

# СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ . . . . .	3
1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН . . . . .	4
1.1. Распространение звука в идеальной жидкости . . . . .	5
1.2. Распространение звуковых волн в упругих телах . . . . .	8
2. ДИФРАКЦИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН НА УПРУГОЙ СФЕРЕ, ИМЕ- ЮЩЕЙ ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННУЮ ПОЛОСТЬ И НЕОД- НОРОДНОЕ ПОКРЫТИЕ . . . . .	9
2.1. Обзор литературы по проблеме исследования . . . . .	10
2.2. Постановка задачи . . . . .	11
2.3. Аналитическое решение задачи . . . . .	12
2.4. Решение краевой задачи для системы обыкновенных дифферен- циальных уравнений . . . . .	19
3. ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ . . . . .	20
3.1. Диаграмма направленности . . . . .	21
3.2. Частотные характеристики . . . . .	22
ЗАКЛЮЧЕНИЕ . . . . .	23
ЛИТЕРАТУРА . . . . .	24
ПРИЛОЖЕНИЯ . . . . .	25

# ВВЕДЕНИЕ

Потребность в изучении дифракции на различных телах очень высока. Знания, полученные путем изучения дифракции с помощью моделей, используются как в гидроакустике и эхолокации, так и в других областях. В дефектоскопии основной задачей является обнаружение различных включений в однородном теле. Это позволяет проводить исследование различных объектов методом неразрушающего контроля. Задача эхолокации — обнаружить и определить местоположение объектов по времени задержки отражённой волны.

Для современного мира изучение простых моделей уже не дает требуемой точности прогнозирования поведения волн. Поэтому, необходимо изучать более сложные модели, детально описывающие рассматриваемые тела и окружающую среду. Изучение тел с произвольно расположенными полостями является более трудной задачей, по сравнению с классическими моделями.

В настоящей работе рассматривается задача дифракции плоских звуковых волн на упругой сфере с произвольно расположенной полостью, заполненной жидкостью, и радиально-неоднородным упругим покрытием. С помощью таких покрытий можно изменять звукоотражающие свойства тел, что позволяет решать различные задачи по формированию заданной дифракционной картины. Такой слой возможно сделать в промышленных условиях, комбинируя несколько тонких однородных слоев с различными механическими характеристиками. В качестве рассматриваемого тела выбрана сфера, т.к. она является подходящей аппроксимацией для большинства сложных тел. В ходе работы получено аналитическое описание акустического поля, рассеянного телом, предложено решение полученной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений и представлены результаты расчетов диаграмм направленности рассеянного поля и частотных характеристик для различных покрытий.

# **1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН**

## 1.1. Распространение звука в идеальной жидкости

Для математического процесса моделирования распространения звука в идеальной среде воспользуемся полной системой уравнений гидромеханики идеальной жидкости, описывающей любые движения идеальной жидкости. Эта система включает уравнение движения идеальной жидкости (уравнение Эйлера), уравнение неразрывности и уравнение физического состояния.

Математическое описание движения жидкости осуществляется с помощью функций, определяющих распределение скорости  $\bar{v}$ , давления  $P$  и плотности  $p$ . Уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} = \bar{F} - \frac{1}{p} \text{grad } P, \quad (1)$$

где  $\bar{F}$  — массовая сила, отнесённая к единице массы.

Уравнение неразрывности записывается в виде

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \text{div}(p\bar{v}) = 0. \quad (2)$$

Будем считать, что движение сжимаемой жидкости происходит адиабатически. В этом случае уравнение физического состояния принимает вид

$$P = P_0 \left( \frac{p}{p_0} \right)^\gamma, \quad \gamma = \frac{C_P}{C_V} \quad (3)$$

где  $P_0$  и  $p_0$  — давление и плотность невозмущенной жидкости;

$C_P$  и  $C_V$  — теплоемкость при постоянном давлении и постоянном объеме.

Процесс распространения звука представляет собой малые колебания жидкости, так что в уравнении (1) можно пренебречь конвективными членами. Полагая, что внешние силы отсутствуют, получим:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -\frac{1}{p} \text{grad } P. \quad (4)$$

Введем в рассмотрение величину  $s$ , называемую сжатием и равную относительному изменению плотности

$$s = \frac{p - p_0}{p_0}; \quad p = p_0(1 + s). \quad (5)$$

Тогда уравнение (3) перепишем в виде

$$P = P_0(1 + s)^\gamma. \quad (6)$$

При малых колебаниях жидкости сжатие  $s$  настолько мало, что высшими степенями  $s$  можно пренебречь. В результате из выражения (6) получим

$$P = P_0(1 + \gamma \cdot s). \quad (7)$$

Подставим выражение (5) в уравнение неразрывности. Так как

$$\operatorname{div}(p\bar{v}) = p \operatorname{div}(\bar{v}) + \bar{v} \operatorname{grad} p = p_0 \operatorname{div}(\bar{v}) + p_0 s \operatorname{div}(\bar{v}) + \bar{v} \operatorname{grad} p,$$

причем последними двумя слагаемыми можно пренебречь, то вместо уравнения (2) будем иметь

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{v}) = 0. \quad (8)$$

Уравнение (4) в том же приближении сводится к уравнению

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -c^2 \cdot \operatorname{grad} s, \quad (9)$$

где  $c = \sqrt{\gamma \frac{P_0}{p_0}}$  — скорость звука.

Предположим теперь, что в начальный момент существует потенциал скоростей  $\tilde{\Psi}_0$ , т.е.

$$\bar{v}|_{t=0} = \operatorname{grad} \tilde{\Psi}_0. \quad (10)$$

Из уравнения (9) имеем

$$\bar{v} = \bar{v}|_{t=0} - c^2 \operatorname{grad} \left( \int_0^t s \, dt \right).$$

С учетом (10) получаем

$$\bar{v} = \operatorname{grad} \left[ \tilde{\Psi}_0 - c^2 \int_0^t s \, dt \right] = \operatorname{grad} \tilde{\Psi}. \quad (11)$$

Это означает, что существует потенциал скоростей  $\tilde{\Psi}$  в любой момент времени  $t$ :

$$\tilde{\Psi} = \tilde{\Psi}_0 - c^2 \int_0^t s \, dt.$$

Дифференцируя последнее выражение два раза по  $t$ , получим

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial t^2} = -c^2 \frac{\partial s}{\partial t}. \quad (12)$$

С другой стороны, подставляя выражение (11) в уравнение (8), будем иметь

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\operatorname{div} \operatorname{grad} \tilde{\Psi} = -\Delta \tilde{\Psi}. \quad (13)$$

Из уравнений (12) и (13) приходим к волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \tilde{\Psi}, \quad (14)$$

которое описывает процесс распространения звука в идеальной жидкости.

Отметим, что знания потенциала  $\tilde{\Psi}$  достаточно для определения всего процесса движения жидкости в случае малых возмущений, так как

$$\bar{v} = \operatorname{grad} \tilde{\Psi}; \quad s = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial t}.$$

Найдем акустическое давление  $P' = P - P_0$ . Из уравнения (4), используя приближение, сделанное для (9):

$$\frac{\partial \operatorname{grad} \tilde{\Psi}}{\partial t} = -\frac{1}{p_0} \operatorname{grad} P'.$$

Занесем дифференциал под градиент и перенесем в левую часть:

$$\operatorname{grad} \left( \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial t} + \frac{P'}{p_0} \right) = 0.$$

Выражение в скобках не зависит от координат. Учитывая, что потенциал  $\tilde{\Psi}$  определяется с точностью до функции времени, приравняем выражение в скобках нулю:

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial t} + \frac{P'}{p_0} = 0.$$

В случае установившегося режима колебаний

$$\tilde{\Psi} = \Psi e^{-i\omega t} \quad (15)$$

уравнение (14) переходит в уравнение Гельмгольца

$$\Delta \Psi + k^2 \Psi = 0, \quad (16)$$

где  $\omega$  — круговая частота;  $k = \frac{\omega}{c}$  — волновое число. При этом акустическое давление

$$P' = -p_0 \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial t} = -p_0 \cdot (-i\omega) \Psi e^{-i\omega t} = ip_0 \omega \tilde{\Psi}.$$

## 1.2. Распространение звуковых волн в упругих телах

Ландау - Теория упругости, Амензаде  
моделирование волновых полей

**2. ДИФРАКЦИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН НА  
УПРУГОЙ СФЕРЕ, ИМЕЮЩЕЙ  
ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННУЮ  
ПОЛОСТЬ И НЕОДНОРОДНОЕ  
ПОКРЫТИЕ**



## 2.1. Обзор литературы по проблеме исследования

Известия ТулГУ №3 Ларин; статьи Толоконникова

## 2.2. Постановка задачи



Рис. 1: «Сфера со сферическим слоем и произвольно расположенной сферической полостью»

Рассмотрим изотропный однородный упругий шар радиуса  $R_{\odot}$ , плотность материала которого  $\rho_{\odot}$ , упругие постоянные  $\lambda_{\odot}$  и  $\mu_{\odot}$ , содержащий произвольно расположенную сферическую полость с радиусом  $R_{\circ}$ . Шар имеет покрытие в виде неоднородного изотропного упругого слоя, внешний радиус которого равен  $R_{\odot}$  (рис. 1).

Свяжем с полостью тела и с самим телом прямоугольные системы координат  $x_{\circ}, y_{\circ}, z_{\circ}$  и  $x_{\odot}, y_{\odot}, z_{\odot}$  соответственно так, чтобы соответствующие оси обеих систем координат были параллельны. С декартовыми системами координат  $x_{\circ}, y_{\circ}, z_{\circ}$  и  $x_{\odot}, y_{\odot}, z_{\odot}$  свяжем сферические координаты  $r_{\circ}, \theta_{\circ}, \varphi_{\circ}$  и  $r_{\odot}, \theta_{\odot}, \varphi_{\odot}$ .

Пусть модули упругости  $\lambda_{\odot}$  и  $\mu_{\odot}$  материала слоя описываются дифференцируемыми функциями радиальной координаты  $r_{\odot}$  сферической системы координат  $(r_{\odot}, \theta_{\odot}, \varphi_{\odot})$ , а плотность  $\rho_{\odot}$  — непрерывной функцией координаты  $r_{\odot}$ . Окружающая тело и находящаяся в его полости жидкости — идеальные и однородные, имеющие плотности  $\rho_e, \rho_{\circ}$  и скорости звука  $c_e, c_{\circ}$  соответственно.

Определим отраженные от тела и возбужденные в его полости волны, а также найдем поля смещений в упругом материале шара и неоднородном слое.

### 2.3. Аналитическое решение задачи

Пусть из внешнего пространства на шар падает плоская звуковая волна. Потенциал скоростей гармонической падающей волны запишем в виде:

$$\Psi_o(\bar{\mathbf{x}}_\odot, t) = A_o \exp [i (\bar{\mathbf{k}}_e \cdot \bar{\mathbf{x}}_\odot - \omega t)], \quad (17)$$

где  $A_o$  — амплитуда волны,

$\bar{\mathbf{k}}_e$  — волновой вектор в окружающей жидкости,

$|\bar{\mathbf{k}}_e| = k_e = \omega/c_e$  — волновое число,

$\bar{\mathbf{x}}_\odot$  — радиус-вектор,

$\omega$  — круговая частота.

Без ограничения общности будем полагать, что волна распространяется в направлении  $\theta_\odot = \theta_o = 0$ . Тогда в сферической системе координат (17) запишется в виде:

$$\Psi_o(r_\odot, \theta_\odot, t) = A_o \exp [i (k_e r_\odot \cos \theta_\odot - \omega t)], \quad (18)$$

В дальнейшем временной множитель  $\exp(-i\omega t)$  будем опускать.

Разложим (18) в ряд по ортогональным функциям:

$$\Psi_o(r_\odot, \theta_\odot, f_\odot) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \gamma_{mn} j_n(k_e r_\odot) P_n^{|m|}(\cos \theta_\odot) e^{im\varphi_\odot}, \quad (19)$$

где  $j_n(x)$  — сферическая функция Бесселя порядка  $n$ ;

$P_n^m(x)$  — присоединенный многочлен Лежандра степени  $n$  порядка  $m$ ;

$$\gamma_{mn} = \begin{cases} A_o i^n (2n+1), & \text{при } m = 0; \\ 0, & \text{при } m \neq 0. \end{cases}$$

Задача определения акустических полей вне упругого тела и внутри его полости в установившемся режиме колебаний заключается в нахождении решений уравнения Гельмгольца:

$$\Delta \Psi_e + k_e^2 \Psi_e = 0; \quad (20)$$

$$\Delta \Psi_o + k_o^2 \Psi_o = 0, \quad (21)$$

где  $\Psi_e$  — потенциал скоростей полного акустического поля во внешней среде;

$\Psi_o$  — потенциал скоростей акустического поля в полости тела;

$k_o = \frac{\omega}{c_o}$  — волновое число находящейся в полости жидкости.

При этом скорости частиц жидкости и акустическое давление вне тела и внутри полости определяются по следующим формулам соответственно:

$$\bar{v}_e = \text{grad } \Psi_e; \quad P_e = ip_e \omega \Psi_e; \quad (22)$$

$$\bar{v}_o = \text{grad } \Psi_o; \quad P_o = ip_o \omega \Psi_o. \quad (23)$$

В силу линейной постановки задачи для  $\Psi_e$  и  $\Psi_o$  справедливо

$$\Psi_e = \Psi_o + \Psi_s, \quad (24)$$

где  $\Psi_s$  — потенциал скоростей рассеянной звуковой волны.

Тогда из (20) получаем уравнение для нахождения  $\Psi_s$ :

$$\Delta \Psi_s + k_e^2 \Psi_s = 0. \quad (25)$$

Из-за произвольного расположения полости в теле потенциалы  $\Psi_o$  и  $\Psi_s$  не будут проявлять свойства симметрии. Уравнения (21) и (25) запишем в сферических системах координат  $(r_o, \theta_o, \varphi_o)$  и  $(r_\odot, \theta_\odot, \varphi_\odot)$  соответственно:

$$\frac{1}{r_o^2} \frac{\partial}{\partial r_o} \left( r_o^2 \frac{\partial \Psi_o}{\partial r_o} \right) + \frac{1}{r_o^2 \sin^2 \theta_o} \frac{\partial \Psi_o}{\partial \varphi_o^2} + \frac{1}{r_o^2 \sin \theta_o} \frac{\partial}{\partial \theta_o} \left( \sin \theta_o \frac{\partial \Psi_o}{\partial \theta_o} \right) + k_o^2 \Psi_o = 0; \quad (26)$$

$$\frac{1}{r_\odot^2} \frac{\partial}{\partial r_\odot} \left( r_\odot^2 \frac{\partial \Psi_s}{\partial r_\odot} \right) + \frac{1}{r_\odot^2 \sin^2 \theta_\odot} \frac{\partial \Psi_s}{\partial \varphi_\odot^2} + \frac{1}{r_\odot^2 \sin \theta_\odot} \frac{\partial}{\partial \theta_\odot} \left( \sin \theta_\odot \frac{\partial \Psi_s}{\partial \theta_\odot} \right) + k_e^2 \Psi_s = 0. \quad (27)$$

Звуковая волна в полости тела  $\Psi_o$  должна удовлетворять условию ограниченности, а отраженная волна  $\Psi_s$  — условиям излучения на бесконечности. Поэтому потенциалы  $\Psi_s$  и  $\Psi_o$  будем искать в виде рядов по сферическим функциям:

$$\Psi_s(r_\odot, \theta_\odot, \varphi_\odot) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n A_{snm} h_n(k_e r_\odot) P_n^{|m|}(\cos \theta_\odot) \cos(m \varphi_\odot); \quad (28)$$

$$\Psi_o(r_o, \theta_o, \varphi_o) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n B_{onm} j_n(k_o r_o) P_n^{|m|}(\cos \theta_o) \cos(m \varphi_o), \quad (29)$$

где  $h_n(x)$  — сферическая функции Ханкеля первого рода.

Распространение малых возмущений в упругом теле для установившегося режима движения частиц тела описывается скалярным и векторным уравнени-

ем Гельмгольца:

$$\Delta \Psi_{\odot} + k_{\odot l}^2 \Psi_{\odot} = 0; \quad (30)$$

$$\Delta \Phi_{\odot} + k_{\odot \tau}^2 \Phi_{\odot} = 0, \quad (31)$$

где  $k_{\odot l}$  — волновое число продольных волн со скоростью распространения

$$c_{\odot l} = \sqrt{\frac{(\lambda_{\odot} + 2\mu_{\odot})}{\rho_{\odot}}};$$

$k_{\odot \tau}$  — волновое число поперечных волн со скоростью распространения

$$c_{\odot \tau} = \sqrt{\frac{\mu_{\odot}}{\rho_{\odot}}};$$

$\Psi_{\odot}$  и  $\Phi_{\odot}$  — скалярной и векторный потенциалы смещения соответственно.

Вектор смещения  $\mathbf{u}_{\odot}$  частиц упругого тела определяется по формуле

$$\mathbf{u}_{\odot} = \text{grad } \Psi_{\odot} + \text{rot } \Phi_{\odot}.$$

Потенциал смещения  $\Psi_{\odot}$  будем искать в виде ряда по двум локальным сферическим функциям:

$$\Psi_{\odot} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{\odot nm} h_n(k_{\odot l} r_{\odot}) P_n^{|m|}(\cos \theta_{\odot}) e^{im\varphi_{\odot}} + B_{\odot nm} j_n(k_{\odot l} r_{\odot}) P_n^{|m|}(\cos \theta_{\odot}) e^{im\varphi_{\odot}}$$

Векторный потенциал  $\Phi_{\odot}$  может быть представлен в виде суммы:

$$\Phi_{\odot} = rV\bar{e}_r + \text{rot}(rW\bar{e}_r),$$

где  $\bar{e}_r$  — орт координатной оси  $r_{\odot}$  сферической системы координат  $r_{\odot}, \theta_{\odot}, \varphi_{\odot}$ , функции  $V$  и  $W$  удовлетворяют скалярным уравнениям Гельмгольца

$$\Delta V + k_{\odot \tau}^2 V = 0, \quad (32)$$

$$\Delta W + k_{\odot \tau}^2 W = 0. \quad (33)$$

Функции  $V$  и  $W$  будем искать в виде:

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_{\odot nm} h_n(k_{\odot l} r_{\odot}) P_n^{|m|}(\cos \theta_{\odot}) e^{im\varphi_{\odot}} + D_{\odot nm} j_n(k_{\odot l} r_{\odot}) P_n^{|m|}(\cos \theta_{\odot}) e^{im\varphi_{\odot}}, \quad (34)$$

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_{\odot nm} h_n(k_{\odot l} r_{\odot}) P_n^{|m|}(\cos \theta_{\odot}) e^{im\varphi_{\odot}} + F_{\odot nm} j_n(k_{\odot l} r_{\odot}) P_n^{|m|}(\cos \theta_{\odot}) e^{im\varphi_{\odot}}. \quad (35)$$

Коэффициенты разложений  $A_{snm}, B_{onm}, A_{\odot nm}, B_{\odot nm}, C_{\odot nm}, D_{\odot nm}, E_{\odot nm}$  и  $F_{\odot nm}$  подлежат определению из граничных условий, которые заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости на внешней поверхности слоя и внутренней поверхности полого шара; равенстве на них нормального напряжения и акустического давления; отсутствии на этих поверхностях касательных напряжений. На внутренней поверхности слоя при переходе через границу раздела упругих сред должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, а также нормальные и тангенциальные напряжения. Имеем:

$$\begin{aligned} \text{при } r_o = R_o : \quad & \sigma_{\odot rr} = -P_o, \quad \sigma_{\odot r\theta} = 0, \quad \sigma_{\odot r\varphi} = 0, \quad -i\omega u_{\odot r} = v_{or}; \\ \text{при } r_{\odot} = R_{\odot} : \quad & \sigma_{\odot rr} = \sigma_{\odot rr}, \quad \sigma_{\odot r\theta} = \sigma_{\odot r\theta}, \quad \sigma_{\odot r\varphi} = \sigma_{\odot r\varphi}, \\ & u_{\odot r} = u_{\odot r}, \quad u_{\odot \theta} = u_{\odot \theta}, \quad u_{\odot \varphi} = u_{\odot \varphi}; \\ \text{при } r_{\odot} = R_{\odot} : \quad & \sigma_{\odot rr} = -P_e, \quad \sigma_{\odot r\theta} = 0, \quad \sigma_{\odot r\varphi} = 0, \quad -i\omega u_{\odot r} = v_{er}, \end{aligned}$$

где  $v_{or} = \partial \Psi_o / \partial r$ ,  $v_{er} = \partial \Psi_e / \partial r$  — радиальная компонента скорости частиц в жидкости внутри полости и в окружающем пространстве соответственно.

Распространение упругих волн в неоднородном слое описывается общими уравнениями движения упругой среды, которые для установившегося режима движения в сферической системе координат имеют следующий вид [?]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_{\odot rr}}{\partial r_{\odot}} + \frac{1}{r_{\odot}} \frac{\partial \sigma_{\odot r\theta}}{\partial \theta_{\odot}} + \frac{1}{r_{\odot} \sin \theta_{\odot}} \frac{\partial \sigma_{\odot r\varphi}}{\partial \varphi} + \\ & + \frac{1}{r_{\odot}} \left( 2\sigma_{\odot rr} - \sigma_{\odot \theta\theta} - \sigma_{\odot \varphi\varphi} + \sigma_{\odot r\theta} \operatorname{ctg} \theta_{\odot} \right) = -p_{\odot} \omega^2 u_{\odot r}; \\ & \frac{\partial \sigma_{\odot r\theta}}{\partial r_{\odot}} + \frac{1}{r_{\odot}} \frac{\partial \sigma_{\odot \theta\theta}}{\partial \theta_{\odot}} + \frac{1}{r_{\odot} \sin \theta_{\odot}} \frac{\partial \sigma_{\odot \theta\varphi}}{\partial \varphi_{\odot}} + \\ & + \frac{1}{r_{\odot}} \left( (\sigma_{\odot \theta\theta} - \sigma_{\odot \varphi\varphi}) \operatorname{ctg} \theta_{\odot} + 3\sigma_{\odot r\theta} \right) = -p_{\odot} \omega^2 u_{\odot \theta}; \\ & \frac{\partial \sigma_{\odot r\varphi}}{\partial r_{\odot}} + \frac{1}{r_{\odot}} \frac{\partial \sigma_{\odot \theta\varphi}}{\partial \theta_{\odot}} + \frac{1}{r_{\odot} \sin \theta_{\odot}} \frac{\partial \sigma_{\odot \varphi\varphi}}{\partial \varphi_{\odot}} + \\ & + \frac{1}{r_{\odot}} \left( 3\sigma_{\odot r\varphi} + 2\sigma_{\odot \theta\varphi} \operatorname{ctg} \theta_{\odot} \right) = -p_{\odot} \omega^2 u_{\odot \varphi}, \end{aligned} \tag{36}$$

где  $u_{\odot r}, u_{\odot \theta}, u_{\odot \varphi}$  — компоненты вектора смещения  $\mathbf{u}_{\odot}$ ;

$\sigma_{\odot ij}$  — компоненты тензора напряжений неоднородной среды в сферической системе координат.

Используя связь компонентов тензора напряжений с компонентами тензора деформаций (обобщенный закон Гука), а также выражения компонентов

тензора деформаций через компоненты вектора смещения [?], получаем в сферической системе координат следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\ominus rr} &= \left( \lambda_{\ominus} + 2\mu_{\ominus} \right) \frac{\partial u_{\ominus r}}{\partial r_{\ominus}} + \\
&+ \frac{\lambda_{\ominus}}{r_{\ominus}} \left( 2u_{\ominus r} + \frac{\partial u_{\ominus \theta}}{\partial \theta_{\ominus}} + \operatorname{ctg} \theta_{\ominus} u_{\ominus \theta} + \frac{1}{\sin \theta_{\ominus}} \frac{\partial u_{\ominus \varphi}}{\partial \varphi_{\ominus}} \right); \\
\sigma_{\ominus \theta \theta} &= \lambda_{\ominus} \frac{\partial u_{\ominus r}}{\partial r_{\ominus}} + \frac{2(\lambda_{\ominus} + \mu_{\ominus})}{r_{\ominus}} u_{\ominus r} + \frac{\lambda_{\ominus} + 2\mu_{\ominus}}{r_{\ominus}} \frac{\partial u_{\ominus \theta}}{\partial \theta_{\ominus}} + \\
&+ \frac{\lambda_{\ominus}}{r_{\ominus}} \left( \operatorname{ctg} \theta_{\ominus} u_{\ominus \theta} + \frac{1}{\sin \theta_{\ominus}} \frac{\partial u_{\ominus \varphi}}{\partial \varphi_{\ominus}} \right); \\
\sigma_{\ominus \varphi \varphi} &= \lambda_{\ominus} \frac{\partial u_{\ominus r}}{\partial r_{\ominus}} + \frac{2(\lambda_{\ominus} + \mu_{\ominus})}{r_{\ominus}} u_{\ominus r} + \frac{\lambda_{\ominus}}{r_{\ominus}} \frac{\partial u_{\ominus \theta}}{\partial \theta_{\ominus}} + \\
&+ \frac{\lambda_{\ominus} + 2\mu_{\ominus}}{r_{\ominus}} \left( \operatorname{ctg} \theta_{\ominus} u_{\ominus \theta} + \frac{1}{\sin \theta_{\ominus}} \frac{\partial u_{\ominus \varphi}}{\partial \varphi_{\ominus}} \right); \\
\sigma_{\ominus r \theta} &= \mu_{\ominus} \left( \frac{1}{r_{\ominus}} \frac{\partial u_{\ominus r}}{\partial \theta_{\ominus}} - \frac{u_{\ominus \theta}}{r_{\ominus}} + \frac{\partial u_{\ominus \theta}}{\partial r_{\ominus}} \right); \\
\sigma_{\ominus r \varphi} &= \mu_{\ominus} \left( \frac{1}{r_{\ominus} \sin \theta_{\ominus}} \frac{\partial u_{\ominus r}}{\partial \varphi_{\ominus}} - \frac{u_{\ominus \varphi}}{r_{\ominus}} + \frac{\partial u_{\ominus \varphi}}{\partial r_{\ominus}} \right); \\
\sigma_{\ominus \theta \varphi} &= \frac{\mu_{\ominus}}{r_{\ominus}} \left( \frac{1}{\sin \theta_{\ominus}} \frac{\partial u_{\ominus \theta}}{\partial \varphi_{\ominus}} + \frac{\partial u_{\ominus \varphi}}{\partial \theta_{\ominus}} - \operatorname{ctg} \theta_{\ominus} u_{\ominus \varphi} \right).
\end{aligned} \tag{37}$$

Соотношения (37) справедливы как для однородной упругой среды, так и для неоднородного слоя. В первом случае в выражениях (37) компоненты вектора смещения и тензора напряжений, а также величины  $\lambda_{\ominus}$  и  $\mu_{\ominus}$  следует заменить на  $\lambda_{\ominus}$  и  $\mu_{\ominus}$  соответственно.

Используя эти соотношения, запишем уравнения (36) через компоненты вектора смещения  $\mathbf{u}_{\ominus}$ :

$$\begin{aligned}
&\left( \lambda_{\ominus} + 2\mu_{\ominus} \right) \frac{\partial^2 u_{\ominus r}}{\partial r_{\ominus}^2} + \frac{\mu_{\ominus}}{r_{\ominus}^2} \frac{\partial^2 u_{\ominus r}}{\partial \theta_{\ominus}^2} + \frac{\mu_{\ominus}}{r_{\ominus} \sin \theta_{\ominus}} \frac{\partial^2 u_{\ominus r}}{\partial \varphi_{\ominus}^2} + \frac{\mu_{\ominus} \operatorname{ctg} \theta_{\ominus}}{r_{\ominus}^2} \frac{\partial u_{\ominus r}}{\partial \theta_{\ominus}} + \\
&+ \left( \lambda'_{\ominus} + 2\mu'_{\ominus} + \frac{2\lambda_{\ominus} + 4\mu_{\ominus}}{r_{\ominus}} \right) \frac{\partial u_{\ominus r}}{\partial r_{\ominus}} + \left( \frac{2\lambda'_{\ominus}}{r_{\ominus}} - \frac{2\lambda_{\ominus} + 4\mu_{\ominus}}{r_{\ominus}^2} \right) u_{\ominus r} + \\
&+ \frac{\lambda_{\ominus} + \mu_{\ominus}}{r_{\ominus}} \frac{\partial^2 u_{\ominus \theta}}{\partial r_{\ominus} \partial \theta_{\ominus}} + \frac{(\lambda_{\ominus} + \mu_{\ominus}) \operatorname{ctg} \theta_{\ominus}}{r_{\ominus}} \frac{\partial u_{\ominus \theta}}{\partial r_{\ominus}} + \\
&+ \left( \frac{\lambda'_{\ominus}}{r_{\ominus}} - \frac{\lambda_{\ominus} + 3\mu_{\ominus}}{r_{\ominus}^2} \right) \frac{\partial u_{\ominus \theta}}{\partial \theta_{\ominus}} + \left( \frac{\lambda'_{\ominus} \operatorname{ctg} \theta_{\ominus}}{r_{\ominus}} - \frac{(\lambda_{\ominus} + 3\mu_{\ominus}) \operatorname{ctg} \theta_{\ominus}}{r_{\ominus}^2} \right) u_{\ominus \theta} + \\
&+ \frac{\lambda_{\ominus} + \mu_{\ominus}}{r_{\ominus} \sin \theta_{\ominus}} \frac{\partial^2 u_{\ominus \varphi}}{\partial r_{\ominus} \partial \varphi_{\ominus}} + \left( \frac{\lambda'_{\ominus}}{r_{\ominus} \sin \theta_{\ominus}} - \frac{\lambda_{\ominus} + 3\mu_{\ominus}}{r_{\ominus}^2 \sin \theta_{\ominus}} \right) \frac{\partial u_{\ominus \varphi}}{\partial \varphi_{\ominus}} = -p_{\ominus} \omega^2 u_{\ominus r};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda_{\odot} + \mu_{\odot}}{r_{\odot}} \frac{\partial^2 u_{\odot r}}{\partial r_{\odot} \partial \theta_{\odot}} + \left( \frac{\mu'_{\odot}}{r_{\odot}} + \frac{2\lambda_{\odot} + 4\mu_{\odot}}{r_{\odot}^2} \right) \frac{\partial u_{\odot r}}{\partial \theta_{\odot}} + \\
& + \mu_{\odot} \frac{\partial^2 u_{\odot \theta}}{\partial r_{\odot}^2} + \frac{\lambda_{\odot} + 2\mu_{\odot}}{r_{\odot}^2} \frac{\partial^2 u_{\odot \theta}}{\partial \theta_{\odot}^2} + \frac{\mu_{\odot}}{r_{\odot}^2 \sin^2 \theta_{\odot}} \frac{\partial^2 u_{\odot \theta}}{\partial \varphi_{\odot}^2} + \\
& + \left( \mu'_{\odot} + \frac{2\mu_{\odot}}{r_{\odot}} \right) \frac{\partial u_{\odot \theta}}{\partial r_{\odot}} + \frac{(\lambda_{\odot} + 2\mu_{\odot}) \operatorname{ctg} \theta_{\odot}}{r_{\odot}^2} \frac{\partial u_{\odot \theta}}{\partial \theta_{\odot}} - \left( \frac{\mu'_{\odot}}{r_{\odot}} + \frac{\lambda_{\odot} + 2\mu_{\odot}}{r_{\odot}^2 \sin^2 \theta_{\odot}} \right) u_{\odot \theta} + \\
& + \frac{\lambda_{\odot} + \mu_{\odot}}{r_{\odot}^2 \sin \theta_{\odot}} \frac{\partial^2 u_{\odot \varphi}}{\partial \theta_{\odot} \partial \varphi_{\odot}} - \frac{(\lambda_{\odot} + 3\mu_{\odot}) \operatorname{ctg} \theta_{\odot}}{r_{\odot}^2 \sin \theta_{\odot}} \frac{\partial u_{\odot \varphi}}{\partial \varphi_{\odot}} = -p_{\odot} \omega^2 u_{\odot \theta};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda_{\odot} + \mu_{\odot}}{r_{\odot} \sin \theta_{\odot}} \frac{\partial^2 u_{\odot r}}{\partial r_{\odot} \partial \varphi_{\odot}} + \left( \frac{\mu'_{\odot}}{r_{\odot} \sin \theta_{\odot}} + \frac{2\lambda_{\odot} + 4\mu_{\odot}}{r_{\odot}^2 \sin \theta_{\odot}} \right) \frac{\partial u_{\odot r}}{\partial \varphi_{\odot}} + \\
& + \frac{\lambda_{\odot} + \mu_{\odot}}{r_{\odot}^2 \sin \theta_{\odot}} \frac{\partial^2 u_{\odot \theta}}{\partial \theta_{\odot} \partial \varphi_{\odot}} + \frac{(\lambda_{\odot} + 3\mu_{\odot}) \operatorname{ctg} \theta_{\odot}}{r_{\odot}^2 \sin \theta_{\odot}} \frac{\partial u_{\odot \theta}}{\partial \varphi_{\odot}} + \\
& + \mu_{\odot} \frac{\partial^2 u_{\odot \varphi}}{\partial r_{\odot}^2} + \frac{\mu_{\odot}}{r_{\odot}^2} \frac{\partial^2 u_{\odot \varphi}}{\partial \theta_{\odot}^2} + \frac{\lambda_{\odot} + 2\mu_{\odot}}{r_{\odot}^2 \sin^2 \theta_{\odot}} \frac{\partial^2 u_{\odot \varphi}}{\partial \varphi_{\odot}^2} + \\
& + \left( \mu'_{\odot} + \frac{2\mu_{\odot}}{r_{\odot}} \right) \frac{\partial u_{\odot \varphi}}{\partial r_{\odot}} + \frac{\mu_{\odot} \operatorname{ctg} \theta_{\odot}}{r_{\odot}^2} \frac{\partial u_{\odot \varphi}}{\partial \theta_{\odot}} - \left( \frac{\mu'_{\odot}}{r_{\odot}} + \frac{\mu_{\odot}}{r_{\odot}^2 \sin^2 \theta_{\odot}} \right) u_{\odot \varphi} = -p_{\odot} \omega^2 u_{\odot \varphi}.
\end{aligned}$$

Введем новые функции  $u_{\odot 2}$  и  $u_{\odot 3}$ , связанные с  $u_{\odot \theta}$  и  $u_{\odot \varphi}$  следующими соотношениями:

$$u_{\odot \theta} = \frac{\partial u_{\odot 2}}{\partial \theta_{\odot}} + \frac{1}{\sin \theta_{\odot}} \frac{\partial u_{\odot 3}}{\partial \varphi_{\odot}}, \quad u_{\odot \varphi} = \frac{1}{\sin \theta_{\odot}} \frac{\partial u_{\odot 2}}{\partial \varphi_{\odot}} - \frac{\partial u_{\odot 3}}{\partial \theta_{\odot}}$$

и запишем уравнения движения через функции  $u_{\odot r}$ ,  $u_{\odot 2}$  и  $u_{\odot 3}$ :

$$\begin{aligned}
& \left( \lambda_{\odot} + 2\mu_{\odot} \right) \frac{\partial^2 u_{\odot r}}{\partial r_{\odot}^2} + \left( \lambda'_{\odot} + 2\mu'_{\odot} + \frac{2\lambda_{\odot} + 4\mu_{\odot}}{r_{\odot}} \right) \frac{\partial u_{\odot r}}{\partial r_{\odot}} + \frac{\mu_{\odot}}{r_{\odot}^2} L(u_{\odot r}) + \\
& + \left( \frac{2\lambda'_{\odot}}{r_{\odot}} - \frac{2\lambda_{\odot} + 4\mu_{\odot}}{r_{\odot}^2} + p_{\odot} \omega^2 \right) u_{\odot r} + \quad (38) \\
& + \left[ \frac{\lambda_{\odot} + \mu_{\odot}}{r_{\odot}} \frac{\partial}{\partial r_{\odot}} + \frac{\lambda'_{\odot}}{r_{\odot}} - \frac{\lambda_{\odot} + 3\mu_{\odot}}{r_{\odot}} \right] L(u_{\odot 3}) = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{\lambda_{\odot} + \mu_{\odot}}{r_{\odot}} \frac{\partial}{\partial r_{\odot}} + \frac{\mu'_{\odot}}{r_{\odot}} + \frac{2\lambda_{\odot} + 4\mu_{\odot}}{r_{\odot}^2} \right] \frac{\partial u_{\odot r}}{\partial \theta_{\odot}} + \frac{\lambda_{\odot} + 2\mu_{\odot}}{r_{\odot}^2} \frac{\partial}{\partial \theta_{\odot}} L(u_{\odot 2}) + \\
& + \left[ \mu_{\odot} \frac{\partial^2}{\partial r_{\odot}^2} + \left( \mu'_{\odot} + \frac{2\mu_{\odot}}{r_{\odot}} \right) \frac{\partial}{\partial r_{\odot}} - \frac{\mu'_{\odot}}{r_{\odot}} + p_{\odot} \omega^2 \right] \left[ \frac{\partial u_{\odot 2}}{\partial \theta_{\odot}} + \frac{1}{\sin \theta_{\odot}} \frac{\partial u_{\odot 3}}{\partial \varphi_{\odot}} \right] + \quad (39) \\
& + \frac{\mu_{\odot}}{r_{\odot}^2 \sin \theta_{\odot}} \frac{\partial}{\partial \varphi_{\odot}} L(u_{\odot 3}) = 0;
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r_{\odot} \sin \theta_{\odot}} \left[ \left( \lambda_{\odot} + \mu_{\odot} \right) \frac{\partial}{\partial r_{\odot}} + \mu'_{\odot} + \frac{2\lambda_{\odot} + 4\mu_{\odot}}{r_{\odot}} \right] \frac{\partial u_{\odot r}}{\partial \varphi_{\odot}} + \\
& + \left[ \mu_{\odot} \frac{\partial^2}{\partial r_{\odot}^2} + \left( \mu'_{\odot} + \frac{2\mu_{\odot}}{r_{\odot}} \right) \frac{\partial}{\partial r_{\odot}} - \frac{\mu'_{\odot}}{r_{\odot}} + p_{\odot} \omega^2 \right] \left[ \frac{1}{\sin \theta_{\odot}} \frac{\partial u_{\odot 2}}{\partial \varphi_{\odot}} - \frac{\partial u_{\odot 3}}{\partial \theta_{\odot}} \right] + \\
& + \frac{\lambda_{\odot} + 2\mu_{\odot}}{r_{\odot}^2 \sin \theta_{\odot}} \frac{\partial}{\partial \varphi_{\odot}} L(u_{\odot 2}) - \frac{\mu_{\odot}}{r_{\odot}^2} \frac{\partial}{\partial \theta_{\odot}} L(u_{\odot 3}) = 0,
\end{aligned} \tag{40}$$

где  $L = \frac{\partial^2}{\partial \theta_{\odot}^2} + \operatorname{ctg} \theta_{\odot} \frac{\partial}{\partial \theta_{\odot}} + \frac{1}{\sin^2 \theta_{\odot}} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_{\odot}^2}$ ,  $\lambda'_{\odot} = \frac{d\lambda_{\odot}}{dr_{\odot}}$ ,  $\mu'_{\odot} = \frac{d\mu_{\odot}}{dr_{\odot}}$ .

Функции  $u_{\odot r}$ ,  $u_{\odot 2}$  и  $u_{\odot 3}$  будем искать в виде разложений:

$$\begin{aligned}
u_{\odot r}(r_{\odot}, \theta_{\odot}, \varphi_{\odot}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n U_{1mn}(r_{\odot}) P_n^{|m|}(\cos \theta_{\odot}) e^{im\varphi_{\odot}}, \\
u_{\odot 2}(r_{\odot}, \theta_{\odot}, \varphi_{\odot}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n U_{2mn}(r_{\odot}) P_n^{|m|}(\cos \theta_{\odot}) e^{im\varphi_{\odot}}, \\
u_{\odot 3}(r_{\odot}, \theta_{\odot}, \varphi_{\odot}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n U_{3mn}(r_{\odot}) P_n^{|m|}(\cos \theta_{\odot}) e^{im\varphi_{\odot}}.
\end{aligned} \tag{41}$$

## 2.4. Решение краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

### 3. ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

### 3.1. Диаграмма направленности

### 3.2. Частотные характеристики

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрено .., получили.., с помощью метода .. найдена...,  
проведены расчеты...

# ЛИТЕРАТУРА

Шендеров, Лепендин, Исакович – введение Харбенко Звук...

# ПРИЛОЖЕНИЯ