет простой вид

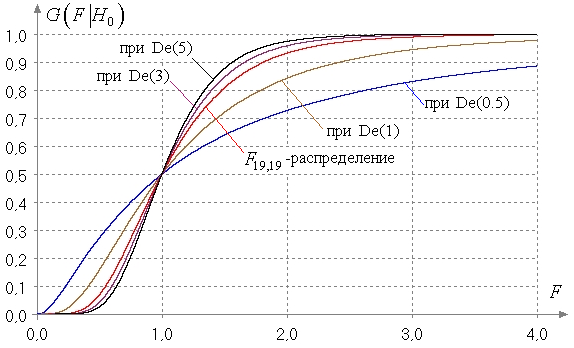
, (4.8)

где  и  – несмещенные оценки дисперсий, вычисленные по выбор­кам.

В отличие от критериев, рассмотренных выше, распределение статистики критерия Фишера при выполнении стандартного предположения известно точно. В случае принадлежности выборок нормальному закону и справедливости  эта статистика подчиняется -распределению Фишера с числом степеней свободы  и , где  и  – объ­емы сравниваемых выборок. Проверяемая гипотеза отклоняется при малых  или больших  значениях статистики.

Как и остальные, критерий Фишера очень чувствителен к отклонениям от нормальности. На рис. 4.13 показаны распределения статистики критерия Фишера при справедливости проверяемой гипотезы  в случае принадлежности законам семейства распределений (4.3). На рисунке приведена также функция -распределения, которому принадлежит статистика при нормальном законе и объёмах сравниваемых выборок .

Критерий применяется только при анализе двух выбок и в этих условиях по мощности эквивалентен критериям Бартлетта, Кокрена, Хартли, Неймана–Пирсона и Z-критерию Оверолла–Вудворда.

**

*Рис. 4.13.* Распределения статистики критерия Фишера в случае принадлежности выборок законам семейства (4.3) с различными значениями параметра формы ()

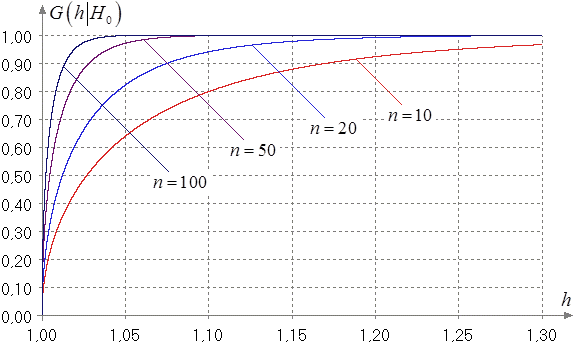
## 4.6. Критерий Неймана-Пирсона

Статистика критерия Неймана–Пирсона (критерия отношения правдоподобия) [72] определяется отношением арифметического среднего всех оценок дисперсий  к их геометрическому среднему:

, (4.9)

где  – количество выборок,  – оценки выборочных дисперсий, – выборочное среднее значение,  – -й элемент -й выборки. Обычно предполагается, что . Критерий правосторонний. Проверяемая гипотеза  отклоняется при больших значениях статистики (4.9), когда .

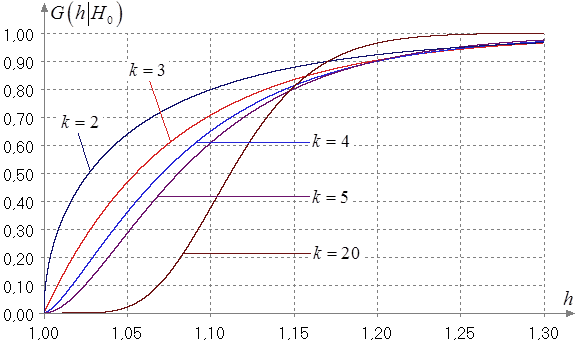
Распределения статистики (4.9) зависят от объёма  и от числа анализируемых выборок . Рис. 4.14 иллюстрирует зависимость распределения статистики (4.8) от объёма выборок при , а рис. 4.15 – от количества выборок .



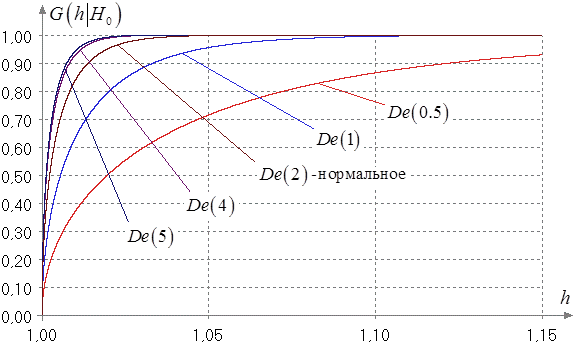
*Рис. 4.14.* Зависимость распределения статистики критерия   
Неймана-Пирсона от объема выборки (при, **)

Уточненные значения процентных точек (при выполнении стандартного предположения о нормальности) приведены в таблице **А.15** приложения.

Критерий Неймана–Пирсона крайне чувствителен к отклонениям от предположения о нормальности. Рис. 4.16 на примере семейства (4.3) демонстри­рует характер зависимости распределений  статистик (4.9) от вида закона (при различных значениях параметра формы  семейства (4.3)), которым принад­лежат анализируемые выборки при справедливости  (при  и ).



*Рис. 4.15.* Зависимость распределения статистики критерия   
Неймана-Пирсона от числа выборок (при )



*Рис. 4.16.* Зависимость распределения статистики (4.9) критерия   
Неймана-Пирсона от вида закона (при , )

Естественно, что критерий со статистикой (4.9) может использоваться и при неравных , однако следует учитывать, что в этом случае распределения статистик при справедливости  будут отличаться от распределений, имеющих место при равных .

## 4.7. Критерий О`Брайена.

При формировании статистики критерия [58] каждый -й элемент -й выборки  преобразуется в соответствии с формулой

, (4.10)

где  – объём, – среднее значение,  – оценка дисперсии -й выборки.

Статистика критерия имеет вид

, (4.11)

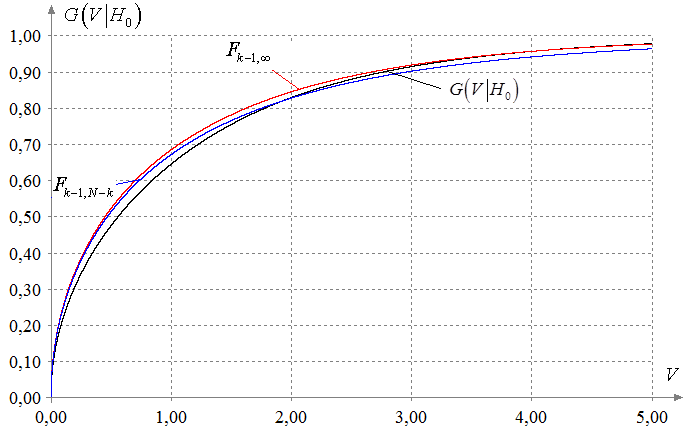
где , , .

Критерий правосторонний, и проверяемая гипотеза  отклоняется при больших значениях статистики (4.11).

Предельным распределением статистики критерия О’Брайена при справедливости  является -распределение Фишера с  и  степенями свободы [58]. Однако проведенные исследования показывают, что распределение статистики (4.11) критерия О’Брайена достаточно медленно сходится к соответствующему распределению Фишера. Например, в случае  отличием реального распределения  статистики (4.11) от соответствующего -распределения Фишера можно пренебречь лишь при . При малых объёмах выборок существенное отличие распределения статистики  от -распределения Фишера наблюдается при больших значениях , поэтому использование процентных точек -распределения приводит к увеличению вероятности  ошибок второго рода (вследствие уменьшения уровня значимости по сравнению с заданным ).

Чтобы обеспечить возможность корректного применения критерия и при малых объемах выборок, в таблице **А.16** приложения приведены полученные верхние процентные точки распределений статистики критерия О’Брайена при различном количестве  сравниваемых выборок для .

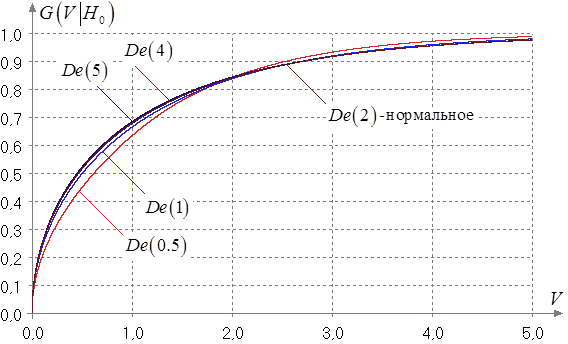
Исследования также показали, что при  распределения  при значениях статистики  таких, что , оказываются ближе к -распределению, чем к -распределению Фишера (см. рис. 4.17).



*Рис. 4.17.* Функция распределения статистики критерия О’Брайена   
при , , 

Поэтому в таких ситуациях корректность выводов можно повысить, используя -распределение для оценки достигнутого уровня значимости () или выбирая в соответствии с -распределением критические значения .

Картина, представленная на рис. 4.18 показывает, что распределения статистики критерия О’Брайена (как и в случае критерия Левене [36, 84]) достаточно устойчивы к нарушению стандартного предположения о принадлежности выборок нормальному закону. Отклонения в сторону законов с более “лёгкими” чем у нормального закона хвостами практически не влияют на распределение статистики. А при законах с более “тяжелыми” хвостами отклонения от распределений, имеющих место при нормальном законе, не настолько велики, как в случае других параметрических критериев.

**

*Рис. 4.18.* Зависимость распределения статистики критерия О’Брайена   
от вида закона семейства (4.3) (при , )

Подобную же устойчивость к нарушению стандартного предположения о нормальности среди критериев, рассмотренных в данной работе, демонстрирует только модифицированный Z-критерий Оверолла–Вудворда.

## 4.8. Критерий Линка

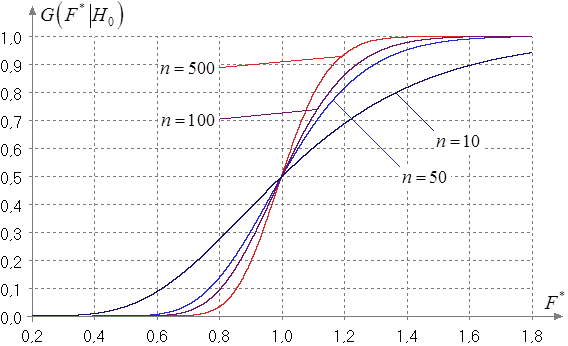
Критерий Линка (критерий отношения размахов) является аналогом критерия Фишера и используется только при анализе 2-х выборок (). Статистика критерия имеет вид [44]:

, (4.12)

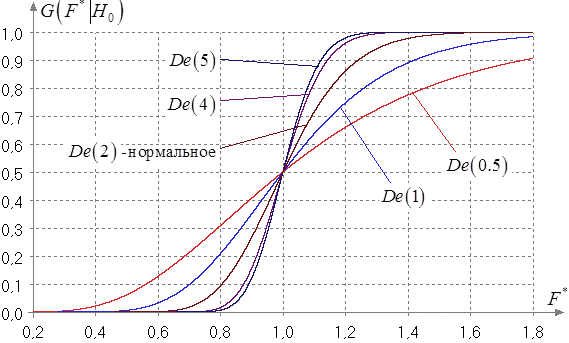
где ,  – размахи, а , , ,  – максимальные и минимальные элементы сравниваемых выборок.

Критерий двусторонний. Проверяемая гипотеза отклоняется с уровнем значимости , если  или , где  и  – верхнее и нижнее критические значения статистики.

Распределение статистики критерия существенно зависит от объемов сравниваемых выборок (рис. 4.19).

*Рис. 4.19.* Зависимость распределения статистики критерия Линка от объема выборок  (при  и нормальном законе)

Критерий Линка крайне чувствителен к любым отклонениям от нормальности. Характер зависимости распределений статистики (4.12) от вида закона (при справедливости ), которым принадлежат выборки, при  демонстрирует рис. 4.20.

*Рис. 4.20*. Зависимость распределения статистики критерия Линка от вида закона семейства (4.3) (при )

Уточненные в ходе исследований нижние и верхние процентные точки для статистики (4.12) критерия отношения размахов в случае принадлежности выборок нормальному закону при  приведены в таблицах **А.17–А.18** приложения.

## 4.9. Критерий Ньюмана

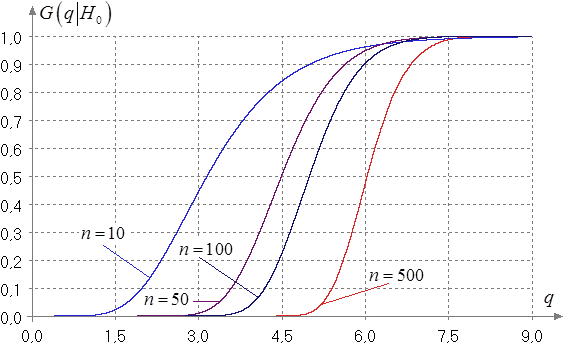
Статистика критерия Ньюмана (стьюдентизированного размаха) имеет вид [49]:

, (4.13)

где ,.

Как и предыдущий, этот критерий также является двусторонним. Проверяемая гипотеза  о равенстве дисперсий отклоняется, если  или , где  и  – нижнее и верхнее критические значения статистики при заданном уровне значимости .

Распределения статистики (4.13) критерия Ньюмана при справедливости  зависят от объёмов анализируемых выборок (см. рис. 4.21).

*Рис. 4.21*. Зависимость распределения статистики критерия Ньюмана  
от объема выборки  (при  и нормальном законе)

Уточненные нижние и верхние критические значения статистики (4.13), выход за которые приводит к отклонению нулевой гипотезы, приведены в таблицах **А.19–А.20** приложения.

Критерий также очень чувствителен к любым отклонениям от нормальности (см. рис. 4.22).

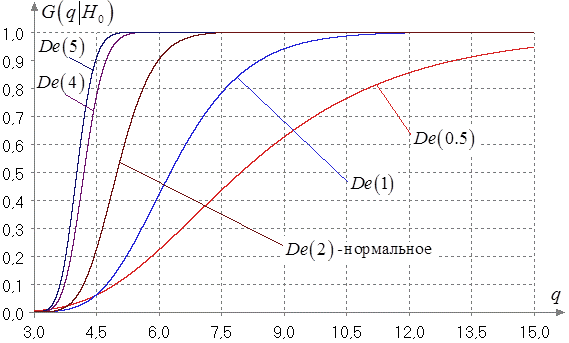
**

Рис. 4.22. Зависимость распределения статистики критерия   
Ньюмана от вида закона семейства (4.3) (при )

## 4.10. Критерий Блиса–Кокрена–Тьюки

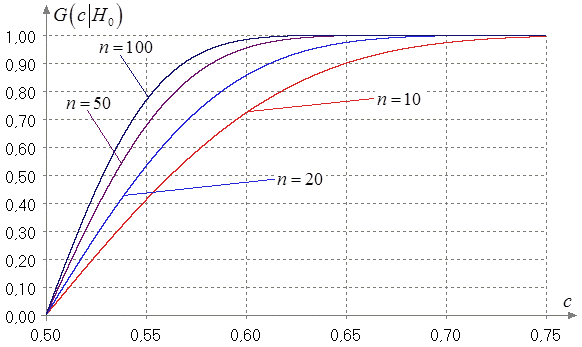
Статистика критерия [4], предложенного в качестве аналога критерия Кокрена, имеет вид

, (4.14)

где  – количество сравниваемых выборок,  – размах -й выборки.

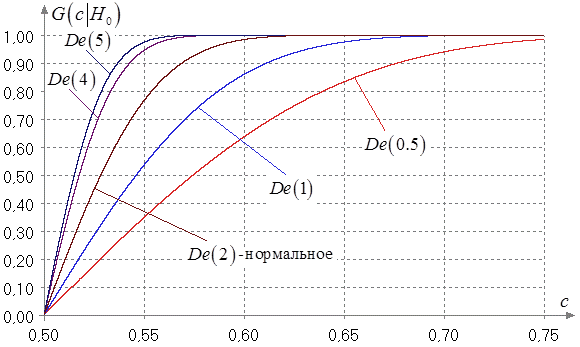
Критерий правосторонний. Если статистика , где  – верхнее критическое значение при заданном уровне значимости , то проверяемая гипотеза  о равенстве дисперсий отклоняется.

Распределение статистики критерия сильно зависит от объема выборок (см. рис. 4.23) и числа сравниваемых выборок.

**  
*Рис. 4.23*. Зависимость распределения статистики критерия Блисса-Кокрена-Тьюки от объема выборки  (при ,  и нормальном законе)

Значения верхних процентных точек для статистики критерия при некоторых объёмах  и числе  сравниваемых выборок и выполнении стандартного предположения о нормальности приведены в таблице **А.21** приложения. Формально критерий Блисса–Кокрена–Тьюки можно применять и при неравных объёмах  анализируемых выборок, однако следует иметь ввиду, что в этом случае критические значения статистики будут отличаться от приведенных в таблице **А.21**.

Как и в случае критерия Кокрена, распределения статистики данного критерия сильно зависят от закона, которому принадлежат анализируемые выборки. На рис. 4.24 демонстрируется зависимость распределений статистики от вида закона в случае принадлежности выборок обобщённому нормальному закону (4.3)  при .



*Рис. 4.24*. Зависимость распределения статистики критерия Блисса–Кокрена-Тьюки от закона семейства (4.3) (при , )

## 4.11. Критерий Кадуэлла–Лесли–Брауна

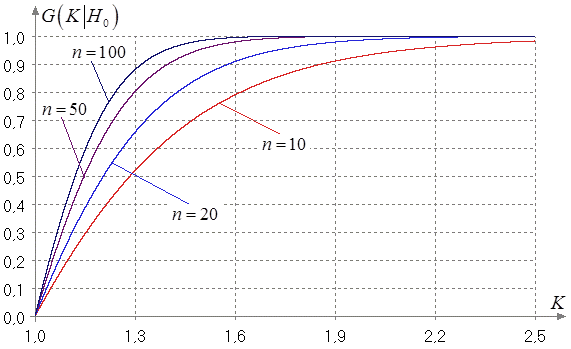
Этот критерий [40] был предложен в качестве аналога критерия Хартли с заменой в статистике отношений оценок дисперсий на отношения размахов

, (4.15)

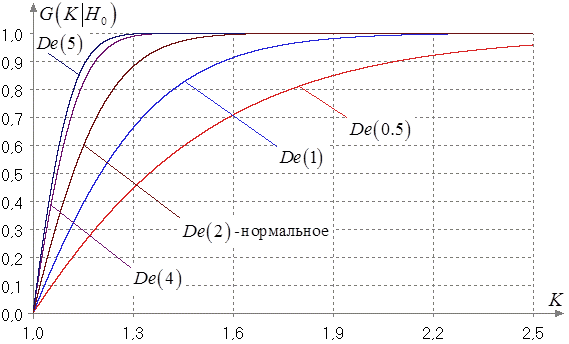
где  – количество выборок,  – размах -й выборки.

Критерий правосторонний. При , где  – верхнее критическое значение статистики при заданном уровне значимости , проверяемая гипотеза  отклоняется.

Распределения статистики критерия Кадуэлла–Лесли–Брауна так же, как и статистики критерия Блисса–Кокрена–Тьюки, существенно зависят и от объема выборок (рис. 4.25), и от закона распределения, которому подчиняются выборки (рис. 4.26).



*Рис. 4.25*. Зависимость распределения статистики критерия Кадуэлла–Лесли–Брауна от объема выборки  (при ,  и нормальном законе)

*Рис. 4.26*. Зависимость распределения статистики критерия Кадуэлла-Лесли-Брауна от вида закона семейства (4.3) (при , )

В таблице **А.22** приложения приведены критические значения  для количества выборок  при равных объемах выборок , , полученные методами статистического моделирования. Формально критерий Кадуэлла–Лесли–Брауна можно применять и при неравных объёмах  анализируемых выборок.

## 4.12. Z–критерий Оверолла–Вудворда

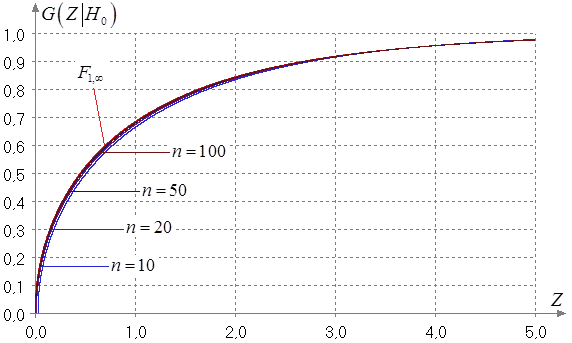
Статистика критерия имеет вид [59]:

, (4.16)

где ,   – количество выборок, ,  – размер -й выборки,  – несмещенная оценка дисперсии -й выборки, ,  – -й элемент -й выборки,  –среднее значение -й выборки.

При справедливости проверяемой гипотезы  об однородности дисперсий и принадлежности анализируемых выборок нормальному закону предельное распределение статистики (4.16) не зависит от размера выборки и подчиняется -распределению Фишера. Однако при малых объемах  распределение статистики Z–критерия Оверолла–Вудворда заметно отличается от предельного-распределения Фишера.

Cходимость распределения статистики Z–критерия к предельному (с ростом объёма выборок ) иллюстрирует рис. 4.27. Проведенные исследования показали, что различием между реальным распределением статистики критерия и предельным -распределением можно пренебречь при объемах выборок . Поэтому (в предположении о принадлежности анализируемых выборок нормальному закону) для объемов выборок  методами статистического моделирования (для разного количества сравниваемых выборок  и для различных  объемов выборок) были вычислены верхние критические значения , представленные в таблице **А.23** приложения.

*Рис. 4.27.* Сходимость распределения статистики (4.15) Z–критерия к предельному (при ,  и нормальном законе)

Распределение статистики (4.16) Z–критерия очень чувствительно к нарушению предположения о нормальности (см. рис. 4.28).

## 4.13. Модифицированный Z–критерий

В целях построения критерия, более устойчивого к нарушению стандартного предположения о нормальности, в [60] предложена модификация Z–критерия, статистика которого отличается вычислением величин :

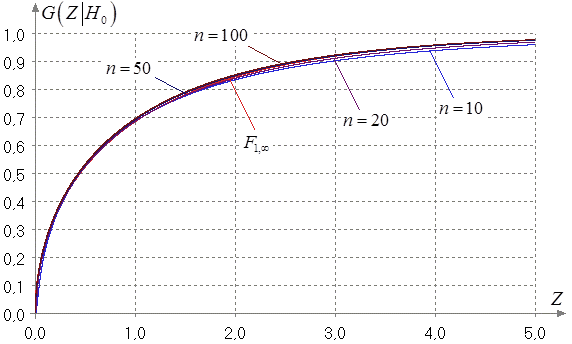
, (4.17)

где  – оценка коэффициента эксцесса -й выборки, .

*Рис. 4.28.* Зависимость распределения статистики (4.16) Z–критерия   
от вида закона семейства (4.3) (при , )

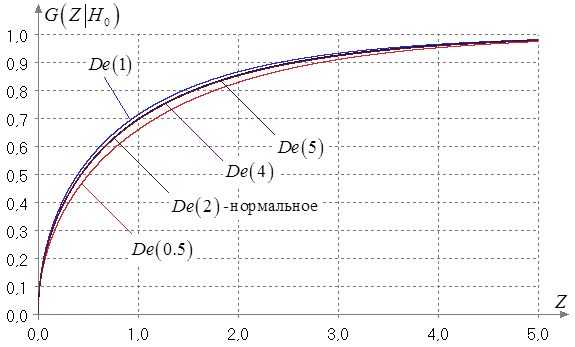
В ходе настоящих исследований было показано, что распределение статистики модифицированного Z–критерия с ростом объема выборок очень медленно сходится к -распределению Фишера. Даже при больших объемах выборок распределение статистики критерия не согласуется с -распределением, хотя в области больших значений статистики отличие её распределения от -распределения не играет существенного значения (см. рис. 4.29).

Для корректного применения критерия при малых объёмах выборок в таблице **А.24** приложения представлены критические значения, полученные с использованием методов статистического моделирования.

*Рис. 4.29.* Сходимость распределения статистики модифицированного Z–критерия к предельному -распределению (при , )

Распределение статистики модифицированного Z–критерия действительно обладает большей стабиль­ностью к нарушению стандартного предположения о нормальности. При симметричности наблюдаемых законов явное отличие распределения модифицированной статистики, от имеющего место при нормальном законе, проявляется лишь при тяжёлых хвостах (см. рис. 4.30). Однако, соотношение (4.17), по-видимому, не обладает необходимой точностью, так как в случае модифицированного Z–критерия нарушается общий для всех параметрических критериев монотонный характер зависимости распределений статистик от степени отклонения наблюдаемого закона от нормального.

Отметим, что борьба за устойчивость привела не только к ухудшению сходимости распределения статистики модифициро­ванного Z–критерия к -распределению, но и к некоторому снижению мощности критерия.

*Рис. 4.30*. Зависимость распределения статистики модифицированного   
Z–критерия от вида закона семейства (4.3) (при )

## 4.14. Критерий Миллера

Миллер [48] предложил критерий однородности дисперсий, базирующийся на -преобразовании Фишера для выборочных дисперсий. Лайард [28] обобщил двухвыборочный критерий Миллера на случай  выборок.

Статистика -выборочного критерия Миллера имеет вид

, (4.18)

где

;

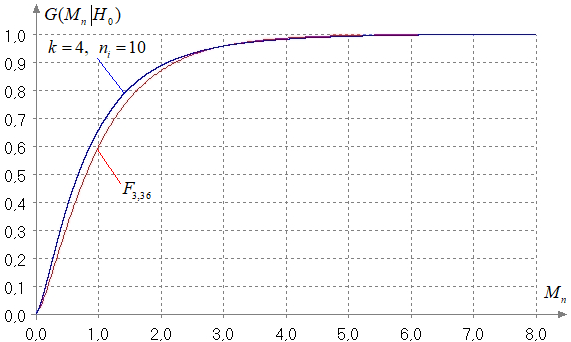
; ;

; ;

; ; .

При справедливости проверяемой гипотезы  об однородности дисперсий и выполнении предположений о принадлежности выборок нормальным законам статистика (4.18) должна подчиняться -распределению Фишера с числами степеней свободы () и (). Проверяемая гипотеза отклоняется при больших значениях статистик.

Отметим, что при малых объёмах выборок распределение  статистики (4.18) Миллера заметно отличается от соответствующего -распределения. На рис. 4.31 показано отклонение реального распределения  от -распределения для  при объёмах сравниваемых выборок . Реально отклонением распределения  статистики от распределения Фишера с () и () степенями свободы можно пренебречь при .



*Рис. 4.31*. Отклонение распределения статистики (4.18) от -распределения

Распределения статистики (4.18) чувствительны к нарушению предположения о нормальности анализируемых выборок.

## 4.15. Критерий Лайарда

Лайард [28] представил критерий со статистикой, в которой используется функция эксцесса нескольких выборок для проверки однородности дисперсий.

Статистика критерия Лайарда определяется выражением

, (4.19)

где

; ; ;

. (4.20)

Здесь – взвешенное среднее коэффициентов эксцесса  выборок.

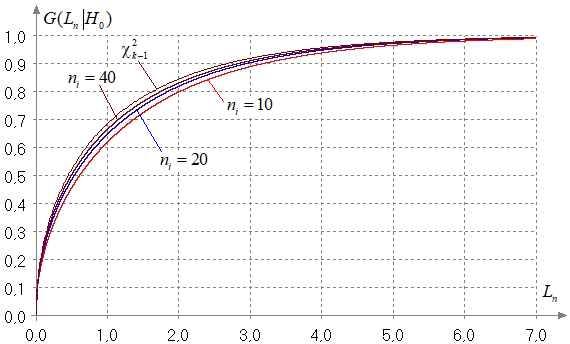
Автор критерия далее предпочёл использовать в статистике (4.19) несколько другую оценку коэффициента эксцесса:

. (4.21)

Проверяемая гипотеза отклоняется при больших значениях статистики (4.19), которая при справедливости проверяемой гипотезы об однородности дисперсий и выполнении предположений о принадлежности выборок нормальным законам асимптотически подчиняется -распределению.

Однако необходимо отметить, что сходимость распределения статистики  к -распределению достаточно медленная. Реально отклонением  от -распределения, например, при  можно пренебречь при  (см. рис. 4.32).

Заметим также, что для вычисления статистики (4.19) предпочтительней использовать оценку (4.21), так как в случае применения оценки (4.20) сходимость  к -распределению несколько хуже.



*Рис. 4.32*. Сходимость распределения статистики (2) к -распределению

По своим асимптотическим свойствам (и мощности) критерий Лайарда очень близок критерию Миллера и несколько превосходит последний по мощности лишь при малых объёмах выборок.

## 4.16. Критерий Ансари–Бредли

Непараметриче­ские аналоги критериев проверки однородности дисперсий предназна­чены для проверки гипотез о принадлежности двух выборок с объемами  и  общей генеральной совокупности с одинаковыми характеристи­ками рассеяния. При этом, как правило, предполагается равенство сред­них.

Статистика критерия Ансари–Бредли [1] может быть вы­числена следующим образом:

, (4.22)

где  – ранги элементов первой выборки в общем вариационном ряду. Проверяемая гипотеза не отклоняется при . Критические значения статистики для  доступны в таблице, при­веденной, например, в [72], а для больших значений  соответствую­щая таблица может быть элементарно расширена методами статистиче­ского моделирования.

В случае принадлежности выборок случайных величин одному и тому же закону распределение  статистики (4.22) при справедливо­сти проверяе­мой гипотезы  не зависит от вида этого закона.

Математическое ожидание и дисперсия статистики (4.22) имеют вид





При объемах выборок  дискретное распределение нормированной статистики

 (4.23)

достаточно хорошо приближается стандартным нормальным законом. В этом случае проверяемая гипотеза не отклоняется при , где  – соответствующая квантиль стандартного нормального закона. Дискретностью распределений статистик (4.22) и (4.23) практически можно пренебречь, начиная с .

На рис. 4.33 приведены графики распределения нормированной статистики  критерия Ансари–Бредли при справедливости различных конкурирующих гипотез  при объемах выборок , принадлежащих семейству распределений (4.3) с параметром формы .



*Рис. 4.33.* Распределения  нормированной статистики критерия Ансари–Бредли [выборки объемом  при-  
надлежат ]

## 4.15. Критерий Муда

Статистика критерия имеет вид [47, 56]

, (4.24)

где  – ранги элементов первой выборки в общем вариационном ряду двух выборок. Проверяемая гипотеза не отклоняется при . Критические значения данной статистики для  доступны в [72], а для больших значений  таблица может быть легко расширена методами статис­тического моделирования.

При  распределение нормированной статистики

, (4.25)

где

,

,

хорошо приближается стандартным нормальным законом [26], а при , как показали исследования, дискретностью распределений ста­тистик (4.24), (4.25) вообще можно пренебречь. При использовании стати­стики (4.25) проверяемая гипотеза не отклоняется при .

На рис. 4.34 представлены распределения нормированной стати­стики (4.25) критерия Муда при справедливости различных конкурирую­щих гипотез  при объемах выборок , принадле­жащих семейству распределений (4.3) с параметром формы . Как можно заметить, проблемы с дискретностью этой статистики существенно меньше, чем со статистикой критерия Ансари–Бредли (см. рис. 4.33).

Критерий показывает мощность несколько выше по сравнению с критерием Ансари–Бредли.

## 4.16. Критерий Сижела–Тьюки

Статистика критерия строится следующим образом [55]. Вариационный ряд, построенный по объединенной выборке, , где , преобразуется в последовательность вида

,

т. е. оставшийся ряд «переворачивается» каждый раз после приписывания рангов паре крайних значений. В качестве статистики критерия используется сумма рангов элементов первой выборки.

Статистика критерия имеет вид

. (4.26)



*Рис. 4.34.* Распределения  статистики нормированного критерия Муда [выборки объемом  принадлежат De(3)]

Проверяемая гипотеза не отклоняется при . Статистика критерия Сижела–Тьюки является аналогом критерия Манна–Уитни, но предназначенным для проверки гипотез об однородности па­раметров масштаба. Поэтому при проверке гипотезы могут использо­ваться квантили распределения статистики Манна–Уитни [72].

При  распределение нормированной статистики

, (4.27)

где

, ,

достаточно хорошо приближается стандартным нормальным законом. В этом случае проверяемая гипотеза не отклоняется при . При этом дискретностью распределения статистики можно практически пренебречь с .

На рис. 4.35 приведены распределения нормированной статистики (4.27) критерия Сижела–Тьюки при справедливости различных конкурирующих гипотез  при объемах выборок , принадлежащих семейству распределений (4.3). Можно заметить, что данная статистика более дискретна по сравнению со статистикой Муда, но менее – по сравнению со статистикой критерия Ансари–Бредли (см. рис. 4.33 и 4.34).



*Рис. 4.35.* Распределения  статистики нормированного критерия Сижела–Тьюки [выборки объемом   
принадлежат De(3)]

По мощности критерний эквивалентен критерию Ансари–Бредли.

## 4.17. Критерий Клотца

Статистика критерия имеет вид [23]

, (4.28)

где  и  – объемы сравниваемых выборок;  – ранг -го элемента первой выборки в общем упорядоченном по возрастанию ряду  значений объединенной выборки;  – -квантиль стандартного нормального распределения. Значения , называемые метками критерия, которые несложно вычислить, приведены, например, в [72].

Гипотеза о равенстве параметров масштаба не отклоняется с достоверностью , если , где критические значения  можно найти в [72].

При  нормализованная статистика

, (4.29)

где

,

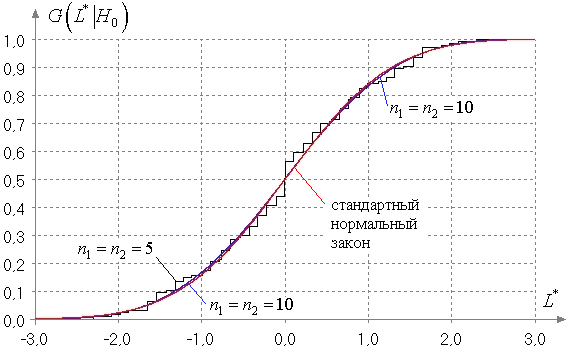


,

хорошо аппроксимируется стандартным нормальным законом. Гипотеза равенства параметров масштаба не отклоняется с достоверностью , если , где  – соответ­ствующая квантиль стандартного нормального закона.

Дискретностью распределений статистик критерия можно пренебречь при  (см. рис. 4.36). При таких же объёмах выборок можно считать несущественным отклонение распределения  статистики (4.25) от аппроксимирующего стандартного нормального закона.

Критерий Клотца демонстрирует мощность, превышающую мощность критерия Муда, который в свою очередь имеет преимущество перед критериями Ансари–Бредли и Сижела–Тьюки.



*Рис. 4.36.* Сходимость распределения  статистики (4.29) к стандартному нормальному закону

Напомним, что корректное применение критерия Клотца, как и других рассмотренных непараметрических критериев, требует выполнения предположения о принадлежности анализируемых выборок одному и тому же виду закона. То есть, при справедливости гипотезы  о равенстве дисперсий распределение статистики (4.29) будет аппроксимироваться стандартным нормальным законом только в том случае, если обе выборки подчиняются или нормальному закону, или равномерному, или любому другому. Предполагается и равенство математических ожиданий.

## 4.18. Критерий Кейпена

Статистика критерия Кейпена [6] задается соотношением

, (4.30)

где  и  – объемы сравниваемых выборок;  – ранг -го элемента первой (меньшей по объёму) выборки в общем упорядо­ченном по возрастанию ряду  значений объединенной выборки. Метки  представляют собой квадрат мате­матического ожидания -й порядковой статистики в выборке объема  из стандартного нормального закона и приближённо определяются соотношением , где  – -квантиль стандартного нормального распределения. Значения  для некоторых  приведены, например, в [].

Гипотеза о равенстве параметров масштаба не отклоняется с достоверностью , если , где критические значения  также можно найти в [72].

При  справедлива нормальная аппроксимация

, (4.31)

где

, .

Гипотеза равенства параметров масштаба не отклоняется с достоверностью , если .

Распределения статистики (4.31) критерия Кейпена, как и критерия Клотца (4.29), с ростом объёмов выборок быстро сходятся к стандартному нормальному закону.

По своим свойствам и мощности критерий эквивалентен критерию Клотца.

## 4.19. k-выборочный критерий Флайне–Киллина

Модифицированный в [11] непараметрический критерий Флайне–Киллина [15] предназначен для проверки однородности дисперсий  выборок с объёмами , . Статистика критерия формируется следующим образом.

По исходным выборкам вычисляются абсолютные значения , где  – выборочная медиана -й выборки, . Далее строится вариационный ряд объединённой выборки , , . Для элементов -й выборки на основании рангов  её элементов  в объединённой выборке строятся метки

, ,

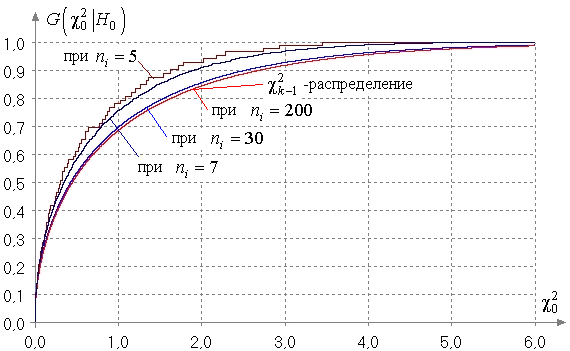
где , находятся . Статистика критерия имеет вид:

, (4.32)

где , .

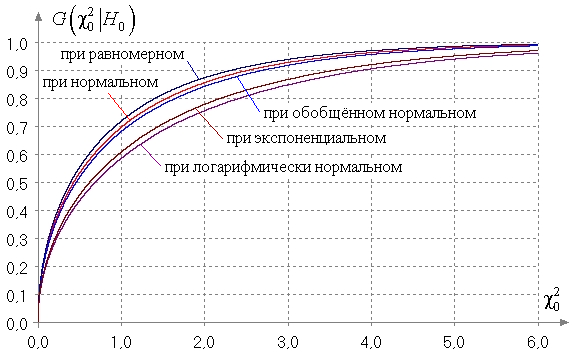
Асимптотическим распределением статистики (4.32) при справедливости  и больших объёмах выборок является -распределение.

При малых объёмах выборок распределение статистики дискретное. Сходимость распределений  статистики (4.32) с ростом объёмов выборок к -распределению в случае принадлежности сравниваемых выборок нормальному закону при  и равных  иллюстрирует рис. 4.36. Отклонением реального распределения статистики от -распределения в ситуации принадлежности выборок нормальному закону можно пренебречь при объёмах анализируемых выборок порядка 100. С ростом числа сравниваемых выборок  сходимость к соответствующему -распределению не улучшается, но и сильно не ухудшается.



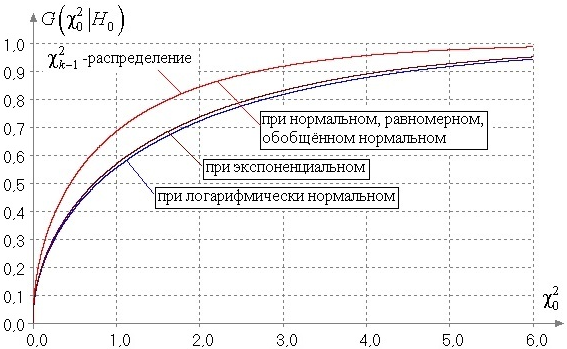
*Рис. 4.36.* Сходимость распределения  статистики (4.32) к   
-распределению при  и 

При ограниченных объёмах выборок распределения  статистики (4.32) зависят от закона, которому принадлежат выборки. В качестве примера на рис. 4.37 показаны распределения  в случае принадлежности обеих сравниваемых выборок законам: равномерному, нормальному, обобщенному нормальному (4.3) с параметром формы 0.5 (с тяжёлыми хвостами), экспоненциальному и логарифмически нормальному при  и .



*Рис. 4.37.* Зависимость распределений  статистики (4.32) от закона, которому принадлежат выборки, при  и 

Исходный критерий Флайне–Киллина [15] был построен в предположении о принадлежности анализируемых выборок симметричным законам. Именно в такой ситуации асимптотическим распределением статистики (4.32) оказывается -распределение. На рис. 4.38 показаны распределения статистики (4.32) в случае принадлежности пары сравниваемых выборок тем же законам, что и на рис. 4.37, но при . Как можно видеть, в случае принадлежности выборок симметричным законам, распределения статистики сходятся к -распределению, а при асимметричных законах – к некоторым другим предельным распределениям, существенно отличающимся от -распределения. Сходимость распределений статистики (4.32) к -распределению при симметричных законах, отличных от нормального, более медленная, чем при нормальном.



*Рис. 4.38.* Распределения  статистики (4.32) при различных законах, которым принадлежат пары сравниваемых выборок, при  и 

Предположение о симметричности закона распределения, которым принадлежат сравниваемые выборки, и которое может не выполняться, а также зависимость распределения статистики при ограниченных объёмах выборок от  и от вида симметричного закона, существенно ограничивают возможность формирования корректного статисти­ческого вывода по результатам проверки гипотезы.

## 4.20. Сравнительный анализ мощности критериев

Критерии проверки гипотез об однородности дисперсий применяются в различных приложениях при обработке результатов измерений.

В связи с критериями однородности дисперсий специалистов давно волнуют две связанные проблемы. Первая заключается в крайней неустойчивости большей части существующих параметрических критериев однородности дисперсий, а вторая касается оценки мощности критериев.

Вопросам анализа мощности среди множества публикаций посвящены работы [27, 11, 43], и эти же вопросы рассматривались в [31, 36, 84, 85, 88, 37].

Качество статистических выводов, осуществляемых по результатам проводимого анализа, обеспечивается корректностью применения соответствующих критериев и использованием критериев, обладающих лучшими свойствами (большей мощностью). Поэтому специалист, столкнувшийся с необходимостью статистического анализа результатов измерений, должен выбирать среди тех критериев, которые способны обеспечить корректность принимаемого решения о результатах проверки гипотезы в условиях предположений, характеризующих анализируемый измерительный процесс. И при этом отдать предпочтение критерию, обладающему в этих условиях большей мощностью.

Стандартным предположением, обуславливающим возможность приме­нения классических параметрических критериев однородности дисперсий, является принадлежность анализируемых выборок нормальному закону рас­пределения. Это условие резко ограничивает область применения парамет­рических критериев, так как делает невозможным использование классических результатов, связанных с распределениями статистик критериев при справед­ливости , которые были получены именно при данном предположении.

На непараметрические аналоги такого рода критериев, в которых по существу проверяется гипотеза о равенстве параметров масштаба, подобного ограничения не накладывается.

В работах [31, 36, 84, 85, 88, 37, 86] был проведен сравнительный анализ мощности и исследованы свойства ряда параметрических (Бартлетта, Кокрена, Фишера, Хартли, Левене) и непараметрических (Ансари–Бредли, Муда, Сижела–Тьюки, Кейпена, Клотца) критериев, в том числе в условиях нарушения стандартных предположений.

Было показано, что при  параметрические критерии Бартлетта, Кокрена, Фишера и Хартли являются эквивалентными, а при  преимущество оказывается за критерием Кокрена. При этом мощность параметрических критериев существенно выше непараметрических аналогов.

Оказалось, что свойство “непараметричности” непараметрических критериев очень ограничено. Да, распределения статистик непараметрических критериев при справедливости  не зависят от вида закона, которому принадлежат анализируемые выборки, но при этом выборки должны принадлежать одному виду закона. Например, это означает, что при справедливости  асимптотическим распределением нормализованных статистик этих критериев будет являться стандартный нормальный закон только в том случае, если выборки принадлежат одному и тому же виду закона (то есть, принадлежат одной генеральной совокупности, так как предполагается и равенство математических ожиданий). Необходимость выполнения такой предпосылки существенно ограничивает область корректного применения непараметрических критериев.

Явное преимущество в мощности параметрических критериев заставляет рассмотреть возможность их применения в условиях нарушения классического предположения о нормальности (в условиях принадлежности выборок различным законам [85, 37, 18]).

Содержание данного раздела руководства расширяет исследования в [36, 84, 85, 37]. Выводы, изложенные в [31, 36, 84, 85, 88, 37, 86], дополнены результатами сравнительного анализа ещё ряда параметрических критериев однородности дисперсий: Неймана–Пирсона [72], О’Брайена [58], Линка (отношения размахов) [44], Ньюмана (стьюдентизированного размаха) [49], Блисса–Кокрена–Тьюки [4], Кадуэлла–Лесли–Брауна [40], Миллера [48, 28], Лайарда [28], Z-критерия Оверолла–Вудворда [59] и модифицированного Z-критерия [60].

Исследование распределений статистик и оценка мощности критериев относительно различных конкурирующих гипотез осуществлялась методами статистического моделирования [92] при использовании программной системы ISW [98]. Число статистических экспериментов при моделировании выборок статистик составляло величину порядка . При таких величинах  разность между истинным законом распределения статистики и смоделированным эмпирическим, как правило, по модулю не превышает величины



В условиях нарушения стандартного предположения о нормальности распределения статистик критериев исследовались в случае принадлежности выборок обобщённому нормальному закону с плотностью (4.3) при различных значениях параметра формы.

В данном случае при анализе мощности критериев проверяемая гипотеза имела вид . В качестве конкурирующих гипотез рассматривались ситуации, когда выборка принадлежала закону с некоторым , а одна из выборок, например, с номером принадлежала закону с отличающимся значением (, , ). В сравнительном анализе кроме вышерассмотренных приняли участие также критерии Бартлетта, Кокрена, Левене, Хартли, Фишера, оценки мощности которых были взяты из [33, 79, 80].



Полученные оценки мощности всех рассматриваемых критериев в случае принадлежности выборок нормальному закону для уровней значимости при и представлены в таблицах 4.2–4.4, где критерии упорядочены по убыванию мощности. В этих же таблицах для сравнения представлены оценки мощности непараметрических критериев Муда, Ансари–Бредли и Сижела–Тьюки [85, 37].



Критерий Неймана–Пирсона и Z–критерий Оверолла–Вудворда по мощности оказались эквивалентны критериям Бартлетта, Кокрена, Хартли и Фишера.

Другую группу практически эквивалентных по мощности критериев образуют критерии Лайарда, Миллера, О’Брайена и модифицированный Z–критерий. Различие в мощности модифицированного Z–критерия и критерия О’Брайена заметно только относительно достаточно далёкой конкурирующей гипотезы . При этом эта группа имеет преимущество в мощности по сравнению с критерием Левене. Считается, что, как и последний, эти критерии достаточно устойчивы к нарушению стандартного предположения о нормальности анализируемых выборок.



Критерий Ньюмана с ростом объёмов выборок всё заметнее уступает в мощности критерию Левене. В то же время он имеет явное преимущество в мощности (за исключением ) по сравнению с критериями Блисса–Кокрена–Тьюки, Кадуэлла–Лесли–Брауна и Линка. Три последних эквивалентны по мощности.



Следует отметить, что критерии О’Брайена, Левене и модифициро­ванный Z–критерий, относящиеся к группе “устойчивых” критериев, при малых объёмах выборок (см. при ) уступают в мощности критериям Ньюмана, Линка, Блисса–Кокрена–Тьюки и Кадуэлла–Лесли–Брауна, но с ростом имеет явное преимущество перед последними, а также перед непараметрическими критериями.



Естественно, что непараметрические критерии существенно уступают в мощности большинству из рассмотренным параметрических критериев.

Это правило нарушают параметрические критерии Ньюмана, Блисса–Кокрена–Тьюки, Кадуэлла–Лесли–Брауна и Линка: они имеют некоторое преимущество в мощности над непараметрическими критериями лишь при малых объёмах выборок (), а при увеличении заметно уступают всем непараметрическим критериям.



Таблица 4.2

**Мощность критериев однородности дисперсий относительно конкурирующей гипотезы**



|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Критерий |  | Объем выборки | | | | |
|  |  |  |  |  |
| Бартлетта, Кокрена, Хартли, Фишера, Неймана–Пирсона,  Z–критерий Оверолла–Вудворда | 0.1 | 0.112 | 0.128 | 0.157 | 0.188 | 0.246 |
| 0.05 | 0.058 | 0.068 | 0.090 | 0.111 | 0.156 |
| 0.01 | 0.012 | 0.016 | 0.023 | 0.032 | 0.051 |
| Лайарда | 0.1 | 0.110 | 0.125 | 0.155 | 0.185 | 0.243 |
| 0.05 | 0.057 | 0.066 | 0.087 | 0.108 | 0.153 |
| 0.01 | 0.012 | 0.015 | 0.022 | 0.030 | 0.049 |
| Миллера | 0.1 | 0.110 | 0.125 | 0.154 | 0.185 | 0.243 |
| 0.05 | 0.056 | 0.066 | 0.087 | 0.109 | 0.153 |
| 0.01 | 0.012 | 0.015 | 0.022 | 0.030 | 0.049 |
| Модифицированный  Z–критерий, О’Брайена | 0.1 | 0.109 | 0.125 | 0.154 | 0.184 | 0.243 |
| 0.05 | 0.056 | 0.066 | 0.087 | 0.108 | 0.153 |
| 0.01 | 0.012 | 0.015 | 0.022 | 0.030 | 0.049 |
| Клотца | 0.1 | 0.109 | 0.123 | 0.151 | 0.181 | 0.236 |
| 0.05 | 0.056 | 0.065 | 0.085 | 0.106 | 0.149 |
| 0.01 | 0.012 | 0.015 | 0.021 | 0.030 | 0.047 |
| Левене | 0.1 | 0.110 | 0.123 | 0.150 | 0.176 | 0.228 |
| 0.05 | 0.056 | 0.065 | 0.084 | 0.103 | 0.141 |
| 0.01 | 0.012 | 0.014 | 0.021 | 0.028 | 0.044 |
| Флайне–Киллина | 0.1 | 0.108 | 0.121 | 0.147 | 0.172 | 0.223 |
| 0.05 | 0.055 | 0.064 | 0.082 | 0.100 | 0.139 |
| 0.01 | 0.012 | 0.014 | 0.020 | 0.027 | 0.043 |
| Муда | 0.1 | 0.108 | 0.120 | 0.143 | 0.166 | 0.212 |
| 0.05 | 0.055 | 0.064 | 0.079 | 0.096 | 0.130 |
| 0.01 | 0.012 | 0.014 | 0.020 | 0.026 | 0.040 |
| Ньюмана | 0.1 | 0.111 | 0.123 | 0.143 | 0.159 | 0.186 |
| 0.05 | 0.057 | 0.066 | 0.080 | 0.091 | 0.112 |
| 0.01 | 0.012 | 0.015 | 0.020 | 0.025 | 0.033 |
| Ансари–Бредли | 0.1 | 0.109 | 0.125 | 0.138 | 0.154 | 0.190 |
| 0.05 | 0.056 | 0.064 | 0.074 | 0.089 | 0.114 |
| 0.01 | 0.016 | 0.014 | 0.018 | 0.023 | 0.034 |
| Сижела–Тьюки | 0.1 | 0.107 | 0.120 | 0.137 | 0.154 | 0.190 |
| 0.05 | 0.054 | 0.061 | 0.074 | 0.088 | 0.114 |
| 0.01 | 0.012 | 0.014 | 0.018 | 0.023 | 0.033 |
| Блисса–Кокрена–Тьюки, Кадуэлла–Лесли–Брауна, Линка | 0.1 | 0.111 | 0.119 | 0.133 | 0.141 | 0.154 |
| 0.05 | 0.057 | 0.063 | 0.072 | 0.078 | 0.087 |
| 0.01 | 0.012 | 0.014 | 0.018 | 0.019 | 0.023 |

Таблица4.3

**Мощность критериев однородности дисперсий относительно конкурирующей гипотезы**



|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Критерий |  | Объем выборки | | | | |
|  |  |  |  |  |
| Бартлетта, Кокрена, Хартли, Фишера, Неймана–Пирсона, Z–критерий Оверолла–Вудворда | 0.1 | 0.144 | 0.199 | 0.304 | 0.401 | 0.564 |
| 0.05 | 0.079 | 0.119 | 0.201 | 0.283 | 0.438 |
| 0.01 | 0.018 | 0.033 | 0.071 | 0.114 | 0.218 |
| Лайарда | 0.1 | 0.139 | 0.193 | 0.295 | 0.391 | 0.557 |
| 0.05 | 0.075 | 0.112 | 0.190 | 0.270 | 0.428 |
| 0.01 | 0.017 | 0.030 | 0.062 | 0.104 | 0.205 |
| Миллера | 0.1 | 0.137 | 0.191 | 0.294 | 0.391 | 0.557 |
| 0.05 | 0.074 | 0.112 | 0.191 | 0.271 | 0.429 |
| 0.01 | 0.017 | 0.031 | 0.064 | 0.105 | 0.207 |
| Модифицированный Z–критерий, О’Брайена | 0.1 | 0.134 | 0.188 | 0.292 | 0.389 | 0.555 |
| 0.05 | 0.071 | 0.109 | 0.189 | 0.269 | 0.427 |
| 0.01 | 0.016 | 0.029 | 0.062 | 0.104 | 0.205 |
| Клотца | 0.1 | 0.133 | 0.183 | 0.280 | 0.376 | 0.540 |
| 0.05 | 0.071 | 0.107 | 0.181 | 0.260 | 0.412 |
| 0.01 | 0.017 | 0.029 | 0.060 | 0.101 | 0.196 |
| Левене | 0.1 | 0.135 | 0.184 | 0.276 | 0.363 | 0.515 |
| 0.05 | 0.072 | 0.107 | 0.177 | 0.250 | 0.388 |
| 0.01 | 0.016 | 0.028 | 0.058 | 0.095 | 0.180 |
| Флайне–Киллина | 0.1 | 0.131 | 0.177 | 0.266 | 0.351 | 0.503 |
| 0.05 | 0.070 | 0.103 | 0.170 | 0.239 | 0.376 |
| 0.01 | 0.016 | 0.027 | 0.055 | 0.090 | 0.173 |
| Муда | 0.1 | 0.130 | 0.172 | 0.253 | 0.331 | 0.470 |
| 0.05 | 0.069 | 0.101 | 0.160 | 0.224 | 0.347 |
| 0.01 | 0.016 | 0.027 | 0.052 | 0.082 | 0.155 |
| Ньюмана | 0.1 | 0.140 | 0.183 | 0.251 | 0.304 | 0.386 |
| 0.05 | 0.077 | 0.108 | 0.161 | 0.203 | 0.276 |
| 0.01 | 0.018 | 0.030 | 0.053 | 0.075 | 0.116 |
| Ансари–Бредли | 0.1 | 0.133 | 0.171 | 0.232 | 0.290 | 0.405 |
| 0.05 | 0.072 | 0.096 | 0.140 | 0.193 | 0.289 |
| 0.01 | 0.023 | 0.025 | 0.044 | 0.067 | 0.120 |
| Сижела–Тьюки | 0.1 | 0.128 | 0.166 | 0.228 | 0.290 | 0.405 |
| 0.05 | 0.069 | 0.093 | 0.140 | 0.191 | 0.290 |
| 0.01 | 0.017 | 0.026 | 0.044 | 0.067 | 0.120 |
| Блисса–Кокрена–Тьюки, Кадуэлла–Лесли–Брауна, Линка | 0.1 | 0.139 | 0.171 | 0.216 | 0.246 | 0.289 |
| 0.05 | 0.075 | 0.100 | 0.133 | 0.156 | 0.190 |
| 0.01 | 0.018 | 0.027 | 0.042 | 0.051 | 0.068 |

Таблица 4.4

**Мощность критериев однородности дисперсий относительно конкурирующей гипотезы**



|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Критерий |  | Объем выборки | | | | |
|  |  |  |  |  |
| Бартлетта, Кокрена, Хартли, Фишера, Неймана–Пирсона,  Z–критерий Оверолла–Вудворда | 0.1 | 0.312 | 0.532 | 0.806 | 0.926 | 0.991 |
| 0.05 | 0.201 | 0.402 | 0.705 | 0.871 | 0.980 |
| 0.01 | 0.064 | 0.182 | 0.463 | 0.692 | 0.924 |
| Лайарда | 0.1 | 0.289 | 0.503 | 0.787 | 0.918 | 0.990 |
| 0.05 | 0.179 | 0.364 | 0.672 | 0.852 | 0.977 |
| 0.01 | 0.053 | 0.149 | 0.399 | 0.641 | 0.906 |
| Миллера | 0.1 | 0.281 | 0.500 | 0.786 | 0.918 | 0.990 |
| 0.05 | 0.174 | 0.364 | 0.675 | 0.853 | 0.977 |
| 0.01 | 0.051 | 0.153 | 0.411 | 0.648 | 0.910 |
| О’Брайена | 0.1 | 0.266 | 0.490 | 0.783 | 0.917 | 0.990 |
| 0.05 | 0.155 | 0.344 | 0.664 | 0.849 | 0.976 |
| 0.01 | 0.039 | 0.127 | 0.379 | 0.628 | 0.903 |
| Модифицированный Z–критерий | 0.1 | 0.265 | 0.489 | 0.781 | 0.916 | 0.990 |
| 0.05 | 0.158 | 0.348 | 0.666 | 0.849 | 0.976 |
| 0.01 | 0.043 | 0.138 | 0.397 | 0.639 | 0.906 |
| Клотца | 0.1 | 0.258 | 0.463 | 0.754 | 0.900 | 0.987 |
| 0.05 | 0.158 | 0.334 | 0.638 | 0.829 | 0.971 |
| 0.01 | 0.047 | 0.137 | 0.379 | 0.619 | 0.892 |
| Левене | 0.1 | 0.269 | 0.471 | 0.746 | 0.888 | 0.981 |
| 0.05 | 0.163 | 0.338 | 0.628 | 0.812 | 0.960 |
| 0.01 | 0.045 | 0.131 | 0.364 | 0.590 | 0.866 |
| Флайне–Киллина | 0.1 | 0.249 | 0.442 | 0.719 | 0.870 | 0.977 |
| 0.05 | 0.151 | 0.315 | 0.597 | 0.787 | 0.952 |
| 0.01 | 0.043 | 0.125 | 0.341 | 0.559 | 0.847 |
| Муда | 0.1 | 0.243 | 0.424 | 0.688 | 0.842 | 0.964 |
| 0.05 | 0.149 | 0.303 | 0.565 | 0.752 | 0.932 |
| 0.01 | 0.045 | 0.122 | 0.316 | 0.516 | 0.806 |
| Ньюмана | 0.1 | 0.296 | 0.473 | 0.682 | 0.796 | 0.901 |
| 0.05 | 0.190 | 0.348 | 0.566 | 0.699 | 0.840 |
| 0.01 | 0.060 | 0.153 | 0.326 | 0.473 | 0.667 |
| Ансари–Бредли | 0.1 | 0.242 | 0.392 | 0.616 | 0.768 | 0.926 |
| 0.05 | 0.150 | 0.268 | 0.483 | 0.663 | 0.870 |
| 0.01 | 0.059 | 0.103 | 0.253 | 0.417 | 0.694 |
| Сижела–Тьюки | 0.1 | 0.231 | 0.384 | 0.613 | 0.768 | 0.926 |
| 0.05 | 0.142 | 0.262 | 0.484 | 0.661 | 0.869 |
| 0.01 | 0.046 | 0.106 | 0.254 | 0.416 | 0.693 |
| Блисса–Кокрена–Тьюки, Кадуэлла–Лесли–Брауна, Линка | 0.1 | 0.285 | 0.425 | 0.584 | 0.674 | 0.776 |
| 0.05 | 0.181 | 0.305 | 0.458 | 0.554 | 0.671 |
| 0.01 | 0.057 | 0.127 | 0.237 | 0.314 | 0.430 |

В группе непараметрических критериев результаты анализа показывают заметное преимущество в мощности критерия Клотца. Затем следует критерий Муда. Ещё меньшую мощность и практическую эквивалентность демонстрируют критерии Ансари–Бредли и Сижела–Тьюки. Некоторый «разнобой» в данных таблицах относительно мощности критериев Муда, Ансари–Бредли и Сижела–Тьюки при объемах выборок и объясняется различной степенью дис­кретности распределений статистик этих критериев.



Критерии Бартлетта, Кокрена, Хартли, Левене, Неймана–Пирсона, Лаарда, Миллера, О’Брайена, Блисса–Кокрена–Тьюки, Кадуэлла–Лесли–Брауна, Z–критерий Оверолла–Вудворда, модифицированный Z–критерий могут применяться при числе выборок . При критерии Бартлетта, Кокрена, Хартли, Неймана–Пирсона и Z–критерий Оверолла–Вудворда уже не образуют группу эквивалентных критериев с одинаковой мощностью. Исключение составляют лишь критерии Бартлетта и Неймана–Пирсона, которые остаются практически эквивалентными по мощности.



В таблицах 4.5–4.7 приведены полученные оценки мощности многовыборочных критериев при числе выборок и при объёмах выборок , , относительно конкурирующих гипотез , , (при отличающейся дисперсии одной из выборок) в случае принадлежности анализируемых выборок нормальным законам. Критерии в таблицах расположены по убыванию мощности. Приводимые оценки мощности позволяют судить о предпочтительности применения тех или иных критериев.



На первой позиции с явным преимуществом, как и было показано в [36, 84], находится критерий Кокрена. На второй оказывается критерий О’Брайена, однако в случае анализа 3-х выборок и близких конкурирующих гипотез он не имеет заметного преимущества по сравнению с Z–критерием Оверолла–Вудворда, Неймана-Пирсона и Бартлетта. В то же время критерий О’Брайена явно мощнее модифицированного Z–критерия и критерия Левене, также являющихся устойчивыми к нарушению стандартного предположения о нормальности.

-выборочные критерии Лайард и Миллера меняются местами, оставаясь примерно на тех же позициях в общем упорядоченном ряду критериев. С увеличением расстояний между конкурирующими гипотезами критерий Блисса–Кокрена–Тьюки демонстрирует более высокую мощность по сравнению с критерием Кадуэлла–Лесли–Брауна.

Таблица 4.5

**Мощность многовыборочных критериев относительно конкурирующей гипотезы , ,**



|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Критерий |  | | | | | |
| 0.1 | 0.05 | 0.01 | 0.1 | 0.05 | 0.01 |
|  | | |  | | |
| Кокрена | 0.250 | 0.161 | 0.056 | 0.241 | 0.156 | 0.056 |
| О’Брайена | 0.243 | 0.153 | 0.051 | 0.230 | 0.144 | 0.048 |
| Z–критерий Оверолла–Вудворда | 0.243 | 0.153 | 0.051 | 0.227 | 0.141 | 0.046 |
| Неймана–Пирсона, Бартлетта | 0.242 | 0.152 | 0.049 | 0.224 | 0.138 | 0.044 |
| Модифицированный Z–критерий | 0.240 | 0.150 | 0.048 | 0.223 | 0.137 | 0.044 |
| Хартли | 0.239 | 0.148 | 0.046 | 0.219 | 0.133 | 0.040 |
| Миллера | 0.237 | 0.146 | 0.045 | 0.216 | 0.129 | 0.038 |
| Лайарда | 0.236 | 0.146 | 0.044 | 0.215 | 0.128 | 0.037 |
| Левене | 0.225 | 0.139 | 0.043 | 0.209 | 0.127 | 0.039 |
| Флайне–Киллина | 0.222 | 0.137 | 0.042 | 0.206 | 0.124 | 0.038 |
| Кадуэлла–Лесли–Брауна | 0.149 | 0.083 | 0.021 | 0.139 | 0.075 | 0.018 |
| Блисса–Кокрена–Тьюки | 0.147 | 0.082 | 0.021 | 0.136 | 0.075 | 0.019 |

Таблица 4.6

**Мощность многовыборочных критериев относительно конкурирующей гипотезы , ,**



|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Критерий |  | | | | | |
| 0.1 | 0.05 | 0.01 | 0.1 | 0.05 | 0.01 |
|  | | |  | | |
| Кокрена | 0.609 | 0.494 | 0.286 | 0.624 | 0.515 | 0.316 |
| О’Брайена | 0.583 | 0.461 | 0.247 | 0.575 | 0.460 | 0.258 |
| Z–критерий Оверолла–Вудворда | 0.583 | 0.461 | 0.246 | 0.565 | 0.445 | 0.241 |
| Неймана–Пирсона | 0.580 | 0.457 | 0.240 | 0.557 | 0.434 | 0.228 |
| Бартлетта | 0.577 | 0.459 | 0.237 | 0.557 | 0.434 | 0.227 |
| Модифицированный Z–критерий | 0.574 | 0.449 | 0.232 | 0.554 | 0.433 | 0.228 |
| Хартли | 0.568 | 0.443 | 0.217 | 0.545 | 0.418 | 0.204 |
| Миллера | 0.565 | 0.436 | 0.213 | 0.530 | 0.400 | 0.189 |
| Лайарда | 0.564 | 0.433 | 0.207 | 0.527 | 0.395 | 0.181 |
| Левене | 0.530 | 0.409 | 0.200 | 0.513 | 0.390 | 0.197 |
| Флайне–Киллина | 0.518 | 0.395 | 0.191 | 0.498 | 0.378 | 0.187 |
| Блисса–Кокрена–Тьюки | 0.359 | 0.187 | 0.068 | 0.262 | 0.170 | 0.061 |
| Кадуэлла–Лесли–Брауна | 0.280 | 0.180 | 0.061 | 0.253 | 0.158 | 0.052 |

Таблица 4.7

**Мощность многовыборочных критериев относительно конкурирующей гипотезы , ,**



|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Критерий |  | | | | | |
| 0.1 | 0.05 | 0.01 | 0.1 | 0.05 | 0.01 |
|  | | |  | | |
| Кокрена | 0.997 | 0.994 | 0.974 | 0.998 | 0.997 | 0.987 |
| О’Брайена | 0.996 | 0.990 | 0.961 | 0.997 | 0.994 | 0.976 |
| Z–критерий Оверолла–Вудворда | 0.996 | 0.991 | 0.964 | 0.997 | 0.993 | 0.974 |
| Неймана–Пирсона, Бартлетта | 0.996 | 0.990 | 0.962 | 0.996 | 0.992 | 0.970 |
| Модифицированный Z–критерий | 0.995 | 0.989 | 0.955 | 0.996 | 0.991 | 0.967 |
| Хартли | 0.995 | 0.988 | 0.947 | 0.995 | 0.989 | 0.955 |
| Миллера | 0.995 | 0.987 | 0.946 | 0.994 | 0.987 | 0.949 |
| Лайарда | 0.994 | 0.987 | 0.941 | 0.994 | 0.986 | 0.942 |
| Левене | 0.990 | 0.979 | 0.926 | 0.991 | 0.982 | 0.944 |
| Флайне–Киллина | 0.987 | 0.973 | 0.909 | 0.988 | 0.977 | 0.928 |
| Блисса–Кокрена–Тьюки | 0.820 | 0.728 | 0.501 | 0.829 | 0.742 | 0.524 |
| Кадуэлла–Лесли–Брауна | 0.795 | 0.691 | 0.444 | 0.783 | 0.675 | 0.432 |

В процессе дискуссий, связанных с обсуждением достоинств и недостатков параметрических и непараметрических критериев, можно услышать радикальные мнения, суть которых заключается в рекомендации применять только непараметрические критерии. При этом основной и вполне справедливый довод связывают с тем, что на практике закон распределения, которому подчиняются анализируемые выборки, не известен и, как правило, отличается от нормального. Это действительно так. И если обе выборки принадлежат одной и той же генеральной совокупности, распределения статистик непараметрических критериев не зависят от вида закона.



Однако если при справедливости гипотезы о равенстве дисперсий выборки принадлежат разным законам, мы *наблюдаем зависимость от этих законов*. На рис. 4.39 в качестве примера, подтверждающего этот факт, показаны распре­деления нормированной статистики (4.25) критерия Муда, когда две выборки с одинаковым объемом подчиняются различным парам законов семейства (4.3) при равенстве дисперсий этих законов.



*Рис. 4.39.* Распределения нормированной статистики критерия Муда при справедливости в случае принадлежности пары   
выборок различным законам семейства (4.3)



Как видим, распределение статистики (4.25) зависит и от того, какая по порядку выборка какому закону принадлежит.

Естественно, что для параметрических критериев отмеченная зависимость также характерна, но изменения в такой ситуации, например, распределений статистики критерия Кокрена, на наш взгляд, оказываются несколько меньшими.

## 4.21. Мощность критериев при нарушении предположения о нормальности

В условиях нарушения стандартного предположения о нормаль­ности мощность критериев исследовалась в ситуации принадлежности выборок обобщённому нормальному закону с плотностью (4.3) при различных значениях параметра формы . Напомним, что частными случаями этого семейства являются нормальный закон при и распределение Лапласа при . Чем меньше значение параметра формы , тем «тяжелее» хвосты распределения , чем больше параметр, тем хвосты «легче». Далее в тексте, таблицах и на рисунках обозначение соответствует распределению вида (4.3) при соответствующем значении параметра формы .



Как и ранее, при анализе мощности критериев в качестве конкурирующих гипотез рассматривались ситуации, когда выборка принадлежала закону с некоторым , а одна из выборок, например, с номером принадлежала закону с отличающимся значением (, , ).



В таблицах 4.8–4.10 приведены оценки мощности 2-выборочных критериев относительно конкурирующих гипотез и , полученные в случае принад­лежности выборок обобщенному нормальному закону (4.3) с различными значе­ниями параметра формы при объемах выборок , . В таблицах критерии упорядочены по убыванию мощности в случае нормального закона (см. при ). Как можно видеть, порядок предпочтения критериев меняется в зависимости от тяжести хвостов.



Можно констатировать, что критерии Бартлетта, Кокрена, Хартли, Фишера, Неймана–Пирсона и Z–критерий Оверолла-Вудворда остаются эквивалентными по мощности в ситуации нарушения стандартного предположения о нормальности и принадлежности 2-х анализируемых выборок некоторому симметричному закону.

Аналогично, эквивалентной по мощности остаётся группа критериев Блисса–Кокрена–Тьюки, Кадуэлла–Лесли–Брауна и Линка.

В случае принадлежности выборок законам с более лёгкими (по сравнению с нормальным законом) хвостами критерии упорядочива­ются по мощности практически так же, как и при нормальном законе.

При (симметричных) законах с более тяжелыми хвостами по срав­нению с нормаль­ным законом порядок предпочтения меняется. В слу­чае тяжёлых хвостов (см., например, в таблице 4.8 при обобщенном нормальном законе ) критерии располагаются следующим образом:



*Флайне–Киллина Клотца Муда Левене Сижела–Тьюки ~ Ансари–Бредли О’Брайена Модифицированный Z–критерий* ***группа критериев*** *(Бартлетта, Кокрена, Хартли, Фишера, Неймана–Пирсона, Z–критерий Оверолла–Вудворда) Ньюмана* ***группа критериев*** *(Блисса–Кокрена–Тьюки, Кадуэлла–Лесли–Брауна, Линка)*



Таблица 4.8

**Мощность критериев относительно конкурирующей гипотезы в случае принадлежности выборок семейству распределений (4.3) с различными значениями параметра формы при , ,**



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Критерий |  | | |  | | |  | | |  | | |  | | |  | | |
|  | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | 05 | 01 | 10 | 05 | 01 | 10 | 05 | 01 | 10 | 05 | 01 | 10 | 05 | 01 | 10 | 05 | 01 |
| Б, К, Х, Ф, НП, Z | 162 | 091 | 022 | 317 | 213 | 078 | **564** | **438** | **218** | **689** | **570** | **326** | 754 | 644 | **398** | 791 | 689 | 446 |
| Мр | 167 | 097 | 028 | 309 | 207 | 075 | 557 | 429 | 207 | 687 | 566 | 321 | 755 | 645 | 397 | 793 | 691 | 450 |
| Лд | 179 | 106 | 031 | 322 | 218 | 079 | 557 | 428 | 205 | 681 | 557 | 307 | 745 | 630 | 375 | 783 | 674 | 423 |
| ZМ | 167 | 096 | 024 | 310 | 206 | 073 | 555 | 427 | 205 | 685 | 564 | 319 | 752 | 642 | 395 | 790 | 688 | 446 |
| ОБ | 176 | 103 | 029 | 322 | 216 | 078 | 555 | 427 | 205 | 680 | 556 | 306 | 745 | 630 | 374 | 782 | 674 | 420 |
| Кл | 224 | 139 | 044 | 346 | 237 | 090 | 540 | 412 | 196 | 673 | 549 | 302 | **760** | **649** | 394 | **820** | **720** | **472** |
| Л | 215 | 132 | 040 | **356** | **245** | **093** | 515 | 388 | 180 | 588 | 460 | 232 | 627 | 500 | 264 | 649 | 524 | 283 |
| ФК | **232** | **145** | **045** | 344 | 234 | 088 | 503 | 376 | 173 | 604 | 477 | 244 | 669 | 544 | 300 | 713 | 593 | 344 |
| М | 222 | 138 | 043 | 324 | 218 | 081 | 468 | 344 | 152 | 558 | 431 | 214 | 618 | 492 | 261 | 659 | 536 | 298 |
| СТ, АБ | 213 | 131 | 041 | 296 | 196 | 070 | 405 | 287 | 119 | 470 | 348 | 157 | 513 | 388 | 184 | 542 | 416 | 204 |
| Н | 144 | 080 | 020 | 224 | 141 | 047 | 386 | 276 | 116 | 527 | 405 | 200 | 638 | 517 | 288 | 720 | 608 | 370 |
| БКТ, КЛБ, ЛИ | 128 | 069 | 016 | 173 | 101 | 028 | 289 | 190 | 068 | 417 | 299 | 127 | 540 | 415 | 203 | 650 | 527 | 292 |

В таблицах 4.8 – 4.10 значения указаны в %, оценки мощности приведены в виде , для критериев использованы следующие обозначения: Б – Бартлетта, К – Кокрена, Х – Хартли, Ф – Фишера, НП – Неймана–Пирсона, Z – Z–критерий Оверолла–Вудворда, ZM – модифицированный Z–критерий, Лд – Лайарда, Мр – Миллера, ОБ – О’Брайена, Кл – Клотца, Л – Левене, ФК – Флайне-Киллина, М – Муда, СТ –Сижела–Тьюки, АБ – Ансари–Бредли, Н – Ньюман, БКТ – Блисса–Кокрена–Тьюки, КЛБ – Кадуэлла–Лесли–Брауна, ЛИ –Линка.



Таблица 4.9

**Мощность критериев относительно конкурирующей гипотезы в случае принадлежности выборок семейству распределений (4.3) с различными значениями параметра формы при , ,**



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Критерий |  | | |  | | |  | | |  | | |  | | |  | | |
|  | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | 05 | 01 | 10 | 05 | 01 | 10 | 05 | 01 | 10 | 05 | 01 | 10 | 05 | 01 | 10 | 05 | 01 |
| Б, К, Х, Ф, НП, Z | 388 | 266 | 095 | 827 | 734 | 501 | **991** | **980** | **924** | **999** | **997** | **985** | **1.00** | **999** | **995** | **1.00** | **1.00** | **998** |
| Мр | 392 | 282 | 120 | 800 | 700 | 459 | 990 | 977 | 910 | 999 | 997 | 983 | 1.00 | 999 | 994 | 1.00 | 1.00 | 997 |
| Лд | 445 | 328 | 146 | 830 | 737 | 498 | 990 | 977 | 906 | 999 | 996 | 978 | 1.00 | 999 | 992 | 1.00 | 1.00 | 996 |
| ZМ | 400 | 283 | 107 | 804 | 699 | 447 | 990 | 976 | 906 | 999 | 997 | 982 | 1.00 | 999 | 994 | 1.00 | 1.00 | 997 |
| ОБ | 430 | 310 | 129 | 828 | 730 | 482 | 990 | 976 | 903 | 999 | 996 | 977 | 1.00 | 999 | 992 | 1.00 | 1.00 | 996 |
| Кл | 611 | 486 | 254 | 869 | 788 | 565 | 987 | 971 | 892 | 998 | 995 | 974 | 1.00 | 999 | 992 | 1.00 | 1.00 | 997 |
| Л | 579 | 452 | 226 | **882** | **805** | **585** | 981 | 960 | 866 | 993 | 984 | 934 | 996 | 991 | 957 | 998 | 993 | 967 |
| ФК | **634** | **508** | **272** | 864 | 782 | 557 | 977 | 952 | 847 | 994 | 985 | 936 | 998 | 993 | 966 | 999 | 996 | 979 |
| М | 606 | 480 | 252 | 837 | 746 | 516 | 964 | 931 | 802 | 988 | 974 | 908 | 995 | 987 | 948 | 997 | 992 | 965 |
| СТ, АБ | 574 | 448 | 228 | 787 | 684 | 444 | 926 | 869 | 693 | 963 | 929 | 802 | 976 | 953 | 854 | 983 | 964 | 882 |
| Н | 299 | 198 | 070 | 589 | 473 | 262 | 901 | 840 | 667 | 981 | 963 | 887 | 997 | 992 | 967 | 999 | 998 | 990 |
| БКТ, КЛБ, ЛИ | 233 | 145 | 045 | 432 | 312 | 132 | 776 | 671 | 430 | 938 | 890 | 729 | 987 | 973 | 904 | 998 | 995 | 974 |

Таблица 4.10

**Мощность критериев относительно конкурирующей гипотезы в случае принадлежности выборок семейству распределений (4.3) с различными значениями параметра формы при , ,**



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Критерий |  | | |  | | |  | | |  | | |  | | |  | | |
|  | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | 05 | 01 | 10 | 05 | 01 | 10 | 05 | 01 | 10 | 05 | 01 | 10 | 05 | 01 | 10 | 05 | 01 |
| К | 134 | 070 | 015 | 306 | 208 | 081 | **624** | **515** | **316** | **767** | **680** | **480** | **834** | **762** | **581** | **869** | **807** | **643** |
| ОБ | 160 | 092 | 026 | 314 | 214 | 086 | 575 | 460 | 258 | 709 | 605 | 391 | 778 | 684 | 478 | 815 | 731 | 533 |
| Z | 141 | 074 | 016 | 297 | 197 | 073 | 565 | 445 | 241 | 702 | 592 | 371 | 772 | 673 | 457 | 811 | 722 | 512 |
| ZM | 148 | 081 | 019 | 289 | 190 | 070 | 554 | 433 | 228 | 697 | 587 | 364 | 770 | 672 | 454 | 810 | 721 | 514 |
| Б, НП | 142 | 075 | 016 | 293 | 192 | 070 | 557 | 434 | 227 | 695 | 581 | 355 | 766 | 664 | 439 | 806 | 713 | 495 |
| Х | 140 | 074 | 016 | 281 | 180 | 061 | 545 | 418 | 204 | 685 | 565 | 324 | 758 | 649 | 405 | 799 | 699 | 459 |
| Мр | 146 | 081 | 021 | 272 | 174 | 058 | 530 | 400 | 189 | 676 | 554 | 314 | 752 | 642 | 401 | 795 | 695 | 461 |
| Лд | 155 | 086 | 021 | 283 | 180 | 058 | 527 | 395 | 181 | 665 | 539 | 293 | 739 | 623 | 372 | 781 | 674 | 426 |
| Л | 197 | 119 | 036 | **340** | **234** | **095** | 513 | 390 | 197 | 591 | 471 | 260 | 633 | 516 | 298 | 657 | 542 | 323 |
| ФК | **212** | **128** | **039** | 322 | 217 | 082 | 498 | 378 | 187 | 617 | 499 | 283 | 693 | 582 | 363 | 742 | 641 | 423 |
| БКТ | 114 | 059 | 013 | 148 | 083 | 021 | 262 | 170 | 061 | 413 | 301 | 136 | 569 | 454 | 248 | 704 | 601 | 384 |
| КЛБ | 119 | 062 | 013 | 153 | 085 | 021 | 253 | 158 | 052 | 380 | 263 | 105 | 514 | 386 | 183 | 638 | 513 | 280 |

Но уже при законах с хвостами как, например, у распределения Лапласа (см. при ) группа критериев (Бартлетта, Кокрена, Хартли, Фишера, Неймана–Пирсона, Z–критерий Оверолла–Вудворда) выходит на шестую позицию.



Следует отметить, что с увеличением тяжести хвостов соответственно снижается мощность всех рассматриваемых параметрических критериев.

Критерии Блисса–Кокрена–Тьюки, Кадуэлла–Лесли–Брауна, Линка при любых наблюдаемых законах (в данном случае при ) уступают в мощности непараметрическим критериям, а критерий Ньюмана имеет преимущество перед непарамет­рическими только при очень лёгких хвостах наблюдаемых законов. При малых объёмах выборок такого преимущества непараметрических критериев нет (см. таблицы 4.2–4.4).



С увеличением числа сравниваемых выборок ситуация меняется. Практически исчезают группы эквивалентных критериев. Исключение составляет лишь пара критериев Бартлетта и Неймана–Пирсона, которые в любой ситуации остаются эквивалентными по мощности.

В таблице 4.10 относительно конкурирующей гипотезы представлены оценки мощности многовыборочных критериев, также полученные в случае принадлежности выборок обобщенному нормальному закону (4.3) при . В таблице критерии упорядочены по убыванию мощности, проявляемой ими в случае законов с хвостами, более легкими, чем у нормального закона (практически, как при нормальном).



В случае тяжёлых хвостов (см., например, в случае ) критерии по убыванию мощности располагаются в другом порядке:



*Флайне–Киллина Левене О’Брайена Модифицированный Z–критерий Бартлетта ~ Неймана–Пирсона Z–критерий Оверолла–Вудворда Хартли Кокрена Кадуэлла–Лесли–Брауна Блисса–Кокрена–Тьюки.*



В случае на первой позиции оказывается Критерий Левене.



## 4.22. Критерий Кокрена при законах, отличных от нормального

Сравнивая оценки мощности в табл. 4.2–4.4 для параметрических и непараметрических критериев, мы видим, что параметрические критерии имеют значительное преимущество в мощности. При­чем это преимущество сохраняется и в ситуациях, когда анализируемые выборки принадлежат законам, существенно отличающимся от нормального (табл. 4.8–4.9). Ясно, что в последнем случае мы не можем использовать ставшие классическими результаты, связанные с распределениями (или процентными точками) статистик критериев Бартлетта, Кокрена, Хартли, Левене и др.

Проблема осложняется тем, что в условиях нарушения классических предположений о нормальности распределения статистик упомянутых критериев при справедливости проверяемой гипотезы зависят и от законов распределения, которым подчиняются анализируемые выборки, и от объемов выборок. В принципе, то же самое мы имеем, например, для критериев Кокрена, Хартли, Левене при нормальном законе.

В этой связи понятно, что построить (найти) модели распределения статистики критерия для любых законов, для любых объемов выборок – задача нереальная. Однако для конкретных параметрических моделей законов распределения, зарекомендовавших себя в различных приложениях в качестве хороших моделей наблюдаемых случайных величин, такая задача (как и для нормального закона) может быть (относительно) легко решена с использованием компьютерных технологий как, например, в [79, 32, 80, 33].

Результаты исследований в [84, 36] показали предпочтительность критерия Кокрена, который в двухвыборочном варианте не уступает любому другому, а в многовыборочном оказывается наиболее мощным (за исключением законов с «тяжелыми хвостами», где хорошо в этом плане заре­комендовал себя критерий Левене).

В случае принадлежности наблюдаемых величин распределениям семейства (4.3) при значениях параметра формы и ряде значений на основании результатов статистического моделирования построены [84, 36, 16] таблицы верхних процентных точек (1, 5, 10 %) статистики (4.5) критерия Кокрена для двух – пяти выборок. Полученные результаты представлены в табл. **А.9–А.12** и могут использоваться в случае, когда есть основания считать, что распределение (4.3) с соответствующим параметром представляет собой хорошую модель для наблюдаемых случайных величин. Построенные процентные точки уточняют некоторые результаты, представленные в [88, 31], и расширяют возможности применения критерия Кокрена.



## 4.23. Что надо учитывать при выборе критерия однородности дисперсий?

При выборе применяемого критерия однородности дисперсий следует учитывать следующие бесспорные факты.

Во-первых. Параметрические критерии (по крайней мере, лучшие их представители) имеют явное преимущество в мощности по сравнению с непараметрическими.

Во-вторых. Стандартным предположением, обуславливающим возможность приме­нения параметрических критериев однородности дисперсий, является принадлежность анализируемых выборок нормальному закону рас­пределения. В случае его нарушении распределения статистик критериев, соответствующие справед­ливости , существенно изменяются. Это не позволяет использовать классические результаты, связанные с их применением и полученные именно при данном предположении. Исключение составляют группа устойчивых критериев (О’Брайена, Левене и модифицированный Z-критерий Оверолла–Вудворда), но и в этом случае зависимость от вида закона, которым принадлежат анализируемые выборки, также прослеживается.



В-третьих. Даже в случае выполнения стандартного предположения возможность корректного применения ряда параметрических критериев ограничена тем, что не известны распределения статистик, и имеются лишь таблицы критических значений статистик для некоторого ряда объёмов выборок. Поэтому при проверке гипотезы нельзя оценить достигнутый уровень значимости .



В-четвёртых. При ограниченных объёмах выборок распределения статистик параметрических критериев зачастую существенно отличаются от известных асимптотических распределений этих статистик, имеющих место при выполнении стандартного предположения.

В-пятых. На непараметрические критерии однородности харак­теристик рассеяния, в которых по существу проверяется гипотеза о равенстве параметров масштаба, не накладывается предположения о нормальности. Однако требуется выполнение не менее сильного предположения об однородности законов анализируемых выборок [36, 84].

В-шестых. Распределения нормализованных статистик непарамет­рических критериев (Ансари–Бредли [1], Муда [47], Сижела–Тьюки [55]) являются дискретными и при малых объёмах выборок существенно отличаются от асимптотического стандартного нормального закона.

В-седьмых. Параметрические критерии имеют очевидное преиму­щество в мощности перед непараметрическими и в случае принад­лежности выборок законам, отличающимся от нормального [85, 37, 86]. Это заставляет задуматься о возможности их корректного применения при использовании в условиях нарушения стандартного предположения.

Таким образом, для построения корректного статистического вывода по результатам проверки гипотезы необходимо выбрать наиболее мощный критерий и в соответствии с этим критерием оценить достигнутый уровень значимости . Принятие решения на основе оценки всегда более информативно, чем в результате сравнения вычисленной статистики с некоторым критическим значением.



В случае применения критериев, распределения статистик которых (при выполнении стандартного предположения) неизвестны или отличаются от известных асимптотических вследствие ограниченности объёмов анализируемых выборок, оценивание представляет собой некоторую проблему. Однако эта проблема вполне решаема при наличии соответствующего программного обеспечения, позволяющего найти оценку по результатам статистического моделирования.



Более того, реализация такой же возможности [17] в случае использования критериев в условиях нарушения стандартного предположения о нормальности случайных величин существенно расширяет сферу применения параметрических (и непараметрических) критериев однородности дисперсий.

В следующих разделах рассмотрены рекомендации по применению рассматриваемых критериев, связанные с вычислением в ситуациях, когда распреде­ления статистик критериев неизвестны. Причина неизвестности может быть связана с отсутствием информации о законе распределения статистики в условиях стандартного предположения о нормальности, с тем, что реальные распределения статистик существенно отличаются от асимптотических, или с нарушением стандартного предположения о принадлежности анализируемых выборок нормальным законам.



Приводимые результаты исследований получены при использовании программной системы ISW [98].

## 4.24. О вычислении достигнутого уровня значимости

Принятие решения о результатах проверки гипотезы на основании значения всегда более обосновано, чем в результате сравнения полученного значения статистики с заданными критическими значениями, извлекаемыми из соответствующей таблицы процентных точек, так как в последнем случае остаётся не ясным, насколько обосновано принимаемое решение.



В случае правостороннего критерия достигнутый уровень значимости (вероятность возможного пре­вышения по­лученного значения статистики при справедливости проверяемой гипотезы ) определяется соотношением



, (4.29)



где – функция распределения вероятностей статистики применяемого критерия при справедливости .



В случае двустороннего критерия критическая область состоит из двух частей. А достигнутый уровень значимости определяется соотношением

. (4.30)



Вычисление достигнутых уровней значимости в соответствии с соотношениями (4.29) для правостороннего критерия или (4.30) для двустороннего не вызывает труда при известном распределении статистики критерия. Если информация о распределении статистики соответствующего критерия отсутствует и представлена лишь таблицей процентных точек, либо объёмы выборок относительно невелики и таковы, что распределение статистики существенно отличается от предельного (асимптотического), то корректное вычисление представляет собой некоторую проблему.



К сожалению, распределения большинства параметрических критериев однородности дисперсий (даже в классическом случае принадлежности выборок нормальному закону) существенно зависят от объемов выборок. Поэтому при формировании решения о результатах проверки гипотезы приходится опираться на таблицы процентных точек, которые сформированы для ограниченных наборов и, часто, подразумевают равенство объёмов сравниваемых выборок.



Каким же образом можно повысить качество статистических выводов?

В настоящее время благодаря резкому увеличению возможностей вычислительной техники в программных системах статистического анализа существенно возрастает роль использования компьютерных методов исследования закономерностей. Например, когда распределение статистики критерия, используемого для проверки некоторой гипотезы, к моменту начала проверки (в силу разных причин) оказывается неизвестным (при данном объёме выборки ), появляется возможность исследования распределения статистики в реальном времени проверки гипотезы (в интерактивном режиме) [39, 38, 75, 76, 77]. Например, в интерактивном режиме можно исследовать неизвестное распределение статистики любого критерия однородности дисперсий, зависящее от объема выборки, при тех значениях , которые соответствуют анализируемым выборкам, и оценить по найденному в результате моделирования эмпирическому распределению статис­тики достигнутый уровень значимости.



При таком подходе необходимое для проверки гипотезы эм­пирическое распределение статистики соответствующего критерия строится в результате статистического моделирования с точностью, зависящей от числа экспериментов в методе Монте-Карло [92]. Затем по эмпирическому распределению и вычисленному по анализируемой выборке значению статистики критерия в соответствии с соотношением (4.29) для правостороннего критерия или по соотношению (4.30) для двустороннего критерия определяется оценка .



Таким образом, результаты статистического моделирования, осуществляемого в интерактивном режиме (непосредственно в процессе проводимого анализа) используются при формировании вывода по итогам проверки гипотезы.

Реализация такого интерактивного режима требует наличия развитого программного обеспечения, позволяющего (как в [98]) в целях ускорения распараллеливать процессы моделирования и привлекать доступные вычислительные ресурсы. В условиях распараллеливания время построения распределения статистики критерия оказывается не очень заметным на фоне полного решения задачи статистического анализа.



## 4.25. Применение критериев в “нестандартных” условиях

Использование интерактивного режима для исследования распределений статистик открывает возможность применения критериев в условиях нарушения стандартного предположения о принадлежности результатов измерений нормальному закону. Отклонение от нормальности приводит к существенным изменениям распределений статистик критериев. В меньшей степени это касается критерия О’Брайена, модифицированного Z–критерия Оверолла–Вудворда и модификаций критерия Левене. Однако за эту устойчивость данные критерии платят некоторым снижением мощности (при выполнении стандартных предположений). В то же время распределения статистик этих трёх критериев всё-таки настолько отклоняются от имеющих место при стандартных предположениях (в случае принадлежности выборок законам с тяжелыми хвостами), что пренебрегать этим нельзя. Поэтому корректность выводов зависит от того, насколько точно знания о распределении соответствуют реальным условиям, характеризующим анализируемые результаты измерений.



Для рассмотренных здесь и в [36, 84, 85, 37] критериев однородности дисперсий проиллюстрируем использование интерактивного режима исследования и точности оценивания в зависимости от числа экспериментов моде­лируемых эмпирических распре­делений ста­тистик, в том числе при нарушении стандартного предположения.



Напомним, что для того чтобы погрешность оценивания с доверительной вероятностью 0.99 не превышала величины 0.01, количество экспериментов имитационного моделирования должно быть порядка 16 600, для того, чтобы погрешность не превышала 0.001 – количество экспериментов должно быть порядка 1 660 000 [92].



**Пример 4.1.** Пусть проверяется гипотеза о равенстве дисперсий 2-х следующих выборок объемом , , в предположении о принадлежности их нормальному закону:



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0.205 | 0.232 | -0.219 | 0.829 | 0.127 | 0.939 | 0.995 | 0.706 | -0.450 | -0.361 |
| -0.364 | -0.107 | 1.054 | -0.095 | -2.188 | 0.453 | -1.052 | 0.640 | -0.417 | -2.144 |
| -3.473 | -0.857 | -0.678 | 0.070 | -1.139 | 0.574 | 0.409 | 0.206 | 0.184 | 1.273 |
| -0.326 | -1.245 | 0.227 | 0.185 | 0.383 | 0.126 | 0.255 | 1.110 | -0.310 | -0.178 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0.269 | -0.187 | -0.013 | -1.248 | -0.247 | -0.541 | 1.209 | -2.814 | 0.575 | -0.452 |
| -0.427 | 0.337 | 1.138 | -1.090 | -0.858 | -0.006 | -1.212 | -0.180 | 1.751 | -0.485 |
| -0.779 | -0.752 | 0.342 | -0.175 | 0.509 | 0.209 | 0.596 | 1.869 | 1.764 | 1.084 |
| 0.995 | 0.633 | 0.003 | -0.642 | -1.225 | -0.115 | -1.543 | 0.137 | -1.290 | 2.189 |

В таблице 4.11 приведены значения статистик, вычисленные при проверке однородности дисперсий, соответствующих этим 2-м выборкам. В таблице представлены оценки , полученные по смоделированным распределениям статистик рассматриваемых критериев при количестве экспериментов =104 и =106 в предположении о принадлежности случайных величин нормальному закону. Для критериев, относительно которых известны асимптотические распределения статистик, в таблице приведены также теоретические оценки , вычисленные в соответствии с этими распределениями.



Таблица 4.11

**Оценки , полученные при проверке однородности первых 2-х выборок (при справедливости )**



|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Критерий | Значение стат-ки |  | | | |
| При нормальном законе | | | При законе Лапласа |
| Теор-я |  |  |  |
| Бартлетта | 0.268028 | 0.604658 | 0.605 | 0.6045 | 0.734 |
| Кокрена | 0.541643 | – | 0.605 | 0.6045 | 0.734 |
| Фишера | 0.846236 | 0.604671 | 0.596 | 0.6045 | 0.734 |
| Хартли | 1.1817 | – | 0.605 | 0.6045 | 0.734 |
| Неймана–Пирсона | 1.00349 | 0.607 | 0.605 | 0.6045 | 0.734 |
| Z–критерий Оверолла–Вудворда | 0.279266 | 0.597183 | 0.605 | 0.6045 | 0.734 |
| Модифицированный Z–критерий | 0.115111 | 0.734398 | 0.741 | 0.7348 | 0.732 |
| О’Брайена | 0.162623 | 0.687856 | 0.702 | 0.6971 | 0.722 |
| Левене (со средним) | 0.604953 | – | 0.454 | 0.4451 | 0.459 |
| Ньюмана | 4.56411 | – | 0.780 | 0.7777 | 0.730 |
| Линка | 0.948631 | – | 0.806 | 0.8079 | 0.877 |
| Блисса–Кокрена–Тьюки | 0.513181 | – | 0.814 | 0.8084 | 0.878 |
| Кадуэлла–Лесли–Брауна | 1.05415 | – | 0.814 | 0.8084 | 0.878 |

В действительности обе анализируемые выборки моделировались в соответствии с распределением Лапласа со значением . Поэтому в последней колонке таблицы представлены оценки , полученные по смоделированным распределениям статистик рассматриваемых критериев при количестве экспериментов =106 в предположении о принадлежности случайных величин закону Лапласа.



С одной стороны, можно заметить существенное различие в оценках при законах Лапласа и нормальном. С другой стороны, можно отметить, что в случае устойчивых критериев Левене, О’Брайена и модифицированного Z–критерия различие в таких оценках минимально.



Необходимо подчеркнуть следующее. Если реальный закон распределения обладает более “тяжелыми” хвостами по сравнению с нормальным законом, а мы, применяя параметрический критерий однородности дисперсий, опираемся на классические результаты, связанные с выполнением предположения о нормальности, то это приводит к увеличению (по сравнению с заданной) вероятности ошибки 1-го рода и к уменьшению вероятности ошибки 2-го рода. Если же реальный закон обладает более “лёгкими” хвостами, то в аналогичной ситуации это приводит к уменьшению вероятности ошибки 1-го рода и к увеличению вероятности ошибки 2-го рода.

**Пример 4.2.** Проверим гипотезу о равенстве дисперсий 3-х выборок, 2 из которых взяты из предыдущего примера, а третья приведена ниже:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0.254 | -0.254 | -0.017 | 0.002 | 1.937 | -2.476 | -0.092 | -0.543 | 2.588 | 1.970 |
| 1.869 | 0.453 | -0.616 | -2.806 | 2.382 | 0.476 | 0.641 | -2.581 | -0.659 | -0.027 |
| 1.775 | 2.154 | -1.801 | -0.774 | -0.522 | 1.413 | -0.042 | -0.175 | -0.929 | 0.664 |
| -0.298 | 0.409 | 0.040 | 0.418 | 0.478 | -0.052 | -4.354 | 1.521 | -2.126 | 1.177 |

Эта выборка также смоделирована в соответствии с распределением Лапласа, но при .



В таблице 4.12 приведены значения статистик, вычисленные при проверке гипотезы об однородности дисперсий, соответствующих 3-м рассматриваемым выборкам. В предположении о принадлежности выборок нормальному закону в таблице представлены теоретические оценки и оценки, полученные по результатам статистического моделирования при количестве экспериментов 106. В предположении о принадлежности выборок закону Лапласа приведены полученные оценки при =106.



В данном случае видно, что если мы проигнорируем факт нарушения стандартного предположения о нормальности, то по всем критериям (за исключением модифицированного Z-критерия и критерия О’Брайена) получим значения меньшие по сравнению с истинными, имеющими место при законе Лапласа. Если бы реальный закон обладал более лёгкими хвостами по сравнению с нормальным, то значения , получаемые в предположении о нормальности, превышали бы истинные значения.



Таблица 4.12

**Оценки , полученные при проверке однородности 3-х выборок (отношение стандартных отклонений 1:1:1.5)**



|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Критерий | Значение статистики |  | | |
| При нормальном законе | | При законе Лапласа |
| теоретическая |  |  |
| Бартлетта | 9.72943 | 0.0077 | 0.0079 | 0.1198 |
| Кокрена | 0.534165 | – | 0.0032 | 0.0667 |
| Хартли | 2.50172 | – | 0.0140 | 0.1508 |
| Неймана–Пирсона | 1.08774 | – | 0.0079 | 0.1198 |
| Z–критерий Оверолла–Вудворда | 5.0054 | 0.0067 | 0.0065 | 0.1098 |
| Модифицированный Z–критерий | 2.31571 | 0.0987 | 0.0953 | 0.0897 |
| О’Брайена | 3.2241 | 0.0434 | 0.0396 | 0.0336 |
| Левене (со средним) | 2.82473 | – | 0.0661 | 0.0713 |
| Блисса–Кокрена–Тьюки | 0.415913 | – | 0.0861 | 0.3301 |
| Кадуэлла–Лесли–Брауна | 1.46271 | – | 0.1899 | 0.5106 |

Замечание. В сказанное выше в таблице 4.11 не укладывается результат для модифи­цированного Z–критерия Оверолла–Вудворда, при построении которого авторы ста­рались сделать его устойчивым к нарушению стандартного предположения. Этой цели авторы критерия достигли. Однако, предложенное в [60] соотно­шение (4.17) для , по-видимому, не обладает необходимой точностью. Поэтому в случае модифицированного Z–критерия нарушается общий для всех параметри­ческих критериев монотонный характер зависимости распределений статистик от степени (рассматриваемого в данной работе) отклонения наблюдаемого закона от нормального.



Таким образом, параметрические критерии однородности дисперсий, обладающие наибольшей мощностью, можно корректно применять как при выполнении стандартного предположения о нормальности, так и в условиях его нарушения. И в том и другом случае возможность вычисления оценок достигнутых уровней значимости повышает информативность статистических выводов.

Реализация такой процедуры применения критериев возможно только с опорой на программное обеспечение, подобное [98]. Обязательным предварительным условием перехода к ней является идентификация вида закона распределения, наилучшим образом описывающего анализируемые выборки [86, 75, 76, 77, 74].

Решение о наиболее предпочтительной модели закона может лежать за рамками задачи проверки гипотезы об однородности, а при отсутствии такой возможности, приниматься в процессе анализа совокупности исследуемых выборок (или объединённой выборки). Если при этом в качестве наилучшей модели оказывается некоторое семейство распределений (например, обобщённый нормальный закон, семейства гамма- и бета-распределений и т.п.), в случае которого конкретный вид закона определяется значением параметра (или параметров) формы, то модель должна быть идентифицирована с точностью до значения этого параметра (его оценка должна быть найдена и зафиксирована).

## 4.26. Выводы по разделу

В случае анализа двух выборок и выполнении стандартного предположения о нормальности наибольшей и одинаковой мощностью относительно тех же конкурирующих гипотез обладают критерии Фишера, Бартлетта, Кокрена, Хартли, Неймана–Пирсона и Z–критерий Оверолла–Вудворда.

Далее в порядке убывания мощности следует группа устойчивых критериев О`Брайена, модифицированный Z-критерий, Левене.

Наименее перспективна для применения группа параметрических критериев Ньюмана, Блисса–Кокрена–Тьюки, Кадуэлла–Лесли–Брауна, Линка, которая уступает в мощности даже непараметрическим критериям, имея перед последними некоторое преимущество в мощности лишь при очень малых объёмах выборок.

Среди рассмотренных непараметрических критериев наибольшей мощностью обладает критерий Клотца, затем идёт критерий Флайне–Киллина, потом критерий Муда, который уже заметно уступает критериям Фишера, Бартлетта, Кокрена, Хартли, Неймана–Пирсона, Z–критерию Оверолла–Вудворда, О`Брайена, модифицированному Z-критерию и Левене.

В случае нарушения стандартного предположения и принадлежности двух выборок законам с более легкими хвостами, чем у нормального закона, вышеуказанный порядок предпочтительности сохраняется.

При симметричных законах с более тяжелыми хвостами по сравнению с нормальным законом критерии упорядочиваются следующим образом:

*Флайне–Киллина Клотца Муда Левене Сижела–Тьюки ~ Ансари–Бредли О’Брайена Модифицированный Z–критерий* ***группа критериев*** *(Бартлетта, Кокрена, Хартли, Фишера, Неймана–Пирсона, Z–критерий Оверолла–Вудворда) Ньюмана* ***группа критериев*** *(Блисса–Кокрена–Тьюки, Кадуэлла–Лесли–Брауна, Линка)*



Если анализируется большее число выборок, то при выполнении стандартного предположения или в случае принадлежности выборок законам с более лёгкими хвостами по сравнению с нормальным законом критерии по убыванию мощности располагаются в следующем порядке:

*Кокрена О’Брайена Z–критерий Оверолла–Вудворда Модифицированный Z–критерий*  ***группа критериев*** *(Бартлетта, Неймана–Пирсона) Хартли Левене Флайне–Киллина Блисса–Кокрена–Тьюки Кадуэлла–Лесли–Брауна.*



Надо отметить, что при симметричных законах с более лёгкими хвостами критерий Левене уступает в мощности критерию Флайне–Киллина.

При симметричных законах с более тяжелыми хвостами ситуация меняется:

*Флайне–Киллина Левене О’Брайена Модифицированный Z–критерий*  ***группа критериев*** *(Бартлетта, Неймана–Пирсона) Z–критерий Оверолла–Вудворда Хартли Кокрена Кадуэлла–Лесли–Брауна Блисса–Кокрена–Тьюки.*



Основной недостаток параметрических критериев связан с тем, что классические результаты обеспечивают корректность применения данных критериев лишь при выполнении предположения о принадлежности анализируемых выборок нормальным законам, так как только для этой ситуации известны распределения статистик рассмотренных параметрических критериев или таблицы процентных точек. Этот недостаток можно преодолеть, используя компьютерные технологии для исследования распределений статистик и оценки (см. разделы 4.24–4.25).



Непараметрические критерии также не свободны от недостатков. Во-первых, при их использовании, как правило, предполагается равенство сред­них. Во-вторых, как было показано нами, корректность их применения обеспечивается в случае принадлежности анализируемых выборок закону распределения вероятностей одного и того же вида. По существу, при справедливости проверяемой гипотезы о равенстве дисперсий, соответ­ствующих двум выборкам, распределение статистики известно для случая однородности законов этих выборок. Выполнение этих условий несколько сужает область корректного использования непараметрических критериев. В-третьих, непараметрические критерии обладают заметно меньшей мощностью по сравнению с параметрическими.

Действие параметрических критериев при необходимости можно распространить на ситуации, когда выборки описываются законами, отличающимися от нормального, воспользовавшись, как в нашем случае (см. раздел 4.25), методикой компьютерного моделирования для исследования распреде­лений статистик и построения для этих распределений моделей или таб­лиц процентных точек. Из рассмотренных критериев в наибольшей степени на эту роль подходит критерий Кокрена.

При таком подходе необходимо учитывать, что распределение статистики критерия будет зависеть от вида закона, объема выборок и во многих случаях – от конкретных значений некоторых параметров. При использовании соответству­ющего программного обеспечения [92] решение таких задач не вызывает принципиальных трудностей, а наличие программного обеспе­чения позволяет решать эти задачи по мере возникновения потребности [93].

Нелишне заметить, что специфика задач по исследованию ме­тодами компьютерного моделирования вероятностных закономер­ностей позволяет эффективно распараллеливать вычислительные процессы, используя ресурсы многоядерных и многопроцессорных компьютеров и компьютерных сетей и получать искомое решение практически в реальном масштабе времени.

# 5. Заключение

Настоящее руководство позволяет ориентироваться в множестве критериев, которые могут использоваться для проверки гипотез об однородности законов, о равенстве математических ожиданий сравниваемых выборок или о равенстве дисперсий. Приводимые результаты исследований распределений статистик критериев и сравнительного анализа мощности групп критериев, предназначенных для проверки гипотез одного вида, позволяют исследователям при проведении анализа отдать предпочтение тому или иному критерию.

Представленные в руководстве описания критериев с указанием их преимуществ и недостатков, расширенные таблицы процентных точек, оценки мощности критериев относительно некоторых конкурирующих гипотез дают возможность специалистам, решающим задачи статистического анализа в кон­кретной прикладной области, осознанно подходить к выбору кри­териев, не останавливаясь на использовании какого-то одного.

Очевидно, что в настоящем руководстве представлено не всё множество критериев, которые могут использоваться для проверки рассмотренных гипотез. Что-то упущено из существующих критериев, предлагаются новые. Это естественно. Однако приведенные в руководстве описания критериев и их свойств должны способствовать корректному применению данных критериев в приложениях и, следовательно, способствовать повышению качества статистических выводов.

Использование в процессе проверки гипотез процентных точек уже не соответствует современным требованиям к качеству статистических выводов. Существенно больше оснований для принятия того или иного решения о результатах проверки гипотезы содержится в оценке достигнутого уровня значимости. Да, оценка требует знания распределения статистики при справедливости проверяемой гипотезы, которое не всегда известно. Однако можно отметить положительную и возрастающую роль статистического моделирования и компьютерных технологий, позволяющих в интерактивном режиме исследовать распределения статистик и оценивать значение . Подобным образом оценки находятся в системе ISW [98], которой можно воспользоваться при необходимости.



# Библиографический список

1. *Ansari A. R.* Rank-tests for dispersions / A. R. Ansari, R. A. Bradley // AMS. – 1960. – Vol. 31, № 4. – P. 1174–1189.
2. *Bartlett M. S.* Properties of sufficiency of statistical tests / M. S. Bartlett // Proc. Roy. Soc. – 1937. – A 160. – P. 268–287.
3. *Behrens W. U.* Ein Beitrag Zur Fehlerberechnung bei wenigen Beobachtungen // Landw. Jb., 1929. B. 68, – S. 807-837.
4. *Bliss C.I., Cochran W.G., Tukey J.W.* A rejection criterion based upon the range // Biometrika. 1956. Vol. 43. No. 3/4. – P. 418-422.
5. *Brown M. B.* Robust Tests for Equality of Variances / M. B. Brown,   
   A. B. Forsythe // J. Amer. Statist. Assoc. – 1974. – Vol. 69. – P. 364–367.
6. *Capon J.* Asymptotic efficiency of certain locally most powerful rank tests / J. Capon // AMS. – 1961. – Vol. 32, № 1. – P. 88–100.
7. *Chen S., Pokojovy M.* Modern and classical *k*-sample omnibus tests // Wiley Online Library, 2017. DOI: 10.1002/wics.1418
8. *Cochran W. G.* The distribution of the largest of a set of estimated va­riances as a fraction of their total / W. G. Cochran // Annals of Eugenics. – 1941. – Vol. 11. – P. 47–52.
9. *Conover W. J.* Several k-sample Kolmogorov-Smirnov tests // The Annals of Mathematical Statistics. – 1965. – Vol. 36, No. 3. – P.1019-1026.
10. *Conover W. J.* Practical Nonparametric Statistics / W. J. Conover. – 3d ed. – Wiley, 1999. – 584 p.
11. *Conover W.J., Johnson M.E., Johnson M.M.* A comparative study of tests for homogeneity of variances, with applications to the outer continental shelf bidding data // Technometrics. – 1981. – Vol. 23, No. 4. – P. 351-361.
12. *Fisher R. A.* The fiducial argument in statistical inference // Annals of Eugenics, Lond., 1935. Vol. **6**, No. 4. – P. 391-398.
13. *Fisher R. A.* The asymptotic approach to Behrens’s integral, with further tables for the *d* test of significance // Annals of Eugenics, Lond., 1941. Vol. **11**. – P. 141-172.
14. *Fisher R.A., Yates F.* Statistical tables for biological, agricultural and medical research. London & Edinburgh: Oliver and Boyd, 1948.
15. *Fligner M.A., Killeen T.J.* Distribution-Free Two-Sample Tests for Scale // Journal of American Statistical Association. 1976. Vol. 71. No. 353. – P.210-213.
16. *Gorbunova A. A.* Classical tests of variances homogeneity for non-normal distributions / A. A. Gorbunova, S. B. Lemeshko, B. Yu. Lemeshko // Proceedings Third International Conference on Accelerated Life Testing, Reliability-based Analysis and Design. 19-21 May 2010. – Clermont-Ferrand, France. – P. 117–124.
17. *Gorbunova A.A., Lemeshko B.Yu.* Application of Variance Homogeneity Tests Under Violation of Normality Assumption // Proceedings of the International Workshop “Applied Methods of Statistical Analysis. Simulations and Statistical Inference” – AMSA’2011, Novosibirsk, Russia, 20-22 September, 2011. P. 28-36.
18. *Gorbunova A.A., Lemeshko B.Yu.* Application of Parametric Homogeneity of Variances Tests under Violation of Classical Assumption // Proceedings, 2nd Stochastic Modeling Techniques and Data Analysis International Conference. 5 - 8 June 2012, Chania, Crete, Greece. P.253-260. ( http://www.smtda.net/images/1\_SMTDA2012\_Proceedings\_D-J\_119-338.pdf )
19. *Hartley H. O.* The maximum F-ratio as a short-cut test of heterogeneity of variance / H. O. Hartley // Biometrika. – 1950. – Vol. 37. – P. 308–312.
20. *Hines W.* Increased power with modified forms of the Levene (Med) test for heterogeneity of variance / W. Hines, R. Hines // Biometrics. – 2000. – Vol. 56. – P. 451–454.
21. *Hoeffding W.* Optimum non-parametric test // Proc.11 th Berkeley Symp., 1950. – P.83-82.
22. *Hollander M.* Non-parametric Statistical Methods / M. Hollander,   
    D. A. Wolfe. – 2nd ed. – New York : Wiley, 1999.
23. *Kiefer J.* K-Sample Analogues of the Kolmogorov-Smirnov and Cramer-v. Mises Tests // Annals of Mathematical Statistics***,*** 1959. Vol. 30. No. 2. – P. 420-447.
24. *Klotz J.* Nonparametric tests for scale / J. Klotz // AMS. – 1962. – Vol. 33. – P. 498–512.
25. *Kruskal W. H.* Use of ranks in one-criterion variance analysis / W. H. Kruskal, W. A. Wallis // J. Amer. Statist. Assoc. – 1952. – Vol. 47. – P. 583–621.
26. *Kruskal W. H.* Use of ranks in one-criterion variance analysis / W. H. Kruskal, W. A. Wallis // J. Amer. Statist. Assoc. – 1953. – Vol. 48. – P. 907–911.
27. *Laubsher N. F.* Exact critical Values for Mood`s distribution-free test statistic for dispersion and its normal approximation / N. F. Laubsher, F. E. Steffens, E. M. De Lange // Technometrics. – 1968. – Vol. 10, № 3. – P. 497–508.
28. *Layard M.W.J.* Robust large-sample tests for homogeneity of variances // Journal of the American Statistical Association. – 1973. – Vol. 68. – P. 195–198.
29. *Lee H.B., Katz G.S., Restori A.F.*A Monte Carlo Study of Seven Homogeneity of Variance Tests // Journal of Mathematics and Statistics. 2010. Vol. 6, No. 3. P. 359-366.
30. *Lehman S.* Exact and approximate distributions for the Wilcoxon statistic with ties // Journal of the American Statistical Association. 1961. Vol. 56. – P. 293-988.
31. *Lehmann E. L.* Consistency and unbiasedness of certain nonparametric tests / E. L. Lehmann // Ann. Math. Statist. – 1951. – Vol. 22, № 1. – P. 165–179.
32. *Lemeshko B. Y.* Application of Homogeneity Tests: Problems and Solution / B. Y. Lemeshko, I. V. Veretelnikova, S. B. Lemeshko, A. Y. Novikova // In: Rykov V., Singpurwalla N., Zubkov A. (eds) Analytical and Computational Methods in Probability Theory. ACMPT 2017. Lecture Notes in Computer Science. : monograph. - Cham : Springer, 2017. - 10684. - P. 461-475.
33. *Lemeshko B.* Bartlett and Cochran tests in measurements with probability laws different from normal / B. Lemeshko, E. Mirkin // Measurement Techniques. – 2004. – Vol. 47, № 10. – P. 960–968.
34. *Lemeshko B. Yu.* Distribution models for nonparametric tests for fit in verifying complicated hypotheses and maximum-likelihood estimators. P. 1 /   
    B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko // Measurement Techniques. – 2009. – Vol. 52, № 6. – P. 555–565.
35. *Lemeshko B. Yu.* Models for statistical distributions in nonparametric fitting tests on composite hypotheses based on maximum-likelihood estimators. P. II / B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko // Measurement Techniques. – 2009. – Vol. 52, № 8. – P. 799–812.
36. *Lemeshko B. Yu.* Power and robustness of criteria used to verify the homogeneity of means / B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko // Measurement Techniques. – 2008. – Vol. 51, № 9. – P. 950–959.
37. *Lemeshko B. Yu.* Statistical distribution convergence and homogeneity test power for Smirnov and Lehmann–Rosenblatt tests / B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko // Measurement Techniques – 2005. – Vol. 48, № 12. – P. 1159–1166.
38. *Lemeshko B.Yu.* Application and power of criteria for testing the homogeneity of variances. Part I. Parametric criteria / B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko, A. A. Gorbunova // Measurement Techniques. – 2010. – Vol. 53, № 3. – P. 237–246.
39. *Lemeshko B.Yu., Lemeshko S.B., and A.A. Gorbunova*. Application and power of criteria for testing the homogeneity of variances. Part II. Nonparametric criteria // Measurement Techniques, Vol. 53, No. 5, 2010. P.476-486. DOI: 10.1007/s11018-010-9530-x
40. *Lemeshko B.Yu., Gorbunova A.A., Lemeshko S.B., Rogozhnikov A.P.* Applica­tion of Nonparametric Goodness-of-fit tests for Composite Hypotheses in Case of Unknown Distributions of Statistics // Proceedings of the International Workshop “Applied Methods of Statistical Analysis. Applications in Survival Analysis, Reliability and Quality Control” – AMSA’2013, Novosibirsk, Russia, 25-27 September, 2013. P. 8-24.
41. *Lemeshko B.Yu., Lemeshko S.B., Rogozhnikov A.P.* Real-Time Studying of Statistic Distributions of Non-Parametric Goodness-of-Fit Tests when Testing Complex Hypotheses // Proceedings of the International Workshop “Applied Methods of Statistical Analysis. Simulations and Statistical Inference” – AMSA’2011, Novosibirsk, Russia, 20-22 September, 2011. P. 19-27.
42. *Leslie R.T., Brown B.M.*Use of range in testing heterogeneity of variance // Biometrika. 1966. Vol. 53. No.1/2. – P. 221-227.
43. *Levene H.* Robust tests for equality of variances // Contributions to Probability and Statistics: Essays in Honor of Harold Hotelling. – 1960. – P. 278-292.
44. *Levene* Test for Equality of Variances [Электронный ресурс] // e-Handbook of Statistical Methods. – Режим доступа : http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/ eda/section3/eda35a.htm. –Загл. с экрана.
45. *Lim T.-S., Loh W.-Y.* A comparison of tests of equality of variances // Computational Statistics & Data Analysis. 1996. Vol. 22, No. 5. P. 287-301.
46. *Link R.F.* The sampling distribution of the ratio of two ranges from independent samples // The annals of mathematical statistics. 1950. Vol. 21, No. 1. – P. 112-116.
47. *Mann H. B.* On a test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other / H. B. Mann, D. R. Whitney // Ann. Math. Statist. – 1947. – Vol. 18. – P. 50–60.
48. *Miller R.G.* Jackknifing variances // The Annals of Mathematical Statistics – 1968. – Vol. 39. – P. 567–582.
49. *Milton R. C.* An extended table of critical values for the Mann –Whitney (Wilcoxon) two-sample statistic / R. C. Milton // J. Amer. Statist. Ass. – 1964. – Vol. 59. – P. 925–934.
50. *Mood A.* On the asymptotic efficiency of certain nonparametric tests / A. Mood // AMS. – 1954. – Vol. 25. No. 3. – P. 514–522.
51. *Neel J. H.* A Monte Carlo Study of Levene`s Test of Homogeneity of Variance: Empirical Frequencies of Type I Error in Normal Distributions Paper : presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association Convention / J. H. Neel, W. M. Stallings. – Chicago, Illinois, 1974. – April.
52. *Newman D.* The distribution of range in samples from a normal population, expressed in terms of an independent estimate of standard deviation // Biometrika. 1939. Vol. 31. No.1/2. – P. 20-30.
53. *Pettitt A.N.* A two-sample Anderson-Darling rank statistic // Biometrika. 1976. Vol. 63. No.1. P. 161-168.
54. *Rosenblatt M.* Limit theorems associated with variants of the von Mises statistic / M. Rosenblatt // Ann. Math. Statist. – 1952. – Vol. 23. – P. 617–623.
55. *Scheffe H.* On Solutions of the Behrens-Fisher Problem, Based on the t-Distribution // The Annals of Mathematical Statistics. 1943. Vol. 14, No. 1. – P. 35-44.
56. *Scheffe H.* Practical Solutions of the Behrens-Fisher Problem // Journal of the American Statistical Association.1970. Vol.65. No. 332. – P. 1501-1508.
57. *Scholz F.W., Stephens M.A.* K-Sample Anderson–Darling Tests // Journal of the American Statistical Association. 1987. Vol. 82. No. 399. – P. 918-924.
58. *Siegel S.* A nonparametric sum of rank procedure for rela­tive spread in unpaired samples / S. Siegel, J. W. Tukey // JASA. – 1960. – Vol. 55, № 291. – P. 429–445.
59. *Sukhatme B. V.* On certain Two-sample nonparametric tests for variances / B. V. Sukhatme // AMS. – 1957. – Vol. 28, № 1. – P. 188–194.
60. *Terry M.E.* Some rank order test which are most powerful against specific parametric alternatives // The Annals of Mathematical Statistics. 1952. Vol. 23. – P.346-366.
61. *O'Brien R.G.* Robust techniques for testing heterogeneity of variance effects in factorial designs // Psychometrika. 1978. Vol. 43, No. 3. P. 327-342.
62. *Overall J.E., Woodward J.A.* A simple test for heterogeneity of variance in complex factorial design // Psychometrika. 1974. Vol. 39. No. 3. – P. 311-318.
63. *Overall J.E., Woodward J.A.* A robust and powerful test for heterogeneity of variance // University of Texas Medical Branch Psychometric Laboratory. 1976.
64. *Parra-Frutos I.* The behaviour of the modified Levene’s test when data are not normally distributed // Computational Statistics. – 2009. – Vol. 24. – P. 671–693.
65. *Welch B. L.* The Significance of the Difference Between Two Means when the Population Variances are Unequal // Biometrika. 1938. Vol. 29, No. 3/4. – ­P. 350-362.
66. *Welch B. L.* The generalization of “Student’s” problem when several different population variances are involved // Biometrika. 1947. Vol. 34, No. 1/2. – ­P. 28-35.
67. *Wilcoxon F.* Individual comparisons by ranking methods / F. Wilcoxon // Biometrics Bulletin. – 1945. – № 1. – P. 80–83.
68. *Zhang J.* Powerful goodness-of-fit and multi-sample tests / J. Zhang // PhD The­sis. York University, Toronto. 2001. – 113 p. URL: http://www.collectionscanada.gc.ca/obj/s4/f2/dsk3/ftp05/NQ66371.pdf (дата обращения 28.01.2013).
69. *Zhang J.* Powerful Two-Sample Tests Based on the Likelihood Ratio / J. Zhang // Technometrics. – 2006. – V. 48. – No. 1. – P.95-103. DOI 10.1198/004017005000000328
70. *Zhang J., Wu Y.* k-Sample tests based on the likelihood ratio // Computational Statistics & Data Analysis. – 2007. – V. 51. – No. 9. – P. 4682-4691.
71. *Большев Л. Н.* Таблицы математической статистики / Л. Н. Большев, Н. В. Смирнов. – М. : Наука, 1983. – 416 с.
72. *Боровков А. А.* К задаче о двух выборках / А. А. Боровков // Изв. АН СССР, Сер. матем. – 1962. – Т. 26. – С. 605–624.
73. *Ван дер Варден Б.Л*. Математическая статистика. – М.: Иностранная литература, 1960. – 435 с.
74. *Гаек Я.*, *Шидак З.* Теория ранговых критериев. – Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1971. – 376 с.
75. *Закс Л.* Статистическое оценивание / Л. Закс. – М. : Статистика, 1976. – 598 с.
76. *Кобзарь А. И.* Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников / А. И. Кобзарь. – М. : Физматлит, 2006. – 816 с.
77. *Королюк В. С.* Асимптотический анализ распределений максимальных ук­лонений в схеме Бернулли // Теория вероятностей и ее применения. – 1959. – Т.4. – С. 369-397.
78. Крамер Г. Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975. – 648 с.
79. *Лемешко Б.Ю.* О задаче идентификации закона распределения случай­ной составляющей погрешности измерений // Метрология. 2004. № 7. ­С. 8-17.
80. *Лемешко Б.Ю.* Непараметрические критерии согласия. Руководство по применению. М.: ИНФРА-М, 2014. 163 с. DOI: 10.12737/11873
81. *Лемешко Б.Ю.* Критерии проверки отклонения распределения от нормального закона. Руководство по применению. М.: ИНФРА-М, 2015. 160 с. (Научная мысль). DOI: 10.12737/6086
82. *Лемешко Б.Ю., Блинов П.Ю.* Критерии проверки отклонения распределения от равномерного закона. Руководство по применению. М.: ИНФРА-М, 2015. 183 с. (Научная мысль). DOI: 10.12737/11304
83. *Лемешко Б. Ю.* Статистический анализ одномерных наблюдений слу­чай­ных величин : программная система / Б. Ю. Лемешко. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 1995. – 125 с.
84. *Лемешко Б. Ю.* Модели распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с использованием оценок максимального правдоподобия. Ч. I / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко // Измерительная техника. – 2009. – № 6. – С. 3–11.
85. *Лемешко Б. Ю.* Модели распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с использованием оценок максимального правдоподобия. Ч. II / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко // Измерительная техника. – 2009. – № 8. – С. 17–26.
86. *Лемешко Б. Ю.* О сходимости распределений статистик и мощности критериев однородности Смирнова и Лемана–Розенблатта / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко // Измерительная техника. – 2005. – № 12. – С. 9–14.
87. *Лемешко Б.Ю.*  О применении критериев проверки однородности законов распределения / Б.Ю.  Лемешко, С.Б. Лемешко, И.В. Веретельникова // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2017. – № 41. – С. 24-31.
88. *Лемешко Б. Ю.* Об устойчивости и мощности критериев проверки однородности средних / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко // Измерительная техника. – 2008. – № 9. – С. 23–28.
89. *Лемешко Б. Ю.* О применении и мощности критериев проверки однородности дисперсий. Ч. I. Параметрические критерии / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко, А. А. Горбунова // Измерительная техника. – 2010. – № 3. – С. 10–16.
90. *Лемешко Б. Ю.* О применении и мощности критериев проверки однородности дисперсий. Ч. II. Непараметрические критерии / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко, А. А. Горбунова // Измерительная техника. – 2010. – № 5. – С. 11–18.
91. *Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б., Постовалов С.Н., Чимитова Е.В.*Статистический анализ данных, моделирование и исследование вероятностных закономерностей. Компьютерный подход: Монография. Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2011. 888 с.
92. *Лемешко Б. Ю.* Исследование критериев проверки гипотез, используемых в задачах управления качеством / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко, Е. П. Миркин // АПЭП-2004. Актуальные проблемы электронного приборостроения : материалы VII междунар. конф. – Новосибирск, 2004. – Т. 6. – С. 269–272.
93. *Лемешко Б. Ю.* Критерии Бартлетта и Кокрена в измерительных задачах при вероятностных законах, отличающихся от нормального / Б. Ю. Лемешко, Е. П. Миркин // Измерительная техника. – 2004. – № 10. – С. 10–16.
94. *Лемешко Б. Ю.* Корреляционный анализ наблюдений многомерных случайных величин при нарушении предположений о нормальности /   
    Б. Ю. Лемешко, С. С. Помадин // Сибирский журнал индустриальной математики. 2002. – Т. 5, № 3. – С. 115–130.
95. *Лемешко Б. Ю.* Проверка гипотез о математических ожиданиях и дисперсиях в задачах метрологии и контроля качества при вероятностных законах, отличающихся от нормального / Б. Ю. Лемешко, С. С. Помадин // Метрология, 2004. – № 3. – С. 3–15.
96. *Лемешко Б. Ю.* Исследование распределений статистик, используемых для проверки гипотез о равенстве дисперсий при законах ошибок, отличных от нормального / Б. Ю. Лемешко, В. М. Пономаренко // Науч. вест. НГТУ. – 2006. – № 2(23). – С. 21–33.
97. *Лемешко Б. Ю.* Компьютерные технологии анализа данных и исследования статистических закономерностей : учеб. пособие / Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2004. – 120 с.
98. *Лемешко Б. Ю.* Компьютерные технологии анализа данных и исследования статистических закономерностей : метод. указания к выполнению лаб. работ / Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов, С. Б. Лемешко. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2007. – 71 с.
99. *Макаров А.А., Симонова Г.И.* Исследование мощности двухвыборочного критерия Андерсена–Дарлинга в случае засорения одной из выборок. // Статистические методы оценивания и проверки гипотез. Межвуз. сб. науч. тр. № 20, Перм. ун-т. – Пермь, 2007 – с. 40-52.
100. *Миттаг Х.-Й.* Статистические методы обеспечения качества /   
     Х.-Й. Миттаг, Х. Ринне. – М. : Машиностроение. 1995. – 600 с.
101. *Орлов А. И*. О проверке однородности двух независимых выборок / А. И. Орлов // Завод. лаб. – 2003. – Т. 69, №. 1. – С. 55–60.
102. *Постовалов С.Н*. Применение компьютерного моделирования для расширения прикладных возможностей классических методов проверки статистических гипотез. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. Новосибирск. 2013. 298 с.
103. Программная система статистического анализа одномерных случайных величин – ISW. URL: http://ami.nstu.ru/~headrd/ISW.htm (дата обращения 12.07.2016)
104. Р 50.1.033–2001. Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Ч. I. Критерии типа хи-квадрат. – М. : Изд-во стандартов, 2002. – 87 с.
105. Р 50.1.037–2002. Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Ч. II. Непараметрические критерии. – М. : Изд-во стандартов, 2002. – 64 с.
106. *Смирнов Н. В.* Вероятности больших значений непараметрических односторонних критериев согласия / Н. В. Смирнов // Тр. матем. ин-та   
     АН СССР. – 1961. – Т. 64. – С. 185–210.
107. *Смирнов Н. В.* Оценка расхождения между эмпирическими кривыми распределения в двух независимых выборках / Н. В. Смирнов // Бюл. МГУ, Серия А. – 1939. – Т. 2, № 2. – С. 3–14.

# Приложение А

##### Таблица A.1

#### Функция распределения Колмогорова K(S)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *S* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 0.2 | 0.000000 | 000 000 | 000 000 | 000 000 | 000 000 | 000 000 | 000 000 | 000 000 | 000 001 | 000 004 |
| 0.3 | 0.000009 | 000 021 | 000 046 | 000 091 | 000 171 | 000 303 | 000 511 | 000 826 | 001 285 | 001 929 |
| 0.4 | 0.002808 | 003 972 | 005 476 | 007 377 | 009 730 | 012 589 | 016 005 | 020 022 | 024 682 | 030 017 |
| 0.5 | 0.036055 | 042 814 | 050 306 | 058 534 | 067 497 | 077 183 | 087 577 | 098 656 | 110 394 | 122 760 |
| 0.6 | 0.135718 | 149 229 | 163 255 | 177 752 | 192 677 | 207 987 | 223 637 | 239 582 | 255 780 | 272 188 |
| 0.7 | 0.288765 | 305 471 | 322 265 | 339 114 | 355 981 | 372 833 | 389 640 | 406 372 | 423 002 | 439 505 |
| 0.8 | 0.455858 | 472 039 | 488 028 | 503 809 | 519 365 | 534 682 | 549 745 | 564 545 | 579 071 | 593 315 |
| 0.9 | 0.607269 | 620 928 | 634 285 | 647 337 | 660 081 | 672 515 | 684 836 | 696 445 | 707 941 | 719 126 |
| 1.0 | 0.730000 | 740 566 | 750 825 | 760 781 | 770 436 | 779 794 | 788 860 | 797 637 | 806 130 | 814 343 |
| 1.1 | 0.822282 | 829 951 | 837 356 | 844 502 | 851 395 | 858 040 | 864 443 | 870 610 | 876 546 | 882 258 |
| 1.2 | 0.887750 | 893 030 | 898 102 | 903 973 | 907 648 | 912 134 | 916 435 | 920 557 | 924 506 | 928 288 |
| 1.3 | 0.931908 | 935 371 | 938 682 | 941 847 | 944 871 | 947 758 | 950 514 | 953 144 | 955 651 | 958 041 |
| 1.4 | 0.960318 | 962 487 | 964 551 | 966 515 | 968 383 | 970 159 | 971 846 | 973 448 | 974 969 | 976 413 |
| 1.5 | 0.977782 | 979 080 | 980 310 | 981 475 | 982 579 | 983 623 | 984 610 | 985 544 | 986 427 | 987 261 |
| 1.6 | 0.988048 | 988 791 | 989 492 | 990 154 | 990 777 | 991 364 | 991 917 | 992 438 | 992 928 | 993 389 |
| 1.7 | 0.993823 | 994 230 | 994 612 | 994 972 | 995 309 | 995 625 | 995 922 | 996 200 | 996 460 | 996 704 |
| 1.8 | 0.996932 | 997 146 | 997 346 | 997 533 | 997 707 | 997 870 | 998 023 | 998 165 | 998 297 | 998 421 |
| 1.9 | 0.998536 | 998 644 | 998 744 | 998 837 | 998 924 | 999 004 | 999 079 | 999 149 | 999 213 | 999 273 |
| 2.0 | 0.999329 | 999 381 | 999 429 | 999 473 | 999 514 | 999 553 | 999 588 | 999 620 | 999 651 | 999 679 |
| 2.1 | 0.999705 | 999 728 | 999 750 | 999 771 | 999 790 | 999 807 | 999 823 | 999 837 | 999 851 | 999 863 |
| 2.2 | 0.999874 | 999 886 | 999 895 | 999 904 | 999 912 | 999 920 | 999 927 | 999 933 | 999 939 | 999 944 |
| 2.3 | 0.999949 | 999 954 | 999 958 | 999 961 | 999 965 | 999 968 | 999 971 | 999 974 | 999 976 | 999 978 |
| 2.4 | 0.999980 | 999 982 | 999 984 | 999 985 | 999 987 | 999 988 | 999 989 | 999 990 | 999 991 | 999 992 |

#### 

##### Таблица A.2

#### Функция распределения a1(S)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *S* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 0.0 | 0.00000 | 00 001 | 00 300 | 02 568 | 06 685 | 12 372 | 18 602 | 24 844 | 30 815 | 36 386 |
| 0.1 | 0.41513 | 46 196 | 50 457 | 54 329 | 57 846 | 61 042 | 63 951 | 66 600 | 69 019 | 71 229 |
| 0.2 | 0.73253 | 75 109 | 76 814 | 78 383 | 79 829 | 81 163 | 82 396 | 83 536 | 84 593 | 85 573 |
| 0.3 | 0.86483 | 87 329 | 88 115 | 88 848 | 89 531 | 90 167 | 90 762 | 91 317 | 91 836 | 92 321 |
| 0.4 | 0.92775 | 93 201 | 93 599 | 93 972 | 94 323 | 94 651 | 94 960 | 95 249 | 95 521 | 95 777 |
| 0.5 | 0.96017 | 96 242 | 96 455 | 96 655 | 96 843 | 97 020 | 97 186 | 97 343 | 97 491 | 97 630 |
| 0.6 | 0.97762 | 97 886 | 98 002 | 98 112 | 98 216 | 98 314 | 98 406 | 98 493 | 98 575 | 98 653 |
| 0.7 | 0.98726 | 98 795 | 98 861 | 98 922 | 98 981 | 99 036 | 99 088 | 99 137 | 99 183 | 99 227 |
| 0.8 | 0.99268 | 99 308 | 99 345 | 99 380 | 99 413 | 99 444 | 99 474 | 99 502 | 99 528 | 99 553 |
| 0.9 | 0.99577 | 99 599 | 99 621 | 99 641 | 99 660 | 99 678 | 99 695 | 99 711 | 99 726 | 99 740 |
| 1.0 | 0.99754 | 99 764 | 99 776 | 99 787 | 99 799 | 99 812 | 99 820 | 99 828 | 99 837 | 99 847 |
| 1.1 | 0.99856 | 99 862 | 99 869 | 99 876 | 99 883 | 99 890 | 99 895 | 99 900 | 99 905 | 99 910 |
| 1.2 | 0.99916 | 99 919 | 99 923 | 99 927 | 99 931 | 99 935 | 99 938 | 99 941 | 99 944 | 99 947 |
| 1.3 | 0.99950 | 99 953 | 99 955 | 99 957 | 99 959 | 99 962 | 99 964 | 99 965 | 99 967 | 99 969 |
| 1.4 | 0.99971 | 99 972 | 99 973 | 99 975 | 99 976 | 99 978 | 99 978 | 99 979 | 99 980 | 99 980 |

##### Таблица A.3

#### Функция распределения *a*2(*S*)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| S | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 0.0 | 0.00000 | 00 000 | 00 000 | 00 000 | 00 000 | 00 000 | 00 000 | 00 000 | 00 000 | 00 001 |
| 0.1 | 0.00003 | 00 008 | 00 020 | 00 043 | 00 081 | 00 141 | 00 228 | 00 349 | 00 508 | 00 710 |
| 0.2 | 0.00959 | 01 256 | 01 605 | 02 005 | 02 457 | 02 961 | 03 514 | 04 115 | 04 762 | 05 453 |
| 0.3 | 0.06184 | 06 954 | 07 759 | 08 596 | 09 463 | 10 356 | 11 273 | 12 211 | 13 168 | 14 140 |
| 0.4 | 0.15127 | 16 124 | 17 132 | 18 146 | 19 166 | 20 190 | 21 217 | 22 244 | 23 271 | 24 296 |
| 0.5 | 0.25319 | 26 337 | 27 351 | 28 359 | 29 360 | 30 355 | 31 342 | 32 320 | 33 290 | 34 250 |
| 0.6 | 0.35200 | 36 141 | 37 071 | 37 991 | 38 900 | 39 798 | 40 684 | 41 560 | 42 424 | 43 277 |
| 0.7 | 0.44118 | 44 947 | 45 765 | 46 572 | 47 367 | 48 150 | 48 922 | 49 683 | 50 432 | 51 170 |
| 0.8 | 0.51897 | 52 613 | 53 318 | 54 012 | 54 695 | 55 368 | 56 030 | 56 682 | 57 324 | 57 956 |
| 0.9 | 0.58577 | 59 189 | 59 791 | 60 383 | 60 966 | 61 540 | 62 104 | 62 660 | 63 206 | 63 744 |
| 1.0 | 0.64273 | 64 794 | 65 306 | 65 811 | 66 307 | 66 795 | 67 275 | 67 748 | 68 213 | 68 670 |
| 1.1 | 0.69120 | 69 563 | 69 999 | 70 428 | 70 851 | 71 266 | 71 675 | 72 077 | 72 473 | 72 863 |
| 1.2 | 0.73247 | 73 624 | 73 996 | 74 361 | 74 721 | 75 075 | 75 424 | 75 767 | 76 105 | 76 438 |
| 1.3 | 0.76765 | 77 088 | 77 405 | 77 717 | 78 025 | 78 328 | 78 626 | 78 919 | 79 209 | 79 493 |
| 1.4 | 0.79773 | 80 049 | 80 321 | 80 589 | 80 852 | 81 112 | 81 368 | 81 620 | 81 868 | 82 112 |
| 1.5 | 0.82352 | 82 589 | 82 823 | 83 053 | 83 279 | 83 503 | 83 723 | 83 939 | 84 153 | 84 363 |
| 1.6 | 0.84570 | 84 774 | 84 975 | 85 173 | 85 369 | 85 561 | 85 751 | 85 938 | 86 122 | 86 303 |
| 1.7 | 0.86482 | 86 659 | 86 832 | 87 004 | 87 173 | 87 339 | 87 503 | 87 665 | 87 824 | 87 981 |

Окончание табл. A.3

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| S | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 1.8 | 0.88136 | 88 289 | 88 439 | 88 588 | 88 734 | 88 878 | 89 021 | 89 161 | 89 299 | 89 435 |
| 1.9 | 0.89570 | 89 703 | 89 833 | 89 962 | 90 089 | 90 215 | 90 338 | 90 460 | 90 581 | 90 699 |
| 2.0 | 0.90816 | 90 932 | 91 046 | 91 158 | 91 269 | 91 378 | 91 486 | 91 592 | 91 697 | 91 800 |
| 2.1 | 0.91902 | 92 003 | 92 102 | 92 200 | 92 297 | 92 392 | 92 486 | 92 579 | 92 671 | 92 761 |
| 2.2 | 0.92851 | 92 939 | 93 025 | 93 111 | 93 196 | 93 279 | 93 361 | 93 443 | 93 523 | 93 602 |
| 2.3 | 0.93680 | 93 757 | 93 833 | 93 908 | 93 983 | 94 056 | 94 128 | 94 199 | 94 269 | 94 339 |
| 2.4 | 0.94407 | 94 475 | 94 542 | 94 608 | 94 673 | 94 737 | 94 800 | 94 863 | 94 925 | 94 986 |
| 2.5 | 0.95046 | 95 105 | 95 164 | 95 222 | 95 279 | 95 336 | 95 391 | 95 446 | 95 501 | 95 554 |
| 2.6 | 0.95607 | 95 660 | 95 711 | 95 762 | 95 813 | 95 862 | 95 912 | 95 960 | 96 008 | 96 055 |
| 2.7 | 0.96102 | 96 148 | 96 194 | 96 239 | 96 283 | 96 327 | 96 370 | 96 413 | 96 455 | 96 497 |
| 2.8 | 0.96538 | 96 579 | 96 619 | 96 659 | 96 698 | 96 737 | 96 775 | 96 813 | 96 850 | 96 887 |
| 2.9 | 0.96923 | 96 959 | 96 995 | 97 030 | 97 064 | 97 099 | 97 132 | 97 166 | 97 199 | 97 231 |
| 3.0 | 0.97263 | 97 295 | 97 327 | 97 358 | 97 388 | 97 419 | 97 449 | 97 478 | 97 507 | 97 536 |
| 3.1 | 0.97565 | 97 593 | 97 621 | 97 648 | 97 675 | 97 702 | 97 729 | 97 755 | 97 781 | 97 806 |
| 3.2 | 0.97831 | 97 856 | 97 881 | 97 905 | 97 929 | 97 953 | 97 977 | 98 000 | 98 023 | 98 046 |
| 3.3 | 0.98068 | 98 090 | 98 112 | 98 134 | 98 155 | 98 176 | 98 197 | 98 217 | 98 238 | 98 258 |
| 3.4 | 0.98278 | 98 297 | 98 317 | 98 336 | 98 355 | 98 374 | 98 392 | 98 410 | 98 429 | 98 447 |
| 3.5 | 0.98464 | 98 482 | 98 499 | 98 516 | 98 533 | 98 549 | 98 566 | 98 582 | 98 598 | 98 614 |
| 3.6 | 0.98630 | 98 645 | 98 660 | 98 676 | 98 691 | 98 705 | 98 720 | 98 734 | 98 749 | 98 763 |
| 3.7 | 0.98777 | 98 791 | 98 804 | 98 818 | 98 831 | 98 844 | 98 857 | 98 870 | 98 883 | 98 895 |
| 3.8 | 0.98908 | 98 920 | 98 932 | 98 944 | 98 956 | 98 968 | 98 979 | 98 991 | 99 002 | 99 013 |
| 3.9 | 0.99024 | 99 035 | 99 046 | 99 057 | 99 067 | 99 078 | 99 088 | 99 098 | 99 108 | 99 118 |
| 4.0 | 0.99128 | 99 221 | 99 303 | 99 377 | 99 442 | 99 501 | 99 553 | 99 600 | 99 642 | 99 679 |
| 5.0 | 0.99713 | 99 742 | 99 769 | 99 793 | 99 814 | 99 834 | 99 851 | 99 866 | 99 880 | 99 892 |
| 6.0 | 0.99903 | 99 913 | 99 922 | 99 930 | 99 937 | 99 944 | 99 949 | 99 954 | 99 959 | 99 963 |
| 7.0 | 0.99967 | 99 970 | 99 973 | 99 976 | 99 978 | 99 981 | 99 983 | 99 984 | 99 986 | 99 987 |
| 8.0 | 0.99989 | 99 990 | 99 991 | 99 992 | 99 993 | 99 993 | 99 994 | 99 995 | 99 995 | 99 996 |
| 9.0 | 0.99996 | – | – | – | – | – | – | – | – | – |

##### Таблица A.4

#### Процентные точки распределения Колмогорова

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Функция  распределения | Верхние процентные точки | | | | |
| 0.15 | 0.1 | 0.05 | 0.025 | 0.01 |
|  | 1.1379 | 1.2238 | 1.3581 | 1.4802 | 1.6276 |

##### Таблица A.5

#### Процентные точки распределения a1(S)

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Функция  распределения | Верхние процентные точки | | | | |
| 0.15 | 0.1 | 0.05 | 0.025 | 0.01 |
|  | 0.2841 | 0.3473 | 0.4614 | 0.5806 | 0.7434 |

##### Таблица A.6

#### Процентные точки распределения *a*2(*S*)

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Функция распределения | Верхние процентные точки | | | | |
| 0.15 | 0.1 | 0.05 | 0.025 | 0.01 |
|  | 1.6212 | 1.9330 | 2.4924 | 3.0775 | 3.8781 |

Таблица А.7

Верхние процентные точки для статистики критерия Бартлетта при нормальном законе и



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | |  | | |  | | |  | | |  | | |
|  | | |  | | |  | | |  | | |  | | |
| 0.1 | 0.05 | 0.01 | 0.1 | 0.05 | 0.01 | 0.1 | 0.05 | 0.01 | 0.1 | 0.05 | 0.01 | 0.1 | 0.05 | 0.01 |
| 3 | 2.654 | 3.721 | 6.271 | 4.506 | 5.788 | 8.749 | 6.126 | 7.552 | 10.807 | 7.604 | 9.161 | 12.700 | 9.000 | 10.681 | 14.494 |
| 4 | 2.692 | 3.801 | 6.482 | 4.622 | 5.980 | 9.079 | 6.271 | 7.788 | 11.176 | 7.794 | 9.442 | 13.104 | 9.226 | 10.988 | 14.899 |
| 5 | 2.701 | 3.823 | 6.535 | 4.637 | 6.022 | 9.205 | 6.300 | 7.861 | 11.343 | 7.845 | 9.540 | 13.252 | 9.301 | 11.110 | 15.039 |
| 6 | 2.705 | 3.832 | 6.588 | 4.646 | 6.045 | 9.271 | 6.313 | 7.892 | 11.414 | 7.855 | 9.573 | 13.344 | 9.328 | 11.169 | 15.161 |
| 7 | 2.709 | 3.839 | 6.597 | 4.644 | 6.049 | 9.307 | 6.313 | 7.897 | 11.462 | 7.863 | 9.594 | 13.396 | 9.331 | 11.186 | 15.214 |
| 8 | 2.703 | 3.829 | 6.607 | 4.643 | 6.054 | 9.309 | 6.308 | 7.897 | 11.474 | 7.860 | 9.602 | 13.432 | 9.331 | 11.191 | 15.233 |
| 9 | 2.702 | 3.832 | 6.608 | 4.643 | 6.050 | 9.318 | 6.309 | 7.894 | 11.475 | 7.859 | 9.597 | 13.432 | 9.325 | 11.187 | 15.236 |
| 10 | 2.704 | 3.837 | 6.619 | 4.635 | 6.040 | 9.318 | 6.305 | 7.897 | 11.487 | 7.856 | 9.592 | 13.442 | 9.321 | 11.183 | 15.258 |
| 15 | 2.704 | 3.837 | 6.619 | 4.630 | 6.035 | 9.307 | 6.291 | 7.884 | 11.481 | 7.833 | 9.578 | 13.440 | 9.298 | 11.168 | 15.266 |
| 20 | 2.704 | 3.838 | 6.621 | 4.625 | 6.026 | 9.300 | 6.282 | 7.874 | 11.464 | 7.823 | 9.561 | 13.429 | 9.290 | 11.157 | 15.227 |
| 30 | 2.708 | 3.844 | 6.333 | 4.622 | 6.019 | 9.262 | 6.270 | 7.854 | 11.437 | 7.811 | 9.543 | 13.375 | 9.270 | 11.134 | 15.197 |
|  | 2.706 | 3.841 | 6.635 | 4.605 | 5.991 | 9.210 | 6.251 | 7.815 | 11.345 | 7.779 | 9.488 | 13.277 | 9.236 | 11.070 | 15.086 |

Таблица А.8

Верхние процентные точки для статистики критерия Кокрена при нормальном законе и



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | |  | | |  | | |  | | |  | | |
|  | | |  | | |  | | |  | | |  | | |
| 0.1 | 0.05 | 0.01 | 0.1 | 0.05 | 0.01 | 0.1 | 0.05 | 0.01 | 0.1 | 0.05 | 0.01 | 0.1 | 0.05 | 0.01 |
| 5 | 0.865 | 0.906 | 0.959 | 0.700 | 0.752 | 0.839 | 0.584 | 0.634 | 0.727 | 0.503 | 0.550 | 0.641 | 0.443 | 0.485 | 0.570 |
| 8 | 0.791 | 0.833 | 0.899 | 0.614 | 0.658 | 0.741 | 0.501 | 0.541 | 0.619 | 0.426 | 0.461 | 0.532 | 0.370 | 0.402 | 0.466 |
| 10 | 0.761 | 0.801 | 0.868 | 0.581 | 0.622 | 0.698 | 0.470 | 0.506 | 0.576 | 0.397 | 0.428 | 0.491 | 0.344 | 0.371 | 0.427 |
| 15 | 0.713 | 0.748 | 0.811 | 0.531 | 0.564 | 0.628 | 0.424 | 0.453 | 0.510 | 0.355 | 0.379 | 0.429 | 0.306 | 0.327 | 0.370 |
| 20 | 0.684 | 0.716 | 0.774 | 0.502 | 0.531 | 0.588 | 0.399 | 0.422 | 0.471 | 0.332 | 0.352 | 0.394 | 0.284 | 0.302 | 0.339 |
| 25 | 0.665 | 0.694 | 0.748 | 0.484 | 0.509 | 0.560 | 0.382 | 0.403 | 0.445 | 0.316 | 0.334 | 0.371 | 0.270 | 0.286 | 0.318 |
| 30 | 0.650 | 0.677 | 0.727 | 0.470 | 0.493 | 0.539 | 0.369 | 0.388 | 0.427 | 0.305 | 0.321 | 0.354 | 0.260 | 0.274 | 0.302 |
| 40 | 0.630 | 0.654 | 0.699 | 0.450 | 0.470 | 0.510 | 0.352 | 0.368 | 0.401 | 0.290 | 0.303 | 0.331 | 0.247 | 0.258 | 0.282 |
| 50 | 0.617 | 0.638 | 0.679 | 0.437 | 0.455 | 0.490 | 0.340 | 0.355 | 0.384 | 0.280 | 0.291 | 0.316 | 0.237 | 0.247 | 0.268 |
| 60 | 0.606 | 0.626 | 0.664 | 0.428 | 0.444 | 0.476 | 0.332 | 0.345 | 0.371 | 0.272 | 0.283 | 0.305 | 0.231 | 0.240 | 0.258 |
| 70 | 0.598 | 0.617 | 0.652 | 0.421 | 0.435 | 0.465 | 0.326 | 0.337 | 0.361 | 0.266 | 0.276 | 0.296 | 0.226 | 0.234 | 0.251 |
| 80 | 0.592 | 0.609 | 0.642 | 0.415 | 0.429 | 0.456 | 0.320 | 0.331 | 0.354 | 0.262 | 0.271 | 0.289 | 0.221 | 0.229 | 0.245 |
| 90 | 0.587 | 0.603 | 0.634 | 0.410 | 0.423 | 0.449 | 0.316 | 0.326 | 0.348 | 0.258 | 0.266 | 0.284 | 0.218 | 0.225 | 0.240 |
| 100 | 0.582 | 0.598 | 0.628 | 0.406 | 0.418 | 0.443 | 0.313 | 0.322 | 0.342 | 0.255 | 0.263 | 0.279 | 0.215 | 0.222 | 0.236 |

Таблица А.9

Верхние процентные точки для статистики Кокрена в случае семейства законов (4.3) при и



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | |  | | |  | | |  | | |  | | |
|  | | |  | | |  | | |  | | |  | | |
| 0.1 | 0.05 | 0.01 | 0.1 | 0.05 | 0.01 | 0.1 | 0.05 | 0.01 | 0.1 | 0.05 | 0.01 | 0.1 | 0.05 | 0.01 |
| 5 | 0.917 | 0.947 | 0.980 | 0.865 | 0.906 | 0.959 | 0.845 | 0.890 | 0.950 | 0.836 | 0.883 | 0.947 | 0.831 | 0.879 | 0.945 |
| 8 | 0.862 | 0.900 | 0.949 | 0.791 | 0.833 | 0.899 | 0.764 | 0.807 | 0.877 | 0.751 | 0.794 | 0.866 | 0.744 | 0.787 | 0.861 |
| 10 | 0.836 | 0.875 | 0.930 | 0.761 | 0.801 | 0.868 | 0.733 | 0.773 | 0.842 | 0.720 | 0.759 | 0.829 | 0.713 | 0.751 | 0.822 |
| 15 | 0.789 | 0.829 | 0.890 | 0.713 | 0.748 | 0.811 | 0.686 | 0.719 | 0.780 | 0.674 | 0.706 | 0.765 | 0.667 | 0.698 | 0.757 |
| 20 | 0.759 | 0.797 | 0.858 | 0.684 | 0.716 | 0.774 | 0.660 | 0.689 | 0.743 | 0.648 | 0.676 | 0.728 | 0.642 | 0.669 | 0.720 |
| 25 | 0.736 | 0.772 | 0.834 | 0.665 | 0.694 | 0.748 | 0.642 | 0.668 | 0.717 | 0.632 | 0.656 | 0.703 | 0.626 | 0.649 | 0.695 |
| 30 | 0.718 | 0.753 | 0.814 | 0.650 | 0.677 | 0.727 | 0.629 | 0.653 | 0.699 | 0.619 | 0.642 | 0.685 | 0.614 | 0.635 | 0.677 |
| 40 | 0.693 | 0.725 | 0.782 | 0.630 | 0.654 | 0.699 | 0.611 | 0.632 | 0.672 | 0.603 | 0.622 | 0.660 | 0.598 | 0.616 | 0.653 |
| 50 | 0.674 | 0.704 | 0.758 | 0.617 | 0.638 | 0.679 | 0.599 | 0.618 | 0.654 | 0.591 | 0.609 | 0.642 | 0.587 | 0.604 | 0.636 |
| 60 | 0.660 | 0.689 | 0.740 | 0.606 | 0.626 | 0.664 | 0.591 | 0.608 | 0.640 | 0.583 | 0.599 | 0.630 | 0.579 | 0.594 | 0.624 |
| 70 | 0.649 | 0.676 | 0.724 | 0.598 | 0.617 | 0.652 | 0.584 | 0.599 | 0.630 | 0.577 | 0.591 | 0.620 | 0.573 | 0.587 | 0.614 |
| 80 | 0.640 | 0.665 | 0.712 | 0.592 | 0.609 | 0.642 | 0.578 | 0.593 | 0.621 | 0.572 | 0.585 | 0.612 | 0.568 | 0.581 | 0.607 |
| 90 | 0.632 | 0.657 | 0.701 | 0.587 | 0.603 | 0.634 | 0.573 | 0.587 | 0.614 | 0.567 | 0.580 | 0.605 | 0.564 | 0.576 | 0.600 |
| 100 | 0.626 | 0.649 | 0.692 | 0.582 | 0.598 | 0.628 | 0.570 | 0.583 | 0.609 | 0.564 | 0.576 | 0.600 | 0.561 | 0.572 | 0.595 |

Таблица А.10

Верхние процентные точки для статистики Кокрена в случае семейства законов (4.3) при и



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | |  | | |  | | |  | | |  | | |
|  | | |  | | |  | | |  | | |  | | |
| 0.1 | 0.05 | 0.01 | 0.1 | 0.05 | 0.01 | 0.1 | 0.05 | 0.01 | 0.1 | 0.05 | 0.01 | 0.1 | 0.05 | 0.01 |
| 5 | 0.794 | 0.847 | 0.918 | 0.700 | 0.752 | 0.839 | 0.665 | 0.717 | 0.806 | 0.649 | 0.700 | 0.790 | 0.641 | 0.690 | 0.781 |
| 8 | 0.716 | 0.768 | 0.852 | 0.614 | 0.658 | 0.741 | 0.579 | 0.620 | 0.698 | 0.563 | 0.602 | 0.677 | 0.554 | 0.591 | 0.665 |
| 10 | 0.681 | 0.732 | 0.817 | 0.581 | 0.622 | 0.698 | 0.548 | 0.584 | 0.654 | 0.533 | 0.567 | 0.634 | 0.524 | 0.557 | 0.622 |
| 15 | 0.623 | 0.669 | 0.751 | 0.531 | 0.564 | 0.628 | 0.503 | 0.531 | 0.588 | 0.489 | 0.516 | 0.569 | 0.482 | 0.508 | 0.558 |
| 20 | 0.587 | 0.629 | 0.707 | 0.502 | 0.531 | 0.588 | 0.477 | 0.501 | 0.550 | 0.466 | 0.488 | 0.533 | 0.459 | 0.480 | 0.524 |
| 25 | 0.562 | 0.600 | 0.673 | 0.484 | 0.509 | 0.560 | 0.461 | 0.482 | 0.526 | 0.450 | 0.470 | 0.510 | 0.444 | 0.463 | 0.501 |
| 30 | 0.543 | 0.578 | 0.647 | 0.470 | 0.493 | 0.539 | 0.449 | 0.468 | 0.507 | 0.439 | 0.457 | 0.493 | 0.434 | 0.451 | 0.485 |
| 40 | 0.515 | 0.547 | 0.608 | 0.450 | 0.470 | 0.510 | 0.432 | 0.449 | 0.482 | 0.424 | 0.439 | 0.470 | 0.419 | 0.434 | 0.463 |
| 50 | 0.496 | 0.525 | 0.581 | 0.437 | 0.455 | 0.490 | 0.421 | 0.436 | 0.465 | 0.414 | 0.427 | 0.454 | 0.410 | 0.422 | 0.448 |
| 60 | 0.482 | 0.508 | 0.560 | 0.428 | 0.444 | 0.476 | 0.413 | 0.426 | 0.453 | 0.406 | 0.418 | 0.443 | 0.402 | 0.414 | 0.437 |
| 70 | 0.471 | 0.495 | 0.543 | 0.421 | 0.435 | 0.465 | 0.407 | 0.419 | 0.444 | 0.401 | 0.412 | 0.434 | 0.397 | 0.408 | 0.429 |
| 80 | 0.462 | 0.485 | 0.530 | 0.415 | 0.429 | 0.456 | 0.402 | 0.413 | 0.436 | 0.396 | 0.406 | 0.427 | 0.393 | 0.403 | 0.422 |
| 90 | 0.455 | 0.476 | 0.518 | 0.410 | 0.423 | 0.449 | 0.398 | 0.408 | 0.430 | 0.392 | 0.402 | 0.422 | 0.389 | 0.398 | 0.417 |
| 100 | 0.449 | 0.469 | 0.509 | 0.406 | 0.418 | 0.443 | 0.394 | 0.405 | 0.425 | 0.389 | 0.398 | 0.417 | 0.386 | 0.395 | 0.413 |

Таблица А.11

Верхние процентные точки для статистики Кокрена в случае семейства законов (4.3) при и



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | |  | | |  | | |  | | |  | | |
|  | | |  | | |  | | |  | | |  | | |
| 0.1 | 0.05 | 0.01 | 0.1 | 0.05 | 0.01 | 0.1 | 0.05 | 0.01 | 0.1 | 0.05 | 0.01 | 0.1 | 0.05 | 0.01 |
| 5 | 0.696 | 0.755 | 0.848 | 0.584 | 0.634 | 0.727 | 0.545 | 0.591 | 0.679 | 0.527 | 0.571 | 0.656 | 0.517 | 0.560 | 0.643 |
| 8 | 0.611 | 0.666 | 0.761 | 0.501 | 0.541 | 0.619 | 0.466 | 0.500 | 0.569 | 0.450 | 0.482 | 0.546 | 0.441 | 0.471 | 0.533 |
| 10 | 0.575 | 0.626 | 0.720 | 0.470 | 0.506 | 0.576 | 0.438 | 0.468 | 0.529 | 0.423 | 0.451 | 0.507 | 0.415 | 0.441 | 0.495 |
| 15 | 0.517 | 0.561 | 0.646 | 0.424 | 0.453 | 0.510 | 0.397 | 0.421 | 0.468 | 0.385 | 0.406 | 0.450 | 0.378 | 0.398 | 0.439 |
| 20 | 0.482 | 0.521 | 0.598 | 0.399 | 0.422 | 0.471 | 0.375 | 0.395 | 0.435 | 0.364 | 0.382 | 0.419 | 0.358 | 0.375 | 0.410 |
| 25 | 0.457 | 0.493 | 0.563 | 0.382 | 0.403 | 0.445 | 0.360 | 0.378 | 0.413 | 0.351 | 0.366 | 0.398 | 0.346 | 0.360 | 0.390 |
| 30 | 0.439 | 0.471 | 0.536 | 0.369 | 0.388 | 0.427 | 0.350 | 0.365 | 0.397 | 0.341 | 0.355 | 0.384 | 0.336 | 0.349 | 0.377 |
| 40 | 0.413 | 0.441 | 0.498 | 0.352 | 0.368 | 0.401 | 0.335 | 0.348 | 0.348 | 0.328 | 0.340 | 0.364 | 0.324 | 0.335 | 0.358 |
| 50 | 0.395 | 0.420 | 0.470 | 0.340 | 0.355 | 0.384 | 0.326 | 0.337 | 0.361 | 0.319 | 0.329 | 0.351 | 0.315 | 0.325 | 0.345 |
| 60 | 0.382 | 0.404 | 0.451 | 0.332 | 0.345 | 0.371 | 0.319 | 0.329 | 0.350 | 0.313 | 0.322 | 0.341 | 0.309 | 0.318 | 0.336 |
| 70 | 0.372 | 0.392 | 0.435 | 0.326 | 0.337 | 0.361 | 0.313 | 0.323 | 0.342 | 0.308 | 0.316 | 0.334 | 0.305 | 0.313 | 0.329 |
| 80 | 0.364 | 0.383 | 0.422 | 0.320 | 0.331 | 0.354 | 0.309 | 0.318 | 0.336 | 0.304 | 0.312 | 0.328 | 0.301 | 0.309 | 0.324 |
| 90 | 0.357 | 0.375 | 0.412 | 0.316 | 0.326 | 0.348 | 0.305 | 0.314 | 0.331 | 0.300 | 0.308 | 0.324 | 0.298 | 0.305 | 0.320 |
| 100 | 0.352 | 0.368 | 0.403 | 0.313 | 0.322 | 0.342 | 0.302 | 0.310 | 0.327 | 0.298 | 0.305 | 0.320 | 0.295 | 0.302 | 0.316 |

Таблица А.12

Верхние процентные точки для статистики Кокрена в случае семейства законов (4.3) при и



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | |  | | |  | | |  | | |  | | |
|  | | |  | | |  | | |  | | |  | | |
| 0.1 | 0.05 | 0.01 | 0.1 | 0.05 | 0.01 | 0.1 | 0.05 | 0.01 | 0.1 | 0.05 | 0.01 | 0.1 | 0.05 | 0.01 |
| 5 | 0.623 | 0.684 | 0.787 | 0.504 | 0.551 | 0.642 | 0.464 | 0.505 | 0.588 | 0.446 | 0.484 | 0.562 | 0.436 | 0.472 | 0.548 |
| 8 | 0.537 | 0.591 | 0.690 | 0.426 | 0.461 | 0.533 | 0.392 | 0.421 | 0.482 | 0.376 | 0.403 | 0.458 | 0.367 | 0.393 | 0.446 |
| 10 | 0.501 | 0.550 | 0.645 | 0.397 | 0.428 | 0.491 | 0.366 | 0.392 | 0.444 | 0.352 | 0.375 | 0.422 | 0.344 | 0.366 | 0.411 |
| 15 | 0.445 | 0.485 | 0.567 | 0.355 | 0.379 | 0.429 | 0.330 | 0.349 | 0.390 | 0.318 | 0.336 | 0.372 | 0.312 | 0.329 | 0.363 |
| 20 | 0.412 | 0.447 | 0.520 | 0.332 | 0.352 | 0.394 | 0.310 | 0.326 | 0.360 | 0.300 | 0.315 | 0.345 | 0.295 | 0.308 | 0.337 |
| 25 | 0.388 | 0.420 | 0.485 | 0.316 | 0.334 | 0.371 | 0.297 | 0.311 | 0.341 | 0.288 | 0.301 | 0.328 | 0.283 | 0.295 | 0.320 |
| 30 | 0.370 | 0.399 | 0.459 | 0.305 | 0.321 | 0.354 | 0.287 | 0.300 | 0.327 | 0.279 | 0.291 | 0.315 | 0.275 | 0.286 | 0.308 |
| 40 | 0.347 | 0.371 | 0.371 | 0.290 | 0.303 | 0.331 | 0.275 | 0.285 | 0.308 | 0.268 | 0.278 | 0.298 | 0.264 | 0.273 | 0.292 |
| 50 | 0.330 | 0.352 | 0.397 | 0.280 | 0.291 | 0.316 | 0.266 | 0.276 | 0.295 | 0.260 | 0.269 | 0.286 | 0.257 | 0.265 | 0.281 |
| 60 | 0..318 | 0.337 | 0.378 | 0.272 | 0.283 | 0.304 | 0.220 | 0.227 | 0.242 | 0.254 | 0.262 | 0.278 | 0.252 | 0.259 | 0.274 |
| 70 | 0.309 | 0.326 | 0.363 | 0.266 | 0.276 | 0.296 | 0.255 | 0.263 | 0.279 | 0.250 | 0.257 | 0.272 | 0.247 | 0.254 | 0.268 |
| 80 | 0.301 | 0.318 | 0.352 | 0.262 | 0.271 | 0.289 | 0.251 | 0.259 | 0.274 | 0.247 | 0.253 | 0.267 | 0.244 | 0.250 | 0.263 |
| 90 | 0.295 | 0.310 | 0.342 | 0.258 | 0.266 | 0.284 | 0.248 | 0.255 | 0.269 | 0.244 | 0.250 | 0.263 | 0.242 | 0.247 | 0.259 |
| 100 | 0.290 | 0.304 | 0.334 | 0.255 | 0.263 | 0.279 | 0.246 | 0.252 | 0.265 | 0.242 | 0.247 | 0.259 | 0.239 | 0.245 | 0.256 |

Таблица А.13

Верхние процентные точки для статистики критерия Хартли при нормальном законе и



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | |  | | |  | | |  | | |  | | |
|  | | |  | | |  | | |  | | |  | | |
| 0.1 | 0.05 | 0.01 | 0.1 | 0.05 | 0.01 | 0.1 | 0.05 | 0.01 | 0.1 | 0.05 | 0.01 | 0.1 | 0.05 | 0.01 |
| 5 | 6.382 | 9.602 | 23.26 | 10.42 | 15.58 | 37.07 | 13.95 | 20.70 | 49.10 | 17.19 | 25.43 | 59.40 | 20.19 | 29.80 | 69.67 |
| 8 | 3.777 | 4.986 | 8.856 | 5.335 | 6.960 | 12.07 | 6.533 | 8.464 | 14.59 | 7.548 | 9.746 | 16.70 | 8.441 | 10.84 | 18.50 |
| 10 | 3.177 | 4.026 | 6.551 | 4.278 | 5.365 | 8.569 | 5.089 | 6.336 | 9.989 | 5.757 | 7.140 | 11.17 | 6.331 | 7.820 | 12.15 |
| 15 | 2.484 | 2.979 | 4.305 | 3.127 | 3.715 | 5.278 | 3.581 | 4.230 | 5.943 | 3.937 | 4.628 | 6.440 | 4.237 | 4.966 | 6.873 |
| 20 | 2.167 | 2.525 | 3.432 | 2.637 | 3.045 | 4.068 | 2.956 | 3.394 | 4.487 | 3.199 | 3.659 | 4.801 | 3.405 | 3.884 | 5.069 |
| 25 | 1.983 | 2.270 | 2.965 | 2.355 | 2.672 | 3.443 | 2.606 | 2.942 | 3.754 | 2.798 | 3.148 | 3.995 | 2.956 | 3.318 | 4.189 |
| 30 | 1.861 | 2.100 | 2.670 | 2.175 | 2.435 | 2.054 | 2.381 | 2.654 | 3.298 | 2.539 | 2.821 | 3.487 | 2.667 | 2.959 | 3.638 |
| 40 | 1.705 | 1.890 | 2.323 | 1.947 | 2.147 | 2.600 | 2.105 | 2.308 | 2.778 | 2.224 | 2.434 | 2.912 | 2.320 | 2.533 | 3.018 |
| 50 | 1.607 | 1.763 | 2.113 | 1.809 | 1.971 | 2.337 | 1.938 | 2.105 | 2.478 | 2.036 | 2.205 | 2.583 | 2.115 | 2.285 | 2.667 |
| 60 | 1.540 | 1.674 | 1.975 | 1.715 | 1.854 | 2.160 | 1.826 | 1.968 | 2.281 | 1.910 | 2.052 | 2.366 | 1.975 | 2.119 | 2.437 |
| 70 | 1.490 | 1.609 | 1.871 | 1.645 | 1.767 | 2.034 | 1.744 | 1.867 | 2.138 | 1.817 | 1.942 | 2.214 | 1.875 | 2.000 | 2.275 |
| 80 | 1.451 | 1.559 | 1.796 | 1.592 | 1.702 | 1.941 | 1.681 | 1.791 | 2.031 | 1.746 | 1.857 | 2.098 | 1.799 | 1.910 | 2.152 |
| 90 | 1.419 | 1.519 | 1.735 | 1.549 | 1.649 | 1.866 | 1.630 | 1.731 | 1.949 | 1.690 | 1.791 | 2.009 | 1.737 | 1.839 | 2.056 |
| 100 | 1.394 | 1.486 | 1.686 | 1.514 | 1.606 | 1.807 | 1.590 | 1.682 | 1.882 | 1.645 | 1.738 | 1.935 | 1.688 | 1.781 | 1.980 |

Таблица А.14

Верхние процентные точки для статистики критерия Левене при нормальном законе и



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | |  | | |  | | |  | | |  | | |
|  | | |  | | |  | | |  | | |  | | |
| 0.1 | 0.05 | 0.01 | 0.1 | 0.05 | 0.01 | 0.1 | 0.05 | 0.01 | 0.1 | 0.05 | 0.01 | 0.1 | 0.05 | 0.01 |
| 5 | 4.36 | 6.65 | 13.59 | 3.57 | 4.98 | 9.04 | 2.95 | 3.91 | 6.56 | 2.88 | 3.71 | 5.88 | 2.25 | 2.82 | 4.30 |
| 8 | 3.52 | 5.16 | 9.79 | 2.79 | 3.76 | 6.35 | 2.53 | 3.25 | 5.13 | 2.21 | 2.78 | 4.19 | 2.17 | 2.67 | 3.90 |
| 10 | 3.32 | 4.83 | 8.95 | 2.68 | 3.58 | 5.92 | 2.49 | 3.19 | 4.94 | 2.25 | 2.81 | 4.17 | 2.02 | 2.47 | 3.54 |
| 15 | 3.09 | 4.46 | 8.01 | 2.60 | 3.44 | 5.54 | 2.25 | 2.86 | 4.33 | 2.11 | 2.61 | 3.80 | 1.96 | 2.38 | 3.35 |
| 20 | 2.98 | 4.27 | 7.59 | 2.48 | 3.26 | 5.19 | 2.24 | 2.83 | 4.24 | 2.04 | 2.52 | 3.62 | 1.93 | 2.23 | 3.27 |
| 25 | 2.92 | 4.18 | 7.41 | 2.47 | 3.25 | 5.12 | 2.23 | 2.81 | 4.18 | 2.07 | 2.55 | 3.65 | 1.91 | 2.31 | 3.22 |
| 30 | 2.88 | 4.12 | 7.25 | 2.42 | 3.16 | 4.97 | 2.17 | 2.73 | 4.04 | 2.04 | 2.50 | 3.57 | 1.90 | 2.29 | 3.17 |
| 40 | 2.84 | 4.05 | 7.11 | 2.39 | 3.13 | 4.87 | 2.17 | 2.73 | 4.03 | 1.99 | 2.44 | 3.46 | 1.89 | 2.27 | 3.14 |
| 50 | 2.81 | 4.01 | 7.00 | 2.37 | 3.09 | 4.82 | 2.14 | 2.69 | 3.95 | 2.00 | 2.45 | 3.46 | 1.88 | 2.26 | 3.12 |
| 60 | 2.79 | 3.99 | 6.94 | 2.36 | 3.08 | 4.78 | 2.13 | 2.67 | 3.91 | 1.98 | 2.42 | 3.42 | 1.87 | 2.25 | 3.09 |
| 70 | 2.78 | 3.96 | 6.88 | 2.35 | 3.07 | 4.76 | 2.13 | 2.67 | 3.91 | 1.98 | 2.43 | 3.42 | 1.87 | 2.25 | 3.09 |
| 80 | 2.76 | 3.93 | 6.85 | 2.34 | 3.06 | 4.73 | 2.12 | 2.66 | 3.88 | 1.97 | 2.41 | 3.39 | 1.87 | 2.24 | 3.08 |
| 90 | 2.76 | 3.93 | 6.84 | 2.34 | 3.05 | 4.72 | 2.12 | 2.65 | 3.87 | 1.97 | 2.41 | 3.40 | 1.86 | 2.24 | 3.08 |
| 100 | 2.75 | 3.93 | 6.82 | 2.33 | 3.05 | 4.71 | 2.12 | 2.65 | 3.87 | 1.97 | 2.40 | 3.37 | 1.86 | 2.24 | 3.07 |

Таблица А.15

**Критические значения для статистики критерия Неймана-Пирсона**



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | 4 | | 5 | | 6 | | 7 | | 8 | | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 80 | 100 |
|  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | 2.295 | | 1.687 | | 1.461 | | 1.346 | | 1.276 | | 1.229 | | 1.197 | 1.172 | 1.137 | 1.105 | 1.076 | 1.049 | 1.036 | 1.028 | 1.023 | 1.017 | 1.014 |
| 3 | | 2.507 | | 1.801 | | 1.536 | | 1.400 | | 1.318 | | 1.265 | | 1.226 | 1.197 | 1.157 | 1.120 | 1.086 | 1.055 | 1.041 | 1.032 | 1.027 | 1.020 | 1.016 |
| 4 | | 2.523 | | 1.813 | | 1.545 | | 1.408 | | 1.324 | | 1.270 | | 1.230 | 1.201 | 1.160 | 1.123 | 1.088 | 1.056 | 1.041 | 1.033 | 1.027 | 1.020 | 1.016 |
| 5 | | 2.491 | | 1.801 | | 1.539 | | 1.404 | | 1.323 | | 1.268 | | 1.229 | 1.200 | 1.159 | 1.122 | 1.088 | 1.056 | 1.041 | 1.033 | 1.027 | 1.020 | 1.016 |
| 10 | | 2.311 | | 1.722 | | 1.494 | | 1.373 | | 1.299 | | 1.249 | | 1.213 | 1.187 | 1.149 | 1.114 | 1.082 | 1.053 | 1.039 | 1.031 | 1.025 | 1.019 | 1.015 |
| 20 | | 2.131 | | 1.641 | | 1.443 | | 1.337 | | 1.272 | | 1.227 | | 1.195 | 1.171 | 1.137 | 1.105 | 1.076 | 1.049 | 1.036 | 1.028 | 1.024 | 1.017 | 1.014 |
|  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | 3.199 | | 2.091 | | 1.712 | | 1.524 | | 1.412 | | 1.340 | | 1.290 | 1.252 | 1.200 | 1.152 | 1.109 | 1.070 | 1.051 | 1.040 | 1.033 | 1.025 | 1.020 |
| 3 | | 3.251 | | 2.142 | | 1.747 | | 1.550 | | 1.434 | | 1.358 | | 1.304 | 1.265 | 1.210 | 1.160 | 1.114 | 1.073 | 1.053 | 1.042 | 1.035 | 1.026 | 1.020 |
| 4 | | 3.130 | | 2.095 | | 1.721 | | 1.533 | | 1.421 | | 1.348 | | 1.296 | 1.258 | 1.204 | 1.156 | 1.111 | 1.071 | 1.052 | 1.041 | 1.034 | 1.025 | 1.020 |
| 5 | | 3.004 | | 2.041 | | 1.690 | | 1.512 | | 1.406 | | 1.337 | | 1.286 | 1.249 | 1.197 | 1.151 | 1.108 | 1.069 | 1.051 | 1.040 | 1.033 | 1.024 | 1.019 |
| 10 | | 2.625 | | 1.865 | | 1.584 | | 1.439 | | 1.351 | | 1.292 | | 1.250 | 1.218 | 1.174 | 1.133 | 1.096 | 1.061 | 1.045 | 1.036 | 1.029 | 1.022 | 1.017 |
| 20 | | 2.334 | | 1.733 | | 1.500 | | 1.379 | | 1.304 | | 1.254 | | 1.218 | 1.191 | 1.153 | 1.117 | 1.085 | 1.054 | 1.040 | 1.032 | 1.026 | 1.019 | 1.015 |
|  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 7.052 | | 3.515 | | 2.516 | | 2.062 | | 1.814 | | 1.656 | | 1.550 | | 1.474 | 1.370 | 1.278 | 1.196 | 1.123 | 1.090 | 1.071 | 1.059 | 1.043 | 1.034 |
| 3 | 5.940 | | 3.181 | | 2.354 | | 1.960 | | 1.741 | | 1.599 | | 1.507 | | 1.436 | 1.340 | 1.256 | 1.181 | 1.114 | 1.083 | 1.066 | 1.054 | 1.040 | 1.032 |
| 4 | 5.116 | | 2.887 | | 2.191 | | 1.856 | | 1.667 | | 1.544 | | 1.460 | | 1.397 | 1.311 | 1.235 | 1.166 | 1.105 | 1.077 | 1.060 | 1.050 | 1.037 | 1.029 |
| 5 | 4.582 | | 2.689 | | 2.075 | | 1.781 | | 1.610 | | 1.501 | | 1.424 | | 1.367 | 1.288 | 1.219 | 1.155 | 1.098 | 1.072 | 1.057 | 1.047 | 1.035 | 1.027 |
| 10 | 3.514 | | 2.231 | | 1.803 | | 1.592 | | 1.468 | | 1.388 | | 1.330 | | 1.288 | 1.228 | 1.174 | 1.124 | 1.079 | 1.058 | 1.046 | 1.038 | 1.028 | 1.022 |
| 20 | 2.980 | | 1.962 | | 1.635 | | 1.472 | | 1.376 | | 1.313 | | 1.267 | | 1.234 | 1.186 | 1.143 | 1.102 | 1.065 | 1.048 | 1.038 | 1.031 | 1.023 | 1.019 |

Таблица А.16

**Критические значения для статистики критерия О’Брайена**



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | 4 | | 5 | | 6 | | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 80 |
|  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | 1.591 | | 2.466 | | 2.744 | | 2.775 | | 2.784 | 2.784 | 2.793 | 2.796 | 2.796 | 2.789 | 2.780 | 2.767 | 2.763 | 2.753 | 2.753 | 2.738 |
| 3 | | 1.387 | | 2.085 | | 2.294 | | 2.308 | | 2.313 | 2.319 | 2.323 | 2.326 | 2.320 | 2.320 | 2.321 | 2.319 | 2.317 | 2.311 | 2.315 | 2.309 |
| 4 | | 1.283 | | 1.889 | | 2.066 | | 2.089 | | 2.095 | 2.097 | 2.102 | 2.099 | 2.095 | 2.095 | 2.093 | 2.092 | 2.093 | 2.088 | 2.091 | 2.086 |
| 5 | | 1.239 | | 1.776 | | 1.932 | | 1.956 | | 1.963 | 1.964 | 1.964 | 1.967 | 1.961 | 1.961 | 1.957 | 1.954 | 1.955 | 1.951 | 1.951 | 1.948 |
| 10 | | 1.145 | | 1.520 | | 1.620 | | 1.644 | | 1.650 | 1.654 | 1.655 | 1.656 | 1.652 | 1.652 | 1.648 | 1.643 | 1.642 | 1.639 | 1.640 | 1.637 |
| 20 | | 1.082 | | 1.355 | | 1.421 | | 1.441 | | 1.447 | 1.450 | 1.451 | 1.451 | 1.452 | 1.450 | 1.446 | 1.444 | 1.442 | 1.439 | 1.439 | 1.437 |
|  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 1.686 | | 4.122 | | 3.965 | | 3.852 | | 3.819 | | 3.823 | 3.826 | 3.845 | 3.833 | 3.832 | 3.842 | 3.859 | 3.862 | 3.854 | 3.864 | 3.856 |
| 3 | 1.509 | | 3.212 | | 3.163 | | 3.068 | | 3.047 | | 3.034 | 3.035 | 3.026 | 3.014 | 3.008 | 2.995 | 2.997 | 2.995 | 2.997 | 2.997 | 2.995 |
| 4 | 1.407 | | 2.710 | | 2.740 | | 2.692 | | 2.677 | | 2.665 | 2.662 | 2.652 | 2.645 | 2.634 | 2.622 | 2.613 | 2.612 | 2.608 | 2.607 | 2.608 |
| 5 | 1.356 | | 2.444 | | 2.497 | | 2.467 | | 2.454 | | 2.446 | 2.439 | 2.433 | 2.422 | 2.413 | 2.401 | 2.389 | 2.388 | 2.384 | 2.379 | 2.378 |
| 10 | 1.236 | | 1.885 | | 1.951 | | 1.956 | | 1.951 | | 1.948 | 1.944 | 1.940 | 1.932 | 1.926 | 1.917 | 1.905 | 1.900 | 1.896 | 1.895 | 1.890 |
| 20 | 1.156 | | 1.566 | | 1.624 | | 1.636 | | 1.636 | | 1.636 | 1.633 | 1.631 | 1.627 | 1.623 | 1.616 | 1.607 | 1.603 | 1.600 | 1.599 | 1.596 |
|  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 1.759 | | 13.92 | | 7.186 | | 6.726 | | 6.710 | | 6.571 | 6.480 | 6.503 | 6.422 | 6.384 | 6.378 | 6.419 | 6.487 | 6.476 | 6.509 | 6.534 |
| 3 | 1.663 | | 8.876 | | 5.551 | | 5.137 | | 5.062 | | 4.983 | 4.897 | 4.868 | 4.778 | 4.716 | 4.665 | 4.607 | 4.605 | 4.579 | 4.606 | 4.595 |
| 4 | 1.586 | | 6.391 | | 4.603 | | 4.297 | | 4.217 | | 4.157 | 4.094 | 4.065 | 4.012 | 3.939 | 3.893 | 3.849 | 3.825 | 3.806 | 3.809 | 3.801 |
| 5 | 1.540 | | 5.226 | | 4.064 | | 3.821 | | 3.735 | | 3.693 | 3.643 | 3.609 | 3.564 | 3.497 | 3.453 | 3.400 | 3.392 | 3.368 | 3.352 | 3.353 |
| 10 | 1.402 | | 3.094 | | 2.840 | | 2.746 | | 2.694 | | 2.657 | 2.638 | 2.619 | 2.591 | 2.554 | 2.521 | 2.484 | 2.467 | 2.454 | 2.446 | 2.441 |
| 20 | 1.298 | | 2.183 | | 2.138 | | 2.104 | | 2.079 | | 2.068 | 2.050 | 2.043 | 2.024 | 2.006 | 1.982 | 1.958 | 1.945 | 1.940 | 1.932 | 1.927 |

Таблица А.17

**Нижние критические значения статистики критерия Линка (отношения размахов)**



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 2 | 2 | 0.079 | 0.039 | 0.008 | 9 | 10 | 0.551 | 0.486 | 0.377 |
| 3 | 0.314 | 0.217 | 0.097 | 11 | 0.580 | 0.514 | 0.403 |
| 4 | 0.494 | 0.377 | 0.212 | 12 | 0.606 | 0.539 | 0.427 |
| 5 | 0.814 | 0.496 | 0.309 | 13 | 0.628 | 0.561 | 0.448 |
| 6 | 0.724 | 0.587 | 0.387 | 14 | 0.649 | 0.581 | 0.469 |
| 7 | 0.802 | 0.660 | 0.450 | 15 | 0.668 | 0.600 | 0.484 |
| 8 | 0.870 | 0.722 | 0.505 | 20 | 0.743 | 0.673 | 0.554 |
| 9 | 0.924 | 0.773 | 0.551 | 10 | 2 | 0.029 | 0.014 | 0.003 |
| 10 | 0.973 | 0.817 | 0.591 | 3 | 0.137 | 0.096 | 0.042 |
| 11 | 1.014 | 0.857 | 0.625 | 4 | 0.234 | 0.183 | 0.105 |
| 12 | 1.052 | 0.889 | 0.652 | 5 | 0.312 | 0.256 | 0.166 |
| 13 | 1.085 | 0.920 | 0.680 | 6 | 0.375 | 0.316 | 0.218 |
| 14 | 1.115 | 0.948 | 0.707 | 7 | 0.425 | 0.365 | 0.264 |
| 15 | 1.142 | 0.974 | 0.727 | 8 | 0.469 | 0.407 | 0.304 |
| 20 | 1.253 | 1.072 | 0.813 | 9 | 0.505 | 0.442 | 0.338 |
| 3 | 2 | 0.053 | 0.026 | 0.005 | 10 | 0.537 | 0.474 | 0.367 |
| 3 | 0.229 | 0.160 | 0.072 | 11 | 0.566 | 0.502 | 0.395 |
| 4 | 0.376 | 0.290 | 0.165 | 12 | 0.590 | 0.526 | 0.417 |
| 5 | 0.485 | 0.391 | 0.249 | 13 | 0.613 | 0.548 | 0.439 |
| 6 | 0.572 | 0.473 | 0.321 | 14 | 0.633 | 0.568 | 0.457 |
| 7 | 0.639 | 0.537 | 0.377 | 15 | 0.652 | 0.586 | 0.474 |
| 8 | 0.696 | 0.590 | 0.427 | 20 | 0.726 | 0.658 | 0.546 |

Продолжение таблицы А.17

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 | 9 | 0.744 | 0.636 | 0.468 | 11 | 2 | 0.028 | 0.014 | 0.003 |
| 10 | 0.785 | 0.675 | 0.504 | 3 | 0.133 | 0.093 | 0.041 |
| 11 | 0.822 | 0.709 | 0.536 | 4 | 0.228 | 0.178 | 0.103 |
| 12 | 0.856 | 0.740 | 0.562 | 5 | 0.305 | 0.249 | 0.162 |
| 13 | 0.883 | 0.767 | 0.586 | 6 | 0.366 | 0.309 | 0.214 |
| 14 | 0.909 | 0.791 | 0.609 | 7 | 0.416 | 0.357 | 0.259 |
| 15 | 0.932 | 0.813 | 0.630 | 8 | 0.458 | 0.399 | 0.299 |
| 20 | 1.028 | 0.902 | 0.708 | 9 | 0.494 | 0.434 | 0.331 |
| 4 | 2 | 0.043 | 0.022 | 0.004 | 10 | 0.525 | 0.465 | 0.360 |
| 3 | 0.195 | 0.137 | 0.060 | 11 | 0.553 | 0.491 | 0.387 |
| 4 | 0.325 | 0.252 | 0.143 | 12 | 0.578 | 0.516 | 0.408 |
| 5 | 0.426 | 0.345 | 0.220 | 13 | 0.600 | 0.538 | 0.431 |
| 6 | 0.503 | 0.419 | 0.286 | 14 | 0.620 | 0.556 | 0.449 |
| 7 | 0.567 | 0.480 | 0.342 | 15 | 0.638 | 0.574 | 0.467 |
| 8 | 0.619 | 0.530 | 0.387 | 20 | 0.711 | 0.645 | 0.536 |
| 9 | 0.663 | 0.572 | 0.425 | 12 | 2 | 0.027 | 0.014 | 0.003 |
| 10 | 0.702 | 0.609 | 0.460 | 3 | 0.129 | 0.091 | 0.040 |
| 11 | 0.735 | 0.641 | 0.491 | 4 | 0.223 | 0.174 | 0.100 |
| 12 | 0.765 | 0.669 | 0.517 | 5 | 0.298 | 0.244 | 0.158 |
| 13 | 0.792 | 0.696 | 0.542 | 6 | 0.358 | 0.302 | 0.209 |
| 14 | 0.817 | 0.717 | 0.561 | 7 | 0.407 | 0.350 | 0.254 |
| 15 | 0.839 | 0.740 | 0.580 | 8 | 0.449 | 0.390 | 0.292 |
| 20 | 0.926 | 0.823 | 0.658 | 9 | 0.484 | 0.425 | 0.325 |

Продолжение таблицы А.17

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 5 | 2 | 0.038 | 0.019 | 0.004 | 12 | 10 | 0.515 | 0.455 | 0.353 |
| 3 | 0.175 | 0.123 | 0.055 | 11 | 0.542 | 0.482 | 0.381 |
| 4 | 0.296 | 0.229 | 0.132 | 12 | 0.567 | 0.507 | 0.404 |
| 5 | 0.389 | 0.317 | 0.203 | 13 | 0.589 | 0.528 | 0.424 |
| 6 | 0.462 | 0.386 | 0.264 | 14 | 0.608 | 0.547 | 0.442 |
| 7 | 0.522 | 0.444 | 0.317 | 15 | 0.626 | 0.565 | 0.461 |
| 8 | 0.572 | 0.492 | 0.363 | 20 | 0.698 | 0.635 | 0.527 |
| 9 | 0.614 | 0.532 | 0.401 | 13 | 2 | 0.027 | 0.013 | 0.003 |
| 10 | 0.651 | 0.568 | 0.432 | 3 | 0.126 | 0.089 | 0.040 |
| 11 | 0.682 | 0.598 | 0.462 | 4 | 0.219 | 0.170 | 0.098 |
| 12 | 0.711 | 0.625 | 0.486 | 5 | 0.292 | 0.240 | 0.155 |
| 13 | 0.736 | 0.650 | 0.511 | 6 | 0.352 | 0.297 | 0.205 |
| 14 | 0.759 | 0.672 | 0.531 | 7 | 0.399 | 0.343 | 0.250 |
| 15 | 0.780 | 0.693 | 0.552 | 8 | 0.441 | 0.384 | 0.287 |
| 20 | 0.864 | 0.773 | 0.625 | 9 | 0.476 | 0.418 | 0.321 |
| 6 | 2 | 0.035 | 0.017 | 0.004 | 10 | 0.507 | 0.448 | 0.349 |
| 3 | 0.162 | 0.114 | 0.051 | 11 | 0.533 | 0.474 | 0.375 |
| 4 | 0.276 | 0.214 | 0.123 | 12 | 0.557 | 0.498 | 0.397 |
| 5 | 0.365 | 0.297 | 0.191 | 13 | 0.579 | 0.519 | 0.418 |
| 6 | 0.434 | 0.364 | 0.250 | 14 | 0.598 | 0.538 | 0.436 |
| 7 | 0.491 | 0.419 | 0.301 | 15 | 0.616 | 0.556 | 0.452 |
| 8 | 0.540 | 0.465 | 0.343 | 20 | 0.687 | 0.625 | 0.521 |

Продолжение таблицы А.17

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 6 | 9 | 0.579 | 0.504 | 0.380 | 14 | 2 | 0.026 | 0.013 | 0.003 |
| 10 | 0.615 | 0.539 | 0.412 | 3 | 0.124 | 0.087 | 0.039 |
| 11 | 0.645 | 0.568 | 0.441 | 4 | 0.215 | 0.168 | 0.097 |
| 12 | 0.673 | 0.595 | 0.466 | 5 | 0.287 | 0.236 | 0.153 |
| 13 | 0.698 | 0.618 | 0.489 | 6 | 0.345 | 0.291 | 0.203 |
| 14 | 0.719 | 0.639 | 0.509 | 7 | 0.393 | 0.338 | 0.245 |
| 15 | 0.740 | 0.659 | 0.527 | 8 | 0.434 | 0.377 | 0.284 |
| 20 | 0.821 | 0.737 | 0.600 | 9 | 0.468 | 0.412 | 0.316 |
| 7 | 2 | 0.033 | 0.016 | 0.003 | 10 | 0.498 | 0.441 | 0.344 |
| 3 | 0.153 | 0.108 | 0.048 | 11 | 0.525 | 0.467 | 0.370 |
| 4 | 0.262 | 0.204 | 0.116 | 12 | 0.548 | 0.491 | 0.392 |
| 5 | 0.347 | 0.283 | 0.183 | 13 | 0.570 | 0.512 | 0.413 |
| 6 | 0.414 | 0.348 | 0.240 | 14 | 0.589 | 0.531 | 0.430 |
| 7 | 0.469 | 0.401 | 0.289 | 15 | 0.607 | 0.548 | 0.448 |
| 8 | 0.516 | 0.446 | 0.331 | 20 | 0.677 | 0.616 | 0.513 |
| 9 | 0.554 | 0.483 | 0.366 | 15 | 2 | 0.026 | 0.013 | 0.003 |
| 10 | 0.589 | 0.517 | 0.397 | 3 | 0.122 | 0.086 | 0.038 |
| 11 | 0.618 | 0.546 | 0.426 | 4 | 0.211 | 0.165 | 0.095 |
| 12 | 0.646 | 0.572 | 0.450 | 5 | 0.282 | 0.232 | 0.150 |
| 13 | 0.669 | 0.596 | 0.473 | 6 | 0.340 | 0.286 | 0.199 |
| 14 | 0.691 | 0.617 | 0.494 | 7 | 0.387 | 0.333 | 0.242 |
| 15 | 0.710 | 0.635 | 0.512 | 8 | 0.427 | 0.372 | 0.279 |
| 20 | 0.789 | 0.711 | 0.583 | 9 | 0.461 | 0.405 | 0.312 |

Продолжение таблицы А.17

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 8 | 2 | 0.031 | 0.016 | 0.003 | 15 | 10 | 0.491 | 0.435 | 0.340 |
| 3 | 0.146 | 0.103 | 0.046 | 11 | 0.517 | 0.460 | 0.365 |
| 4 | 0.251 | 0.195 | 0.112 | 12 | 0.541 | 0.483 | 0.386 |
| 5 | 0.333 | 0.273 | 0.177 | 13 | 0.562 | 0.504 | 0.407 |
| 6 | 0.398 | 0.335 | 0.231 | 14 | 0.580 | 0.524 | 0.426 |
| 7 | 0.452 | 0.387 | 0.280 | 15 | 0.599 | 0.541 | 0.443 |
| 8 | 0.497 | 0.430 | 0.320 | 20 | 0.668 | 0.610 | 0.508 |
| 9 | 0.534 | 0.467 | 0.356 | 20 | 2 | 0.024 | 0.012 | 0.002 |
| 10 | 0.568 | 0.500 | 0.385 | 3 | 0.114 | 0.080 | 0.036 |
| 11 | 0.597 | 0.528 | 0.415 | 4 | 0.197 | 0.154 | 0.089 |
| 12 | 0.623 | 0.554 | 0.437 | 5 | 0.265 | 0.218 | 0.141 |
| 13 | 0.647 | 0.577 | 0.460 | 6 | 0.319 | 0.270 | 0.188 |
| 14 | 0.668 | 0.597 | 0.478 | 7 | 0.364 | 0.314 | 0.229 |
| 15 | 0.687 | 0.616 | 0.498 | 8 | 0.402 | 0.351 | 0.263 |
| 20 | 0.764 | 0.691 | 0.566 | 9 | 0.435 | 0.383 | 0.295 |
| 9 | 2 | 0.030 | 0.015 | 0.003 | 10 | 0.463 | 0.411 | 0.321 |
| 3 | 0.141 | 0.099 | 0.044 | 11 | 0.488 | 0.436 | 0.347 |
| 4 | 0.242 | 0.188 | 0.108 | 12 | 0.511 | 0.459 | 0.368 |
| 5 | 0.321 | 0.263 | 0.171 | 13 | 0.531 | 0.479 | 0.388 |
| 6 | 0.386 | 0.325 | 0.225 | 14 | 0.550 | 0.497 | 0.404 |

Окончание таблицы А.17

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 9 | 7 | 0.438 | 0.375 | 0.271 | 20 | 15 | 0.566 | 0.513 | 0.421 |
| 8 | 0.481 | 0.418 | 0.311 | 20 | 0.633 | 0.579 | 0.486 |
| 9 | 0.519 | 0.454 | 0.346 |  |  |  |  |  |

Таблица А.18

**Верхние критические значения статистики критерия Линка ( отношения размахов)**



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 2 | 2 | 12.65 | 25.29 | 130.3 | 9 | 10 | 1.980 | 2.258 | 2.955 |
| 3 | 19.07 | 38.01 | 193.3 | 11 | 2.025 | 2.308 | 3.008 |
| 4 | 23.12 | 46.30 | 234.9 | 12 | 2.068 | 2.353 | 3.067 |
| 5 | 26.16 | 52.36 | 265.0 | 13 | 2.103 | 2.392 | 3.116 |
| 6 | 28.68 | 57.12 | 289.4 | 14 | 2.135 | 2.430 | 3.158 |
| 7 | 30.45 | 61.17 | 306.1 | 15 | 2.169 | 2.467 | 3.204 |
| 8 | 32.16 | 64.25 | 323.6 | 20 | 2.299 | 2.611 | 3.380 |
| 9 | 33.52 | 66.98 | 335.8 | 10 | 2 | 1.029 | 1.226 | 1.695 |
| 10 | 34.63 | 69.16 | 350.6 | 3 | 1.275 | 1.484 | 1.988 |
| 11 | 35.84 | 71.49 | 360.8 | 4 | 1.428 | 1.647 | 2.188 |
| 12 | 36.73 | 73.45 | 372.4 | 5 | 1.541 | 1.767 | 2.317 |
| 13 | 37.73 | 75.14 | 382.0 | 6 | 1.629 | 1.861 | 2.421 |
| 14 | 38.47 | 76.94 | 386.4 | 7 | 1.700 | 1.937 | 2.516 |
| 15 | 39.16 | 78.20 | 393.0 | 8 | 1.762 | 2.002 | 2.603 |
| 20 | 42.01 | 84.17 | 422.4 | 9 | 1.818 | 2.065 | 2.670 |

Продолжение таблицы А.18

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 3 | 2 | 3.188 | 4.604 | 10.40 | 10 | 10 | 1.860 | 2.109 | 2.731 |
| 3 | 4.362 | 6.242 | 14.16 | 11 | 1.907 | 2.161 | 2.783 |
| 4 | 5.153 | 7.344 | 16.56 | 12 | 1.944 | 2.201 | 2.839 |
| 5 | 5.703 | 8.145 | 18.31 | 13 | 1.979 | 2.236 | 2.872 |
| 6 | 6.160 | 8.800 | 19.71 | 14 | 2.012 | 2.271 | 2.925 |
| 7 | 6.532 | 9.306 | 20.88 | 15 | 2.040 | 2.303 | 2.952 |
| 8 | 6.865 | 9.758 | 21.93 | 20 | 2.160 | 2.434 | 3.117 |
| 9 | 7.138 | 10.15 | 22.71 | 11 | 2 | 0.985 | 1.169 | 1.604 |
| 10 | 7.358 | 10.48 | 23.40 | 3 | 1.218 | 1.411 | 1.866 |
| 11 | 7.555 | 10.75 | 24.20 | 4 | 1.362 | 1.562 | 2.029 |
| 12 | 7.757 | 11.07 | 24.75 | 5 | 1.467 | 1.672 | 2.159 |
| 13 | 7.927 | 11.28 | 25.26 | 6 | 1.549 | 1.761 | 2.266 |
| 14 | 8.082 | 11.49 | 25.57 | 7 | 1.617 | 1.832 | 2.352 |
| 15 | 8.238 | 11.70 | 26.24 | 8 | 1.677 | 1.893 | 2.413 |
| 20 | 8.828 | 12.55 | 28.03 | 9 | 1.726 | 1.949 | 2.483 |
| 4 | 2 | 2.023 | 2.653 | 4.763 | 10 | 1.770 | 1.994 | 2.536 |
| 3 | 2.663 | 3.452 | 6.058 | 11 | 1.808 | 2.034 | 2.584 |
| 4 | 3.070 | 3.964 | 6.942 | 12 | 1.844 | 2.071 | 2.635 |
| 5 | 3.380 | 4.353 | 7.600 | 13 | 1.878 | 2.109 | 2.668 |
| 6 | 3.632 | 4.670 | 8.131 | 14 | 1.907 | 2.142 | 2.710 |
| 7 | 3.822 | 4.917 | 8.549 | 15 | 1.934 | 2.169 | 2.741 |
| 8 | 3.984 | 5.113 | 8.913 | 20 | 2.047 | 2.294 | 2.884 |
| 9 | 4.139 | 5.312 | 9.213 | 12 | 2 | 0.951 | 1.126 | 1.528 |
| 10 | 4.263 | 5.470 | 9.481 | 3 | 1.172 | 1.354 | 1.782 |

Продолжение таблицы А.18

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 4 | 11 | 4.383 | 5.627 | 9.733 | 12 | 4 | 1.309 | 1.496 | 1.936 |
| 12 | 4.486 | 5.738 | 9.960 | 5 | 1.409 | 1.601 | 2.057 |
| 13 | 4.582 | 5.874 | 10.18 | 6 | 1.487 | 1.682 | 2.144 |
| 14 | 4.658 | 5.973 | 10.37 | 7 | 1.551 | 1.751 | 2.222 |
| 15 | 4.742 | 6.070 | 10.54 | 8 | 1.605 | 1.808 | 2.291 |
| 20 | 5.061 | 6.488 | 11.19 | 9 | 1.654 | 1.859 | 2.353 |
| 5 | 2 | 1.599 | 2.022 | 3.236 | 12 | 10 | 1.694 | 1.899 | 2.390 |
| 3 | 2.058 | 2.557 | 4.050 | 11 | 1.735 | 1.945 | 2.441 |
| 4 | 2.353 | 2.906 | 4.538 | 12 | 1.768 | 1.979 | 2.480 |
| 5 | 2.570 | 3.160 | 4.926 | 13 | 1.797 | 2.013 | 2.522 |
| 6 | 2.747 | 3.367 | 5.226 | 14 | 1.826 | 2.041 | 2.554 |
| 7 | 2.894 | 3.534 | 5.477 | 15 | 1.853 | 2.067 | 2.579 |
| 8 | 3.004 | 3.662 | 5.698 | 20 | 1.960 | 2.184 | 2.712 |
| 9 | 3.108 | 3.802 | 5.885 | 13 | 2 | 0.922 | 1.088 | 1.474 |
| 10 | 3.201 | 3.910 | 6.077 | 3 | 1.135 | 1.305 | 1.705 |
| 11 | 3.285 | 4.015 | 6.190 | 4 | 1.265 | 1.440 | 1.854 |
| 12 | 3.363 | 4.108 | 6.312 | 5 | 1.361 | 1.541 | 1.962 |
| 13 | 3.425 | 4.180 | 6.461 | 6 | 1.435 | 1.617 | 2.047 |
| 14 | 3.490 | 4.251 | 6.565 | 7 | 1.497 | 1.682 | 2.120 |
| 15 | 3.550 | 4.331 | 6.662 | 8 | 1.546 | 1.732 | 2.183 |
| 20 | 3.778 | 4.612 | 7.077 | 9 | 1.593 | 1.783 | 2.225 |
| 6 | 2 | 1.381 | 1.708 | 2.580 | 10 | 1.633 | 1.827 | 2.283 |
| 3 | 1.750 | 2.113 | 3.120 | 11 | 1.668 | 1.860 | 2.315 |
| 4 | 1.986 | 2.388 | 3.505 | 12 | 1.701 | 1.898 | 2.358 |

Продолжение таблицы А.18

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 6 | 5 | 2.160 | 2.584 | 3.774 | 13 | 13 | 1.729 | 1.926 | 2.394 |
| 6 | 2.301 | 2.746 | 3.989 | 14 | 1.759 | 1.959 | 2.428 |
| 7 | 2.413 | 2.876 | 4.174 | 15 | 1.783 | 1.983 | 2.463 |
| 8 | 2.510 | 2.981 | 4.298 | 20 | 1.885 | 2.089 | 2.578 |
| 9 | 2.591 | 3.081 | 4.446 | 14 | 2 | 0.896 | 1.056 | 1.420 |
| 10 | 2.664 | 3.165 | 4.576 | 3 | 1.100 | 1.264 | 1.646 |
| 11 | 2.736 | 3.244 | 4.686 | 4 | 1.227 | 1.392 | 1.781 |
| 12 | 2.793 | 3.308 | 4.775 | 5 | 1.319 | 1.489 | 1.883 |
| 13 | 2.847 | 3.367 | 4.837 | 6 | 1.391 | 1.567 | 1.966 |
| 14 | 2.896 | 3.429 | 4.962 | 7 | 1.449 | 1.625 | 2.032 |
| 15 | 2.942 | 3.479 | 5.009 | 8 | 1.500 | 1.678 | 2.088 |
| 20 | 3.131 | 3.705 | 5.315 | 9 | 1.542 | 1.722 | 2.148 |
| 7 | 2 | 1.244 | 1.513 | 2.213 | 10 | 1.581 | 1.763 | 2.189 |
| 3 | 1.565 | 1.867 | 2.647 | 11 | 1.616 | 1.801 | 2.229 |
| 4 | 1.767 | 2.085 | 2.924 | 12 | 1.645 | 1.831 | 2.259 |
| 5 | 1.916 | 2.254 | 3.148 | 13 | 1.673 | 1.860 | 2.293 |
| 6 | 2.034 | 2.386 | 3.317 | 14 | 1.700 | 1.886 | 2.320 |
| 7 | 2.130 | 2.497 | 3.454 | 15 | 1.725 | 1.913 | 2.351 |
| 8 | 2.214 | 2.587 | 3.562 | 20 | 1.819 | 2.012 | 2.467 |
| 9 | 2.284 | 2.666 | 3.674 | 15 | 2 | 0.875 | 1.029 | 1.375 |
| 10 | 2.348 | 2.733 | 3.761 | 3 | 1.074 | 1.232 | 1.586 |
| 11 | 2.406 | 2.801 | 3.854 | 4 | 1.193 | 1.350 | 1.717 |
| 12 | 2.457 | 2.859 | 3.922 | 5 | 1.282 | 1.444 | 1.818 |
| 13 | 2.504 | 2.914 | 3.995 | 6 | 1.353 | 1.519 | 1.894 |

Продолжение таблицы А.18

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 7 | 14 | 2.543 | 2.956 | 4.045 | 15 | 7 | 1.409 | 1.574 | 1.956 |
| 15 | 2.584 | 3.003 | 4.109 | 8 | 1.457 | 1.625 | 2.010 |
| 20 | 2.745 | 3.188 | 4.364 | 9 | 1.500 | 1.668 | 2.059 |
| 8 | 2 | 1.150 | 1.387 | 1.979 | 10 | 1.535 | 1.706 | 2.105 |
| 3 | 1.438 | 1.694 | 2.342 | 11 | 1.570 | 1.742 | 2.141 |
| 4 | 1.616 | 1.887 | 2.586 | 12 | 1.598 | 1.769 | 2.173 |
| 5 | 1.751 | 2.034 | 2.759 | 13 | 1.624 | 1.802 | 2.206 |
| 6 | 1.857 | 2.151 | 2.909 | 14 | 1.651 | 1.827 | 2.238 |
| 7 | 1.940 | 2.241 | 3.015 | 15 | 1.673 | 1.849 | 2.259 |
| 8 | 2.014 | 2.324 | 3.105 | 20 | 1.767 | 1.948 | 2.366 |
| 9 | 2.076 | 2.391 | 3.195 | 20 | 2 | 0.798 | 0.932 | 1.230 |
| 10 | 2.134 | 2.458 | 3.282 | 3 | 0.974 | 1.110 | 1.409 |
| 11 | 2.183 | 2.511 | 3.346 | 4 | 1.081 | 1.217 | 1.516 |
| 12 | 2.229 | 2.562 | 3.419 | 5 | 1.158 | 1.295 | 1.600 |
| 13 | 2.267 | 2.606 | 3.474 | 6 | 1.218 | 1.356 | 1.665 |
| 14 | 2.311 | 2.651 | 3.526 | 7 | 1.270 | 1.408 | 1.718 |
| 15 | 2.341 | 2.685 | 3.570 | 8 | 1.310 | 1.449 | 1.762 |
| 20 | 2.485 | 2.843 | 3.782 | 9 | 1.347 | 1.486 | 1.801 |
| 9 | 2 | 1.080 | 1.297 | 1.818 | 10 | 1.379 | 1.521 | 1.840 |
| 3 | 1.345 | 1.573 | 2.134 | 11 | 1.410 | 1.551 | 1.866 |
| 4 | 1.510 | 1.749 | 2.337 | 12 | 1.433 | 1.573 | 1.899 |

Окончание таблицы А.18

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 9 | 5 | 1.633 | 1.881 | 2.509 | 20 | 13 | 1.455 | 1.598 | 1.923 |
| 6 | 1.725 | 1.986 | 2.629 | 14 | 1.479 | 1.622 | 1.944 |
| 7 | 1.806 | 2.067 | 2.724 | 15 | 1.498 | 1.642 | 1.964 |
| 8 | 1.870 | 2.141 | 2.814 | 20 | 1.580 | 1.727 | 2.057 |
| 9 | 1.927 | 2.200 | 2.885 |  |  |  |  |  |

Таблица А.19

**Нижние критические значения статистики критерия Ньюмана (стьюдентизированного размаха)**



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | | | | | |
| 2 | 5 | 10 | 15 | 20 | 30 | 40 | 60 |
|  | | | | | | | | |
| 2 | 0.101 | 0.094 | 0.091 | 0.090 | 0.090 | 0.089 | 0.089 | 0.089 |
| 3 | 0.437 | 0.433 | 0.434 | 0.433 | 0.433 | 0.432 | 0.432 | 0.432 |
| 4 | 0.718 | 0.739 | 0.750 | 0.752 | 0.755 | 0.756 | 0.757 | 0.758 |
| 5 | 0.928 | 0.978 | 1.002 | 1.011 | 1.015 | 1.020 | 1.022 | 1.025 |
| 6 | 1.093 | 1.168 | 1.206 | 1.221 | 1.227 | 1.236 | 1.241 | 1.244 |
| 7 | 1.224 | 1.321 | 1.374 | 1.394 | 1.405 | 1.416 | 1.422 | 1.429 |
| 8 | 1.332 | 1.451 | 1.515 | 1.539 | 1.554 | 1.568 | 1.576 | 1.585 |
| 9 | 1.425 | 1.560 | 1.634 | 1.664 | 1.682 | 1.701 | 1.710 | 1.720 |
| 10 | 1.503 | 1.656 | 1.742 | 1.775 | 1.796 | 1.816 | 1.829 | 1.839 |
| 11 | 1.571 | 1.738 | 1.833 | 1.874 | 1.894 | 1.918 | 1.930 | 1.945 |
| 12 | 1.635 | 1.813 | 1.915 | 1.959 | 1.984 | 2.009 | 2.023 | 2.040 |
| 13 | 1.690 | 1.879 | 1.991 | 2.037 | 2.064 | 2.092 | 2.110 | 2.126 |
| 14 | 1.739 | 1.939 | 2.057 | 2.107 | 2.136 | 2.168 | 2.186 | 2.204 |
| 15 | 1.784 | 1.995 | 2.118 | 2.174 | 2.204 | 2.238 | 2.256 | 2.277 |
| 16 | 1.826 | 2.047 | 2.176 | 2.232 | 2.264 | 2.303 | 2.323 | 2.343 |
| 17 | 1.864 | 2.092 | 2.228 | 2.288 | 2.323 | 2.361 | 2.382 | 2.404 |

Продолжение таблицы А.19

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | | | | | |
| 2 | 5 | 10 | 15 | 20 | 30 | 40 | 60 |
|  | | | | | | | | |
| 18 | 1.903 | 2.135 | 2.277 | 2.340 | 2.375 | 2.417 | 2.438 | 2.463 |
| 19 | 1.935 | 2.177 | 2.322 | 2.386 | 2.425 | 2.467 | 2.490 | 2.516 |
| 20 | 1.967 | 2.214 | 2.363 | 2.433 | 2.471 | 2.516 | 2.541 | 2.566 |
|  | | | | | | | | |
| 2 | 0.050 | 0.047 | 0.046 | 0.045 | 0.045 | 0.045 | 0.045 | 0.045 |
| 3 | 0.305 | 0.304 | 0.304 | 0.304 | 0.304 | 0.304 | 0.305 | 0.304 |
| 4 | 0.554 | 0.574 | 0.584 | 0.587 | 0.589 | 0.590 | 0.592 | 0.593 |
| 5 | 0.748 | 0.798 | 0.822 | 0.830 | 0.835 | 0.841 | 0.842 | 0.844 |
| 6 | 0.905 | 0.979 | 1.019 | 1.033 | 1.041 | 1.048 | 1.053 | 1.058 |
| 7 | 1.029 | 1.128 | 1.183 | 1.202 | 1.214 | 1.225 | 1.233 | 1.238 |
| 8 | 1.130 | 1.255 | 1.322 | 1.346 | 1.363 | 1.376 | 1.384 | 1.394 |
| 9 | 1.217 | 1.359 | 1.438 | 1.470 | 1.488 | 1.507 | 1.518 | 1.527 |
| 10 | 1.291 | 1.453 | 1.545 | 1.579 | 1.602 | 1.623 | 1.637 | 1.649 |
| 11 | 1.356 | 1.536 | 1.634 | 1.677 | 1.700 | 1.726 | 1.740 | 1.755 |
| 12 | 1.416 | 1.606 | 1.715 | 1.761 | 1.789 | 1.817 | 1.833 | 1.849 |
| 13 | 1.468 | 1.670 | 1.790 | 1.840 | 1.868 | 1.900 | 1.919 | 1.936 |
| 14 | 1.514 | 1.730 | 1.856 | 1.910 | 1.942 | 1.976 | 1.996 | 2.016 |
| 15 | 1.556 | 1.784 | 1.917 | 1.977 | 2.010 | 2.047 | 2.066 | 2.087 |

Продолжение таблицы А.19

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 5 | | 10 | | 15 | | 20 | | 30 | | 40 | | 60 | |
|  | | | | | | | | | | | | | | | |
| 16 | 1.598 | 1.833 | | 1.975 | | 2.033 | | 2.069 | | 2.113 | | 2.134 | | 2.156 | |
| 17 | 1.633 | 1.880 | | 2.026 | | 2.089 | | 2.129 | | 2.172 | | 2.193 | | 2.219 | |
| 18 | 1.669 | 1.921 | | 2.073 | | 2.142 | | 2.181 | | 2.226 | | 2.250 | | 2.278 | |
| 19 | 1.700 | 1.960 | | 2.117 | | 2.189 | | 2.231 | | 2.278 | | 2.303 | | 2.330 | |
| 20 | 1.728 | 1.995 | | 2.158 | | 2.234 | | 2.277 | | 2.328 | | 2.354 | | 2.382 | |
|  | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 0.010 | 0.009 | | 0.009 | | 0.009 | | 0.009 | | 0.009 | | 0.009 | | 0.009 | |
| 3 | 0.136 | 0.135 | | 0.135 | | 0.135 | | 0.135 | | 0.135 | | 0.135 | | 0.135 | |
| 4 | 0.314 | 0.328 | | 0.336 | | 0.338 | | 0.338 | | 0.340 | | 0.341 | | 0.340 | |
| 5 | 0.474 | 0.515 | | 0.535 | | 0.538 | | 0.544 | | 0.546 | | 0.548 | | 0.550 | |
| 6 | 0.614 | | 0.676 | | 0.710 | | 0.723 | | 0.730 | | 0.735 | | 0.738 | | 0.743 |
| 7 | 0.722 | | 0.811 | | 0.860 | | 0.878 | | 0.886 | | 0.900 | | 0.903 | | 0.909 |
| 8 | 0.820 | | 0.932 | | 0.993 | | 1.017 | | 1.030 | | 1.041 | | 1.051 | | 1.061 |
| 9 | 0.898 | | 1.032 | | 1.103 | | 1.136 | | 1.152 | | 1.171 | | 1.182 | | 1.192 |
| 10 | 0.966 | | 1.116 | | 1.205 | | 1.242 | | 1.262 | | 1.284 | | 1.296 | | 1.307 |
| 11 | 1.027 | | 1.195 | | 1.294 | | 1.338 | | 1.360 | | 1.388 | | 1.401 | | 1.415 |
| 12 | 1.078 | | 1.266 | | 1.372 | | 1.421 | | 1.448 | | 1.475 | | 1.492 | | 1.511 |
| 13 | 1.126 | | 1.326 | | 1.447 | | 1.498 | | 1.529 | | 1.563 | | 1.580 | | 1.596 |

Окончание таблицы А.19

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 5 | | 10 | | 15 | | 20 | | 30 | | 40 | | 60 | |
|  | | | | | | | | | | | | | | | |
| 14 | 1.168 | | 1.384 | | 1.510 | | 1.568 | | 1.598 | | 1.636 | | 1.656 | | 1.676 |
| 15 | 1.206 | | 1.432 | | 1.570 | | 1.634 | | 1.667 | | 1.706 | | 1.728 | | 1.752 |
| 16 | 1.244 | | 1.481 | | 1.626 | | 1.695 | | 1.727 | | 1.774 | | 1.797 | | 1.822 |
| 17 | 1.275 | | 1.525 | | 1.679 | | 1.746 | | 1.786 | | 1.832 | | 1.856 | | 1.886 |
| 18 | 1.307 | | 1.565 | | 1.726 | | 1.798 | | 1.840 | | 1.886 | | 1.915 | | 1.945 |
| 19 | 1.337 | | 1.601 | | 1.767 | | 1.845 | | 1.886 | | 1.940 | | 1.968 | | 1.999 |
| 20 | 1.362 | | 1.634 | | 1.807 | | 1.887 | | 1.934 | | 1.990 | | 2.020 | | 2.051 |

Таблица А.20

**Верхние критические значения статистики критерия Ньюмана (стьюдентизированного размаха)**



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | | | | | |
| 2 | 5 | 10 | 15 | 20 | 30 | 40 | 60 |
|  | | | | | | | | |
| 2 | 6.076 | 3.636 | 3.147 | 3.015 | 2.953 | 2.891 | 2.858 | 2.828 |
| 3 | 8.314 | 4.604 | 3.877 | 3.675 | 3.578 | 3.487 | 3.442 | 3.401 |
| 4 | 9.818 | 5.223 | 4.327 | 4.076 | 3.958 | 3.843 | 3.789 | 3.737 |

Продолжение таблицы А.20

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | | | | | |
| 2 | 5 | 10 | 15 | 20 | 30 | 40 | 60 |
|  | | | | | | | | |
| 5 | 10.89 | 5.674 | 4.653 | 4.367 | 4.231 | 4.103 | 4.040 | 3.979 |
| 6 | 11.74 | 6.035 | 4.910 | 4.596 | 4.449 | 4.302 | 4.230 | 4.164 |
| 7 | 12.42 | 6.332 | 5.124 | 4.779 | 4.623 | 4.466 | 4.390 | 4.314 |
| 8 | 13.05 | 6.587 | 5.304 | 4.941 | 4.767 | 4.601 | 4.521 | 4.441 |
| 9 | 13.59 | 6.795 | 5.459 | 5.081 | 4.898 | 4.723 | 4.635 | 4.551 |
| 10 | 14.01 | 6.993 | 5.596 | 5.199 | 5.008 | 4.826 | 4.735 | 4.645 |
| 11 | 14.40 | 7.172 | 5.720 | 5.306 | 5.111 | 4.916 | 4.823 | 4.731 |
| 12 | 14.77 | 7.320 | 5.826 | 5.404 | 5.204 | 4.999 | 4.903 | 4.807 |
| 13 | 15.08 | 7.466 | 5.933 | 5.493 | 5.282 | 5.074 | 4.975 | 4.877 |
| 14 | 15.40 | 7.593 | 6.027 | 5.577 | 5.357 | 5.149 | 5.042 | 4.940 |
| 15 | 15.69 | 7.717 | 6.105 | 5.649 | 5.427 | 5.209 | 5.105 | 4.999 |
| 16 | 15.92 | 7.823 | 6.195 | 5.721 | 5.494 | 5.270 | 5.161 | 5.055 |
| 17 | 16.15 | 7.927 | 6.264 | 5.787 | 5.553 | 5.331 | 5.215 | 5.105 |
| 18 | 16.40 | 8.030 | 6.329 | 5.849 | 5.607 | 5.377 | 5.266 | 5.151 |
| 19 | 16.60 | 8.121 | 6.402 | 5.899 | 5.663 | 5.427 | 5.313 | 5.196 |
| 20 | 16.80 | 8.206 | 6.465 | 5.958 | 5.714 | 5.473 | 5.356 | 5.240 |

Продолжение таблицы А.20

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | | | | | |
| 2 | 5 | 10 | 15 | 20 | 30 | 40 | 60 |
|  | | | | | | | | |
| 2 | 8.787 | 4.481 | 3.723 | 3.529 | 3.425 | 3.338 | 3.293 | 3.251 |
| 3 | 11.91 | 5.555 | 4.476 | 4.185 | 4.049 | 3.920 | 3.858 | 3.801 |
| 4 | 14.02 | 6.263 | 4.941 | 4.588 | 4.429 | 4.271 | 4.199 | 4.122 |
| 5 | 15.54 | 6.777 | 5.286 | 4.884 | 4.699 | 4.527 | 4.442 | 4.359 |
| 6 | 16.76 | 7.192 | 5.553 | 5.121 | 4.916 | 4.718 | 4.626 | 4.537 |
| 7 | 17.72 | 7.519 | 5.781 | 5.313 | 5.093 | 4.882 | 4.780 | 4.682 |
| 8 | 18.62 | 7.815 | 5.970 | 5.464 | 5.242 | 5.019 | 4.911 | 4.805 |
| 9 | 19.35 | 8.062 | 6.136 | 5.617 | 5.370 | 5.133 | 5.018 | 4.912 |
| 10 | 20.01 | 8.287 | 6.283 | 5.736 | 5.476 | 5.237 | 5.119 | 5.004 |
| 11 | 20.49 | 8.492 | 6.410 | 5.849 | 5.582 | 5.329 | 5.209 | 5.085 |
| 12 | 21.10 | 8.666 | 6.524 | 5.943 | 5.678 | 5.413 | 5.288 | 5.161 |
| 13 | 21.52 | 8.814 | 6.642 | 6.038 | 5.760 | 5.484 | 5.359 | 5.229 |
| 14 | 21.94 | 8.973 | 6.736 | 6.122 | 5.839 | 5.562 | 5.423 | 5.295 |
| 15 | 22.33 | 9.107 | 6.824 | 6.200 | 5.909 | 5.621 | 5.482 | 5.350 |
| 16 | 22.68 | 9.247 | 6.915 | 6.275 | 5.971 | 5.679 | 5.543 | 5.403 |
| 17 | 23.01 | 9.366 | 6.995 | 6.341 | 6.037 | 5.742 | 5.595 | 5.454 |
| 18 | 23.29 | 9.480 | 7.059 | 6.408 | 6.095 | 5.792 | 5.645 | 5.500 |
| 19 | 23.67 | 9.580 | 7.141 | 6.462 | 6.146 | 5.838 | 5.692 | 5.541 |
| 20 | 23.93 | 9.675 | 7.215 | 6.521 | 6.199 | 5.884 | 5.734 | 5.585 |

Окончание таблицы А.20

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | | | | | |
| 2 | 5 | 10 | 15 | 20 | 30 | 40 | 60 |
|  | | | | | | | | |
| 2 | 19.89 | 6.758 | 5.056 | 4.646 | 4.460 | 4.280 | 4.205 | 4.118 |
| 3 | 27.00 | 8.171 | 5.892 | 5.327 | 5.068 | 4.840 | 4.732 | 4.627 |
| 4 | 31.60 | 9.167 | 6.397 | 5.750 | 5.468 | 5.179 | 5.055 | 4.927 |
| 5 | 35.11 | 9.872 | 6.792 | 6.069 | 5.733 | 5.420 | 5.281 | 5.142 |
| 6 | 37.57 | 10.43 | 7.095 | 6.308 | 5.939 | 5.619 | 5.464 | 5.313 |
| 7 | 39.83 | 10.88 | 7.357 | 6.517 | 6.131 | 5.778 | 5.616 | 5.450 |
| 8 | 41.77 | 11.23 | 7.566 | 6.685 | 6.272 | 5.911 | 5.738 | 5.570 |
| 9 | 43.44 | 11.59 | 7.771 | 6.843 | 6.418 | 6.026 | 5.846 | 5.675 |
| 10 | 44.74 | 11.93 | 7.932 | 6.966 | 6.528 | 6.136 | 5.933 | 5.749 |
| 11 | 46.33 | 12.21 | 8.078 | 7.091 | 6.640 | 6.226 | 6.024 | 5.835 |
| 12 | 47.07 | 12.49 | 8.200 | 7.173 | 6.737 | 6.307 | 6.100 | 5.901 |
| 13 | 48.11 | 12.64 | 8.334 | 7.289 | 6.829 | 6.379 | 6.179 | 5.975 |
| 14 | 48.93 | 12.90 | 8.459 | 7.393 | 6.902 | 6.459 | 6.244 | 6.044 |
| 15 | 50.25 | 13.04 | 8.553 | 7.464 | 6.978 | 6.519 | 6.299 | 6.083 |
| 16 | 50.92 | 13.32 | 8.689 | 7.552 | 7.052 | 6.581 | 6.351 | 6.140 |
| 17 | 51.71 | 13.43 | 8.780 | 7.614 | 7.107 | 6.646 | 6.406 | 6.194 |
| 18 | 52.50 | 13.57 | 8.848 | 7.688 | 7.178 | 6.694 | 6.457 | 6.232 |
| 19 | 53.00 | 13.75 | 8.958 | 7.768 | 7.232 | 6.740 | 6.505 | 6.282 |
| 20 | 53.56 | 13.83 | 9.011 | 7.811 | 7.284 | 6.787 | 6.549 | 6.314 |

Таблица А.21

**Критические значения критерия Блисса-Кокрена-Тьюки**



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | | | | | | | | | |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 |
|  | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 0.927 | 0.814 | 0.755 | 0.720 | 0.697 | 0.681 | 0.668 | 0.658 | 0.650 | 0.639 | 0.626 | 0.613 |
| 3 | 0.723 | 0.618 | 0.563 | 0.531 | 0.510 | 0.495 | 0.484 | 0.476 | 0.468 | 0.457 | 0.446 | 0.434 |
| 4 | 0.588 | 0.496 | 0.449 | 0.421 | 0.403 | 0.390 | 0.381 | 0.373 | 0.367 | 0.358 | 0.348 | 0.337 |
| 5 | 0.506 | 0.418 | 0.375 | 0.350 | 0.334 | 0.323 | 0.315 | 0.308 | 0.303 | 0.294 | 0.286 | 0.277 |
| 6 | 0.442 | 0.361 | 0.322 | 0.300 | 0.286 | 0.276 | 0.268 | 0.262 | 0.258 | 0.250 | 0.243 | 0.235 |
| 7 | 0.395 | 0.318 | 0.283 | 0.263 | 0.250 | 0.241 | 0.234 | 0.229 | 0.225 | 0.218 | 0.211 | 0.204 |
| 8 | 0.356 | 0.284 | 0.252 | 0.234 | 0.223 | 0.214 | 0.208 | 0.203 | 0.200 | 0.194 | 0.187 | 0.181 |
| 9 | 0.325 | 0.258 | 0.228 | 0.203 | 0.201 | 0.193 | 0.187 | 0.183 | 0.180 | 0.174 | 0.169 | 0.163 |
| 10 | 0.299 | 0.236 | 0.208 | 0.193 | 0.183 | 0.176 | 0.171 | 0.167 | 0.163 | 0.158 | 0.153 | 0.148 |
|  | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 0.962 | 0.862 | 0.799 | 0.759 | 0.733 | 0.714 | 0.699 | 0.688 | 0.678 | 0.664 | 0.649 | 0.633 |
| 3 | 0.782 | 0.663 | 0.602 | 0.565 | 0.541 | 0.523 | 0.510 | 0.500 | 0.491 | 0.478 | 0.465 | 0.451 |
| 4 | 0.641 | 0.535 | 0.480 | 0.448 | 0.427 | 0.413 | 0.401 | 0.392 | 0.385 | 0.374 | 0.363 | 0.351 |
| 5 | 0.553 | 0.451 | 0.401 | 0.373 | 0.354 | 0.341 | 0.332 | 0.324 | 0.318 | 0.308 | 0.298 | 0.288 |
| 6 | 0.483 | 0.389 | 0.344 | 0.319 | 0.303 | 0.291 | 0.283 | 0.276 | 0.270 | 0.262 | 0.253 | 0.244 |
| 7 | 0.433 | 0.343 | 0.302 | 0.280 | 0.265 | 0.255 | 0.247 | 0.241 | 0.236 | 0.228 | 0.221 | 0.213 |
| 8 | 0.390 | 0.307 | 0.269 | 0.249 | 0.235 | 0.226 | 0.219 | 0.214 | 0.209 | 0.203 | 0.196 | 0.188 |
| 9 | 0.357 | 0.278 | 0.243 | 0.224 | 0.212 | 0.204 | 0.197 | 0.192 | 0.188 | 0.182 | 0.176 | 0.169 |
| 10 | 0.328 | 0.254 | 0.228 | 0.204 | 0.193 | 0.185 | 0.179 | 0.175 | 0.171 | 0.166 | 0.160 | 0.154 |

Окончание таблицы А.21

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | | | | | | | | | |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 |
|  | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 0.992 | 0.936 | 0.874 | 0.831 | 0.800 | 0.776 | 0.757 | 0.743 | 0.732 | 0.713 | 0.693 | 0.673 |
| 3 | 0.884 | 0.750 | 0.678 | 0.632 | 0.600 | 0.578 | 0.561 | 0.548 | 0.537 | 0.520 | 0.503 | 0.484 |
| 4 | 0.775 | 0.616 | 0.545 | 0.504 | 0.476 | 0.457 | 0.443 | 0.432 | 0.423 | 0.408 | 0.394 | 0.379 |
| 5 | 0.701 | 0.525 | 0.457 | 0.420 | 0.396 | 0.379 | 0.366 | 0.356 | 0.349 | 0.336 | 0.324 | 0.311 |
| 6 | 0.635 | 0.453 | 0.392 | 0.359 | 0.338 | 0.323 | 0.312 | 0.304 | 0.297 | 0.286 | 0.275 | 0.264 |
| 7 | 0.578 | 0.401 | 0.344 | 0.314 | 0.295 | 0.282 | 0.273 | 0.265 | 0.259 | 0.250 | 0.240 | 0.230 |
| 8 | 0.525 | 0.358 | 0.306 | 0.279 | 0.262 | 0.251 | 0.242 | 0.235 | 0.230 | 0.221 | 0.213 | 0.204 |
| 9 | 0.479 | 0.324 | 0.276 | 0.252 | 0.236 | 0.225 | 0.217 | 0.211 | 0.206 | 0.199 | 0.191 | 0.183 |
| 10 | 0.438 | 0.295 | 0.251 | 0.229 | 0.215 | 0.205 | 0.198 | 0.192 | 0.188 | 0.181 | 0.174 | 0.166 |

Таблица А.22

**Критические значения критерия Кадуэлла–Лесли–Брауна**



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | | | | | | | | | |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 |
|  | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 12.67 | 4.363 | 3.074 | 2.569 | 2.302 | 2.130 | 2.014 | 1.928 | 1.860 | 1.766 | 1.672 | 1.581 |
| 3 | 25.54 | 6.544 | 4.151 | 3.295 | 2.855 | 2.589 | 2.408 | 2.280 | 2.181 | 2.038 | 1.902 | 1.771 |
| 4 | 40.09 | 8.374 | 4.975 | 3.823 | 3.249 | 2.907 | 2.679 | 2.517 | 2.394 | 2.217 | 2.052 | 1.894 |
| 5 | 55.60 | 10.01 | 5.659 | 4.245 | 3.557 | 3.154 | 2.889 | 2.698 | 2.556 | 2.354 | 2.164 | 1.985 |
| 6 | 71.60 | 11.47 | 6.259 | 4.605 | 3.818 | 3.359 | 3.061 | 2.846 | 2.691 | 2.464 | 2.256 | 2.058 |
| 7 | 88.32 | 12.84 | 6.801 | 4.929 | 4.050 | 3.539 | 3.211 | 2.974 | 2.805 | 2.557 | 2.333 | 2.120 |
| 8 | 105.4 | 14.12 | 7.281 | 5.211 | 4.250 | 3.695 | 3.338 | 3.085 | 2.903 | 2.639 | 2.399 | 2.173 |
| 9 | 123.0 | 15.33 | 7.727 | 5.466 | 4.430 | 3.836 | 3.455 | 3.186 | 2.991 | 2.712 | 2.457 | 2.219 |
| 10 | 140.9 | 16.51 | 8.150 | 5.703 | 4.595 | 3.966 | 3.561 | 3.277 | 3.071 | 2.778 | 2.511 | 2.261 |
|  | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 25.34 | 6.239 | 3.964 | 3.157 | 2.747 | 2.495 | 2.324 | 2.201 | 2.110 | 1.977 | 1.848 | 1.727 |
| 3 | 51.66 | 9.377 | 5.348 | 4.034 | 3.389 | 3.008 | 2.762 | 2.588 | 2.457 | 2.265 | 2.090 | 1.924 |
| 4 | 81.16 | 11.97 | 6.389 | 4.661 | 3.839 | 3.368 | 3.062 | 2.844 | 2.686 | 2.457 | 2.248 | 2.050 |
| 5 | 112.4 | 14.30 | 7.273 | 5.170 | 4.202 | 3.646 | 3.291 | 3.041 | 2.862 | 2.600 | 2.364 | 2.144 |
| 6 | 145.2 | 16.42 | 8.035 | 5.606 | 4.500 | 3.879 | 3.481 | 3.203 | 3.007 | 2.718 | 2.459 | 2.218 |

Окончание таблицы А.22

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | | | | | | | | | |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 |
|  | | | | | | | | | | | | |
| 7 | 178.7 | 18.39 | 8.713 | 5.990 | 4.763 | 4.077 | 3.645 | 3.344 | 3.128 | 2.817 | 2.539 | 2.282 |
| 8 | 213.3 | 20.24 | 9.312 | 6.326 | 4.994 | 4.258 | 3.787 | 3.464 | 3.232 | 2.904 | 2.610 | 2.337 |
| 9 | 249.1 | 22.03 | 9.878 | 6.634 | 5.201 | 4.413 | 3.915 | 3.571 | 3.327 | 2.982 | 2.670 | 2.384 |
| 10 | 285.6 | 23.69 | 10.42 | 6.912 | 5.393 | 4.554 | 4.034 | 3.671 | 3.411 | 3.050 | 2.726 | 2.4272 |
|  | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 127.2 | 14.05 | 6.961 | 4.924 | 3.994 | 3.456 | 3.114 | 2.888 | 2.727 | 2.478 | 2.259 | 2.058 |
| 3 | 259.9 | 21.06 | 9.341 | 6.242 | 4.876 | 4.139 | 3.657 | 3.359 | 3.135 | 2.807 | 2.524 | 2.266 |
| 4 | 408.8 | 26.94 | 11.09 | 7.172 | 5.498 | 4.596 | 4.031 | 3.670 | 3.401 | 3.025 | 2.697 | 2.400 |
| 5 | 567.2 | 32.31 | 12.62 | 7.914 | 5.985 | 4.965 | 4.324 | 3.902 | 3.605 | 3.187 | 2.823 | 2.498 |
| 6 | 733.8 | 37.07 | 13.92 | 8.580 | 6.398 | 5.256 | 4.560 | 4.089 | 3.770 | 3.322 | 2.925 | 2.580 |
| 7 | 902.3 | 41.35 | 15.18 | 9.157 | 6.769 | 5.511 | 4.772 | 4.260 | 3.916 | 3.434 | 3.018 | 2.646 |
| 8 | 1081.0 | 45.69 | 16.24 | 9.654 | 7.072 | 5.743 | 4.945 | 4.408 | 4.041 | 3.533 | 3.093 | 2.703 |
| 9 | 1257.6 | 49.78 | 17.21 | 10.12 | 7.363 | 5.947 | 5.101 | 4.539 | 4.146 | 3.617 | 3.160 | 2.751 |
| 10 | 1449.9 | 53.51 | 18.09 | 10.58 | 7.613 | 6.124 | 5.251 | 4.657 | 4.247 | 3.695 | 3.221 | 2.797 |

Таблица А.23

**Критические значения критерия Оверолла–Вудворда**



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 30 | 40 | 50 |
|  | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 2.633 | 2.752 | 2.783 | 2.793 | 2.786 | 2.778 | 2.781 | 2.773 | 2.767 | 2.749 | 2.742 | 2.731 | 2.734 | 2.726 |
| 3 | 2.073 | 2.244 | 2.303 | 2.325 | 2.329 | 2.336 | 2.338 | 2.339 | 2.330 | 2.329 | 2.325 | 2.319 | 2.316 | 2.312 |
| 4 | 1.863 | 2.003 | 2.061 | 2.087 | 2.097 | 2.106 | 2.106 | 2.108 | 2.105 | 2.103 | 2.101 | 2.097 | 2.094 | 2.091 |
| 5 | 1.737 | 1.865 | 1.920 | 1.942 | 1.956 | 1.961 | 1.962 | 1.966 | 1.962 | 1.962 | 1.961 | 1.959 | 1.958 | 1.953 |
| 10 | 1.472 | 1.562 | 1.603 | 1.623 | 1.634 | 1.640 | 1.642 | 1.645 | 1.645 | 1.645 | 1.643 | 1.642 | 1.639 | 1.638 |
| 20 | 1.299 | 1.378 | 1.409 | 1.424 | 1.434 | 1.438 | 1.440 | 1.442 | 1.444 | 1.443 | 1.443 | 1.440 | 1.440 | 1.438 |
|  | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 3.233 | 3.555 | 3.694 | 3.763 | 3.790 | 3.804 | 3.817 | 3.834 | 3.830 | 3.828 | 3.841 | 3.840 | 3.850 | 3.849 |
| 3 | 2.437 | 2.723 | 2.851 | 2.911 | 2.944 | 2.962 | 2.973 | 2.991 | 2.989 | 2.995 | 2.998 | 3.007 | 3.002 | 3.000 |
| 4 | 2.159 | 2.371 | 2.477 | 2.528 | 2.558 | 2.576 | 2.584 | 2.594 | 2.598 | 2.607 | 2.611 | 2.612 | 2.610 | 2.608 |
| 5 | 1.991 | 2.176 | 2.262 | 2.305 | 2.334 | 2.353 | 2.355 | 2.366 | 2.369 | 2.375 | 2.380 | 2.380 | 2.381 | 2.379 |
| 10 | 1.652 | 1.756 | 1.809 | 1.839 | 1.856 | 1.868 | 1.872 | 1.880 | 1.884 | 1.888 | 1.890 | 1.888 | 1.888 | 1.886 |
| 20 | 1.430 | 1.508 | 1.542 | 1.560 | 1.573 | 1.580 | 1.585 | 1.589 | 1.592 | 1.595 | 1.595 | 1.594 | 1.593 | 1.592 |

Окончание таблицы А.23

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 30 | 40 | 50 |
|  | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 4.114 | 4.997 | 5.473 | 5.746 | 5.917 | 6.029 | 6.104 | 6.217 | 6.290 | 6.368 | 6.447 | 6.499 | 6.548 | 6.562 |
| 3 | 3.218 | 3.715 | 3.977 | 4.141 | 4.256 | 4.323 | 4.368 | 4.418 | 4.459 | 4.501 | 4.528 | 4.567 | 4.580 | 4.593 |
| 4 | 2.787 | 3.150 | 3.345 | 3.455 | 3.536 | 3.590 | 3.629 | 3.671 | 3.693 | 3.724 | 3.745 | 3.771 | 3.773 | 3.775 |
| 5 | 2.577 | 2.837 | 2.987 | 3.073 | 3.137 | 3.178 | 3.210 | 3.237 | 3.262 | 3.279 | 3.305 | 3.309 | 3.323 | 3.323 |
| 10 | 2.058 | 2.180 | 2.245 | 2.291 | 2.321 | 2.340 | 2.357 | 2.371 | 2.383 | 2.397 | 2.407 | 2.413 | 2.410 | 2.410 |
| 20 | 1.772 | 1.797 | 1.826 | 1.846 | 1.862 | 1.874 | 1.880 | 1.888 | 1.893 | 1.904 | 1.907 | 1.908 | 1.911 | 1.910 |

Таблица А.24

**Критические значения модифицированного Z–критерия Оверолла–Вудворда**



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 80 | 100 |
|  | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 0.267 | 1.233 | 2.161 | 2.643 | 2.857 | 2.938 | 2.977 | 2.983 | 2.951 | 2.891 | 2.821 | 2.739 | 2.701 | 2.667 | 2.658 | 2.629 | 2.616 |
| 3 | 0.210 | 0.975 | 1.699 | 2.100 | 2.288 | 2.376 | 2.422 | 2.433 | 2.425 | 2.397 | 2.353 | 2.296 | 2.267 | 2.247 | 2.241 | 2.222 | 2.211 |
| 4 | 0.189 | 0.845 | 1.461 | 1.814 | 1.987 | 2.075 | 2.124 | 2.138 | 2.142 | 2.128 | 2.096 | 2.058 | 2.037 | 2.022 | 2.018 | 2.003 | 1.999 |
| 5 | 0.176 | 0.769 | 1.319 | 1.639 | 1.802 | 1.885 | 1.931 | 1.953 | 1.965 | 1.960 | 1.938 | 1.910 | 1.895 | 1.881 | 1.876 | 1.866 | 1.863 |
| 10 | 0.149 | 0.606 | 1.018 | 1.262 | 1.398 | 1.476 | 1.520 | 1.548 | 1.572 | 1.582 | 1.581 | 1.573 | 1.567 | 1.561 | 1.562 | 1.556 | 1.554 |
| 20 | 0.132 | 0.511 | 0.845 | 1.047 | 1.163 | 1.232 | 1.274 | 1.302 | 1.332 | 1.349 | 1.359 | 1.362 | 1.362 | 1.361 | 1.361 | 1.359 | 1.358 |
|  | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 0.328 | 1.935 | 3.492 | 4.210 | 4.478 | 4.546 | 4.553 | 4.542 | 4.435 | 4.288 | 4.142 | 3.976 | 3.898 | 3.839 | 3.818 | 3.765 | 3.729 |
| 3 | 0.247 | 1.385 | 2.460 | 3.011 | 3.250 | 3.335 | 3.375 | 3.369 | 3.315 | 3.245 | 3.154 | 3.044 | 2.995 | 2.959 | 2.945 | 2.916 | 2.892 |
| 4 | 0.219 | 1.130 | 1.995 | 2.465 | 2.684 | 2.773 | 2.820 | 2.828 | 2.808 | 2.760 | 2.696 | 2.617 | 2.581 | 2.558 | 2.542 | 2.522 | 2.508 |
| 5 | 0.202 | 0.990 | 1.738 | 2.148 | 2.356 | 2.440 | 2.490 | 2.507 | 2.499 | 2.468 | 2.425 | 2.370 | 2.339 | 2.316 | 2.305 | 2.291 | 2.281 |
| 10 | 0.168 | 0.721 | 1.231 | 1.528 | 1.686 | 1.771 | 1.820 | 1.848 | 1.864 | 1.866 | 1.856 | 1.834 | 1.821 | 2.051 | 1.810 | 1.801 | 1.795 |
| 20 | 0.145 | 0.578 | 0.964 | 1.197 | 1.329 | 1.403 | 1.449 | 1.478 | 1.506 | 1.520 | 1.525 | 1.521 | 1.518 | 1.516 | 1.514 | 1.511 | 1.509 |

Окончание таблицы А.24

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 80 | 100 |
|  | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 0.418 | 4.943 | 8.067 | 9.240 | 9.541 | 9.491 | 9.240 | 9.131 | 8.646 | 8.160 | 7.651 | 7.185 | 6.976 | 6.804 | 6.751 | 6.642 | 6.542 |
| 3 | 0.327 | 2.793 | 4.863 | 5.710 | 6.006 | 6.063 | 5.984 | 5.917 | 5.694 | 5.423 | 5.181 | 4.875 | 4.750 | 4.657 | 4.623 | 4.566 | 4.508 |
| 4 | 0.283 | 2.025 | 3.547 | 4.272 | 4.573 | 4.655 | 4.639 | 4.612 | 4.495 | 4.324 | 4.145 | 3.952 | 3.853 | 3.795 | 3.768 | 3.717 | 3.682 |
| 5 | 0.262 | 1.651 | 2.893 | 3.528 | 3.789 | 3.883 | 3.907 | 3.905 | 3.819 | 3.700 | 3.569 | 3.422 | 3.362 | 3.313 | 3.286 | 3.247 | 3.222 |
| 10 | 0.209 | 1.018 | 1.754 | 2.171 | 2.371 | 2.482 | 2.522 | 2.546 | 2.545 | 2.509 | 2.463 | 2.409 | 2.377 | 2.355 | 2.342 | 2.329 | 2.312 |
| 20 | 0.180 | 0.745 | 1.241 | 1.536 | 1.698 | 1.789 | 1.832 | 1.866 | 1.888 | 1.889 | 1.876 | 1.856 | 1.844 | 1.839 | 1.831 | 1.828 | 1.823 |