СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Потребность в изучении дифракции на различных телах очень высока. Знания, полученные путем изучения дифракции с помощью моделей, используются как в гидроакустике и эхолокации, так и в других областях. В дефектоскопии основной задачей является обнаружение различных включений в однородном теле. Это позволяет проводить исследование различных объектов методом неразрушающего контроля. Задача эхолокации — обнаружить и определить местоположение объектов по времени задержки отражённой волны.

Для современного мира изучение простых моделей уже не дает требуемой точности прогнозирования поведения волн. Поэтому, необходимо изучать более сложные модели, детально описывающие рассматриваемые тела и окружающую среду. Изучение тел с произвольно расположенными полостями является более трудной задачей, по сравнению с классическими моделями.

В настоящей работе рассматривается задача дифракции плоских звуковых волн на упругой сфере с произвольно расположенной полостью, заполненной жидкостью, и радиально-неоднородным упругим покрытием. С помощью таких покрытий можно изменять звукоотражающие свойства тел, что позволяет решать различные задачи по формированию заданной дифракционной картины. Такой слой возможно сделать в промышленных условиях, комбинируя несколько тонких однородных слоев с различными механическими характеристиками. В качестве рассматриваемого тела выбрана сфера, т.к. она является подходящей аппроксимацией для большинства сложных тел. В ходе работы получено аналитическое описание акустического поля, рассеяного телом.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

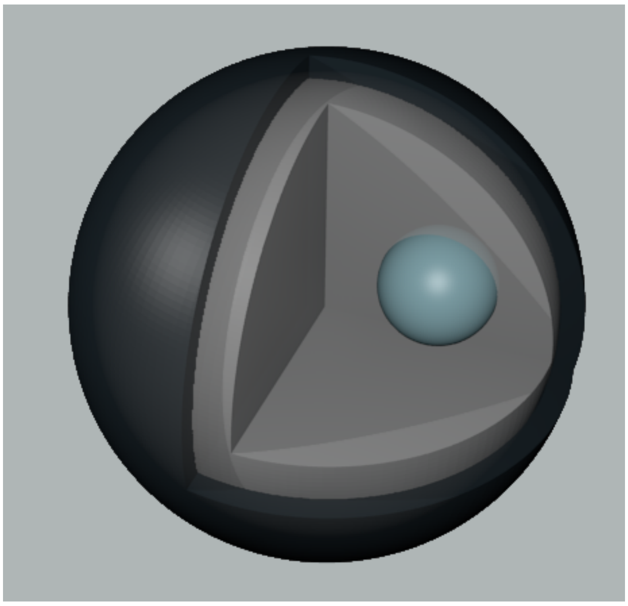

Рис. 1: «Сфера со сферическим слоем и произвольно расположенной сферической полостью»

Рассмотрим изотропный однородный упругий шар радиуса $R_\odot$, плотность материала которого $p_\odot$, упругие постоянные $\lambda_\odot$ и $\mu_\odot$, содержащий произвольно расположенную сферическую полость с радиусом $R_\circ$. Шар имеет покрытие в виде неоднородного изотропного упругого слоя, внешний радиус которого равен $R_\circledcirc$ (рис. 1).

Свяжем с полостью тела и с самим телом прямоугольные системы координат $x_\circ, y_\circ, z_\circ$ и $x_\odot, y_\odot, z_\odot$ соответственно так, чтобы соответствующие оси обеих систем координат были параллельны. С декартовыми системами координат $x_\circ, y_\circ, z_\circ$ и $x_\odot, y_\odot, z_\odot$ свяжем сферические координаты $r_\circ, \theta_\circ, \varphi_\circ$ и $r_\odot, \theta_\odot, \varphi_\odot$.

Пусть модули упругости $\lambda_\circledcirc$ и $\mu_\circledcirc$ материала слоя описываются дифференцируемыми функциями радиальной координаты $r_\odot$ сферической системы координат $(r_\odot, \theta_\odot, \varphi_\odot)$, а плотность $p_\circledcirc$ — непрерывной функцией координаты $r_\odot$. Окружающая тело и находящаяся в его полости жидкости — идеальные и однородные, имеющие плотности $p_e, p_\circ$ и скорости звука $c_e, c_\circ$ соответственно.

Определим отраженные от тела и возбужденные в его полости волны, а также найдем поля смещений в упругом материале шара и неоднородном слое.

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Пусть из внешнего пространства на шар падает плоская звуковая волна. Потенциал скоростей гармонической падающей волны запишем в виде:

$$\Psi_o(\bar{\mathbf{x}}_\odot, t) = A_o \exp\left[i\left(\bar{\mathbf{k}}_e \cdot \bar{\mathbf{x}}_\odot - \omega t\right)\right], \tag{1}$$

где A_o — амплитуда волны,
$\bar{\mathbf{k}}_e$ — волновой вектор в окружающей жидкости,
$|\bar{\mathbf{k}}_e| = k_e = \omega / c_e$ — волновое число,
$\bar{\mathbf{x}}_\odot$ — радиус-вектор,
ω — круговая частота.

Без ограничения общности будем полагать, что волна распространяется в направлении $\theta_\odot = \theta_\circ = 0$. Тогда в сферической системе координат (1) запишется в виде:

$$\Psi_o(r_\odot, \theta_\odot, t) = A_o \exp\left[i\left(k_e r_\odot \cos\theta_\odot - \omega t\right)\right], \tag{2}$$

В дальнейшем временной множитель $\exp(-i\omega t)$ будем опускать.

Разложим (2) в ряд по ортогональным функциям:

$$\Psi_o(r_\odot, \theta_\odot, f_\odot) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \gamma_{mn} j_n(k_e r_\odot) P_n^{|m|}(\cos\theta_\odot)\, \mathrm{e}^{im\varphi_\odot}, \tag{3}$$

где $j_n(x)$ — сферическая функция Бесселя порядка n;
$P_n^m(x)$ — присоединенный многочлен Лежандра степени n порядка m;
$\gamma_{mn} = \begin{cases} A_o i^n (2n+1), & \text{при } m = 0; \\ 0, & \text{при } m \neq 0. \end{cases}$

Задача определения акустических полей вне упругого тела и внутри его полости в установившемся режиме колебаний заключается в нахождении решений уравнения Гельмгольца:

$$\Delta\Psi_e + k_e^2 \Psi_e = 0; \tag{4}$$

$$\Delta\Psi_\circ + k_\circ^2 \Psi_\circ = 0, \tag{5}$$

где Ψ_e — потенциал скоростей полного акустического поля во внешней среде;
$\Psi_\circ$ — потенциал скоростей акустического поля в полости тела;
$k_\circ = \dfrac{\omega}{c_\circ}$ — волновое число находящейся в полости жидкости.

При этом скорости частиц жидкости и акустическое давление вне тела и внутри полости определяются по следующим формулам соответственно:

$$\bar{\mathbf{v}}_e = \operatorname{grad}\Psi_e; \qquad P_e = ip_e\omega\Psi_e; \tag{6}$$

$$\bar{\mathbf{v}}_\circ = \operatorname{grad}\Psi_\circ; \qquad P_\circ = ip_\circ\omega\Psi_\circ. \tag{7}$$

В силу линейной постановки задачи для Ψ_e и Ψ_o справедливо

$$\Psi_e = \Psi_o + \Psi_s, \tag{8}$$

где Ψ_s — потенциал скоростей рассеянной звуковой волны.
Тогда из (4) получаем уравнение для нахождения Ψ_s:

$$\Delta\Psi_s + k_e^2\Psi_s = 0. \tag{9}$$

Из-за произвольного расположения полости в теле потенциалы $\Psi_\circ$ и Ψ_s не будут проявлять свойства симметрии. Уравнения (5) и (9) запишем в сферических системах координат $(r_\circ, \theta_\circ, \varphi_\circ)$ и $(r_\odot, \theta_\odot, \varphi_\odot)$ соответственно:

$$\frac{1}{r_\circ^2}\frac{\partial}{\partial r_\circ}\left(r_\circ^2\frac{\partial\Psi_\circ}{\partial r_\circ}\right) + \frac{1}{r_\circ^2\sin^2\theta_\circ}\frac{\partial\Psi_\circ}{\partial\varphi_\circ^2} + \frac{1}{r_\circ^2\sin\theta_\circ}\frac{\partial}{\partial\theta_\circ}\left(\sin\theta_\circ\frac{\partial\Psi_\circ}{\partial\theta_\circ}\right) + k_\circ^2\Psi_\circ = 0; \tag{10}$$

$$\frac{1}{r_\odot^2}\frac{\partial}{\partial r_\odot}\left(r_\odot^2\frac{\partial\Psi_s}{\partial r_\odot}\right) + \frac{1}{r_\odot^2\sin^2\theta_\odot}\frac{\partial\Psi_s}{\partial\varphi_\odot^2} + \frac{1}{r_\odot^2\sin\theta_\odot}\frac{\partial}{\partial\theta_\odot}\left(\sin\theta_\odot\frac{\partial\Psi_s}{\partial\theta_\odot}\right) + k_e^2\Psi_s = 0. \tag{11}$$

Звуковая волна в полости тела $\Psi_\circ$ должна удовлетворять условию ограниченности, а отраженная волна Ψ_s — условиям излучения на бесконечности. Поэтому потенциалы Ψ_s и $\Psi_\circ$ будем искать в виде рядов по сферическим функциям:

$$\Psi_s(r_\odot, \theta_\odot, \varphi_\odot) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} A_{snm}h_n(k_e r_\odot)P_n^{|m|}(\cos\theta_\odot)\cos\bigl(m\varphi_\odot\bigr); \tag{12}$$

$$\Psi_\circ(r_\circ, \theta_\circ, \varphi_\circ) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} B_{\circ nm}j_n(k_\circ r_\circ)P_n^{|m|}(\cos\theta_\circ)\cos\bigl(m\varphi_\circ\bigr), \tag{13}$$

где $h_n(x)$ — сферическая функции Ханкеля первого рода.

Распространение малых возмущений в упругом теле для установившегося режима движения частиц тела описывается скалярным и векторным уравнением Гельмгольца:

$$\Delta\Psi_\odot + k_{\odot l}^{\,2}\Psi_\odot = 0; \tag{14}$$

$$\Delta\boldsymbol{\Phi}_\odot + k_{\odot\tau}^{\,2}\boldsymbol{\Phi}_\odot = 0, \tag{15}$$

где $k_{\odot l}$ — волновое число продольных волн со скоростью распространения $c_{\odot l} = \sqrt{\dfrac{(\lambda_\odot + 2\mu_\odot)}{p_\odot}}$;
$k_{\odot\tau}$ — волновое число поперечных волн со скоростью распространения $c_{\odot\tau} = \sqrt{\dfrac{\mu_\odot}{p_\odot}}$;
$\Psi_\odot$ и $\boldsymbol{\Phi}_\odot$ — скалярной и векторный потенциалы смещения соответственно.

Вектор смещения $\mathbf{u}_\odot$ частиц упругого тела определяется по формуле

$$\mathbf{u}_\odot = \operatorname{grad}\Psi_\odot + \operatorname{rot}\boldsymbol{\Phi}_\odot.$$

Потенциал смещения $\Psi_\odot$ будем искать в виде ряда по двум локальным сферическим функциям:

$$\begin{aligned} \Psi_\odot = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} A_{\odot nm} h_n(k_{\odot l} r_\circ) P_n^{|m|}(\cos\theta_\circ)\,\mathrm{e}^{im\varphi_\circ} + \\ + B_{\odot nm} j_n(k_{\odot l} r_\odot) P_n^{|m|}(\cos\theta_\odot)\,\mathrm{e}^{im\varphi_\odot} \end{aligned} \tag{16}$$

Векторный потенциал $\boldsymbol{\Phi}_\odot$ может быть представлен в виде суммы:

$$\boldsymbol{\Phi}_\odot = rV\bar{e}_r + \operatorname{rot}\big(rW\bar{e}_r\big),$$

где $\bar{e}_r$ — орт координатной оси $r_\odot$ сферической системы координат $r_\odot, \theta_\odot, \varphi_\odot$, функции V и W удовлетворяют скалярным уравнениям Гельмгольца

$$\Delta V + k_{\odot\tau}^{\,2} V = 0, \tag{17}$$

$$\Delta W + k_{\odot\tau}^{\,2} W = 0. \tag{18}$$

Компоненты вектора $\mathbf{u}_\odot$ выражаются через функции $\Psi_\odot, V$ и W следующим образом:

$$\begin{aligned} u_{\odot r} &= \frac{\partial\Psi_\odot}{\partial r_\odot} + k_{\odot\tau}^{\,2}\left(\frac{\partial^2}{\partial r_\odot^2}\big(r_\odot W\big) + k_{\odot\tau}^{\,2} r_\odot W\right), \\ u_{\odot\theta} &= \frac{1}{r_\odot}\frac{\partial\Psi_\odot}{\partial\theta_\odot} + \frac{k_{\odot\tau}^{\,2}}{r_\odot}\left(\frac{k_{\odot\tau} r_\odot}{\sin\theta_\odot}\frac{\partial V}{\partial\varphi_\odot} + \frac{\partial^2}{\partial r_\odot\partial\theta_\odot}\big(r_\odot W\big)\right), \\ u_{\odot\varphi} &= \frac{1}{r_\odot\sin\theta_\odot}\frac{\partial\Psi_\odot}{\partial\varphi_\odot} + \frac{k_{\odot\tau}}{r_\odot}\left(\frac{1}{\sin\theta_\odot}\frac{\partial^2}{\partial r_\odot\partial\varphi_\odot}\big(r_\odot W\big) + k_{\odot\tau} r_\odot\frac{\partial V}{\partial\theta_\odot}\right). \end{aligned} \tag{19}$$

Функции V и W будем искать в виде:

$$V=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}C_{\odot nm}h_n(k_{\odot l}r_{\circ})P_n^{|m|}(\cos\theta_{\circ})\,\mathrm{e}^{im\varphi_{\circ}}+$$

$$+D_{\odot nm}j_n(k_{\odot l}r_{\odot})P_n^{|m|}(\cos\theta_{\odot})\,\mathrm{e}^{im\varphi_{\odot}}, \tag{20}$$

$$W=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}E_{\odot nm}h_n(k_{\odot l}r_{\circ})P_n^{|m|}(\cos\theta_{\circ})\,\mathrm{e}^{im\varphi_{\circ}}+$$

$$+F_{\odot nm}j_n(k_{\odot l}r_{\odot})P_n^{|m|}(\cos\theta_{\odot})\,\mathrm{e}^{im\varphi_{\odot}}\,. \tag{21}$$

Распространение упругих волн в неоднородном слое описывается общими уравнениями движения упругой среды, которые для установившегося режима движения в сферической системе координат имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_{\circledcirc rr}}{\partial r_{\odot}}+\frac{1}{r_{\odot}}\frac{\partial\sigma_{\circledcirc r\theta}}{\partial\theta_{\odot}}+\frac{1}{r_{\odot}\sin\theta_{\odot}}\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial\varphi}+\\
&\qquad+\frac{1}{r_{\odot}}\left(2\sigma_{\circledcirc rr}-\sigma_{\circledcirc\theta\theta}-\sigma_{\circledcirc\varphi\varphi}+\sigma_{\circledcirc r\theta}\operatorname{ctg}\theta_{\odot}\right)=-p_{\circledcirc}\omega^2u_{\circledcirc r};\\
&\frac{\partial\sigma_{\circledcirc r\theta}}{\partial r_{\odot}}+\frac{1}{r_{\odot}}\frac{\partial\sigma_{\circledcirc\theta\theta}}{\partial\theta_{\odot}}+\frac{1}{r_{\odot}\sin\theta_{\odot}}\frac{\partial\sigma_{\circledcirc\theta\varphi}}{\partial\varphi_{\odot}}+\\
&\qquad+\frac{1}{r_{\odot}}\left(\left(\sigma_{\circledcirc\theta\theta}-\sigma_{\circledcirc\varphi\varphi}\right)\operatorname{ctg}\theta_{\odot}+3\sigma_{\circledcirc r\theta}\right)=-p_{\circledcirc}\omega^2u_{\circledcirc\theta};\\
&\frac{\partial\sigma_{\circledcirc r\varphi}}{\partial r_{\odot}}+\frac{1}{r_{\odot}}\frac{\partial\sigma_{\circledcirc\theta\varphi}}{\partial\theta_{\odot}}+\frac{1}{r_{\odot}\sin\theta_{\odot}}\frac{\partial\sigma_{\circledcirc\varphi\varphi}}{\partial\varphi_{\odot}}+\\
&\qquad+\frac{1}{r_{\odot}}\left(3\sigma_{\circledcirc r\varphi}+2\sigma_{\circledcirc\theta\varphi}\operatorname{ctg}\theta_{\odot}\right)=-p_{\circledcirc}\omega^2u_{\circledcirc\varphi},
\end{aligned} \tag{22}$$

где $u_{\circledcirc r}, u_{\circledcirc\theta}, u_{\circledcirc\varphi}$ — компоненты вектора смещения $\mathbf{u}_{\circledcirc}$;
$\sigma_{\circledcirc ij}$ — компоненты тензора напряжений неоднородной среды в сферической системе координат.

Используя связь компонентов тензора напряжений с компонентами тензора деформаций (обобщенный закон Гука), а также выражения компонентов тензора деформаций через компоненты вектора смещения, получаем в сферической системе координат следующие соотношения:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{\circledcirc rr} &= \Big(\lambda_\circledcirc + 2\mu_\circledcirc\Big)\frac{\partial u_{\circledcirc r}}{\partial r_\odot} + \\
&\quad + \frac{\lambda_\circledcirc}{r_\odot}\left(2u_{\circledcirc r} + \frac{\partial u_{\circledcirc\theta}}{\partial\theta_\odot} + \operatorname{ctg}\theta_\odot\; u_{\circledcirc\theta} + \frac{1}{\sin\theta_\odot}\frac{\partial u_{\circledcirc\varphi}}{\partial\varphi_\odot}\right); \\
\sigma_{\circledcirc\theta\theta} &= \lambda_\circledcirc\frac{\partial u_{\circledcirc r}}{\partial r_\odot} + \frac{2(\lambda_\circledcirc + \mu_\circledcirc)}{r_\odot}u_{\circledcirc r} + \frac{\lambda_\circledcirc + 2\mu_\circledcirc}{r_\odot}\frac{\partial u_{\circledcirc\theta}}{\partial\theta_\odot} + \\
&\quad + \frac{\lambda_\circledcirc}{r_\odot}\left(\operatorname{ctg}\theta_\odot\; u_{\circledcirc\theta} + \frac{1}{\sin\theta_\odot}\frac{\partial u_{\circledcirc\varphi}}{\partial\varphi_\odot}\right); \\
\sigma_{\circledcirc\varphi\varphi} &= \lambda_\circledcirc\frac{\partial u_{\circledcirc r}}{\partial r_\odot} + \frac{2(\lambda_\circledcirc + \mu_\circledcirc)}{r_\odot}u_{\circledcirc r} + \frac{\lambda_\circledcirc}{r_\odot}\frac{\partial u_{\circledcirc\theta}}{\partial\theta_\odot} + \\
&\quad + \frac{\lambda_\circledcirc + 2\mu_\circledcirc}{r_\odot}\left(\operatorname{ctg}\theta_\odot\; u_{\circledcirc\theta} + \frac{1}{\sin\theta_\odot}\frac{\partial u_{\circledcirc\varphi}}{\partial\varphi_\odot}\right); \\
\sigma_{\circledcirc r\theta} &= \mu_\circledcirc\left(\frac{1}{r_\odot}\frac{\partial u_{\circledcirc r}}{\partial\theta_\odot} - \frac{u_{\circledcirc\theta}}{r_\odot} + \frac{\partial u_{\circledcirc\theta}}{\partial r}\right); \\
\sigma_{\circledcirc r\varphi} &= \mu_\circledcirc\left(\frac{1}{r_\odot\sin\theta_\odot}\frac{\partial u_{\circledcirc r}}{\partial\varphi} - \frac{u_{\circledcirc\varphi}}{r_\odot} + \frac{\partial u_{\circledcirc\varphi}}{\partial r_\odot}\right); \\
\sigma_{\circledcirc\theta\varphi} &= \frac{\mu_\circledcirc}{r_\odot}\left(\frac{1}{\sin\theta_\odot}\frac{\partial u_{\circledcirc\theta}}{\partial\varphi_\odot} + \frac{\partial u_{\circledcirc\varphi}}{\partial\theta_\odot} - \operatorname{ctg}\theta_\odot\; u_{\circledcirc\varphi}\right).
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Соотношения (23) справедливы как для однородной упругой среды, так и для неоднородного слоя. В первом случае в выражениях (23) компоненты вектора смещения и тензора напряжений, а также величины $\lambda_\circledcirc$ и $\mu_\circledcirc$ следует заменить на $\lambda_\odot$ и $\mu_\odot$ соответственно.

Используя эти соотношения, запишем уравнения (22) через компоненты вектора смещения $\mathbf{u}_\circledcirc$:

$$
\begin{aligned}
&\Big(\lambda_\circledcirc + 2\mu_\circledcirc\Big)\frac{\partial^2 u_{\circledcirc r}}{\partial r_\odot^2} + \frac{\mu_\circledcirc}{r_\odot^2}\frac{\partial^2 u_{\circledcirc r}}{\partial\theta_\odot^2} + \frac{\mu_\circledcirc}{r_\odot\sin\theta_\odot}\frac{\partial^2 u_{\circledcirc r}}{\partial\varphi_\odot^2} + \frac{\mu_\circledcirc\operatorname{ctg}\theta_\odot}{r_\odot^2}\frac{\partial u_{\circledcirc r}}{\partial\theta_\odot} + \\
&+ \left(\lambda'_\circledcirc + 2\mu'_\circledcirc + \frac{2\lambda_\circledcirc + 4\mu_\circledcirc}{r_\odot}\right)\frac{\partial u_{\circledcirc r}}{\partial r_\odot} + \left(\frac{2\lambda'_\circledcirc}{r_\odot} - \frac{2\lambda_\circledcirc + 4\mu_\circledcirc}{r_\odot^2}\right)u_{\circledcirc r} + \\
&+ \frac{\lambda_\circledcirc + \mu_\circledcirc}{r_\odot}\frac{\partial^2 u_{\circledcirc\theta}}{\partial r_\odot\partial\theta_\odot} + \frac{(\lambda_\circledcirc + \mu_\circledcirc)\operatorname{ctg}\theta_\odot}{r_\odot}\frac{\partial u_{\circledcirc\theta}}{\partial r_\odot} + \\
&+ \left(\frac{\lambda'_\circledcirc}{r_\odot} - \frac{\lambda_\circledcirc + 3\mu_\circledcirc}{r_\odot^2}\right)\frac{\partial u_{\circledcirc\theta}}{\partial\theta_\odot} + \left(\frac{\lambda'_\circledcirc\operatorname{ctg}\theta_\odot}{r_\odot} - \frac{(\lambda_\circledcirc + 3\mu_\circledcirc)\operatorname{ctg}\theta_\odot}{r_\odot^2}\right)u_{\circledcirc\theta} + \\
&+ \frac{\lambda_\circledcirc + \mu_\circledcirc}{r_\odot\sin\theta_\odot}\frac{\partial^2 u_{\circledcirc\varphi}}{\partial r_\odot\partial\varphi_\odot} + \left(\frac{\lambda'_\circledcirc}{r_\odot\sin\theta_\odot} - \frac{\lambda_\odot + 3\mu_\odot}{r_\odot^2\sin\theta_\odot}\right)\frac{\partial u_{\circledcirc\varphi}}{\partial\varphi_\odot} = -p_\circledcirc\omega^2 u_{\circledcirc r};
\end{aligned}
$$

$$\frac{\lambda_\circledcirc+\mu_\circledcirc}{r_\odot}\frac{\partial^2 u_{\circledcirc r}}{\partial r_\odot\partial\theta_\odot}+\left(\frac{\mu'_\circledcirc}{r_\odot}+\frac{2\lambda_\circledcirc+4\mu_\circledcirc}{r_\odot^2}\right)\frac{\partial u_{\circledcirc r}}{\partial\theta_\odot}+$$
$$+\mu_\circledcirc\frac{\partial^2 u_{\circledcirc\theta}}{\partial r_\odot^2}+\frac{\lambda_\circledcirc+2\mu_\circledcirc}{r_\odot^2}\frac{\partial^2 u_{\circledcirc\theta}}{\partial\theta_\odot^2}+\frac{\mu_\circledcirc}{r_\odot^2\sin^2\theta_\odot}\frac{\partial^2 u_{\circledcirc\theta}}{\partial\varphi^2}+$$
$$+\left(\mu'_\circledcirc+\frac{2\mu_\circledcirc}{r_\odot}\right)\frac{\partial u_{\circledcirc\theta}}{\partial r_\odot}+\frac{(\lambda_\circledcirc+2\mu_\circledcirc)\operatorname{ctg}\theta_\odot}{r_\odot^2}\frac{\partial u_{\circledcirc\theta}}{\partial\theta_\odot}-\left(\frac{\mu'_\circledcirc}{r_\odot}+\frac{\lambda_\circledcirc+2\mu_\circledcirc}{r_\odot^2\sin^2\theta_\odot}\right)u_{\circledcirc\theta}+$$
$$+\frac{\lambda_\circledcirc+\mu_\circledcirc}{r_\odot^2\sin\theta_\odot}\frac{\partial^2 u_{\circledcirc\varphi}}{\partial\theta_\odot\partial\varphi_\odot}-\frac{(\lambda_\circledcirc+3\mu_\circledcirc)\operatorname{ctg}\theta_\odot}{r_\odot^2\sin\theta_\odot}\frac{\partial u_{\circledcirc\varphi}}{\partial\varphi_\odot}=-p_\circledcirc\omega^2u_{\circledcirc\theta};$$

$$\frac{\lambda_\circledcirc+\mu_\circledcirc}{r_\odot\sin\theta_\odot}\frac{\partial^2 u_{\circledcirc r}}{\partial r_\odot\partial\varphi_\odot}+\left(\frac{\mu'_\circledcirc}{r_\odot\sin\theta_\odot}+\frac{2\lambda_\circledcirc+4\mu_\circledcirc}{r_\odot^2\sin\theta_\odot}\right)\frac{\partial u_{\circledcirc r}}{\partial\varphi_\odot}+$$
$$+\frac{\lambda_\circledcirc+\mu_\circledcirc}{r_\odot^2\sin\theta_\odot}\frac{\partial^2 u_{\circledcirc\theta}}{\partial\theta_\odot\partial\varphi_\odot}+\frac{(\lambda_\circledcirc+3\mu_\circledcirc)\operatorname{ctg}\theta_\odot}{r_\odot^2\sin\theta_\odot}\frac{\partial u_{\circledcirc\theta}}{\partial\varphi_\odot}+$$
$$+\mu_\circledcirc\frac{\partial^2 u_{\circledcirc\varphi}}{\partial r_\odot^2}+\frac{\mu_\circledcirc}{r_\odot^2}\frac{\partial^2 u_{\circledcirc\varphi}}{\partial\theta_\odot^2}+\frac{\lambda_\circledcirc+2\mu_\circledcirc}{r_\odot^2\sin^2\theta_\odot}\frac{\partial^2 u_{\circledcirc\varphi}}{\partial\varphi_\odot^2}+$$
$$+\left(\mu'_\circledcirc+\frac{2\mu_\circledcirc}{r_\odot}\right)\frac{\partial u_{\circledcirc\varphi}}{\partial r_\odot}+\frac{\mu_\circledcirc\operatorname{ctg}\theta_\odot}{r_\odot^2}\frac{\partial u_{\circledcirc\varphi}}{\partial\theta_\odot}-\left(\frac{\mu'_\circledcirc}{r_\odot}+\frac{\mu_\circledcirc}{r_\odot^2\sin^2\theta_\odot}\right)u_{\circledcirc\varphi}=-p_\circledcirc\omega^2u_{\circledcirc\varphi}.$$

Введем новые функции $u_{\circledcirc 2}$ и $u_{\circledcirc 3}$, связанные с $u_{\circledcirc\theta}$ и $u_{\circledcirc\varphi}$ следующими соотношениями:

$$u_{\circledcirc\theta}=\frac{\partial u_{\circledcirc 2}}{\partial\theta_\odot}+\frac{1}{\sin\theta_\odot}\frac{\partial u_{\circledcirc 3}}{\partial\varphi_\odot};\qquad u_{\circledcirc\varphi}=\frac{1}{\sin\theta_\odot}\frac{\partial u_{\circledcirc 2}}{\partial\varphi_\odot}-\frac{\partial u_{\circledcirc 3}}{\partial\theta_\odot},\tag{24}$$

запишем уравнения движения через функции $u_{\circledcirc r}, u_{\circledcirc 2}$ и $u_{\circledcirc 3}$ и перенесем всё в левую часть:

$$\begin{gathered}\left(\lambda_\circledcirc+2\mu_\circledcirc\right)\frac{\partial^2 u_{\circledcirc r}}{\partial r_\odot^2}+\left(\lambda'_\circledcirc+2\mu'_\circledcirc+\frac{2\lambda_\circledcirc+4\mu_\circledcirc}{r_\odot}\right)\frac{\partial u_{\circledcirc r}}{\partial r_\odot}+\frac{\mu_\circledcirc}{r_\odot^2}L(u_{\circledcirc r})+\\+\left(\frac{2\lambda'_\circledcirc}{r_\odot}-\frac{2\lambda_\circledcirc+4\mu_\circledcirc}{r_\odot^2}+p_\circledcirc\omega^2\right)u_{\circledcirc r}+\\+\left[\frac{\lambda_\circledcirc+\mu_\circledcirc}{r_\odot}\frac{\partial}{\partial r_\odot}+\frac{\lambda'_\circledcirc}{r_\odot}-\frac{\lambda_\circledcirc+3\mu_\circledcirc}{r_\odot}\right]L(u_{\circledcirc 3})=0;\end{gathered}\tag{25}$$

$$\begin{gathered}\left[\frac{\lambda_\circledcirc+\mu_\circledcirc}{r_\odot}\frac{\partial}{\partial r_\odot}+\frac{\mu'_\circledcirc}{r_\odot}+\frac{2\lambda_\circledcirc+4\mu_\circledcirc}{r_\odot^2}\right]\frac{\partial u_{\circledcirc r}}{\partial\theta_\odot}+\frac{\lambda_\circledcirc+2\mu_\circledcirc}{r_\odot^2}\frac{\partial}{\partial\theta_\odot}L(u_{\circledcirc 2})+\\+\left[\mu_\circledcirc\frac{\partial^2}{\partial r_\odot^2}+\left(\mu'_\circledcirc+\frac{2\mu_\circledcirc}{r_\odot}\right)\frac{\partial}{\partial r_\odot}-\frac{\mu'_\circledcirc}{r_\odot}+p_\circledcirc\omega^2\right]\left[\frac{\partial u_{\circledcirc 2}}{\partial\theta_\odot}+\frac{1}{\sin\theta_\odot}\frac{\partial u_{\circledcirc 3}}{\partial\varphi_\odot}\right]+\\+\frac{\mu_\circledcirc}{r_\odot^2\sin\theta_\odot}\frac{\partial}{\partial\varphi_\odot}L(u_{\circledcirc 3})=0;\end{gathered}\tag{26}$$

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{r_\odot \sin\theta_\odot}\left[\left(\lambda_\circledcirc+\mu_\circledcirc\right)\frac{\partial}{\partial r_\odot}+\mu'_\circledcirc+\frac{2\lambda_\circledcirc+4\mu_\circledcirc}{r_\odot}\right]\frac{\partial u_{\circledcirc r}}{\partial\varphi_\odot}+\\
+\left[\mu_\circledcirc\frac{\partial^2}{\partial r_\odot^2}+\left(\mu'_\circledcirc+\frac{2\mu_\circledcirc}{r_\odot}\right)\frac{\partial}{\partial r_\odot}-\frac{\mu'_\circledcirc}{r_\odot}+p_\circledcirc\omega^2\right]\left[\frac{1}{\sin\theta_\odot}\frac{\partial u_{\circledcirc 2}}{\partial\varphi_\odot}-\frac{\partial u_{\circledcirc 3}}{\partial\theta_\odot}\right]+\\
+\frac{\lambda_\circledcirc+2\mu_\circledcirc}{r_\odot^2\sin\theta_\odot}\frac{\partial}{\partial\varphi_\odot}L(u_{\circledcirc 2})-\frac{\mu_\circledcirc}{r_\odot^2}\frac{\partial}{\partial\theta_\odot}L(u_{\circledcirc 3})=0,
\end{gathered}
\tag{27}
$$

где $L=\dfrac{\partial^2}{\partial\theta_\odot^2}+\operatorname{ctg}\theta_\odot\dfrac{\partial}{\partial\theta_\odot}+\dfrac{1}{\sin^2\theta_\odot}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi_\odot^2},\quad \lambda'_\circledcirc=\dfrac{\mathrm{d}\lambda_\circledcirc}{\mathrm{d}r_\odot},\quad \mu'_\circledcirc=\dfrac{\mathrm{d}\mu_\circledcirc}{\mathrm{d}r_\odot}.$

Сделаем преобразования уравнений. Уравнение (26) домножим на $\sin(\theta_\odot)$ и продифференцируем по $\theta_\odot$, а уравнение (27) продифференцируем по $\varphi_\odot$. Сложим полученные уравнения и разделим на $\sin(\theta_\odot)$. Получим следующее уравнение:

$$
\begin{gathered}
\left[\frac{\lambda_\circledcirc+\mu_\circledcirc}{r_\odot}\frac{\partial}{\partial r_\odot}+\frac{\mu'_\circledcirc}{r_\odot}+\frac{2\lambda_\circledcirc+4\mu_\circledcirc}{r_\odot^2}\right]L(u_{\circledcirc r})+\\
\left[\mu_\circledcirc\frac{\partial^2}{\partial r_\odot^2}+\left(\mu'_\circledcirc+\frac{2\mu_\circledcirc}{r_\odot}\right)\frac{\partial}{\partial r_\odot}-\frac{\mu'_\circledcirc}{r_\odot}+p_\circledcirc\omega^2\right]L(u_{\circledcirc 2})+\\
+\frac{\lambda_\circledcirc+2\mu_\circledcirc}{r_\odot^2}L^2(u_{\circledcirc 2})=0,
\end{gathered}
\tag{28}
$$

не содержащее функцию $u_{\circledcirc 3}$. Затем продифференцируем уравнение (26) по $\varphi_\odot$ и вычтем уравнение (27), предварительно умноженное на $\sin(\theta_\odot)$ и продифференцированное по $\theta_\odot$, а затем всё разделим на $\sin(\theta_\odot)$. Получим следующее уравнение:

$$
\begin{gathered}
\left[\mu\frac{\partial^2}{\partial r_\odot^2}+\left(\mu'_\circledcirc+\frac{2\mu_\circledcirc}{r_\odot}\right)\frac{\partial}{\partial r_\odot}-\frac{\mu'_\circledcirc}{r_\odot}+p_\circledcirc\omega^2\right]L(u_{\circledcirc 3})+\\
\frac{\mu_\circledcirc}{r_\odot^2}L^2(u_{\circledcirc 3})=0,
\end{gathered}
\tag{29}
$$

в котором отсутствуют функции $u_{\circledcirc r}$ и $u_{\circledcirc 2}$.

В результате получили систему, состоящую из уравнений (25), (28) и (29).

Функции $u_{\circledcirc r}, u_{\circledcirc 2}$ и $u_{\circledcirc 3}$ также будем искать в виде разложений по сферическим функциям:

$$
\begin{aligned}
u_{\circledcirc r}(r_\odot,\theta_\odot,\varphi_\odot)&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}U_{1mn}(r_\odot)P_n^{|m|}(\cos\theta_\odot)\,\mathrm{e}^{im\varphi_\odot},\\
u_{\circledcirc 2}(r_\odot,\theta_\odot,\varphi_\odot)&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}U_{2mn}(r_\odot)P_n^{|m|}(\cos\theta_\odot)\,\mathrm{e}^{im\varphi_\odot},\\
u_{\circledcirc 3}(r_\odot,\theta_\odot,\varphi_\odot)&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}U_{3mn}(r_\odot)P_n^{|m|}(\cos\theta_\odot)\,\mathrm{e}^{im\varphi_\odot}.
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Коэффициенты $A_{snm}, B_{\circ nm}, A_{\odot nm}, B_{\odot nm}, C_{\odot nm}, D_{\odot nm}, E_{\odot nm}$ и $F_{\odot nm}$ разложений (12), (13), (16), (20) и (21), а также функции U_{1mn}, U_{2mn} и U_{3mn} из разложений (30) подлежат определению из граничных условий, которые заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости на внешней поверхности слоя и внутренней поверхности полого шара; равенстве на них нормального напряжения и акустического давления; отсутствии на этих поверхностях касательных напряжений. На внутренней поверхности слоя при переходе через границу раздела упругих сред должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, а также нормальные и тангенциальные напряжения. Имеем:

$$\text{при } r_\circ = R_\circ: \qquad \sigma_{\odot rr} = -P_\circ, \qquad \sigma_{\odot r\theta} = 0, \qquad \sigma_{\odot r\varphi} = 0,$$
$$-i\omega u_{\odot r} = v_{\circ r}; \tag{31}$$
$$\text{при } r_\odot = R_\odot: \qquad \sigma_{\odot rr} = \sigma_{\circledcirc rr}, \qquad \sigma_{\odot r\theta} = \sigma_{\circledcirc r\theta}, \qquad \sigma_{\odot r\varphi} = \sigma_{\circledcirc r\varphi},$$
$$u_{\odot r} = u_{\circledcirc r}, \qquad u_{\odot \theta} = u_{\circledcirc \theta}, \qquad u_{\odot \varphi} = u_{\circledcirc \varphi}; \tag{32}$$
$$\text{при } r_\odot = R_\circledcirc: \qquad \sigma_{\circledcirc rr} = -P_e, \qquad \sigma_{\circledcirc r\theta} = 0, \qquad \sigma_{\circledcirc r\varphi} = 0,$$
$$-i\omega u_{\circledcirc r} = v_{er}, \tag{33}$$

где $v_{\circ r} = \partial\Psi_\circ/\partial r, \quad v_{er} = \partial\Psi_e/\partial r$ — радиальная компонента скорости частиц в жидкости внутри полости $\bar{\mathbf{v}}_\circ$ и в окружающем пространстве $\bar{\mathbf{v}}_e$ соответственно.

Используя выражения (6), (23) и (24), запишем граничные условия (33) через функции $\Psi_o, \Psi_s, u_{\circledcirc r}, u_{\circledcirc 2}$ и $u_{\circledcirc 3}$. Получим для $r_\odot = R_\circledcirc$:

$$-i\omega u_{\circledcirc r} = \frac{\partial(\Psi_o + \Psi_s)}{\partial r_\odot}; \tag{34}$$

$$\left(\lambda_\circledcirc + 2\mu_\circledcirc\right)\frac{\partial u_{\circledcirc r}}{\partial r_\odot} + \frac{2\lambda_\circledcirc}{r_\odot}u_{\circledcirc r} + \frac{\lambda_\circledcirc}{r_\odot}L(u_{\circledcirc r}) = ip_e\omega\left(\Psi_o + \Psi_s\right); \tag{35}$$

$$\frac{\mu_\circledcirc}{r_\odot}\frac{\partial(u_{\circledcirc r} - u_{\circledcirc 2})}{\partial\theta_\odot} + \mu_\circledcirc\frac{\partial^2 u_{\circledcirc 2}}{\partial r_\odot\partial\theta_\odot} + \frac{\mu_\circledcirc}{\sin\theta_\odot}\frac{\partial}{\partial\varphi_\odot}\left(\frac{\partial u_{\circledcirc 3}}{\partial r_\odot} - \frac{u_{\circledcirc 3}}{r_\odot}\right) = 0; \tag{36}$$

$$\frac{\mu_\circledcirc}{r_\odot\sin\theta_\odot}\frac{\partial}{\partial\varphi_\odot}\left(u_{\circledcirc r} - u_{\circledcirc 2}\right) + \frac{\mu_\circledcirc}{\sin\theta_\odot}\frac{\partial^2 u_{\circledcirc 2}}{\partial r_\odot\partial\varphi_\odot} - \mu_\circledcirc\frac{\partial}{\partial\theta_\odot}\left(\frac{\partial u_{\circledcirc 3}}{\partial r_\odot} - \frac{u_{\circledcirc 3}}{r}\right) = 0. \tag{37}$$

Аналогично, используя выражения (19), (23) и (24), запишем граничные условия (32) через функции $u_{\odot r}, u_{\odot 2}, u_{\odot 3}, \Psi_\odot, V$ и W, а граничные условия (31) через $\Psi_\odot, V$ и W.

Подставив разложения (30) в уравнения (25), (28) и (29), воспользовавшись уравнением для присоединенных многочленов Лежандра и свойством ортогональности этих многочленов, получим для каждой пары индексов $m, n \quad (n = 0, 1, \ldots; |m| \leq n)$ систему линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $U_{1mn}(r_\odot), U_{mn}(r_\odot)$ и $U_{3mn}(r_\odot)$. А подставив разложения (30) в полученные граничные условия, найдем краевые условия и сможем решить систему дифференциальных уравнений. После ее решения определим коэффициенты $A_{snm}, B_{\circ nm}, A_{\odot nm}, B_{\odot nm}, C_{\odot nm}, D_{\odot nm}, E_{\odot nm}$ и $F_{\odot nm}$ разложений (12), (13), (16), (20) и (21) для каждой пары индексов m, n, а зная коэффициенты A_{snm}, по формуле (12) найдем акустическое поле, рассеяное упругой сферой, имеющей произвольно расположенную полость и неоднородное покрытие.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Была поставлена задача о дифракции плоских звуковых волн на упругой сфере, имеющей произвольно расположенную полость и неоднородное покрытие. В данной работе приведены основные уравнения колебаний, разложения в ряд искомых функций, а также способ получения системы линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и краевых условий.