

# СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ . . . . .	3
1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН . . . . .	5
1.1. Распространение звука в идеальной жидкости . . . . .	6
1.2. Распространение звуковых волн в упругих телах . . . . .	7
2. ДИФРАКЦИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН НА УПРУГОЙ СФЕРЕ, ИМЕ- ЮЩЕЙ ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННУЮ ПОЛОСТЬ И НЕОД- НОРОДНОЕ ПОКРЫТИЕ . . . . .	8
2.1. Обзор литературы по проблеме исследования . . . . .	9
2.2. Постановка задачи . . . . .	10
2.3. Аналитическое решение задачи . . . . .	11
2.4. Решение краевой задачи для системы обыкновенных дифферен- циальных уравнений . . . . .	16
3. ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ . . . . .	17
3.1. Диаграмма направленности . . . . .	18
3.2. Частотные характеристики . . . . .	19
ЗАКЛЮЧЕНИЕ . . . . .	20
ЛИТЕРАТУРА . . . . .	21
ПРИЛОЖЕНИЯ . . . . .	22

# ВВЕДЕНИЕ

## **!!!ПЕРЕДЕЛАТЬ!!! общие слова про применение акустики**

Потребность в изучении дифракции на различных телах очень высока. Знания, полученные путем изучения дифракции с помощью моделей, используются как в гидроакустике и эхолокации, так и в других областях. Для современного мира изучение простых моделей уже не дает требуемой точности прогнозирования поведения волн. Поэтому, необходимо изучать более сложные модели, детально описывающие рассматриваемые тела и окружающую среду. В качестве простых моделей рассматривают дифракцию плоских звуковых волн, однако это приближение возможно только в случае, когда расстояние от источника до рассеивателя много больше длины волны. Акустические поля сложных излучателей успешнее моделируются при помощи изучения дифракции звуковых волн, излучаемых цилиндрическими и сферическими источниками.

В настоящей работе рассматривается задача дифракции цилиндрических звуковых волн на упругой сфере с неоднородным покрытием. С помощью таких покрытий можно изменять звукоотражающие свойства тел. В качестве рассматриваемого тела выбрана сфера, т.к. более сложные тела можно аппроксимировать до сферы.

---

Потребность в изучении дифракции на различных телах очень высока. Знания, полученные путем изучения дифракции с помощью моделей, используются как в гидроакустике и эхолокации, так и в других областях. В дефектоскопии основной задачей является обнаружение различных включений в однородном теле. Это позволяет проводить исследование различных объектов методом неразрушающего контроля.

### **вставить ссылки**

Однако аппроксимация реального первичного акустического поля плоской волной справедлива только тогда, когда расстояние от источника звука до рассеивателя много больше длины звуковой волны. На практике это условие часто не выполняется. В этом случае нельзя не учитывать криволинейность фронта падающей волны. Расходимость падающей волны приводит не только к количественным, но и качественным изменениям дифракционной картины. Наибольший интерес представляет изучение дифракции звуковых волн, излучаемых

цилиндрическими и сферическими источниками. С помощью таких источников можно моделировать акустические поля сложных излучателей.

В настоящей работе рассматривается задача о рассеянии цилиндрических звуковых волн упругой сферой, имеющей произвольно расположенную полость и радиально-неоднородное покрытие. С помощью таких покрытий можно изменять звукоотражающие свойства тел. Такой слой возможно сделать в промышленных условиях, комбинируя несколько тонких однородных слоев с различными механическими характеристиками. В качестве рассматриваемого тела выбрана сфера, т.к. более сложные тела можно аппроксимировать с помощью сферы. В ходе работы получено аналитическое описание акустического поля, рассеянного телом. Представлены результаты расчетов диаграмм направленности рассеянного поля.

# **1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН**

## 1.1. Распространение звука в идеальной жидкости

Толоконников, Ларин, лаб. раб.

## 1.2. Распространение звуковых волн в упругих телах

Ландау - Теория упругости, Амензаде  
моделирование волновых полей

**2. ДИФРАКЦИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН НА  
УПРУГОЙ СФЕРЕ, ИМЕЮЩЕЙ  
ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННУЮ  
ПОЛОСТЬ И НЕОДНОРОДНОЕ  
ПОКРЫТИЕ**

## 2.1. Обзор литературы по проблеме исследования

Известия ТулГУ №3 Ларин; статьи Толоконникова



## 2.2. Постановка задачи

рисунок, рассмотрим..., пусть ..., требуется найти волновые поля в ...

Рассмотрим изотропный однородный упругий шар радиуса  $R_{\odot}$ , плотность материала которого  $\rho_{\odot}$ , упругие постоянные  $\lambda_{\odot}$  и  $\mu_{\odot}$ , содержащий произвольно расположенную сферическую полость с радиусом  $R_{\circ}$ . Шар имеет покрытие в виде неоднородного изотропного упругого слоя, внешний радиус которого равен  $R_{\odot}$ .

Свяжем с полостью тела и с самим телом прямоугольные системы координат  $x_{\circ}, y_{\circ}, z_{\circ}$  и  $x_{\odot}, y_{\odot}, z_{\odot}$  соответственно так, чтобы соответствующие оси обеих систем координат были параллельны. С декартовыми системами координат  $x_{\circ}, y_{\circ}, z_{\circ}$  и  $x_{\odot}, y_{\odot}, z_{\odot}$  свяжем сферические координаты  $r_{\circ}, \theta_{\circ}, \varphi_{\circ}$  и  $r_{\odot}, \theta_{\odot}, \varphi_{\odot}$ .

Полагаем, что модули упругости  $\lambda_{\odot}$  и  $\mu_{\odot}$  материала слоя описываются дифференцируемыми функциями радиальной координаты  $r_{\odot}$  сферической системы координат  $(r_{\odot}, \theta_{\odot}, \varphi_{\odot})$ , а плотность  $\rho_{\odot}$  — непрерывной функцией координаты  $r_{\odot}$ . Окружающая тело и находящаяся в его полости жидкости — идеальные и однородные, имеющие плотности  $\rho_e, \rho_{\circ}$  и скорости звука  $c_e, c_{\circ}$  соответственно.

Определим отраженные от тела и возбужденные в его полости волны, а также найдем поля смещений в упругом материале шара и неоднородном слое.

### 2.3. Аналитическое решение задачи

Пусть из внешнего пространства на шар падает плоская звуковая волна. Потенциал скоростей гармонической падающей волны запишем в виде:

$$\Psi_o(\bar{\mathbf{x}}_\odot, t) = A_o \exp [i (\bar{\mathbf{k}}_e \cdot \bar{\mathbf{x}}_\odot - \omega_e t)], \quad (1)$$

где  $A_o$  — амплитуда волны,

$\bar{\mathbf{k}}_e$  — волновой вектор в окружающей жидкости,

$|\bar{\mathbf{k}}_e| = k_e = \omega_e / c_e$  — волновое число,

$\bar{\mathbf{x}}$  — радиус-вектор,

$\omega_e$  — круговая частота.

Без ограничения общности будем полагать, что волна распространяется в направлении  $\theta_\odot = \theta_o = 0$ . Тогда в сферической системе координат (1) запишется в виде:

$$\Psi_o(r_\odot, \theta_\odot, t) = A_o \exp [i (k_e r_\odot \cos \theta_\odot - \omega_e t)], \quad (2)$$

В дальнейшем временной множитель  $\exp(-i\omega_e t)$  будем опускать.

Задача определения акустических полей вне упругого тела и внутри его полости в установившемся режиме колебаний заключается в нахождении решений уравнения Гельмгольца:

$$\Delta \Psi_e + k_e^2 \Psi_e = 0; \quad (3)$$

$$\Delta \Psi_o + k_o^2 \Psi_o = 0, \quad (4)$$

где  $\Psi_e$  — потенциал скоростей полного акустического поля во внешней среде;

$\Psi_o$  — потенциал скоростей акустического поля в полости тела;

$k_o = \frac{\omega_o}{c_o}$  — волновое число находящейся в полости жидкости.

При этом скорости частиц жидкости и акустическое давление вне тела и внутри полости определяются по следующим формулам соответственно:

$$\bar{v}_e = \text{grad } \Psi_e; \quad P_e = ip_e \omega \Psi_e; \quad (5)$$

$$\bar{v}_o = \text{grad } \Psi_o; \quad P_o = ip_o \omega \Psi_o. \quad (6)$$

В силу линейной постановки задачи для  $\Psi_e$  и  $\Psi_o$  справедливо

$$\Psi_e = \Psi_o + \Psi_s, \quad (7)$$

где  $\Psi_s$  — потенциал скоростей рассеянной звуковой волны.

Тогда из (3) получаем уравнение для нахождения  $\Psi_s$ :

$$\Delta\Psi_s + k_e^2\Psi_s = 0. \quad (8)$$

Из-за произвольного расположения полости в теле потенциалы  $\Psi_o$  и  $\Psi_s$  не будут проявлять свойства симметрии. Уравнения (4) и (8) запишем в сферических системах координат  $(r_o, \theta_o, \varphi_o)$  и  $(r_\odot, \theta_\odot, \varphi_\odot)$  соответственно:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_o^2} \frac{\partial}{\partial r_o} \left( r_o^2 \frac{\partial \Psi_o}{\partial r_o} \right) + \frac{1}{r_o^2 \sin^2 \theta_o} \frac{\partial \Psi_o}{\partial \varphi_o^2} + \frac{1}{r_o^2 \sin \theta_o} \frac{\partial}{\partial \theta_o} \left( \sin \theta_o \frac{\partial \Psi_o}{\partial \theta_o} \right) + k_o^2 \Psi_o &= 0; \quad (9) \\ \frac{1}{r_\odot^2} \frac{\partial}{\partial r_\odot} \left( r_\odot^2 \frac{\partial \Psi_s}{\partial r_\odot} \right) + \frac{1}{r_\odot^2 \sin^2 \theta_\odot} \frac{\partial \Psi_s}{\partial \varphi_\odot^2} + \frac{1}{r_\odot^2 \sin \theta_\odot} \frac{\partial}{\partial \theta_\odot} \left( \sin \theta_\odot \frac{\partial \Psi_s}{\partial \theta_\odot} \right) + k_e^2 \Psi_s &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Звуковая волна в полости тела  $\Psi_o$  должна удовлетворять условию ограниченности, а отраженная волна  $\Psi_s$  — условиям излучения на бесконечности. Поэтому потенциалы  $\Psi_s$  и  $\Psi_o$  будем искать в виде

$$\Psi_s(r_\odot, \theta_\odot, \varphi_\odot) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n A_{snm} h_n(k_e r_\odot) P_n^m(\cos \theta_\odot) \cos(m\varphi_\odot); \quad (11)$$

$$\Psi_o(r_o, \theta_o, \varphi_o) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n B_{onm} j_n(k_o r_o) P_n^m(\cos \theta_o) \cos(m\varphi_o), \quad (12)$$

где  $h_n(x)$  и  $j_n(x)$  — сферические функции Ханкеля первого рода и Бесселя соответственно;

$P_n(x)$  — многочлен Лежандра степени  $n$ .

Распространение малых возмущений в упругом теле для установившегося режима движения частиц тела описывается скалярным и векторным уравнением Гельмгольца:

$$\Delta\Psi_\odot + k_{\odot l}^2\Psi_\odot = 0; \quad (13)$$

$$\Delta\Phi_\odot + k_{\odot \tau}^2\Phi_\odot = 0, \quad (14)$$

где  $k_{\odot l}$  — волновое число продольных волн со скоростью распространения

$$c_{\odot l} = \sqrt{\frac{(\lambda_\odot + 2\mu_\odot)}{\rho_\odot}};$$

$k_{\odot \tau}$  — волновое число поперечных волн со скоростью распространения

$$c_{\odot\tau} = \sqrt{\frac{\mu_{\odot}}{p_{\odot}}};$$

$\Psi_{\odot}$  и  $\Phi_{\odot}$  — скалярной и векторный потенциалы смещения соответственно.

Вектор смещения  $\mathbf{u}_{\odot}$  частиц упругого тела определяется по формуле

$$\mathbf{u}_{\odot} = \text{grad } \Psi_{\odot} + \text{rot } \Phi_{\odot}.$$

Потенциал смещения  $\Psi_{\odot}$  будем искать в виде ряда по двум локальным сферическим функциям:

$$\Psi_{\odot} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{\odot nm} h_n(k_{\odot l} r_{\odot}) P_n^m(\cos \theta_{\odot}) e^{im\varphi_{\odot}} + B_{\odot nm} j_n(k_{\odot l} r_{\odot}) P_n^m(\cos \theta_{\odot}) e^{im\varphi_{\odot}}$$

Векторный потенциал  $\Phi_{\odot}$  может быть представлен в виде суммы:

$$\Phi_{\odot} = rV\bar{e}_r + \text{rot}(rW\bar{e}_r),$$

где  $\bar{e}_r$  — орт координатной оси  $r_{\odot}$  сферической системы координат  $r_{\odot}, \theta_{\odot}, \varphi_{\odot}$ , функции  $V$  и  $W$  удовлетворяют скалярным уравнениям Гельмгольца

$$\Delta V + k_{\odot\tau}^2 V = 0, \quad (15)$$

$$\Delta W + k_{\odot\tau}^2 W = 0. \quad (16)$$

Функции  $V$  и  $W$  будем искать в виде:

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_{\odot nm} h_n(k_{\odot l} r_{\odot}) P_n^m(\cos \theta_{\odot}) e^{im\varphi_{\odot}} + D_{\odot nm} j_n(k_{\odot l} r_{\odot}) P_n^m(\cos \theta_{\odot}) e^{im\varphi_{\odot}}, \quad (17)$$

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_{\odot nm} h_n(k_{\odot l} r_{\odot}) P_n^m(\cos \theta_{\odot}) e^{im\varphi_{\odot}} + F_{\odot nm} j_n(k_{\odot l} r_{\odot}) P_n^m(\cos \theta_{\odot}) e^{im\varphi_{\odot}}. \quad (18)$$

Коэффициенты разложений  $A_{\odot nm}, B_{\odot nm}, C_{\odot nm}, D_{\odot nm}, E_{\odot nm}$  и  $F_{\odot nm}$  подлежат определению из граничных условий, которые заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости на внешней поверхности слоя и внутренней поверхности полого шара; равенстве на них нормального напряжения и акустического давления; отсутствии на этих поверхностях касательных напряжений. На внутренней поверхности слоя при переходе через границу раздела упругих сред должны быть непрерывны составляющие

вектора смещения частиц, а также нормальные и тангенциальные напряжения.

Имеем:

### EDIT THIS EQUATION

$$\text{при } r_o = R_o : \quad \sigma_{rr} = -P_o; \quad \sigma_{r\theta} = 0; \quad \sigma_{r\varphi} = 0; \quad -i\omega u_r = v_{or};$$

$$\text{при } r_\odot = R_\odot : \quad \sigma_{rr} = -P_\odot; \quad \sigma_{r\theta} = 0; \quad \sigma_{r\varphi} = 0; \quad -i\omega u_r = v_{2r};$$

где  $v_{or} = \partial\Psi_o/\partial r$ ,  $v_{\odot r} = \partial\Psi_\odot/\partial r$  — радиальная компонента скорости частиц в жидкости внутри полости и в окружающем пространстве соответственно.

Распространение упругих волн в неоднородном слое описывается общими уравнениями движения упругой среды, которые для установившегося режима движения в сферической системе координат имеют следующий вид [?]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{1}{r} \left( 2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{r\theta} \operatorname{ctg}\theta \right) &= -\rho_1 \omega^2 u_r; \\ \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\sigma_{\theta\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{1}{r} \left( (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \operatorname{ctg}\theta + 3\sigma_{r\theta} \right) &= -\rho_1 \omega^2 u_\theta; \\ \frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_{\theta\varphi}}{\partial\theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{1}{r} \left( 3\sigma_{r\varphi} + 2\sigma_{\theta\varphi} \operatorname{ctg}\theta \right) &= -\rho_1 \omega^2 u_\varphi, \end{aligned} \quad (19)$$

где  $u_r, u_\theta, u_\varphi$  — компоненты вектора смещения  $\mathbf{u}$ ;

$\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений неоднородной среды в сферической системе координат.

Используя связь компонентов тензора напряжений с компонентами тензора деформаций (обобщенный закон Гука), а также выражения компонентов тензора деформаций через компоненты вектора смещения [?], получаем в сферической системе координат следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \left( \lambda_1 + 2\mu_1 \right) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\lambda_1}{r} \left( 2u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \operatorname{ctg}\theta u_\theta + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} \right); \\ \sigma_{\theta\theta} &= \lambda_1 \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2(\lambda_1 + \mu_1)}{r} u_r + \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{\lambda_1}{r} \left( \operatorname{ctg}\theta u_\theta + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} \right); \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \lambda_1 \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2(\lambda_1 + \mu_1)}{r} u_r + \frac{\lambda_1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{r} \left( \operatorname{ctg}\theta u_\theta + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} \right); \\ \sigma_{r\theta} &= \mu_1 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial\theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right); \\ \sigma_{r\varphi} &= \mu_1 \left( \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial u_r}{\partial\varphi} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right); \\ \sigma_{\theta\varphi} &= \frac{\mu_1}{r} \left( \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta u_\varphi \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Соотношения (??) справедливы как для однородной упругой среды, так и для неоднородного слоя. В первом случае в выражениях (??) компоненты вектора смещения и тензора напряжений, а также величины  $\lambda_{\odot}$  и  $\mu_{\odot}$  следует заменить на  $\lambda_{\odot}$  и  $\mu_{\odot}$  соответственно.

Используя эти соотношения, запишем уравнения (19) через компоненты вектора смещения  $\mathbf{u}$ :

## EQUATIONS

Введем новые функции  $u_2$  и  $u_3$ , связанные с  $u_{\theta}$  и  $u_{\varphi}$  следующими соотношениями:

$$u_{\theta} = \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_3}{\partial \varphi}, \quad u_{\varphi} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial u_3}{\partial \theta}$$

и запишем уравнения движения через функции  $u_r, u_2$  и  $u_3$  :

## 2.4. Решение краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

### 3. ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ



### 3.1. Диаграмма направленности

### 3.2. Частотные характеристики

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрено .., получили.., с помощью метода .. найдена..., проведены расчеты...

# ЛИТЕРАТУРА

Шендеров, Лепендин, Исакович – введение Харбенко Звук...

# ПРИЛОЖЕНИЯ