

# СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ . . . . .	3
1. Постановка задачи. . . . .	4
2. Определение волновых полей . . . . .	5
ЗАКЛЮЧЕНИЕ . . . . .	8

# ВВЕДЕНИЕ

Потребность в изучении дифракции на различных телах очень высока. Знания, полученные путем изучения дифракции с помощью моделей, используются как в гидроакустике и эхолокации, так и в других областях. В дефектоскопии основной задачей является обнаружение различных включений в однородном теле. Это позволяет проводить исследование различных объектов методом неразрушающего контроля.

В настоящей работе рассматривается задача дифракции плоских звуковых волн на упругой сфере, имеющей произвольно расположенную полость и неоднородное покрытие. С помощью таких покрытий можно изменять звукоотражающие свойства тел. В качестве рассматриваемого тела выбрана сфера, т.к. более сложные тела можно аппроксимировать с помощью сферы.

# 1. Постановка задачи

Рассмотрим изотропный однородный упругий шар радиуса  $R_2$ , плотность материала которого  $\rho_2$ , упругие постоянные  $\lambda_2$  и  $\mu_2$ , содержащий произвольно расположенную сферическую полость с радиусом  $R_1$ . Шар имеет покрытие в виде неоднородного изотропного упругого слоя, внешний радиус которого равен  $R_3$ . Полагаем, что модули упругости  $\lambda_3$  и  $\mu_3$  материала слоя описываются дифференцируемыми функциями радиальной координаты  $r$  сферической системы координат  $(r, \theta, \varphi)$ , а плотность  $\rho_3$  — непрерывной функцией координаты  $r$ . Окружающая тело и находящаяся в его полости жидкости — идеальные и однородные, имеющие плотности  $\rho_0, \rho_1$  и скорости звука  $c_0, c_1$  соответственно.

Свяжем с полостью тела и с самим телом прямоугольные системы координат  $x_1, y_1, z_1$  и  $x_2, y_2, z_2$  соответственно так, чтобы соответствующие оси обеих систем координат были параллельны. С декартовыми системами координат  $x_1, y_1, z_1$  и  $x_2, y_2, z_2$  свяжем сферические координаты  $r_1, \theta_1, \varphi_1$  и  $r_2, \theta_2, \varphi_2$ .

Пусть из внешнего пространства на шар падает плоская звуковая волна. Потенциал скоростей гармонической падающей волны запишем в виде:

$$\Psi_0(\bar{\mathbf{x}}, t) = A_0 \exp [i (\bar{\mathbf{k}} \cdot \bar{\mathbf{x}} - \omega t)] , \quad (1)$$

где  $A_0$  — амплитуда волны,  $\bar{\mathbf{k}}$  — волновой вектор в окружающей жидкости,  $|\bar{\mathbf{k}}| = k = \omega/c$  — волновое число,  $\bar{\mathbf{x}}$  — радиус-вектор,  $\omega$  — круговая частота.

Без ограничения общности будем полагать, что волна распространяется в направлении  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ . Тогда в сферической системе координат (1) запишется в виде:

$$\Psi_0(r_2, \theta_2, t) = A_0 \exp [i (kr_2 \cos \theta_2 - \omega t)] , \quad (2)$$

В дальнейшем временной множитель  $\exp(-i\omega t)$  будем опускать.

Определим отраженные от тела и возбужденные в его полости волны, а также найдем поля смещений в упругом материале шара и неоднородном слое.

## 2. Определение волновых полей

Задача определения акустических полей вне упругого тела и внутри его полости в установившемся режиме колебаний заключается в нахождении решений уравнения Гельмгольца:

$$\Delta \Psi^{(0)} + k_0^2 \Psi^{(0)} = 0; \quad (3)$$

$$\Delta \Psi^{(1)} + k_1^2 \Psi^{(1)} = 0, \quad (4)$$

где  $\Psi^{(0)}$  — потенциал скоростей полного акустического поля во внешней среде;  $\Psi^{(1)}$  — потенциал скоростей акустического поля в полости тела;  $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$  и  $k_1 = \frac{\omega}{c_1}$  — волновые числа окружающей тело и находящейся в полости жидкостей соответственно. При этом скорости частиц жидкости и акустическое давление вне тела ( $j = 0$ ) и внутри полости ( $j = 1$ ) определяются по следующим формулам соответственно:

$$\bar{v}_j = \text{grad } \Psi^{(j)}; \quad p_j = i\rho_j \omega \Psi^{(j)} \quad (j = 0, 1). \quad (5)$$

Потенциал скоростей падающей плоской волны представим в виде

$$\Psi_0(r, \theta) = A_0 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n j_n(kr) P_n(\cos \theta), \quad (6)$$

где  $j_n(x)$  — сферическая функция Бесселя порядка  $n$ ,  $P_n(x)$  — многочлен Лежандра степени  $n$ .

В силу линейной постановки задачи для  $\Psi^{(0)}$  и  $\Psi_0$  справедливо

$$\Psi^{(0)} = \Psi_0 + \Psi_s, \quad (7)$$

где  $\Psi_s$  — потенциал скоростей рассеянной звуковой волны. Тогда из (3) получаем уравнение для нахождения  $\Psi_s$ :

$$\Delta \Psi_s + k_0^2 \Psi_s = 0. \quad (8)$$

Из-за произвольного расположения полости в теле потенциалы  $\Psi^{(1)}$  и  $\Psi_s$  не будут проявлять свойства симметрии. Уравнения (4) и (8) запишем в сфери-

ческих системах координат  $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$  и  $(r_2, \theta_2, \varphi_2)$  соответственно:

$$\frac{1}{r_1^2} \frac{\partial}{\partial r_1} \left( r_1^2 \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial r_1} \right) + \frac{1}{r_1^2 \sin^2 \theta_1} \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial \varphi_1^2} + \frac{1}{r_1^2 \sin \theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left( \sin \theta_1 \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial \theta_1} \right) + k_1^2 \Psi^{(1)} = 0; \quad (9)$$

$$\frac{1}{r_2^2} \frac{\partial}{\partial r_2} \left( r_2^2 \frac{\partial \Psi_s}{\partial r_2} \right) + \frac{1}{r_2^2 \sin^2 \theta_2} \frac{\partial \Psi_s}{\partial \varphi_2^2} + \frac{1}{r_2^2 \sin \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left( \sin \theta_2 \frac{\partial \Psi_s}{\partial \theta_2} \right) + k_0^2 \Psi_s = 0; \quad (10)$$

Звуковая волна в полости тела  $\Psi^{(1)}$  должна удовлетворять условию ограниченности, а отраженная волна  $\Psi_s$  — условиям излучения на бесконечности. Поэтому потенциалы  $\Psi^{(1)}$  и  $\Psi_s$  будем искать в виде

$$\Psi^{(1)}(r_1, \theta_1, \varphi_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{nm}^{(1)} j_n(k_1 r_1) P_n^m(\cos \theta_1) e^{im\varphi_1}; \quad (11)$$

$$\Psi_s(r_2, \theta_2, \varphi_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n B_{nm}^{(0)} h_n(k_0 r_2) P_n^m(\cos \theta_2) e^{im\varphi_2}, \quad (12)$$

где  $h_n(x)$  — сферическая функция Ганкеля первого рода порядка  $n$ .

Распространение малых возмущений в упругом теле для установившегося режима движения частиц тела описывается скалярным и векторным уравнением Гельмгольца:

$$\Delta \Psi^{(2)} + k_{2l}^2 \Psi^{(2)} = 0; \quad (13)$$

$$\Delta \Phi^{(2)} + k_{2\tau}^2 \Phi^{(2)} = 0, \quad (14)$$

где  $k_{2l}$  — волновое число продольных волн со скоростью распространения  $c_l = \sqrt{\frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho}}$ ;

$k_{2\tau}$  — волновое число поперечных волн со скоростью распространения  $c_\tau = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ ;

$\Psi^{(2)}$  и  $\Phi^{(2)}$  — скалярный и векторный потенциалы смещения соответственно.

Вектор смещения  $\mathbf{u}^{(2)}$  частиц упругого тела определяется по формуле

$$\mathbf{u}^{(2)} = \text{grad } \Psi^{(2)} + \text{rot } \Phi^{(2)}.$$

Потенциал смещения  $\Psi^{(2)}$  будем искать в виде ряда по двум локальным сферическим функциям:

$$\Psi^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{nm}^{(2)} h_n(k_{2l} r_1) P_n^m(\cos \theta_1) e^{im\varphi_1} + B_{nm}^{(2)} j_n(k_{2l} r_2) P_n^m(\cos \theta_2) e^{im\varphi_2}$$

Векторный потенциал  $\Phi^{(2)}$  может быть представлен в виде суммы:

$$\Phi^{(2)} = k_{2\tau} \operatorname{rot}(rV\bar{e}_r) + \operatorname{rot} \operatorname{rot}(rW\bar{e}_r),$$

где  $\bar{e}_r$  — орт координатной оси  $r$  сферической системы координат  $r, \theta, \varphi$ , функции  $V$  и  $W$  удовлетворяют скалярным уравнениям Гельмгольца

$$\Delta V + k_{2\tau}^2 V = 0, \quad (15)$$

$$\Delta W + k_{2\tau}^2 W = 0. \quad (16)$$

Функции  $V$  и  $W$  будем искать в виде:

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_{nm}^{(2)} h_n(k_{2l}r_1) P_n^m(\cos \theta_1) e^{im\varphi_1} + D_{nm}^{(2)} j_n(k_{2l}r_2) P_n^m(\cos \theta_2) e^{im\varphi_2}, \quad (17)$$

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_{nm}^{(2)} h_n(k_{2l}r_1) P_n^m(\cos \theta_1) e^{im\varphi_1} + F_{nm}^{(2)} j_n(k_{2l}r_2) P_n^m(\cos \theta_2) e^{im\varphi_2}. \quad (18)$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Была поставлена задача о дифракции плоских звуковых волн на упругой сфере, имеющей произвольно расположенную полость и неоднородное покрытие. В данной работе приведены основные уравнения колебаний, а также разложения в ряд искомых функций для внешней среды сферы, а также полости тела.