

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. Постановка задачи	4
2. Определение волновых полей	5
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	8

ВВЕДЕНИЕ

Потребность в изучении дифракции на различных телах очень высока. Знания, полученные путем изучения дифракции с помощью моделей, используются как в гидроакустике и эхолокации, так и в других областях. В дефектоскопии основной задачей является обнаружение различных включений в однородном теле. Это позволяет проводить исследование различных объектов методом неразрушающего контроля.

В настоящей работе рассматривается задача дифракции плоских звуковых волн на упругой сфере, имеющей произвольно расположенную полость и неоднородное покрытие. С помощью таких покрытий можно изменять звукоотражающие свойства тел. В качестве рассматриваемого тела выбрана сфера, т.к. более сложные тела можно аппроксимировать с помощью сферы.

1. Постановка задачи

Рассмотрим изотропный однородный упругий шар радиуса R_2 , плотность материала которого ρ_2 , упругие постоянные λ_2 и μ_2 , содержащий произвольно расположенную сферическую полость с радиусом R_1 . Шар имеет покрытие в виде неоднородного изотропного упругого слоя, внешний радиус которого равен R_3 . Полагаем, что модули упругости λ_3 и μ_3 материала слоя описываются дифференцируемыми функциями радиальной координаты r сферической системы координат (r, θ, φ) , а плотность ρ_3 — непрерывной функцией координаты r . Окружающая тело и находящаяся в его полости жидкости — идеальные и однородные, имеющие плотности ρ_0, ρ_1 и скорости звука c_0, c_1 соответственно.

Свяжем с полостью тела и с самим телом прямоугольные системы координат x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 соответственно так, чтобы соответствующие оси обеих систем координат были параллельны. С декартовыми системами координат x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 свяжем сферические координаты r_1, θ_1, φ_1 и r_2, θ_2, φ_2 .

Пусть из внешнего пространства на шар падает плоская звуковая волна. Потенциал скоростей гармонической падающей волны запишем в виде:

$$\Psi_0(\bar{\mathbf{x}}, t) = A_0 \exp [i (\bar{\mathbf{k}} \cdot \bar{\mathbf{x}} - \omega t)] , \quad (1)$$

где A_0 — амплитуда волны, $\bar{\mathbf{k}}$ — волновой вектор в окружающей жидкости, $|\bar{\mathbf{k}}| = k = \omega/c$ — волновое число, $\bar{\mathbf{x}}$ — радиус-вектор, ω — круговая частота.

Без ограничения общности будем полагать, что волна распространяется в направлении $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Тогда в сферической системе координат (1) запишется в виде:

$$\Psi_0(r_2, \theta_2, t) = A_0 \exp [i (kr_2 \cos \theta_2 - \omega t)] , \quad (2)$$

В дальнейшем временной множитель $\exp(-i\omega t)$ будем опускать.

Определим отраженные от тела и возбужденные в его полости волны, а также найдем поля смещений в упругом материале шара и неоднородном слое.

2. Определение волновых полей

Задача определения акустических полей вне упругого тела и внутри его полости в установившемся режиме колебаний заключается в нахождении решений уравнения Гельмгольца:

$$\Delta \Psi^{(0)} + k_0^2 \Psi^{(0)} = 0; \quad (3)$$

$$\Delta \Psi^{(1)} + k_1^2 \Psi^{(1)} = 0, \quad (4)$$

где $\Psi^{(0)}$ — потенциал скоростей полного акустического поля во внешней среде; $\Psi^{(1)}$ — потенциал скоростей акустического поля в полости тела; $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$ и $k_1 = \frac{\omega}{c_1}$ — волновые числа окружающей тело и находящейся в полости жидкостей соответственно. При этом скорости частиц жидкости и акустическое давление вне тела ($j = 0$) и внутри полости ($j = 1$) определяются по следующим формулам соответственно:

$$\bar{v}_j = \text{grad } \Psi^{(j)}; \quad p_j = i\rho_j \omega \Psi^{(j)} \quad (j = 0, 1). \quad (5)$$

Потенциал скоростей падающей плоской волны представим в виде

$$\Psi_0(r, \theta) = A_0 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n j_n(kr) P_n(\cos \theta), \quad (6)$$

где $j_n(x)$ — сферическая функция Бесселя порядка n , $P_n(x)$ — многочлен Лежандра степени n .

В силу линейной постановки задачи для $\Psi^{(0)}$ и Ψ_0 справедливо

$$\Psi^{(0)} = \Psi_0 + \Psi_s, \quad (7)$$

где Ψ_s — потенциал скоростей рассеянной звуковой волны. Тогда из (3) получаем уравнение для нахождения Ψ_s :

$$\Delta \Psi_s + k_0^2 \Psi_s = 0. \quad (8)$$

Из-за произвольного расположения полости в теле потенциалы $\Psi^{(1)}$ и Ψ_s не будут проявлять свойства симметрии. Уравнения (4) и (8) запишем в сфери-

ческих системах координат $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$ и $(r_2, \theta_2, \varphi_2)$ соответственно:

$$\frac{1}{r_1^2} \frac{\partial}{\partial r_1} \left(r_1^2 \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial r_1} \right) + \frac{1}{r_1^2 \sin^2 \theta_1} \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial \varphi_1^2} + \frac{1}{r_1^2 \sin \theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\sin \theta_1 \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial \theta_1} \right) + k_1^2 \Psi^{(1)} = 0; \quad (9)$$

$$\frac{1}{r_2^2} \frac{\partial}{\partial r_2} \left(r_2^2 \frac{\partial \Psi_s}{\partial r_2} \right) + \frac{1}{r_2^2 \sin^2 \theta_2} \frac{\partial \Psi_s}{\partial \varphi_2^2} + \frac{1}{r_2^2 \sin \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\sin \theta_2 \frac{\partial \Psi_s}{\partial \theta_2} \right) + k_0^2 \Psi_s = 0; \quad (10)$$

Звуковая волна в полости тела $\Psi^{(1)}$ должна удовлетворять условию ограниченности, а отраженная волна Ψ_s — условиям излучения на бесконечности. Поэтому потенциалы $\Psi^{(1)}$ и Ψ_s будем искать в виде

$$\Psi^{(1)}(r_1, \theta_1, \varphi_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{nm}^{(1)} j_n(k_1 r_1) P_n^m(\cos \theta_1) e^{im\varphi_1}; \quad (11)$$

$$\Psi_s(r_2, \theta_2, \varphi_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n B_{nm}^{(0)} h_n(k_0 r_2) P_n^m(\cos \theta_2) e^{im\varphi_2}, \quad (12)$$

где $h_n(x)$ — сферическая функция Ганкеля первого рода порядка n .

Распространение малых возмущений в упругом теле для установившегося режима движения частиц тела описывается скалярным и векторным уравнением Гельмгольца:

$$\Delta \Psi^{(2)} + k_{2l}^2 \Psi^{(2)} = 0; \quad (13)$$

$$\Delta \Phi^{(2)} + k_{2\tau}^2 \Phi^{(2)} = 0, \quad (14)$$

где k_{2l} — волновое число продольных волн со скоростью распространения $c_l = \sqrt{\frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho}}$;

$k_{2\tau}$ — волновое число поперечных волн со скоростью распространения $c_\tau = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$; $\Psi^{(2)}$ и $\Phi^{(2)}$ — скалярный и векторный потенциалы смещения соответственно.

Вектор смещения $\mathbf{u}^{(2)}$ частиц упругого тела определяется по формуле

$$\mathbf{u}^{(2)} = \text{grad } \Psi^{(2)} + \text{rot } \Phi^{(2)}.$$

Потенциал смещения $\Psi^{(2)}$ будем искать в виде ряда по двум локальным сферическим функциям:

$$\Psi^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{nm}^{(2)} h_n(k_{2l} r_1) P_n^m(\cos \theta_1) e^{im\varphi_1} + B_{nm}^{(2)} j_n(k_{2l} r_2) P_n^m(\cos \theta_2) e^{im\varphi_2}$$

Векторный потенциал $\Phi^{(2)}$ может быть представлен в виде суммы:

$$\Phi^{(2)} = rV\bar{e}_r + \text{rot}(rW\bar{e}_r),$$

где \bar{e}_r — орт координатной оси r сферической системы координат r, θ, φ , функции V и W удовлетворяют скалярным уравнениям Гельмгольца

$$\Delta V + k_{2\tau}^2 V = 0, \quad (15)$$

$$\Delta W + k_{2\tau}^2 W = 0. \quad (16)$$

Функции V и W будем искать в виде:

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_{nm}^{(2)} h_n(k_{2l}r_1) P_n^m(\cos \theta_1) e^{im\varphi_1} + D_{nm}^{(2)} j_n(k_{2l}r_2) P_n^m(\cos \theta_2) e^{im\varphi_2}, \quad (17)$$

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_{nm}^{(2)} h_n(k_{2l}r_1) P_n^m(\cos \theta_1) e^{im\varphi_1} + F_{nm}^{(2)} j_n(k_{2l}r_2) P_n^m(\cos \theta_2) e^{im\varphi_2}. \quad (18)$$

Коэффициенты разложений $A_{nm}^{(1)}, B_{nm}^{(0)}, A_{nm}^{(2)}, B_{nm}^{(2)}, C_{nm}^{(2)}, D_{nm}^{(2)}, E_{nm}^{(2)}, F_{nm}^{(2)}$ подлежат определению из граничных условий, которые заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости на внешней поверхности слоя и внутренней поверхности полого шара; равенстве на них нормального напряжения и акустического давления; отсутствии на этих поверхностях касательных напряжений. На внутренней поверхности слоя при переходе через границу раздела упругих сред должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, а также нормальные и тангенциальные напряжения. Имеем:

$$\text{при } r_1 = R_1 : \quad \sigma_{rr} = -p_1; \quad \sigma_{r\theta} = 0; \quad \sigma_{r\varphi} = 0; \quad -i\omega u_r = v_{1r};$$

$$\text{при } r_2 = R_2 : \quad \sigma_{rr} = -p_2; \quad \sigma_{r\theta} = 0; \quad \sigma_{r\varphi} = 0; \quad -i\omega u_r = v_{2r};$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Была поставлена задача о дифракции плоских звуковых волн на упругой сфере, имеющей произвольно расположенную полость и неоднородное покрытие. В данной работе приведены основные уравнения колебаний, а также разложения в ряд искомых функций для внешней среды сферы, а также полости тела.