СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 6
1. Постановка задачи. 7
2. Определение волновых полей 8

ВВЕДЕНИЕ

Потребность в изучении дифракции на различных телах очень высока. Знания, полученные путем изучения дифракции с помощью моделей, используются как в гидроакустике и эхолокации, так и в других областях. В дефектоскопии основной задачей является обнаружение различных включений в однородном теле. Это позволяет проводить исследование различных объектов методом неразрушающего контроля.

В настоящей работе рассматривается задача дифракции плоских звуковых волн на упругой сфере, имеющей произвольно расположенную полость и неоднородное покрытие. С помощью таких покрытий можно изменять звукоотражающие свойства тел. В качестве рассматриваемого тела выбрана сфера, т.к. более сложные тела можно аппроксимировать с помощью сферы.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим изотропный однородный упругий шар радиуса r_2, плотность материала которого ρ_2, упругие постоянные λ_2 и μ_2, содержащий произвольно расположенную сферическую полость с радиусом r_1. Шар имеет покрытие в виде неоднородного изотропного упругого слоя, внешний радиус которого равен r_3. Полагаем, что модули упругости λ_3 и μ_3 материала слоя описываются дифференцируемыми функциями радиальной координаты r сферической системы координат (r, θ, φ), а плотность ρ_3 — непрерывной функцией координаты r. Окружающая тело и находящаяся в его полости жидкости — идеальные и однородные, имеющие плотности ρ_0, ρ_1 и скорости звука c_0, c_1 соответственно.

Свяжем с полостью тела и с самим телом прямоугольные системы координат x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 соответственно так, чтобы соответствующие оси обеих систем координат были параллельны. С декартовыми системами координат x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 свяжем сферические координаты r_1, θ_1, φ_1 и r_2, θ_2, φ_2.

Пусть из внешнего пространства на шар падает плоская звуковая волна. Потенциал скоростей гармонической падающей волны запишем в виде:

$$\Psi_0(\bar{\mathbf{x}}, t) = A_0 \exp\left[i\left(\bar{\mathbf{k}} \cdot \bar{\mathbf{x}} - \omega t\right)\right], \tag{1}$$

где A_0 — амплитуда волны, $\bar{\mathbf{k}}$ — волновой вектор в окружающей жидкости, $|\bar{\mathbf{k}}| = k = \omega/c$ — волновое число, $\bar{\mathbf{x}}$ — радиус-вектор, ω — круговая частота.

Без ограничения общности будем полагать, что волна распространяется в направлении $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Тогда в сферической системе координат (1) запишется в виде:

$$\Psi_0(r_2, \theta_2, t) = A_0 \exp\left[i\left(kr_2 \cos\theta_2 - \omega t\right)\right], \tag{2}$$

В дальнейшем временной множитель $\exp(-i\omega t)$ будем опускать.

Определим отраженные от тела и возбужденные в его полости волны, а также найдем поля смещений в упругом материале шара и неоднородном слое.

2. Определение волновых полей

Задача определения акустических полей вне упругого тела и внутри его полости в установившемся режиме колебаний заключается в нахождении решений уравнения Гельмгольца:

$$\Delta\Psi^{(0)} + k_0^2\Psi^{(0)} = 0; \tag{3}$$

$$\Delta\Psi^{(1)} + k_1^2\Psi^{(1)} = 0, \tag{4}$$

где $\Psi^{(0)}$ — потенциал скоростей полного акустического поля во внешней среде; $\Psi^{(1)}$ — потенциал скоростей акустического поля в полости тела; $k_0 = \dfrac{\omega}{c_0}$ и $k_1 = \dfrac{\omega}{c_1}$ — волновые числа окружающей тело и находящейся в полости жидкостей соответственно. При этом скорости частиц жидкости и акустическое давление вне тела ($j = 0$) и внутри полости ($j = 1$) определяются по следующим формулам соответственно:

$$\bar{v}_j = \operatorname{grad}\Psi^{(j)}; \quad p_j = i\rho_j\omega\Psi^{(j)} \qquad (j = 0, 1). \tag{5}$$

Потенциал скоростей падающей плоской волны представим в виде

$$\Psi_0(r,\theta) = A_0\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)i^n j_n(kr)P_n(\cos\theta), \tag{6}$$

где $j_n(x)$ — сферическая функция Бесселя порядка n,
$P_n(x)$ — многочлен Лежандра степени n.

В силу линейной постановки задачи для $\Psi^{(0)}$ и Ψ_0 справедливо

$$\Psi^{(0)} = \Psi_0 + \Psi_s, \tag{7}$$

где Ψ_s — потенциал скоростей рассеянной звуковой волны. Тогда из (3) получаем уравнение для нахождения Ψ_s:

$$\Delta\Psi_s + k_0^2\Psi_s = 0. \tag{8}$$

Из-за произвольного расположения полости в теле потенциалы $\Psi^{(1)}$ и Ψ_s не будут проявлять свойства симметрии. Уравнения (4) и (8) запишем в сферических системах координат $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$ и $(r_2, \theta_2, \varphi_2)$ соответственно:

$$\frac{1}{r_1^2}\frac{\partial}{\partial r_1}\left(r_1^2\frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial r_1}\right) + \frac{1}{r_1^2 \sin^2\theta_1}\frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial \varphi_1^2} + \frac{1}{r_1^2 \sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial \theta_1}\left(\sin\theta_1 \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial \theta_1}\right) + k_1^2 \Psi^{(1)} = 0; \tag{9}$$

$$\frac{1}{r_2^2}\frac{\partial}{\partial r_2}\left(r_2^2\frac{\partial \Psi_s}{\partial r_2}\right) + \frac{1}{r_2^2 \sin^2\theta_2}\frac{\partial \Psi_s}{\partial \varphi_2^2} + \frac{1}{r_2^2 \sin\theta_2}\frac{\partial}{\partial \theta_2}\left(\sin\theta_2 \frac{\partial \Psi_s}{\partial \theta_2}\right) + k_0^2 \Psi_s = 0; \tag{10}$$

Звуковая волна в полости тела $\Psi^{(1)}$ должна удовлетворять условию ограниченности, а отраженная волна Ψ_s — условиям излучения на бесконечности. Поэтому потенциалы $\Psi^{(1)}$ и Ψ_s будем искать в виде

$$\Psi^{(1)}(r_1, \theta_1, \varphi_1) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} A_{nm}^{(1)} j_n(k_1 r_1) P_n^m(\cos\theta_1)\, \mathrm{e}^{im\varphi_1}; \tag{11}$$

$$\Psi_s(r_2, \theta_2, \varphi_2) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} B_{nm}^{(0)} h_n(k_0 r_2) P_n^m(\cos\theta_2)\, \mathrm{e}^{im\varphi_2}, \tag{12}$$

где $h_n(x)$ — сферическая функция Ганкеля первого рода порядка n.

Распространение малых возмущений в упругом теле для установившегося режима движения частиц тела описывается скалярным и векторным уравнением Гельмгольца:

$$\Delta \Psi^{(2)} + k_{2l}^2 \Psi^{(2)} = 0; \tag{13}$$

$$\Delta \mathbf{\Phi}^{(2)} + k_{2\tau}^2 \mathbf{\Phi}^{(2)} = 0, \tag{14}$$

где k_{2l} — волновое число продольных волн со скоростью распространения $c_l = \sqrt{\dfrac{(\lambda + 2\mu)}{\rho}}$;

$k_{2\tau}$ — волновое число поперечных волн со скоростью распространения $c_\tau = \sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}}$;

$\Psi^{(2)}$ и $\mathbf{\Phi}^{(2)}$ — скалярной и векторный потенциалы смещения соответственно.

Вектор смещения $\mathbf{u}^{(2)}$ частиц упругого тела определяется по формуле

$$\mathbf{u}^{(2)} = \operatorname{grad} \Psi^{(2)} + \operatorname{rot} \mathbf{\Phi}^{(2)}.$$

Потенциал смещения $\Psi^{(2)}$ будем искать в виде ряда по двум локальным сферическим функциям:

$$\Psi^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} A_{nm}^{(2)} j_n(k_{2l} r_1) P_n^m(\cos\theta_1)\, \mathrm{e}^{im\varphi_1} + B_{nm}^{(2)} j_n(k_{2l} r_2) P_n^m(\cos\theta_2)\, \mathrm{e}^{im\varphi_2}$$

Векторный потенциал $\mathbf{\Phi}^{(2)}$ может быть представлен в виде суммы:

$$\mathbf{\Phi}^{(2)} = k_{2\tau}\,\mathrm{rot}\big(rV\bar{e}_r\big) + \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\big(rW\bar{e}_r\big),$$