# СОДЕРЖАНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

Потребность в изучении дифракции на различных телах очень высока. Знания, полученные путем изучения дифракции с помощью моделей, используются как в гидроакустике и эхолокации, так и в других областях. Для современного мира изучение простых моделей уже не дает требуемой точности прогнозирования поведения волн. Поэтому, необходимо изучать более сложные модели, детально описывающие рассматриваемые тела и окружающую среду. В качестве простых моделей рассматривают дифракцию плоских звуковых волн, однако это приближение возможно только в случае, когда расстояние от источника до рассеивателя много больше длины волны. Акустические поля сложных излучателей успешнее моделируются при помощи изучения дифракции звуковых волн, излучаемых цилиндрическими и сферическими источниками.

В настоящей работе рассматриваются основные уравнения, используемые для простроения модели в задаче о дифракции звуковых волн на упругой сфере с неоднородным покрытием и неконцентрической полостью. С помощью таких покрытий можно изменять звукоотражающие свойства тел. В качестве рассматриваемого тела выбрана сфера, т.к. более сложные тела можно аппроксиммировать с помощью сферы. Данная задача может быть рассмотрена с точки зрения дефектоскопии из-за наличия произвольно расположенной полости внутри тела.

# 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Изучению распространения и дифракции звуковых волн в непрерывно-неоднородных средах посвящено большое количество работ. При этом большая часть исследований относится к рассмотрению дифракции звука на жидких неоднородных телах. Проблема дифракции звуковых волн на упругих неоднородных телах является значительно более сложной по сравнению с аналогичной проблемой для неоднородных акустических сред.

Дифракция плоских звуковых волн на упругих сферических и цилиндрических телах рассматривалось в ряде работ. В [1] упругая сплошная сфера полагалась однородной и изотропной. В [2] полый сферический рассеиватель являлся неоднородным и трансверсально-изотропным. В [3] изучалась дифракция на полой неоднородной термоупругой сфере. В работе [4] рассмотрена задача о рассеянии плоской продольной упругой волны цилиндром с неоднородным внешним слоем. Предполагается, что падающая волна распространяется перпендикулярно к образующей цилиндра, а материал внутренней части цилиндра является однородной изотропной упругой средой. В [5] найдено решение задачи о рассеянии плоской упругой волны однородным изотропным шаром, окруженным неоднородным сферическим слоем.

Во всех указанных работах неоднородные упругие среды полагались изотропными, жидкость в которую помещены тела, полагалась идеальной, а также что рассеиватель находится в безграничной среде.

# 2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКА

## 2.1. Распространение звука в идеальной жидкости

Для математического процесса моделирования распространения звука в идеальной среде воспользуемся полной системой уравнений гидромеханики идеальной жидкости, описывающей любые движения идеальной жидкости. Эта система включает уравнение движения идеальной жидкости (уравнение Эйлера), уравнение неразрывности и уравнение физического состояния.

Математическое описание движения жидкости осуществляется с помощью функций, определяющих распределение скорости $\bar{v}$, давления $p$ и плотности $\rho$. Уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla)\bar{v} = \bar{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p, \tag{1}$$

где $\bar{F}$ — массовая сила, отнесённая к единице массы.

Уравнение неразрывности записывается в виде

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \bar{v}) = 0. \tag{2}$$

Будем считать, что движение сжимаемой жидкости происходит адиабатически. В этом случае уравнение физического состояния принимает вид

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}, \tag{3}$$

где $\gamma = \frac{C_p}{C_\nu}$; $p_0$ и $\rho_0$ — давление и плотность невозмущенной жидкости; $C_p$ и $C_\nu$ — теплоемкость при постоянном давлении и постоянном объеме.

Процесс распространения звука представляет собой малые колебания жидкости, так что в уравнении (1) можно пренебречь конвективными членами. Полагая, что внешние силы отсутствуют, получим:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p. \tag{4}$$

Введем в рассмотрение величину $s$, называемую сжатием и равную относительному изменению плотности

$$s = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}.$$

Тогда

$$\rho = \rho_0(1 + s). \tag{5}$$

Тогда уравнение (3) перепишем в виде

$$p = p_0(1 + s)^\gamma. \tag{6}$$

При малых колебаниях жидкости сжатие $s$ настолько мало, что высшими степенями $s$ можно пренебречь. В результате из выражения (6) получим

$$p = p_0(1 + \gamma \cdot s). \tag{7}$$

Подставим выражение (5) в уравнение неразрывности. Так как

$$\operatorname{div}(\rho\bar{v}) = \rho \operatorname{div}(\bar{v}) + \bar{v} \operatorname{grad} \rho = \rho_0 \operatorname{div}(\bar{v}) + \rho_0 s \operatorname{div}(\bar{v}) + \bar{v} \operatorname{grad} \rho,$$

причем последними двумя слагаемыми можно пренебречь, то вместо уравнения (2) будем иметь

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{v}) = 0. \tag{8}$$

Уравнение (4) в том же приближении сводится к уравнению

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -c^2 \cdot \operatorname{grad} s, \tag{9}$$

где $c = (\gamma\frac{p_0}{\rho_0})^{1/2}$ — скорость звука.

Предположим теперь, что в начальный момент существует потенциал скоростей $\tilde{\psi}_0$, т.е.

$$\bar{v}\Big|_{t=0} = \operatorname{grad} \tilde{\psi}_0. \tag{10}$$

Из уравнения (9) имеем

$$\bar{v} = \bar{v}|_{t=0} - c^2 \operatorname{grad}\left(\int\limits_0^t s\,\mathrm{d}t\right).$$

С учетом (10) получаем

$$\bar{v} = \operatorname{grad}\left[\tilde{\psi}_0 - c^2 \int\limits_0^t s\,\mathrm{d}t\right] = \operatorname{grad} \tilde{\psi}. \tag{11}$$

Это означает, что существует потенциал скоростей $\tilde{\psi}$ в любой момент времени $t$ :

$$\tilde{\psi} = \tilde{\psi}_0 - c^2 \int\limits_0^t s \, \mathrm{d}t.$$

Дифференцируя последнее выражение два раза по $t$, получим

$$\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial t^2} = -c^2 \frac{\partial s}{\partial t}. \tag{12}$$

С другой стороны, подставляя выражение (11) в уравнение (8), будем иметь

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\operatorname{div} \operatorname{grad} \tilde{\psi} = -\Delta \tilde{\psi}. \tag{13}$$

Из уравнений (12) и (13) приходим к волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \tilde{\psi}, \tag{14}$$

которое описывает процесс распространения звука в идеальной жидкости.

Отметим, что знания потенциала $\tilde{\psi}$ достаточно для определения всего процесса движения жидкости в случае малых возмущений, так как

$$\bar{v} = \operatorname{grad} \tilde{\psi}; \quad s = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t}.$$

Найдем акустическое давление $p' = p - p_0$. Из уравнения (4), используя приближение, сделанное для (9):

$$\frac{\partial \operatorname{grad} \tilde{\psi}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} p'.$$

Занесем дифференциал под градиент и перенесем в левую часть:

$$\operatorname{grad} \left( \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} + \frac{p'}{\rho_0} \right) = 0.$$

Выражение в скобках не зависит от координат. Учитывая, что потенциал $\tilde{\psi}$ определяется с точностью до функции времени, приравняем выражение в скобках нулю:

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} + \frac{p'}{\rho_0} = 0.$$

В случае установившегося режима колебаний

$$\tilde{\psi} = \psi \, \mathrm{e}^{-i\omega t} \tag{15}$$

уравнение (14) переходит в уравнение Гельмгольца

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0, \tag{16}$$

где $\omega$ — круговая частота; $k = \frac{\omega}{c}$ — волновое число. При этом акустическое давление

$$p' = -\rho_0 \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial t} = -\rho_0 \cdot (-i\omega)\psi\, \mathrm{e}^{-i\omega t} = i\rho_0\omega\tilde{\psi}.$$

## 2.2. Распространение малых возмущений в упругой среде

Под идеально упругим телом понимают тело, которое под воздействием приложенных к нему сил деформируется и полностью восстанавливает свою форму после устранения причины, вызвавшей деформацию. В качестве рассматриваемой среды возьмем модель линейной неоднородной изотропной упругой среды.

Уравнения движения сплошной среды, для случая отсутствия массовых сил, в криволинейной ортогональной системе координат имеют вид [6]:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(h_2h_3\sigma_{11}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(h_1h_3\sigma_{12}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(h_1h_2\sigma_{13}\right)-\right.\\
&\left.-\sigma_{22}h_3\frac{\partial h_2}{\partial q_1}-\sigma_{33}h_2\frac{\partial h_3}{\partial q_1}+\sigma_{12}h_3\frac{\partial h_1}{\partial q_2}+\sigma_{13}h_2\frac{\partial h_1}{\partial q_3}\right]=\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2};\\
&\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}\left(h_1h_3\sigma_{22}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(h_1h_2\sigma_{23}\right)+\frac{\partial}{\partial q_1}\left(h_2h_3\sigma_{12}\right)-\right.\\
&\left.-\sigma_{33}h_1\frac{\partial h_3}{\partial q_2}-\sigma_{11}h_3\frac{\partial h_1}{\partial q_2}+\sigma_{23}h_1\frac{\partial h_2}{\partial q_3}+\sigma_{12}h_3\frac{\partial h_2}{\partial q_1}\right]=\rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2};\\
&\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_3}\left(h_1h_2\sigma_{33}\right)+\frac{\partial}{\partial q_1}\left(h_2h_3\sigma_{13}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(h_1h_3\sigma_{23}\right)-\right.\\
&\left.-\sigma_{11}h_2\frac{\partial h_1}{\partial q_3}-\sigma_{22}h_1\frac{\partial h_2}{\partial q_3}+\sigma_{13}h_2\frac{\partial h_3}{\partial q_1}+\sigma_{23}h_1\frac{\partial h_3}{\partial q_2}\right]=\rho\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Здесь $\rho=\rho(\mathbf{r})$ — равновесная плотность среды ($\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки тела);
$u_i$ — компоненты вектора смещений $u$;
$\sigma_{ij}$ — компоненты тензора напряжений;
$h_1, h_2, h_3$ — коэффциенты Ламе криволинейной системы координат.

Обобщенный закон Гука — связывает тензоры напряжения и деформации с помощью тензора упругих постоянных [6]:

$$\sigma_{q_iq_j}=C_{ijkl}\varepsilon_{q_kq_l}. \tag{18}$$

В силу симметрии тензоров напряжении и деформации следующие компоненты тензора $C$ будут равны:

$$C_{ijkl}=C_{ijlk};$$

$$C_{ijkl}=C_{jilk};$$

$$C_{ijkl}=C_{klij}.$$

Для случая неоднородного изотропного упругого тела модули упругости могут быть выражены через два независимых модуля упругости Ламе $\lambda, \mu$ :

$$C_{ijkl} = \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \lambda\delta_{ij}\delta kl.$$

Подставляя в уравнение (18), получим:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}. \tag{19}$$

Компоненты тензора деформаций связаны с компонентами вектора смещения в ортогональной криволинейной системе координат $q_1, q_2, q_3$ следующими соотношениями [6]:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{1}{h_1}\frac{\partial u_1}{\partial q_1} + \frac{1}{h_1 h_2}\frac{\partial h_1}{\partial q_2}u_2 + \frac{1}{h_1 h_3}\frac{\partial h_1}{\partial q_3}u_3;\\
\varepsilon_{22} &= \frac{1}{h_2}\frac{\partial u_2}{\partial q_2} + \frac{1}{h_2 h_3}\frac{\partial h_2}{\partial q_3}u_3 + \frac{1}{h_1 h_2}\frac{\partial h_2}{\partial q_1}u_1;\\
\varepsilon_{33} &= \frac{1}{h_3}\frac{\partial u_3}{\partial q_3} + \frac{1}{h_1 h_3}\frac{\partial h_3}{\partial q_1}u_1 + \frac{1}{h_2 h_3}\frac{\partial h_3}{\partial q_2}u_2;\\
\varepsilon_{12} &= \frac{1}{2}\left[\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{u_1}{h_1}\right) + \frac{h_2}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{u_2}{h_2}\right)\right];\\
\varepsilon_{13} &= \frac{1}{2}\left[\frac{h_1}{h_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{u_1}{h_1}\right) + \frac{h_3}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{u_3}{h_3}\right)\right];\\
\varepsilon_{23} &= \frac{1}{2}\left[\frac{h_2}{h_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{u_2}{h_2}\right) + \frac{h_3}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{u_3}{h_3}\right)\right].
\end{aligned} \tag{20}$$

Таким образом, математическая модель, описывающая распространение малых возмущений в изотропной неоднородной упругой среде состоит из уравнений движения сплошной среды (17), закона Гука (19), выражения компонентов тензора деформаций через компоненты вектора смещения (20), начальных и граничных условий.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассматриваются основные уравнения, используемые для простроения модели в задаче о дифракции звуковых волн на упругой сфере с неоднородным покрытием и неконцентрической полостью. Взяв за основу уравнение Эйлера и уравнение неразрывности, при условии малых колебаний, было получено уравнение Гельмгольца для потенциала скорости. Для упругой среды в качестве основных уравнений были представлены уравнения движения сплошной среды, уравнения, олицетворяющие закон Гука и выражения компонентов тензора деформаций через компоненты вектора смещения.

# Список литературы


[1] Faran J. J. Sound scattering by solid cylinders and spheres // Acoust. Soc. Amer. 1951. V. 23. № 4. P. 405–420.

[2] Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Рассеяние звука неоднородным трансверсально-изотропным сферическим слоем // Акуст. журн. 1995. Т. 41. Вып. 6. С. 917–923.

[3] Ларин Н. В., Толоконников Л. А. Рассеяние звука неоднородным термоупругим сферическим слоем // Прикладная математика и механика. 2010. Т. 74. Вып. 4. С. 645–654.

[4] Скобельцын С. А. Метод конечных элементов в задаче о рассеянии плоской упругой волны неоднородным цилиндром // Известия ТулГУ. Серия Математика. Механика. Информатика. 2005. Т. 11. Вып. 5. С. 187–200.

[5] Авдеев И. С., Скобельцын С. А. Дифракция плоской упругой волны на неоднородном шаре // Известия ТулГУ. Серия Геодинамика, физика, математика, термодинамика, геоэкология. 2006. Вып. 3. С. 138–139.

[6] Новацкий В. Теория упругости. Т. 2. — М.: Мир, 1975. 872 с.