

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН	5
1.1. Распространение звука в идеальной жидкости	6
1.2. Распространение звуковых волн в упругих телах	7
2. ДИФРАКЦИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН НА УПРУГОЙ СФЕРЕ, ИМЕ- ЮЩЕЙ ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННУЮ ПОЛОСТЬ И НЕОД- НОРОДНОЕ ПОКРЫТИЕ	8
2.1. Обзор литературы по проблеме исследования	9
2.2. Постановка задачи	10
2.3. Аналитическое решение задачи	11
2.4. Решение краевой задачи для системы обыкновенных дифферен- циальных уравнений	16
3. ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ	17
3.1. Диаграмма направленности	18
3.2. Частотные характеристики	19
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	20
ЛИТЕРАТУРА	21
ПРИЛОЖЕНИЯ	22

ВВЕДЕНИЕ

Потребность в изучении дифракции на различных телах очень высока. Знания, полученные путем изучения дифракции с помощью моделей, используются как в гидроакустике и эхолокации, так и в других областях. В дефектоскопии основной задачей является обнаружение различных включений в однородном теле. Это позволяет проводить исследование различных объектов методом неразрушающего контроля. Задача эхолокации — обнаружить и определить местоположение объектов по времени задержки отражённой волны.

Для современного мира изучение простых моделей уже не дает требуемой точности прогнозирования поведения волн. Поэтому, необходимо изучать более сложные модели, детально описывающие рассматриваемые тела и окружающую среду. В качестве простых моделей рассматривают дифракцию плоских звуковых волн, однако это приближение возможно только в случае, когда расстояние от источника до рассеивателя много больше длины волны. На практике это условие часто не выполняется. В этом случае нельзя не учитывать криволинейность фронта падающей волны. Расходимость падающей волны приводит не только к количественным, но и качественным изменениям дифракционной картины. Акустические поля сложных излучателей также успешно моделируются при помощи изучения дифракции звуковых волн, излучаемых цилиндрическими и сферическими источниками.

В настоящей работе рассматривается задача дифракции цилиндрических звуковых волн на упругой сфере с произвольно расположенной полостью, заполненной жидкостью, и радиально-неоднородным упругим покрытием. С помощью таких покрытий можно изменять звукоотражающие свойства тел, что позволяет решать различные задачи по формированию заданной дифракционной картины. Такой слой возможно сделать в промышленных условиях, комбинируя несколько тонких однородных слоев с различными механическими характеристиками. В качестве рассматриваемого тела выбрана сфера, т.к. она является подходящей аппроксимацией для большинства сложных тел. В ходе работы получено аналитическое описание акустического поля, рассеянного телом, предложено решение полученной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений и представлены результаты расчетов диаграмм направленности рассеянного поля и частотных характеристик для различных

покрытий.

1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН

1.1. Распространение звука в идеальной жидкости

Толоконников, Ларин, лаб. раб.

1.2. Распространение звуковых волн в упругих телах

Ландау - Теория упругости, Амензаде
моделирование волновых полей

**2. ДИФРАКЦИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН НА
УПРУГОЙ СФЕРЕ, ИМЕЮЩЕЙ
ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННУЮ
ПОЛОСТЬ И НЕОДНОРОДНОЕ
ПОКРЫТИЕ**

2.1. Обзор литературы по проблеме исследования

Известия ТулГУ №3 Ларин; статьи Толоконникова

2.2. Постановка задачи

рисунок, рассмотрим..., пусть ..., требуется найти волновые поля в ...

Рассмотрим изотропный однородный упругий шар радиуса R_{\odot} , плотность материала которого ρ_{\odot} , упругие постоянные λ_{\odot} и μ_{\odot} , содержащий произвольно расположенную сферическую полость с радиусом R_{\circ} . Шар имеет покрытие в виде неоднородного изотропного упругого слоя, внешний радиус которого равен R_{\odot} .

Свяжем с полостью тела и с самим телом прямоугольные системы координат $x_{\circ}, y_{\circ}, z_{\circ}$ и $x_{\odot}, y_{\odot}, z_{\odot}$ соответственно так, чтобы соответствующие оси обеих систем координат были параллельны. С декартовыми системами координат $x_{\circ}, y_{\circ}, z_{\circ}$ и $x_{\odot}, y_{\odot}, z_{\odot}$ свяжем сферические координаты $r_{\circ}, \theta_{\circ}, \varphi_{\circ}$ и $r_{\odot}, \theta_{\odot}, \varphi_{\odot}$.

Полагаем, что модули упругости λ_{\odot} и μ_{\odot} материала слоя описываются дифференцируемыми функциями радиальной координаты r_{\odot} сферической системы координат $(r_{\odot}, \theta_{\odot}, \varphi_{\odot})$, а плотность ρ_{\odot} — непрерывной функцией координаты r_{\odot} . Окружающая тело и находящаяся в его полости жидкости — идеальные и однородные, имеющие плотности ρ_e, ρ_{\circ} и скорости звука c_e, c_{\circ} соответственно.

Определим отраженные от тела и возбужденные в его полости волны, а также найдем поля смещений в упругом материале шара и неоднородном слое.

2.3. Аналитическое решение задачи

Пусть из внешнего пространства на шар падает плоская звуковая волна. Потенциал скоростей гармонической падающей волны запишем в виде:

$$\Psi_o(\bar{\mathbf{x}}_\odot, t) = A_o \exp [i (\bar{\mathbf{k}}_e \cdot \bar{\mathbf{x}}_\odot - \omega_e t)], \quad (1)$$

где A_o — амплитуда волны,

$\bar{\mathbf{k}}_e$ — волновой вектор в окружающей жидкости,

$|\bar{\mathbf{k}}_e| = k_e = \omega_e / c_e$ — волновое число,

$\bar{\mathbf{x}}$ — радиус-вектор,

ω_e — круговая частота.

Без ограничения общности будем полагать, что волна распространяется в направлении $\theta_\odot = \theta_o = 0$. Тогда в сферической системе координат (1) запишется в виде:

$$\Psi_o(r_\odot, \theta_\odot, t) = A_o \exp [i (k_e r_\odot \cos \theta_\odot - \omega_e t)], \quad (2)$$

В дальнейшем временной множитель $\exp(-i\omega_e t)$ будем опускать.

Задача определения акустических полей вне упругого тела и внутри его полости в установившемся режиме колебаний заключается в нахождении решений уравнения Гельмгольца:

$$\Delta \Psi_e + k_e^2 \Psi_e = 0; \quad (3)$$

$$\Delta \Psi_o + k_o^2 \Psi_o = 0, \quad (4)$$

где Ψ_e — потенциал скоростей полного акустического поля во внешней среде;

Ψ_o — потенциал скоростей акустического поля в полости тела;

$k_o = \frac{\omega_o}{c_o}$ — волновое число находящейся в полости жидкости.

При этом скорости частиц жидкости и акустическое давление вне тела и внутри полости определяются по следующим формулам соответственно:

$$\bar{v}_e = \text{grad } \Psi_e; \quad P_e = i p_e \omega \Psi_e; \quad (5)$$

$$\bar{v}_o = \text{grad } \Psi_o; \quad P_o = i p_o \omega \Psi_o. \quad (6)$$

В силу линейной постановки задачи для Ψ_e и Ψ_o справедливо

$$\Psi_e = \Psi_o + \Psi_s, \quad (7)$$

где Ψ_s — потенциал скоростей рассеянной звуковой волны.

Тогда из (3) получаем уравнение для нахождения Ψ_s :

$$\Delta\Psi_s + k_e^2\Psi_s = 0. \quad (8)$$

Из-за произвольного расположения полости в теле потенциалы Ψ_o и Ψ_s не будут проявлять свойства симметрии. Уравнения (4) и (8) запишем в сферических системах координат $(r_o, \theta_o, \varphi_o)$ и $(r_\odot, \theta_\odot, \varphi_\odot)$ соответственно:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_o^2} \frac{\partial}{\partial r_o} \left(r_o^2 \frac{\partial \Psi_o}{\partial r_o} \right) + \frac{1}{r_o^2 \sin^2 \theta_o} \frac{\partial \Psi_o}{\partial \varphi_o^2} + \frac{1}{r_o^2 \sin \theta_o} \frac{\partial}{\partial \theta_o} \left(\sin \theta_o \frac{\partial \Psi_o}{\partial \theta_o} \right) + k_o^2 \Psi_o &= 0; \quad (9) \\ \frac{1}{r_\odot^2} \frac{\partial}{\partial r_\odot} \left(r_\odot^2 \frac{\partial \Psi_s}{\partial r_\odot} \right) + \frac{1}{r_\odot^2 \sin^2 \theta_\odot} \frac{\partial \Psi_s}{\partial \varphi_\odot^2} + \frac{1}{r_\odot^2 \sin \theta_\odot} \frac{\partial}{\partial \theta_\odot} \left(\sin \theta_\odot \frac{\partial \Psi_s}{\partial \theta_\odot} \right) + k_e^2 \Psi_s &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Звуковая волна в полости тела Ψ_o должна удовлетворять условию ограниченности, а отраженная волна Ψ_s — условиям излучения на бесконечности. Поэтому потенциалы Ψ_s и Ψ_o будем искать в виде

$$\Psi_s(r_\odot, \theta_\odot, \varphi_\odot) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n A_{snm} h_n(k_e r_\odot) P_n^m(\cos \theta_\odot) \cos(m\varphi_\odot); \quad (11)$$

$$\Psi_o(r_o, \theta_o, \varphi_o) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n B_{onm} j_n(k_o r_o) P_n^m(\cos \theta_o) \cos(m\varphi_o), \quad (12)$$

где $h_n(x)$ и $j_n(x)$ — сферические функции Ханкеля первого рода и Бесселя соответственно;

$P_n(x)$ — многочлен Лежандра степени n .

Распространение малых возмущений в упругом теле для установившегося режима движения частиц тела описывается скалярным и векторным уравнением Гельмгольца:

$$\Delta\Psi_\odot + k_{\odot l}^2\Psi_\odot = 0; \quad (13)$$

$$\Delta\Phi_\odot + k_{\odot \tau}^2\Phi_\odot = 0, \quad (14)$$

где $k_{\odot l}$ — волновое число продольных волн со скоростью распространения

$$c_{\odot l} = \sqrt{\frac{(\lambda_\odot + 2\mu_\odot)}{\rho_\odot}};$$

$k_{\odot \tau}$ — волновое число поперечных волн со скоростью распространения

$$c_{\odot\tau} = \sqrt{\frac{\mu_{\odot}}{p_{\odot}}};$$

Ψ_{\odot} и Φ_{\odot} — скалярной и векторный потенциалы смещения соответственно.

Вектор смещения \mathbf{u}_{\odot} частиц упругого тела определяется по формуле

$$\mathbf{u}_{\odot} = \text{grad } \Psi_{\odot} + \text{rot } \Phi_{\odot}.$$

Потенциал смещения Ψ_{\odot} будем искать в виде ряда по двум локальным сферическим функциям:

$$\Psi_{\odot} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{\odot nm} h_n(k_{\odot l} r_{\odot}) P_n^m(\cos \theta_{\odot}) e^{im\varphi_{\odot}} + B_{\odot nm} j_n(k_{\odot l} r_{\odot}) P_n^m(\cos \theta_{\odot}) e^{im\varphi_{\odot}}$$

Векторный потенциал Φ_{\odot} может быть представлен в виде суммы:

$$\Phi_{\odot} = rV\bar{e}_r + \text{rot}(rW\bar{e}_r),$$

где \bar{e}_r — орт координатной оси r_{\odot} сферической системы координат $r_{\odot}, \theta_{\odot}, \varphi_{\odot}$, функции V и W удовлетворяют скалярным уравнениям Гельмгольца

$$\Delta V + k_{\odot\tau}^2 V = 0, \quad (15)$$

$$\Delta W + k_{\odot\tau}^2 W = 0. \quad (16)$$

Функции V и W будем искать в виде:

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_{\odot nm} h_n(k_{\odot l} r_{\odot}) P_n^m(\cos \theta_{\odot}) e^{im\varphi_{\odot}} + D_{\odot nm} j_n(k_{\odot l} r_{\odot}) P_n^m(\cos \theta_{\odot}) e^{im\varphi_{\odot}}, \quad (17)$$

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_{\odot nm} h_n(k_{\odot l} r_{\odot}) P_n^m(\cos \theta_{\odot}) e^{im\varphi_{\odot}} + F_{\odot nm} j_n(k_{\odot l} r_{\odot}) P_n^m(\cos \theta_{\odot}) e^{im\varphi_{\odot}}. \quad (18)$$

Коэффициенты разложений $A_{snm}, B_{\odot nm}, A_{\odot nm}, B_{\odot nm}, C_{\odot nm}, D_{\odot nm}, E_{\odot nm}$ и $F_{\odot nm}$ подлежат определению из граничных условий, которые заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости на внешней поверхности слоя и внутренней поверхности полого шара; равенстве на них нормального напряжения и акустического давления; отсутствии на этих поверхностях касательных напряжений. На внутренней поверхности слоя при переходе через границу раздела упругих сред должны быть непрерывны составляющие

вектора смещения частиц, а также нормальные и тангенциальные напряжения.

Имеем:

EDIT THIS EQUATION

$$\text{при } r_o = R_o : \quad \sigma_{rr} = -P_o; \quad \sigma_{r\theta} = 0; \quad \sigma_{r\varphi} = 0; \quad -i\omega u_r = v_{or};$$

$$\text{при } r_\odot = R_\odot : \quad \sigma_{rr} = -P_\odot; \quad \sigma_{r\theta} = 0; \quad \sigma_{r\varphi} = 0; \quad -i\omega u_r = v_{2r};$$

где $v_{or} = \partial\Psi_o/\partial r$, $v_{\odot r} = \partial\Psi_\odot/\partial r$ — радиальная компонента скорости частиц в жидкости внутри полости и в окружающем пространстве соответственно.

Распространение упругих волн в неоднородном слое описывается общими уравнениями движения упругой среды, которые для установившегося режима движения в сферической системе координат имеют следующий вид [?]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{1}{r} \left(2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{r\theta} \operatorname{ctg}\theta \right) &= -\rho_1 \omega^2 u_r; \\ \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\sigma_{\theta\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{1}{r} \left((\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \operatorname{ctg}\theta + 3\sigma_{r\theta} \right) &= -\rho_1 \omega^2 u_\theta; \\ \frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_{\theta\varphi}}{\partial\theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{1}{r} \left(3\sigma_{r\varphi} + 2\sigma_{\theta\varphi} \operatorname{ctg}\theta \right) &= -\rho_1 \omega^2 u_\varphi, \end{aligned} \quad (19)$$

где u_r, u_θ, u_φ — компоненты вектора смещения \mathbf{u} ;

σ_{ij} — компоненты тензора напряжений неоднородной среды в сферической системе координат.

Используя связь компонентов тензора напряжений с компонентами тензора деформаций (обобщенный закон Гука), а также выражения компонентов тензора деформаций через компоненты вектора смещения [?], получаем в сферической системе координат следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \left(\lambda_1 + 2\mu_1 \right) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\lambda_1}{r} \left(2u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \operatorname{ctg}\theta u_\theta + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} \right); \\ \sigma_{\theta\theta} &= \lambda_1 \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2(\lambda_1 + \mu_1)}{r} u_r + \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{\lambda_1}{r} \left(\operatorname{ctg}\theta u_\theta + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} \right); \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \lambda_1 \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2(\lambda_1 + \mu_1)}{r} u_r + \frac{\lambda_1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{r} \left(\operatorname{ctg}\theta u_\theta + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} \right); \\ \sigma_{r\theta} &= \mu_1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial\theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right); \\ \sigma_{r\varphi} &= \mu_1 \left(\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial u_r}{\partial\varphi} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right); \\ \sigma_{\theta\varphi} &= \frac{\mu_1}{r} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta u_\varphi \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Соотношения (??) справедливы как для однородной упругой среды, так и для неоднородного слоя. В первом случае в выражениях (??) компоненты вектора смещения и тензора напряжений, а также величины λ_{\odot} и μ_{\odot} следует заменить на λ_{\odot} и μ_{\odot} соответственно.

Используя эти соотношения, запишем уравнения (19) через компоненты вектора смещения \mathbf{u} :

EQUATIONS

Введем новые функции u_2 и u_3 , связанные с u_{θ} и u_{φ} следующими соотношениями:

$$u_{\theta} = \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_3}{\partial \varphi}, \quad u_{\varphi} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial u_3}{\partial \theta}$$

и запишем уравнения движения через функции u_r, u_2 и u_3 :

2.4. Решение краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

3. ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

3.1. Диаграмма направленности

3.2. Частотные характеристики

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрено .., получили.., с помощью метода .. найдена...,
проведены расчеты...

ЛИТЕРАТУРА

Шендеров, Лепендин, Исакович – введение Харбенко Звук...

ПРИЛОЖЕНИЯ