Метод конечных разностей для решения краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений

Метод конечных разностей является универсальным численным методом. Его идея заключается в том, что все производные, входящие в дифференциольное уравнение и краевые условия заменяются конечно-разностными уравнениями с использованием формул численного дифференцирования, при этом область, где требуется найти решение задачи (отрезок оси абсцисс x) разбивается сеткой. Дифференциальные уравнения заменяются разностными во всех внутренних узлах сетки, а краевые условия заменяются разностными только для граничных узлов.

В результате получаем систему уравнений. Уравнений будет столько, сколько всех узлов содержит сетка. Неизвестных будет столько, сколько имеем уравнений, причем неизвестные — решение задачи в каждом узле сетки.

Если исходная задача является линейной, то есть линейными являются и дифференциальные уравнения, и краевые условия, то приходим к системе линейных алгебраических уравнений, которую несложно решить. В случае, если определитель такой системы не равен нулю, то эта система имеет единственное решение.

Если исходная задача является нелинейной, то приходим к решению нелинейной системы уравнений. В этом случае могут возникнуть очень большие трудности, связанные с решением нелинейной системы, при этом следует иметь в виду и неединственность решения системы.

Рассмотрим метод конечных разностей на примере решения следующей линейной задачи. Имеем дифференциальное уравнение:

$$L[u] = u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x). \tag{1}$$

Краевые условия:

$$\begin{gathered} \alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = A, \\ \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = B. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $p(x), q(x), f(x)$ — известные функции, непрепывные на отрезке $[a, b]$ (где требуется найти решение задачи $u(x)$).

Видим, что задача (1) и (2) линейная, так как искомая функция $u(x)$ и её производные присутствуют в уравнениях в первой степени.

Будем считать, что решение задачи (1) и (2) существует и единственно. Кроме того, полагаем, что $u(x)$ есть непреывная функция и имеет непрерывные производные до 4-го порядка включительно.

Согласно методу конечных разностей, отрезок $[a, b]$, где ищем решение, разбивается сеткой

$$a < x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b,$$

то есть сетка содержит $N + 1$ узлов x_i.

Выберем равномерную сетку с шагом h, то есть $x_i = x_0 + ih, \quad i = \overline{0, N}$, при этом $h = (b - a)/N$.

Исходное дифференциальное уравнение заменяем разностным уравнением для всех внутренних узлов сетки $x_i, \quad i = \overline{1, N-1}$. Для этого производные, входящие в (1), заменяем разностными отношениями по формулам численного дифференцирования. Для повышения точности будем использовать симметричные формулы:

$$u'(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h},$$
$$u''(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}.$$

Здесь $u_i = u(x_i)$.

Погрешность приведенных формул есть $\mathrm{O}(h_2)$. Подставим эти формулы в уравнение (1), в результате получим разностное уравнение, вводя, как и прежде, обозначение $y_i \approx u_i$.

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i, \quad i = \overline{1, N-1}, \tag{3}$$

где $p_i = p(x_i), q_i = q(x_i), f_i = f(x_i)$.

Уравнение (3) справедливо только для внутренних узлов сетки и представляет собой систему $N - 1$ уравнений с $N + 1$ неизвестными — $y_0, y_1, \ldots, y_N$.

Теперь хапишем разностные уравнения для краевых условий (2). Чтобы не выходить за границы отрезка $[a, b]$ воспользуемся односторонними формулами численного дифференцирования. Для граничных точек $y_0 = a, y_N = b:$

$$u'(a) \approx \frac{y_1 - y_0}{h},$$
$$u'(b) \approx \frac{y_N - y_{N-1}}{h}.$$

Погрешность этих формул $\mathrm{O}[h]$. Заметим, что если $u(x)$ есть функция достаточно гладкая, то можно использовать более точные формулы, имеющие погрешность $\mathrm{O}(h^2)$:

$$
\begin{aligned}
u'(a) &\approx \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h},\\
u'(b) &\approx \frac{3y_N - 4y_{N-1} + y_{N-2}}{h}.
\end{aligned}
$$

Легко доказать справедливость последних формул. Подставляя выражения для $u'(a)$ и $u'(b)$ получаем следующие 2 уравнения:

$$
\begin{aligned}
\alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} &= A,\\
\beta_0 y_N + \beta_1 \frac{y_N - y_{N-1}}{h} &= B.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Присоединим (3) к (4). Получим полную систему линейных алгебраических уравнений. Решая полученную систему, найдем численное решение задачи $y_0, \ldots, y_N$.