СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Потребность в изучении дифракции на различных телах очень высока. Знания, полученные путем изучения дифракции с помощью моделей, используются как в гидроакустике и эхолокации, так и в других областях. В дефектоскопии основной задачей является обнаружение различных включений в однородном теле. Это позволяет проводить исследование различных объектов методом неразрушающего контроля.

вставить ссылки

Однако аппроксимация реального первичного акустического поля плоской волной справедлива только тогда, когда расстояние от источника звука до рассеивателя много больше длины звуковой волны. На практике это условие часто не выполняется. В этом случае нельзя не учитывать криволинейность фронта падающей волны. Расходимость падающей волны приводит не только к количественным, но и качественным изменениям дифракционной картины. Наибольший интерес представляет изучение дифракции звуковых волн, излучаемых цилиндрическими и сферическими источниками. С помощью таких источников можно моделировать акустические поля сложных излучателей.

В настоящей работе рассматривается задача о рассеянии цилиндрических звуковых волн упругой сферой, имеющей произвольно расположенную полость и радиально-неоднородное покрытие. С помощью таких покрытий можно изменять звукоотражающие свойства тел. Такой слой возможно сделать в промышленных условиях, комбинируя несколько тонких однородных слоев с различными механическими характеристиками. В качестве рассматриваемого тела выбрана сфера, т.к. более сложные тела можно аппроксиммировать с помощью сферы. В ходе работы получено аналитическое описание акустического поля, рассеяного телом. Представлены результаты расчетов диаграмм направленности рассеянного поля.

1. Постановка задачи

	Внешняя среда O	Полость I	Сфера II	Слой III
Координаты	Прямоугольные			
	—	$x_\circ, y_\circ, z_\circ$	$x_\odot, y_\odot, z_\odot$	$x_\odot, y_\odot, z_\odot$
	Цилиндрические			
	(источник) ρ_e, φ_e, z_e	$\rho_\circ, \varphi_\circ, z_\circ$	$\rho_\odot, \varphi_\odot, z_\odot$	$\rho_\odot, \varphi_\odot, z_\odot$
	Сферические			
	—	$r_\circ, \theta_\circ, \varphi_\circ$	$r_\odot, \theta_\odot, \varphi_\odot$	$r_\odot, \theta_\odot, \varphi_\odot$
Расстояние от сферы	$\hat{\rho}_e, \hat{\varphi}_e$	$\hat{\rho}_\circ, \hat{\varphi}_\circ$		
Плотность	p_e	$p_\circ$	$p_\odot$	$p_\circledcirc$
Давление	P_e	$P_\circ$	$P_\odot$	$P_\circledcirc$
Размер	—	$R_\circ$	$R_\odot$	$R_\circledcirc$
Скорость звука	c_e	$c_\circ$	—	—
Потенциал скоростей волн	источника: Ψ_o(O: $j_\odot$) рассеянной: Ψ_s(O: $h_\odot$) полной: Ψ_e(O: $j_\odot + h_\odot$)	$\Psi_\circ$ (I: $j_\circ$)	$\Psi_\odot, \mathbf{\Phi}_\odot$ (II: $j_\odot + h_\circ$)	—
Волновое число	k_e	$k_\circ$	$k_\odot$	$k_\circledcirc$

Таблица 1: Обозначения, используемые в работе

Рассмотрим изотропный однородный упругий шар радиуса $R_{\odot}$, плотность материала которого $p_{\odot}$, упругие постоянные $\lambda_{\odot}$ и $\mu_{\odot}$, содержащий произвольно расположенную сферическую полость с радиусом $R_{\circ}$. Шар имеет покрытие в виде неоднородного изотропного упругого слоя, внешний радиус которого равен $R_{\circledcirc}$.

Свяжем с полостью тела и с самим телом прямоугольные системы координат $x_{\circ}, y_{\circ}, z_{\circ}$ и $x_{\odot}, y_{\odot}, z_{\odot}$ соответственно так, чтобы соответствующие оси обеих систем координат были параллельны. С декартовыми системами координат $x_{\circ}, y_{\circ}, z_{\circ}$ и $x_{\odot}, y_{\odot}, z_{\odot}$ свяжем сферические координаты $r_{\circ}, \theta_{\circ}, \varphi_{\circ}$ и $r_{\odot}, \theta_{\odot}, \varphi_{\odot}$.

Полагаем, что модули упругости $\lambda_{\circledcirc}$ и $\mu_{\circledcirc}$ материала слоя описываются дифференцируемыми функциями радиальной координаты $r_{\odot}$ сферической системы координат $(r_{\odot}, \theta_{\odot}, \varphi_{\odot})$, а плотность $p_{\circledcirc}$ — непрерывной функцией координаты $r_{\odot}$. Окружающая тело и находящаяся в его полости жидкости — идеальные и однородные, имеющие плотности $p_e, p_{\circ}$ и скорости звука $c_e, c_{\circ}$ соответственно.

Определим отраженные от тела и возбужденные в его полости волны, а также найдем поля смещений в упругом материале шара и неоднородном слое.

2. Определение волновых полей

Пусть из внешнего пространства на шар падает цилиндрическая звуковая волна, излучаемая бесконечно длинным линейным источником, который в цилиндрической системе координат $\rho_\odot, \varphi_\odot, z_\odot$ с началом в центре шара имеет координаты $\rho_\odot = \hat{\rho}_e, \varphi_\odot = \hat{\varphi}_e$ и параллелен оси $z_\odot$.

Потенциал скоростей гармонической звуковой волны, излучаемой цилиндрическим источником порядка n, запишем в виде:

$$\Psi_o(\rho_e, \varphi_e, t) = A_o H_n(k_e \rho_e) \exp[i\,(n\varphi_e - \omega t)]\,, \qquad \text{где} \tag{1}$$

ρ_e, φ_e, z_e — цилиндрическая система координат, связанная с источником, оси которой одинаково ориентированы с осями координат $\rho_\odot, \varphi_\odot, z_\odot$ рассеивателя.
A_o — амплитуда волны;
H_n — цилиндрическая функция Ханкеля первого рода;
$k_e = \omega_e / c_e$ — волновое число окружающей тело жидкости;
ω_e — круговая частота.
При этом координата ρ_e представляет собой расстояние от точки пространства до оси излучающего цилиндра. Оно также выражается через координаты цилиндрической системы координат, связанной с телом:

$$\rho_e = \left(\rho_\odot^2 + \hat{\rho}_e^2 - 2\hat{\rho}_e \rho_\odot \cos(\varphi_\odot - \hat{\varphi}_e)\right)^{1/2}.$$

Рассмотрим монохроматическую симметричную цилиндрическую волну, которая излучается бесконечно длинным линейным источником, параллельным оси z. Она описывается с помощью цилиндрической функции Ханкеля первого рода нулевого порядка. Потенциал скоростей такой волны представляется в виде

$$\Psi_0(\tilde{\rho}, t) = A_0 H_0(k_0 \tilde{\rho})\, \mathrm{e}^{-i\omega t}.$$

В дальнейшем временной множитель $\exp(-i\omega t)$ будем опускать.

Воспользовавшись теоремой сложения для цилиндрических функций Бесселя представим потенциал скоростей падающей волны в системе координат ρ, φ, z следующими разложениями:

$$\Psi_0(\tilde{\rho}, \tilde{\varphi}) = A_0 \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) \cos\bigl(m(\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}_0)\bigr) \begin{cases} J_m(k_0 \tilde{\rho}_0) H_m(k_0 \tilde{\rho}), & \tilde{\rho} > \tilde{\rho}_0; \\ H_m(k_0 \tilde{\rho}_0) J_m(k_0 \tilde{\rho}), & \tilde{\rho} < \tilde{\rho}_0, \end{cases}$$

где J_m — цилиндрическая функция Бесселя первого рода порядка m;
δ_{0m} — символ Кронекера.

Задача определения акустических полей вне упругого тела и внутри его полости в установившемся режиме колебаний заключается в нахождении решений уравнения Гельмгольца:

$$\Delta\Psi^{(0)} + k_0^2\Psi^{(0)} = 0; \tag{2}$$

$$\Delta\Psi^{(1)} + k_1^2\Psi^{(1)} = 0, \tag{3}$$

где $\Psi^{(0)}$ — потенциал скоростей полного акустического поля во внешней среде;
$\Psi^{(1)}$ — потенциал скоростей акустического поля в полости тела;
$k_1 = \dfrac{\omega}{c_1}$ — волновое число находящейся в полости жидкости.
При этом скорости частиц жидкости и акустическое давление вне тела $(j = 0)$ и внутри полости $(j = 1)$ определяются по следующим формулам соответственно:

$$\bar{v}_j = \operatorname{grad}\Psi^{(j)}; \quad p_j = i\rho_j\omega\Psi^{(j)} \qquad (j = 0, 1). \tag{4}$$

В силу линейной постановки задачи для $\Psi^{(0)}$ и Ψ_0 справедливо

$$\Psi^{(0)} = \Psi_0 + \Psi_s, \qquad \text{где} \tag{5}$$

Ψ_s — потенциал скоростей рассеянной звуковой волны.
Тогда из (2) получаем уравнение для нахождения Ψ_s:

$$\Delta\Psi_s + k_0^2\Psi_s = 0. \tag{6}$$

Из-за произвольного расположения полости в теле потенциалы $\Psi^{(1)}$ и Ψ_s не будут проявлять свойства симметрии. Уравнения (3) и (6) запишем в сферических системах координат $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$ и $(r_2, \theta_2, \varphi_2)$ соответственно:

$$\frac{1}{r_1^2}\frac{\partial}{\partial r_1}\left(r_1^2\frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial r_1}\right) + \frac{1}{r_1^2\sin^2\theta_1}\frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial\varphi_1^2} + \frac{1}{r_1^2\sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin\theta_1\frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial\theta_1}\right) + k_1^2\Psi^{(1)} = 0; \tag{7}$$

$$\frac{1}{r_2^2}\frac{\partial}{\partial r_2}\left(r_2^2\frac{\partial\Psi_s}{\partial r_2}\right) + \frac{1}{r_2^2\sin^2\theta_2}\frac{\partial\Psi_s}{\partial\varphi_2^2} + \frac{1}{r_2^2\sin\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\sin\theta_2\frac{\partial\Psi_s}{\partial\theta_2}\right) + k_0^2\Psi_s = 0. \tag{8}$$

Звуковая волна в полости тела $\Psi^{(1)}$ должна удовлетворять условию ограниченности, а отраженная волна Ψ_s — условиям излучения на бесконечности.

Поэтому потенциалы Ψ_s и $\Psi^{(1)}$ будем искать в виде

$$\Psi_s(r_2,\theta_2,\varphi_2)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}A_{nm}^{(0)}h_n(k_0r_2)P_n^m(\cos\theta_2)\cos\bigl(m(\varphi_2-\tilde{\varphi}_0)\bigr); \tag{9}$$

$$\Psi^{(1)}(r_1,\theta_1,\varphi_1)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}B_{nm}^{(1)}j_n(k_1r_1)P_n^m(\cos\theta_1)\cos\bigl(m(\varphi_1-\tilde{\varphi}_0)\bigr), \tag{10}$$

где $h_n(x)$ и $j_n(x)$ — сферические функции Ханкеля первого рода и Бесселя соответственно;
$P_n(x)$ — многочлен Лежандра степени n.

continue...

Распространение малых возмущений в упругом теле для установившегося режима движения частиц тела описывается скалярным и векторным уравнением Гельмгольца:

$$\Delta\Psi^{(2)}+k_{2l}^2\Psi^{(2)}=0; \tag{11}$$

$$\Delta\boldsymbol{\Phi}^{(2)}+k_{2\tau}^2\boldsymbol{\Phi}^{(2)}=0, \tag{12}$$

где k_{2l} — волновое число продольных волн со скоростью распространения $c_l=\sqrt{\dfrac{(\lambda+2\mu)}{\rho}}$;
$k_{2\tau}$ — волновое число поперечных волн со скоростью распространения $c_\tau=\sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}}$;
$\Psi^{(2)}$ и $\boldsymbol{\Phi}^{(2)}$ — скалярной и векторный потенциалы смещения соответственно.

Вектор смещения $\mathbf{u}^{(2)}$ частиц упругого тела определяется по формуле

$$\mathbf{u}^{(2)}=\operatorname{grad}\Psi^{(2)}+\operatorname{rot}\boldsymbol{\Phi}^{(2)}.$$

Потенциал смещения $\Psi^{(2)}$ будем искать в виде ряда по двум локальным сферическим функциям:

$$\Psi^{(2)}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}A_{nm}^{(2)}h_n(k_{2l}r_1)P_n^m(\cos\theta_1)\,\mathrm{e}^{im\varphi_1}+B_{nm}^{(2)}j_n(k_{2l}r_2)P_n^m(\cos\theta_2)\,\mathrm{e}^{im\varphi_2}$$

Векторный потенциал $\boldsymbol{\Phi}^{(2)}$ может быть представлен в виде суммы:

$$\boldsymbol{\Phi}^{(2)}=rV\bar{e}_r+\operatorname{rot}\bigl(rW\bar{e}_r\bigr),$$

где $\bar{e}_r$ — орт координатной оси r сферической системы координат r,θ,φ, функции V и W удовлетворяют скалярным уравнениям Гельмгольца

$$\Delta V + k_{2\tau}^2 V = 0, \tag{13}$$

$$\Delta W + k_{2\tau}^2 W = 0. \tag{14}$$

Функции V и W будем искать в виде:

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} C_{nm}^{(2)} h_n(k_{2l} r_1) P_n^m(\cos\theta_1)\, \mathrm{e}^{im\varphi_1} + D_{nm}^{(2)} j_n(k_{2l} r_2) P_n^m(\cos\theta_2)\, \mathrm{e}^{im\varphi_2}, \tag{15}$$

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} E_{nm}^{(2)} h_n(k_{2l} r_1) P_n^m(\cos\theta_1)\, \mathrm{e}^{im\varphi_1} + F_{nm}^{(2)} j_n(k_{2l} r_2) P_n^m(\cos\theta_2)\, \mathrm{e}^{im\varphi_2}. \tag{16}$$

Коэффициенты разложений $A_{nm}^{(1)}, B_{nm}^{(0)}, A_{nm}^{(2)}, B_{nm}^{(2)}, C_{nm}^{(2)}, D_{nm}^{(2)}, E_{nm}^{(2)}, F_{nm}^{(2)}$ подлежат определению из граничных условий, которые заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости на внешней поверхности слоя и внутренней поверхности полого шара; равенстве на них нормального напряжения и акустического давления; отсутствии на этих поверхностях касательных напряжений. На внутренней поверхности слоя при переходе через границу раздела упругих сред должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, а также нормальные и тангенциальные напряжения. Имеем:

$$\text{при } r_1 = R_1: \quad \odot_{rr} = -p_1; \ \ \odot_{r\theta} = 0; \ \ \odot_{r\varphi} = 0; \ \ -i\omega u_r = v_{1r};$$

$$\text{при } r_2 = R_2: \quad \odot_{rr} = -p_2; \ \ \odot_{r\theta} = 0; \ \ \odot_{r\varphi} = 0; \ \ -i\omega u_r = v_{2r};$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Была поставлена задача о дифракции цилиндрических звуковых волн на упругой сфере, имеющей произвольно расположенную полость и неоднородное покрытие. В данной работе приведены основные уравнения колебаний, а также разложения в ряд искомых функций для внешней среды сферы, а также полости тела.