



Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Estatística



Thiago Valentim Marques

A Teoria da Resposta ao Item no IFRN: uma aplicação com os dados do Exame de Seleção dos cursos técnicos integrados

Natal - RN

27 de abril de 2021

Thiago Valentim Marques

**A Teoria da Resposta ao Item no IFRN: uma aplicação
com os dados do Exame de Seleção dos cursos técnicos
integrados**

Monografia de Graduação apresentada ao Departamento de Estatística do Centro de Ciências Exatas e da Terra da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Estatística.

Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Centro de Ciências Exatas e da Terra

Departamento de Estatística

Orientador: Prof. Dr. Eliardo Guimarães da Costa

Natal - RN

27 de abril de 2021

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI

Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de Arruda - CCET

Marques, Thiago Valentim.

A teoria da resposta ao item no IFRN: uma aplicação com os dados do exame de seleção dos cursos técnicos integrados / Thiago Valentim Marques. - 2021.

105f.: il.

Monografia (Bacharelado em Estatística) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Departamento de Estatística. Natal, 2021.

Orientador: Prof. Dr. Eliardo Guimarães da Costa.

1. Estatística - Monografia. 2. IFRN - Monografia. 3. Ensino técnico integrado - Monografia. 4. TRI - Monografia. 5. Matemática - Monografia. 6. Língua Portuguesa - Monografia. I. Costa, Eliardo Guimarães da. II. Título.

RN/UF/CCET

CDU 519.2

Thiago Valentim Marques

A Teoria da Resposta ao Item no IFRN: uma aplicação com os dados do Exame de Seleção dos cursos técnicos integrados

Monografia de Graduação apresentada ao Departamento de Estatística do Centro de Ciências Exatas e da Terra da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Estatística.

Aprovado em **27 de abril de 2021**.

Prof. Dr. Eliardo Guimarães da Costa
Orientador

Prof. Dr. Antonio Hermes Marques da Silva Júnior
Examinador

Prof. Dr. Marcus Alexandre Nunes
Examinador

Natal - RN
27 de abril de 2021



Emitido em 27/04/2021

ATA N° 5/2021 - EST/CCET (12.02)

(Nº do Protocolo: NÃO PROTOCOLADO)

(Assinado digitalmente em 27/04/2021 17:26)
ANTONIO HERMES MARQUES DA SILVA JUNIOR
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
EST/CCET (12.02)
Matrícula: 1714215

(Assinado digitalmente em 27/04/2021 17:14)
ELIARDO GUIMARAES DA COSTA
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
EST/CCET (12.02)
Matrícula: 3010614

(Assinado digitalmente em 27/04/2021 19:40)
MARCUS ALEXANDRE NUNES
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
EST/CCET (12.02)
Matrícula: 1066308

Para verificar a autenticidade deste documento entre em <https://sipac.ufrn.br/documentos/> informando seu número: **5**,
ano: **2021**, tipo: **ATA**, data de emissão: **27/04/2021** e o código de verificação: **51ef313556**

Dedico este trabalho aos meus pais Francisca Valentim da Silva Bezerra e Ilo Marques Bezerra (*in memorian*), que foram fundamentais no apoio aos meus estudos.

Agradecimentos

A Deus, que sempre está iluminando o meu caminho me ajudando a superar os percalços da vida e conquistar vitórias.

A minha esposa Alyne Marques, cuja companhia me faz o homem mais feliz do mundo, sendo também a minha melhor amiga. Também agradeço a minha filha Alice Marques, que abrilhanta os meus dias e me dá energia para focar nos meus objetivos sempre pensando no seu bem-estar.

A minha mãe Francisca Valentim da Silva Bezerra e ao meu pai Ilo Marques Bezerra (*in memoriam*) pela formação, amor e incentivo aos meus estudos.

Ao meu orientador Professor Dr. Eliardo Guimarães da Costa pela confiança depositada em mim quando me convidou para ser o seu orientando e pela grande colaboração para a melhoria desta pesquisa.

Agradeço a amiga e colega de pós-graduação Daniele Rodrigues, que, graduada em Estatística, me motivou bastante a fazer a graduação em Estatística, visto que em nossas conversas sempre falou muito bem da área e disse que eu tinha perfil para fazer o curso.

Ao Professor Marcus Nunes pela elaboração e disponibilização deste template do L^AT_EX para escrever a minha monografia de graduação.

A todos os professores que ministraram aulas no curso de graduação em Estatística. Em especial, aos professores André Pinho, Bruno Monte, Damião Nóbrega, Eliardo da Costa, Marcelo Bourguignon e Marcus Nunes.

Agradeço aos discentes do curso de Estatística da UFRN pelo companheirismo dentro e fora de sala de aula. Em especial aos colegas Wesley, Ivonaldo, Fellipe e Júlio César pelas parcerias em estudos/trabalhos e nos nossos papos entre as aulas tomando aquele bom e velho café. Além deles, também faço questão de mencionar Ábia, Canindé, Mariana e Samuel pelas colaborações em trabalhos e nas discussões sobre as questões das listas de exercícios de várias disciplinas durante o curso.

Aos colegas Augusto Veras e André Calado pela colaboração em trabalhos durante o curso e pela disponibilidade de possíveis parcerias futuras no IFRN.

A Felipe Miranda pela construção de parte do texto do pré-projeto deste TCC e a Professora Andrea Carvalho pelas aulas e ótimos *feedbacks* nos envios das três versões desse documento.

A Beatriz Ariadna pela ótima parceira nas duas consultorias estatísticas do LEA e a Talita Viviane pela excelente orientação ao longo destas consultorias.

Ao colega de graduação em Matemática Abner Flávio e aos seus alunos da Escola Municipal Augusto Severo que se prontificaram para responder a prova do Exame de Seleção do IFRN para servir de teste na aplicação dos modelos da TRI.

A UFRN pela possibilidade de cursar Estatística e ao IFRN, em particular, à Coordenação de Acesso Discente (CADIS), pela disponibilização dos dados utilizados nesta pesquisa.

Aos membros da banca pela disponibilidade e pelas excelentes contribuições que enriqueceram o trabalho.

Pra Você Guardei o Amor

Pra você guardei o amor
Que nunca soube dar
O amor que tive e vi sem me deixar
Sentir sem conseguir provar
Sem entregar
E repartir

Pra você guardei o amor
Que sempre quis mostrar
O amor que vive em mim vem visitar
Sorrir, vem colorir solar
Vem esquentar
E permitir

Quem acolher o que ele tem e traz
Quem entender o que ele diz
No giz do gesto o jeito pronto
Do piscar dos cílios
Que o convite do silêncio
Exibe em cada olhar

Guardei
Sem ter porquê
Nem por razão
Ou coisa outra qualquer
Além de não saber como fazer
Pra ter um jeito meu de me mostrar

Achei
Vendo em você
E explicação
Nenhuma isso requer
Se o coração bater forte e arder
No fogo o gelo vai queimar

Pra você guardei o amor
Que aprendi vendo os meus pais
O amor que tive e recebi
E hoje posso dar livre e feliz
Céu cheiro e ar na cor que o arco-íris
Risca ao levitar

Vou nascer de novo
Lápis, edifício, tevere, ponte
Desenhar no seu quadril
Meus lábios beijam signos feito sinos
Trilho a infância, terço o berço
Do seu lar

Guardei
Sem ter porquê
Nem por razão
Ou coisa outra qualquer
Além de não saber como fazer
Pra ter um jeito meu de me mostrar

Achei
Vendo em você
Explicação
Nenhuma isso requer
Se o coração bater forte e arder
No fogo o gelo vai queimar

Pra você guardei o amor
Que nunca soube dar
O amor que tive e vi sem me deixar
Sentir sem conseguir provar
Sem entregar
E repartir

Quem acolher o que ele tem e traz
Quem entender o que ele diz
No giz do gesto o jeito pronto
Do piscar dos cílios
Que o convite do silêncio
Exibe em cada olhar

Guardei
Sem ter porquê
Nem por razão
Ou coisa outra qualquer
Além de não saber como fazer
Pra ter um jeito meu de me mostrar

Achei
Vendo em você
Explicação
Nenhuma isso requer
Se o coração bater forte e arder
No fogo o gelo vai queimar

Resumo

A Teoria da Resposta ao Item (TRI) vem ganhando cada vez mais espaço em testes de larga escala no Brasil, uma vez que já é consagrada em várias partes do mundo. Este método adota uma independência dos itens em relação aos indivíduos nos quais se deseja medir a sua proficiência. O objetivo geral deste trabalho é mostrar como é possível estimar a proficiência dos candidatos que realizam o Exame de Seleção do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte (IFRN) por meio da Teoria da Resposta ao Item, e assim ranqueá-los de forma mais adequada. Os dados fornecidos pelo IFRN dizem respeito a atributos dos inscritos no certame, respondidos no ato da inscrição, e à folha de respostas e escores em Matemática, Língua Portuguesa e Redação, calculados a posteriori. Os resultados evidenciam que é possível aplicar a TRI para esse tipo de seleção, uma vez que se têm informações sobre a população de respondentes e a estimação dos parâmetros pode ser realizada ao selecionar uma amostra representativa de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental II. De maneira geral, os itens de Matemática apresentaram maior dificuldade em relação aos itens de Língua Portuguesa e alguns itens não se mostraram muito informativos, podendo ter sido descartados na etapa de calibração dos itens, caso a TRI tivesse sido adotada como metodologia para o cálculo dos escores dos candidatos. Este trabalho se mostra útil para que os tomadores de decisões das instituições que utilizam exames de seleções para a entrada de alunos possam visualizar as vantagens de se utilizar a TRI nestas seleções.

Palavras-chave: IFRN. Ensino Técnico Integrado. TRI. Estatística. Matemática. Língua Portuguesa.

Abstract

Item Response Theory (IRT) is gaining more and more space in large-scale tests in Brazil since it is already established in several parts of the world. This method adopts an independence of the items in relation to the individuals in which it is desired to measure their proficiency. The main goal of this work is to show how is possible to estimate the proficiency of candidates who take the Selection Examination of the Federal Institute of Education, Science and Technology of Rio Grande do Norte (IFRN in Portuguese) through the Item Response Theory, and thus rank them more appropriately. The data provided by IFRN refer to attributes of those enrolled in the event, answered at the time of registration, and the answer sheet and scores in Mathematics, Portuguese Language, and Writing, calculated a posteriori. The results showed that it is possible to apply the IRT for this type of selection, since there is information about the population of respondents and the estimation of the parameters can be performed by selecting a representative sample of 9th grade students in Elementary School. In general, the items in Mathematics presented greater difficulty in relation to items in the Portuguese language and some items were not very informative, and may have been discarded in the item calibration stage, if the IRT had been adopted as a methodology for calculating the candidate scores. This work proves to be useful so that the decision makers of the institutions that use selection exams for the admission of students can see the advantages of using IRT in these selections.

Keywords: IFRN. Integrated Technical Education. IRT. Statistic. Mathematics. Portuguese language.

Resumen

La Teoría de Respuesta al Ítem (TRI) está ganando cada vez más espacio en las pruebas a gran escala en Brasil, ya que ya está establecida en varias partes del mundo. Este método adopta una independencia de los elementos en relación con los individuos en los que se desea medir su competencia. El objetivo general de este trabajo es mostrar cómo es posible estimar las habilidades de los candidatos que participaron en el Examen de Selección del Instituto Federal de Educación, Ciencia y Tecnología de Rio Grande do Norte (IFRN) a través de la Teoría de Respuesta al Ítem, y así clasificarlos de manera más apropiada. Los datos proporcionados por IFRN se refieren a atributos de los inscritos en el evento, respondidos en el momento de la inscripción, y la hoja de respuestas y puntajes en Matemáticas, Lengua Portuguesa y Escritura, calculados a posteriori. Los resultados mostraron que es posible aplicar la TRI para este tipo de selección, ya que existe información sobre la población de encuestados y la estimación de los parámetros se puede realizar seleccionando una muestra representativa de alumnos de 9º grado de la Escuela Primaria II (en Brasil). En general, los ítems en Matemáticas presentaron mayor dificultad en relación a los ítems en lengua portuguesa y algunos ítems no fueron muy informativos, pudiendo haber sido descartados en la etapa de calibración de ítems, si se hubiera adoptado la TRI como metodología para el cálculo de puntuaciones de los candidatos. Este trabajo resulta de utilidad para que los tomadores de decisiones de las instituciones que utilizan exámenes de selección para el ingreso de estudiantes vean las ventajas de utilizar la TRI en estas selecciones.

Keywords: IFRN. Educación técnica integrada. TRI. Estadística. Matemáticas. Lengua Portuguesa.

Listas de ilustrações

Figura 2.1 – Exemplo de uma Curva Característica do Item (CCI), em que $P(\theta)$ é a probabilidade do indivíduo de traço latente θ acertar o item.	22
Figura 2.2 – Curvas características do item (CCI) do modelo logístico de um parâmetro correspondente em três níveis de dificuldade.	24
Figura 2.3 – Exemplo de uma Curva Característica do Item (CCI) do modelo TRI de três parâmetros.	25
Figura 2.4 – Item com discriminação perfeita em $\theta = 0$	27
Figura 2.5 – Curvas características do item (CCI) de dois itens distintos do modelo TRI de dois parâmetros logísticos.	28
Figura 2.6 – Curvas características do item (CCI) dos modelos TRI de dois e três parâmetros (ML2 e ML3, respectivamente) correspondentes a mesmos níveis de discriminação e dificuldade.	29
Figura 2.7 – Exemplo de uma Curva Característica do Item (CCI) do modelo TRI de três parâmetros.	30
Figura 2.8 – Interpretação geométrica da distribuição normal padrão.	31
Figura 2.9 – Interpretação da coerência pedagógica na TRI - escala (500, 100). . . .	33
Figura 2.10 – Exemplos de funções de informação do item.	35
Figura 2.11 – Função de informação do teste composto pelos quatro itens cujos parâmetros estão expostos na Tabela 2.4.	36
Figura 2.12 – Função de informação do teste composto pelos quatro itens cujos parâmetros estão expostos na Tabela 2.4. A linha tracejada em vermelho representa o erro padrão de estimação de θ	37
Figura 3.1 – Localização dos 21 <i>campi</i> do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte.	42
Figura 4.1 – Distribuição dos escores de Língua Portuguesa dos 21.039 candidatos que realizaram o Exame de Seleção do IFRN.	45
Figura 4.2 – Distribuição dos escores de Matemática dos 21.039 candidatos que realizaram o Exame de Seleção do IFRN.	46
Figura 4.3 – Proporção de acertos nas questões de Língua Portuguesa do Exame de Seleção 2020.	47
Figura 4.4 – Proporção de acertos nas questões de Matemática do Exame de Seleção 2020.	47
Figura 4.5 – Gráficos de dispersão entre os escores dos candidatos e a proporção de acertos em Língua Portuguesa considerando facetas por questão. A curva em azul representa o ajuste via regressão logística.	48

Figura 4.6 – Gráficos de dispersão entre os escores dos candidatos e a proporção de acertos em Matemática considerando facetas por questão. A curva em azul representa o ajuste via regressão logística.	49
Figura 4.7 – Curvas características dos itens de Língua Portuguesa referentes a prova do Exame de Seleção do IFRN.	51
Figura 4.8 – Curvas de informação dos itens de Língua Portuguesa referentes a prova do Exame de Seleção do IFRN.	52
Figura 4.9 – Curva de informação do teste para a prova de Língua Portuguesa do Exame de Seleção do IFRN. A curva tracejada em vermelho representa o erro padrão.	53
Figura 4.10–Histograma do traço latente θ dos respondentes dos itens de Língua Portuguesa do Exame de Seleção do IFRN.	53
Figura 4.11– <i>Boxplots</i> do traço latente (θ) dos respondentes agrupados por quantidade de itens corretos de Língua Portuguesa.	54
Figura 4.12–Curvas características dos itens de Matemática referentes a prova do Exame de Seleção do IFRN.	56
Figura 4.13–Curvas de informação dos itens de Matemática referentes a prova do Exame de Seleção do IFRN.	56
Figura 4.14–Curva de informação do teste para a prova de Matemática do Exame de Seleção do IFRN. A curva tracejada em vermelho representa o erro padrão.	57
Figura 4.15–Histograma do traço latente θ dos respondentes dos itens de Matemática do Exame de Seleção do IFRN.	57
Figura 4.16– <i>Boxplots</i> do traço latente (θ) dos respondentes agrupados por quantidade de itens corretos de Matemática.	58

Lista de tabelas

Tabela 2.1 – Classificação de questões segundo o índice de facilidade adotado pelo ENADE.	20
Tabela 2.2 – Classificação de questões segundo o Índice de Discriminação (Ponto-bisserial).	21
Tabela 2.3 – Todos os padrões de resposta em 3 itens considerando as probabilidades de acertos iguais a 0,2; 0,6 e 0,9; respectivamente.	24
Tabela 2.4 – Valores dos parâmetros a_k , b_k e c_k , além da informação máxima $\max\{I_k(\theta)\}$, de quatro funções de informação do item que estão plotadas na Figura 2.10.	35
Tabela 4.1 – Contingente dos alunos que fizeram a prova do Exame de Seleção 2020 do IFRN.	44
Tabela 4.2 – Resumo dos cinco números para os escores dos candidatos do Exame de Seleção do IFRN em Língua Portuguesa e Matemática.	45
Tabela 4.3 – Parâmetros estimados considerando os itens da Prova de Língua Portuguesa do Exame de Seleção do IFRN para o modelo ML3 da TRI.	50
Tabela 4.4 – Classificação dos itens e a distribuição esperada no teste de acordo com o parâmetro de dificuldade (b_k).	51
Tabela 4.5 – Vetores de respostas de dois respondentes: a primeira linha com 5 acertos e a segunda linha com 11 acertos.	54
Tabela 4.6 – Parâmetros estimados considerando os itens da Prova de Matemática do Exame de Seleção do IFRN para o modelo ML3 da TRI.	55
Tabela 4.7 – Cinquenta melhores escores, via Teoria da Resposta ao Item, dos candidatos do Exame de Seleção do IFRN que optaram pelo Curso Técnico Integrado em Eletrônica, turno vespertino do Campus Natal - Zona Norte.	59

Sumário

Lista de tabelas	14
1 INTRODUÇÃO	16
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	18
2.1 Um breve contexto histórico	18
2.2 A Teoria Clássica dos Testes	19
2.3 A Teoria da Resposta ao Item	21
2.3.1 Modelo logístico de um parâmetro (ML1)	24
2.3.2 Modelo logístico de dois parâmetros (ML2)	25
2.3.3 Modelo logístico de três parâmetros (ML3)	28
2.3.4 A escala de habilidade	32
2.3.5 As funções de informação	33
2.3.6 Estimação dos parâmetros	38
3 MATERIAL E MÉTODOS	42
3.1 Caracterização da escola	42
3.2 Dados	43
3.3 Metodologia	43
4 RESULTADOS	44
4.1 Caracterização dos participantes do Exame de Seleção	44
4.2 Análise descritiva dos dados	45
4.3 Estimação dos parâmetros dos itens e dos escores dos candidatos	50
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	60
REFERÊNCIAS	61
Anexo A	64
Anexo B	80
Anexo C	83

1 Introdução

A utilização de instrumentos e testes psicométricos constituem um modo de avaliação objetiva dos fenômenos psicológicos. O desenvolvimento destes instrumentos teve início no século XIX, em paralelo com o avanço da ciência positivista e da busca por medidas objetivas e válidas para o desenvolvimento de pesquisas clínicas. Diante disso, surgiu a necessidade de métodos que avaliassem as propriedades psicométricas dos instrumentos, sendo que na década de 1900, a partir de contribuições de Binet e Spearman, desenvolveu-se a Teoria Clássica dos Testes (TCT) (SARTES; SOUZA-FORMIGONI, 2013).

Exames de seleção de indivíduos tradicionalmente têm seus resultados expressos em função de escores brutos ou padronizados. As análises e interpretações dos resultados estão sempre associadas à prova como um todo, o que é a principal característica da TCT (ANDRADE; TAVARES; VALLE, 2000). A comparação entre indivíduos ou grupos de indivíduos só é possível quando eles são submetidos às mesmas provas, o que o torna defasado quando se quer avaliar desempenhos em anos distintos (KLEIN, 2009). A condição típica de exames dessa natureza é maximizar os sujeitos de habilidades medianas, sendo, por isso, bem menos apropriados e válidos para avaliar sujeitos com habilidades superiores ou de pouca habilidade (PASQUALI, 2009).

A TCT assume que todas as questões fornecem a mesma quantidade de informação sobre o conhecimento que os participantes dominam. De fato, essa não é a melhor opção metodológica, visto que há questões que representam melhor o que está sendo avaliado do que outras e há questões que informam mais (BRASIL, 2012). Diante deste problema, a Teoria da Resposta ao item (TRI) surge como instrumento avaliativo de testes a partir de meados da década de 80 como alternativa à TCT (PASQUALI, 2003). Enquanto a TCT se preocupa com o resultado final do teste, ou o seu escore bruto, a TRI propõe modelos para os traços latentes, que seriam características do indivíduo, não observáveis diretamente (PASQUALI, 2009; ANDRADE; TAVARES; VALLE, 2000).

A TRI adota dois axiomas fundamentais: (i) o desempenho do sujeito em uma questão (item do exame) se explica em função de um conjunto de fatores ou traços latentes (aptidões, habilidades etc); e (ii) a relação entre o desempenho na questão e o conjunto dos traços latentes pode ser descrita pela Curva Característica do Item (CCI), na qual sujeitos com maior aptidão terão maior probabilidade de responder corretamente ao item e vice-versa (PASQUALI, 2009). O fato da TRI captar essas informações torna essa metodologia muito mais eficiente para se medir a proficiência dos candidatos em avaliações (BRASIL, 2012).

A modelagem de traços latentes relaciona variáveis observáveis, como os itens de uma prova, com traços hipotéticos não observáveis ou aptidões, que seriam inerentes ao sujeito e responsáveis pela resposta ao item (PASQUALI; PRIMI, 2003). Em resumo, a TRI adota uma independência do instrumento de medida em relação ao objeto que se deseja medir, tendo a sua utilização consagrada na área de educação em vários países (TAVARES, 2013). No Brasil, a avaliação de testes educacionais aplicados em larga escala vem utilizando cada vez mais a TRI. Por exemplo, no Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb), no Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (Saresp), no Exame Nacional para Certificação de Competências de Jovens e Adultos (Encceja) e no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

No tocante ao ingresso dos alunos nos cursos técnicos integrados do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte (IFRN), há um Exame de Seleção anual, promovido pela própria instituição, que consiste na aplicação de uma prova com 40 questões objetivas, sendo 20 de Língua Portuguesa e 20 de Matemática, em nível de ensino fundamental, e uma redação. A nota de classificação de um candidato é calculada pela média aritmética a partir de um escore padronizado para cada conhecimento avaliado (Língua Portuguesa, Matemática e Redação).

Diante do exposto e sabendo que o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte (IFRN) utiliza a TCT para classificar os candidatos no Exame de Seleção dos cursos técnicos integrados, é possível aplicar a TRI nas provas de Língua Portuguesa e Matemática para construção de escalas avaliativas e classificatórias no Exame de Seleção do IFRN?

A motivação pessoal para a escolha deste tema se deu pela possibilidade de aplicar um método mais eficiente no que diz respeito a seleção pela aptidão dos candidatos que farão parte dos cursos técnicos integrados do IFRN, visto que o autor do presente trabalho pertence ao quadro de professores efetivos de Matemática do IFRN e é estudante do curso de graduação em Estatística pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Sendo assim, acredita-se na hipótese de que aplicar a TRI como metodologia seja um método mais adequado para ranquear a proficiência dos candidatos no Exame de Seleção do IFRN.

O objetivo geral deste trabalho foi mostrar que é possível estimar a proficiência dos candidatos que realizam o Exame de Seleção do IFRN por meio da Teoria da Resposta ao Item, e assim ranqueá-los de forma mais adequada. Para isso, foram utilizados os resultados do exame aplicado em 2019 relativos às provas de Língua Portuguesa e Matemática. Para isso, os seguintes objetivos específicos foram propostos: (i) inferir os parâmetros de discriminação, dificuldade e acerto casual; (ii) apresentar a CCI para os itens de Língua Portuguesa e Matemática; (iii) elaborar gráficos de dispersão do número de acertos *versus* a nota utilizando a TRI; e (iv) comparar a classificação final com a obtida via TRI.

2 Fundamentação teórica

Neste capítulo são abordados a Teoria Clássica dos Testes (TCT), de maneira breve, e os principais aspectos teóricos da Teoria da Resposta ao Item (TRI), desde o modelo unidimensional mais simples (com apenas um parâmetro) até o mais robusto (com três parâmetros). Também existe o modelo unidimensional de quatro parâmetros, mas este modelo não será abordado neste trabalho. A construção do texto sobre essa área da Psicologia, que é considerada por muitos especialistas um marco para a era da psicometria moderna, foi realizada a partir das referências Andrade, Tavares e Valle (2000), Andrade, Laros e Gouveia (2010), Ayala (2013), Baker (2001), Baker e Kim (2017), Couto e Primi (2011), Fox (2010), Paek e Cole (2019), Pasquali (2017), Pasquali (2018) e Pasquali e Primi (2003).

2.1 Um breve contexto histórico

A Psicometria é uma área da Psicologia cujo escopo é procurar explicar o sentido que têm as respostas dos indivíduos a uma série de tarefas, comumente chamadas de itens (PASQUALI, 2009). A sua origem está relacionada a trabalhos de Charles Edward Spearman, um psicólogo inglês que ficou marcado por trabalhos na área de estatística, sendo pioneiro da análise fatorial e pelo coeficiente de correlação de postos de Spearman (PASQUALI, 2017). De acordo com Pasquali (2017), a história da avaliação psicológica pode ser dividida em “décadas” e “eras”, a saber:

- A década de Galton (1980): os trabalhos de Galton visavam a avaliação das aptidões humanas por meio da medida sensorial;
- A década de Cattel (1890): tomando os trabalhos de Galton como base, desenvolveu suas medidas das diferenças individuais dando início a terminologia “teste mental”;
- A década de Binet (1900): neste período os interesses da avaliação das aptidões humanas foram predominantes. Nesta era Spearman apareceu como protagonista neste período e, de acordo com Pasquali (2017), este período deveria se chamar a era de Spearman;
- A era dos testes de inteligência (1910-1930): neste período se destacam o teste de inteligência de Binet-Simon, o fator G em um trabalho de Spearman e a influência da Primeira Guerra Mundial com a imposição de uma seleção rápida, eficiente e universal para recrutas do exercíto (testes *Army Alpha* e *Beta*);

- A década da análise fatorial (1930): após a queda do entusiasmo com os testes de inteligência, inclusive com a comprovação de que estes eram fortemente dependentes da cultura que eram criados, os “psicólogos estatísticos” repensaram as ideias de Spearman e conjecturaram que as habilidades dos indivíduos pudessem ser representadas por um número menor de variáveis não observáveis, também chamadas de variáveis latentes. Inclusive, em 1936 houve a fundação da revista “*Psychometrika*”, dedicada ao estudo e avanço da Psicometria;
- A era da sistematização (1940-1980): nesta época duas tendências opostas foram marcantes: os trabalhos de síntese e de crítica, ou seja, pesquisas que tentaram sistematizar os avanços da Psicometria e pesquisas questionando o uso de escalas de medidas. Em 1968, no trabalho de Lord e Novick (1968) houve a primeira grande crítica a TCT e o início da Teoria do Traço Latente, que culminou na TRI mais adiante, em 1980, sintetizada por Lord (1980);
- A era da Psicometria Moderna (Teoria da Resposta ao Item - 1980): a TRI é o que há de mais novo na área de Psicometria. No entanto, esta teoria não resolveu todos os problemas para se tornar um modelo definitivo da Psicometria e, além disso, não veio para substituir a Psicometria Clássica, mas parte dela.

2.2 A Teoria Clássica dos Testes

O objetivo da TCT é explicar o resultado final total de um teste, que é dado pela soma das respostas corretas dadas a uma série de itens, expressa no escore total (T) (PASQUALI, 2009). Por exemplo, se um teste é composto por 45 itens, como nas provas das áreas avaliadas pelo ENEM, e um candidato acerta 25 itens, então, pela TCT, tenta-se explicar a seguinte pergunta: o que este 25 significa para o candidato? Assim, a TCT se preocupa em produzir tarefas (ou testes) de qualidade.

O modelo da TCT, elaborado por Spearman, é dado pela Equação (2.1):

$$T = V + E, \quad (2.1)$$

em que T é o escore bruto ou empírico do indivíduo, que é a soma dos pontos obtidos no teste; V é o escore verdadeiro, ou seja, a inteligência real do sujeito que o teste quer medir; e E é o erro de medida. Ressalta-se que os erros são explicados por um conjunto de fatores estranhos, como por exemplo defeitos do próprio teste, estereótipos e vieses do sujeito, fatores históricos e ambientais aleatórios. Para mais detalhes sobre este modelo ver, por exemplo, Pasquali (2009), Pasquali (2017) e Pasquali (2018).

Ao utilizar a TCT em uma prova para a seleção de candidatos ou para a avaliação de um curso, algumas métricas se destacam na divulgação dos resultados e na análise dos itens, a saber: o escore dos candidatos e os índices de facilidade e discriminação dos itens. Por exemplo, o Exame de Seleção do IFRN utiliza o escore padronizado para medir a pontuação dos candidatos em cada área avaliada (Língua Portuguesa, Matemática e Redação):

$$\text{Escore} = \frac{NT_{\text{candidato}} - \text{Média}NT_{\text{candidatos}}}{DP} \times 100 + 500,$$

em que $NT_{\text{candidato}}$ é a nota do candidato na respectiva prova, cujo valor é de 100 pontos distribuídos igualmente entre todos os itens; $\text{Média}NT_{\text{candidatos}}$ é a média das notas dos candidatos a um mesmo *campus/curso/turno*; DP é o desvio-padrão das notas dos candidatos a um mesmo *campus/curso/turno*.

O índice de facilidade (ou dificuldade) do item está ligado diretamente a proporção de acertos dos respectivos itens que compõem a prova. No caso do Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE), que avalia o rendimento dos alunos dos cursos de graduação, o índice de facilidade e seus respectivos intervalos para classificação de um item em muito fácil, fácil, médio, difícil e muito difícil são apresentados na Tabela 2.1.

Tabela 2.1 – Classificação de questões segundo o índice de facilidade adotado pelo ENADE.

Índice de Facilidade	Classificação
$\geq 0,86$	Muito fácil
0,61 a 0,85	Fácil
0,41 a 0,60	Médio
0,16 a 0,40	Difícil
$\leq 0,15$	Muito difícil

Fonte: Tabela obtida em BRASIL (2017).

O índice de discriminação é um índice que mede o poder de discriminação de um item. No ENADE, para ser considerado apto a avaliar os alunos dos cursos, um item deve ser mais acertado por alunos que tiveram bom desempenho do que pelos que tiveram desempenho ruim. Este índice é calculado pela correlação ponto-bisserial (r_{pb}) e é dado pela Equação (2.2).

$$r_{pb} = \frac{\bar{C}_A - \bar{C}_T}{DP_T} \cdot \sqrt{\frac{p}{q}}, \quad (2.2)$$

em que \bar{C}_A é a média obtida na parte objetiva de formação geral da prova pelos alunos que acertaram a questão; \bar{C}_T representa a média obtida na prova por todos os alunos da área; DP_T é o desvio padrão das notas nesta parte da prova de todos os alunos da área; p

é a proporção de estudantes que acertaram a questão e $q = 1 - p$, ou seja, a proporção de estudantes que erraram a questão.

Além disso, o ENADE também apresenta a classificação de questões segundo o poder de discriminação (Tabela 2.2). Questões com índice de discriminação fraco, com valores $\leq 0,19$, são eliminadas do cômputo das notas.

Tabela 2.2 – Classificação de questões segundo o Índice de Discriminação (Ponto-bisserial).

Índice de Discriminação	Classificação
$\geq 0,40$	Muito bom
0,30 a 0,39	Bom
0,20 a 0,29	Médio
$\leq 0,19$	Fraco

Fonte: Tabela obtida em BRASIL (2017).

Não se pode negar a utilidade da TCT para o desenvolvimento dos testes psicológicos, visto que ainda continua sendo amplamente utilizadas. Muitos estudos têm discutido suas limitações há muitas décadas. Sartes e Souza-Formigoni (2013) elencou algumas limitações da TCT, por exemplo: (i) todas as medidas são dependentes da amostra dos indivíduos que responderam o instrumento, isto é, as avaliações do teste somente serão válidas se a amostra de respondentes for representativa ou se o instrumento for utilizado em outra amostra com características semelhantes; (ii) exames diferentes com índice de facilidade e discriminação diferentes geram resultados diferentes para os mesmos indivíduos; (iii) se o mesmo conhecimento for medido por dois testes diferentes, então os resultados não são expressos na mesma escala, o que impede uma comparação direta.

2.3 A Teoria da Resposta ao Item

A TRI é considerada como um dos métodos modernos da teoria dos testes e, como o próprio nome sugere, a unidade de análise é a resposta do item de maneira individual. Especialmente na Psicologia e na Educação, mas podendo ser aplicada em outras áreas, a TRI vem ganhando destaque tanto na adoção desse método em testes de larga escala (por exemplo o ENEM) quanto em trabalhos científicos. Na TRI o desempenho do indivíduo em cada item é o efeito e os traços latentes (proficiência, aptidão ou habilidades) são a causa. Se trata de um modelo matemático que utiliza métodos estatísticos nas estimativas dos parâmetros do modelo. De maneira geral, essa metodologia busca representar a probabilidade de um indivíduo acertar um item, $P(\theta)$, como função dos seus traços latentes, θ , na área do conhecimento avaliada.

É razoável partir da premissa de que um sujeito com maior aptidão em um item terá maior probabilidade de acertar esse item do que um respondente de aptidão inferior. Deste modo, se as características de um item forem conhecidas é possível estimar o nível do traço latente ou a aptidão do indivíduo. A relação entre $P(\theta)$ e θ pode ser descrita por uma função matemática monótona crescente em formato de S chamada de Curva Característica do Item (CCI), exemplificada na Figura 2.1. Uma grande vantagem da TRI é a possibilidade da elaboração de provas distintas para o mesmo exame, ou seja, é possível aplicar provas distintas em diferentes períodos do ano com o mesmo grau de dificuldade.

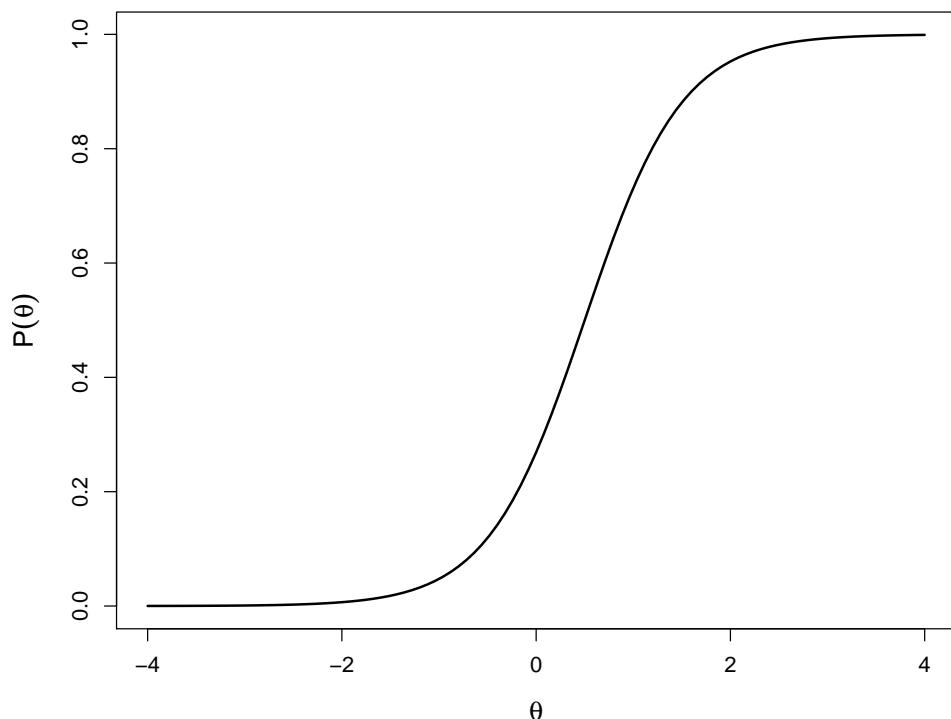


Figura 2.1 – Exemplo de uma Curva Característica do Item (CCI), em que $P(\theta)$ é a probabilidade do indivíduo de traço latente θ acertar o item.

A estimação dos parâmetros é possível com a aplicação dos itens a uma amostra representativa da população para a qual o instrumento foi elaborado. Por exemplo, se estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental II do Rio Grande do Norte são a população alvo, então deve-se aplicar os itens a uma parcela dessa população que seja grande o suficiente para representar as possíveis variações de θ . Nas próximas subseções serão apresentados os modelos usuais da TRI para itens dicotômicos ou dicotomizados (corrigidos como certo ou errado) e que consideram θ unidimensional.

A suposição razoável para os modelos é que cada respondente a um item do exame possui algum traço latente. Assim, cada examinando tem um valor numérico (escore) atribuído às suas habilidades que o coloca em alguma posição em uma escala de proficiência. Como mencionado anteriormente, esse valor de habilidade é indicado, em geral, pela letra grega θ . Em cada nível de habilidade haverá uma probabilidade do indivíduo com essa habilidade dar uma resposta correta para o item.

No modelo unidimensional apenas uma aptidão θ influencia as respostas dos itens de um teste. Para satisfazer a unidimensionalidade é preciso supor que haja uma aptidão dominante θ que justifica o desempenho nesses itens. Além disso, a independência local deve ser satisfeita, ou seja, mantidas constantes as aptidões que afetam o teste, com exceção do θ dominante, as respostas dos indivíduos a quaisquer dois itens são estatisticamente independentes. Isso implica dizer que o desempenho de um indivíduo em um item não afeta o desempenho em outro item. Esta suposição é fundamental para o processo de estimativa dos parâmetros do modelo, haja vista que na realidade, a unidimensionalidade implica na independência local.

Considere o vetor aleatório de K respostas denotado por \mathbf{Y}_i , com valores observados $\mathbf{y}_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{ik})$ de um indivíduo indexado i com parâmetro de habilidade θ_i . Então a suposição de independência local pode ser expressa por

$$P(\mathbf{Y}_i = \mathbf{y}_i | \theta_i) = P(Y_{i1} = y_{i1} | \theta_i)P(Y_{i2} = y_{i2} | \theta_i)\dots P(Y_{iK} = y_{iK} | \theta_i) = \prod_{k=1}^K P(Y_{ik} = y_{ik} | \theta_i),$$

em que Y_{ik} é uma variável dicotômica que assume valores 1, quando o indivíduo i responde corretamente o item k , ou 0, quando o indivíduo i não responde corretamente o item k .

Quando um indivíduo i responde a uma sequência de itens, o mesmo produz um padrão de respostas compostos por acertos ($Y_{ik} = 1$) e erros ($Y_{ik} = 0$). Por exemplo, todos os padrões de resposta para três itens são apresentados na Tabela 2.3. Neste caso, está sendo considerado que as probabilidades individuais de acertos $P(Y_{ik} = 1 | \theta_i)$ de cada um dos K itens para um mesmo indivíduo i são respectivamente iguais a 0,2; 0,6 e 0,9. Além disso, cabe ressaltar que a probabilidade do k -ésimo item ser respondido errado pode ser obtida utilizando o fato dos eventos acerto e erro serem complementares, isto é, $P(Y_{ik} = 0 | \theta_i) = 1 - P(Y_{ik} = 1 | \theta_i)$.

Considerando as probabilidades fornecidas para o traço latente θ_i , nota-se que a maior probabilidade (0,4320) é de que esse sujeito erre o primeiro item e acerte os demais. Em contraste, a menor probabilidade (0,0032) é de que o respondente acerte o primeiro item e erre os demais. Nas subseções seguintes será visto que para estimar θ_i com base nas K respostas dadas por ele em um determinado teste, utiliza-se, a estimativa por Máxima Verossimilhança tomando os parâmetros estimados na fase da calibração dos itens.

Tabela 2.3 – Todos os padrões de resposta em 3 itens considerando as probabilidades de acertos iguais a 0,2; 0,6 e 0,9; respectivamente.

Sequência	Probabilidades dos padrões de respostas		
000	$(1 - 0,2)(1 - 0,6)(1 - 0,9) =$	$0,8 \times 0,4 \times 0,1 =$	0,0032
001	$(1 - 0,2)(1 - 0,6) \times 0,9 =$	$0,8 \times 0,4 \times 0,9 =$	0,2880
010	$(1 - 0,2) \times 0,6 \times (1 - 0,9) =$	$0,8 \times 0,6 \times 0,1 =$	0,0480
011	$(1 - 0,2) \times 0,6 \times 0,9 =$	$0,8 \times 0,6 \times 0,9 =$	0,4320
100	$0,2 \times (1 - 0,6)(1 - 0,9) =$	$0,2 \times 0,4 \times 0,1 =$	0,0080
101	$0,2 \times (1 - 0,6) \times 0,9 =$	$0,2 \times 0,4 \times 0,9 =$	0,0720
110	$0,2 \times 0,6 \times (1 - 0,9) =$	$0,2 \times 0,6 \times 0,1 =$	0,0120
111		$0,2 \times 0,6 \times 0,9 =$	0,1080

2.3.1 Modelo logístico de um parâmetro (ML1)

O modelo logístico unidimensional de um parâmetro (ML1) para respostas dicotômicas, ou modelo Rasch, é um dos modelos de resposta ao item mais simples e amplamente utilizados. O ML1 foi definido por Rasch (1960), está apresentado na Equação (2.3) e sua representação gráfica pode ser visualizada na Figura 2.2.

$$P(Y_{ik} = 1|\theta_i, b_k) = \frac{\exp(\theta_i - b_k)}{1 + \exp(\theta_i - b_k)} = \frac{1}{1 + \exp(-(b_k - \theta_i))}, \quad (2.3)$$

em que Y_{ik} é a resposta do i -ésimo respondente ao k -ésimo item (0 para incorreto e 1 para correto), θ_i é o traço latente do i -ésimo respondente e b_k é o parâmetro de dificuldade do k -ésimo item. Nota-se que a operação $\theta_i - b_k$ só faz sentido se θ_i e b_k estiverem na mesma escala (“réguas”). Assim, dificuldade e traço latente podem ser comparáveis, ou seja, um indivíduo com $\theta_i > b_k$ tem probabilidade $P(Y_{ik} = 1|\theta_i, b_k) > 0,5$ de acertar a questão.

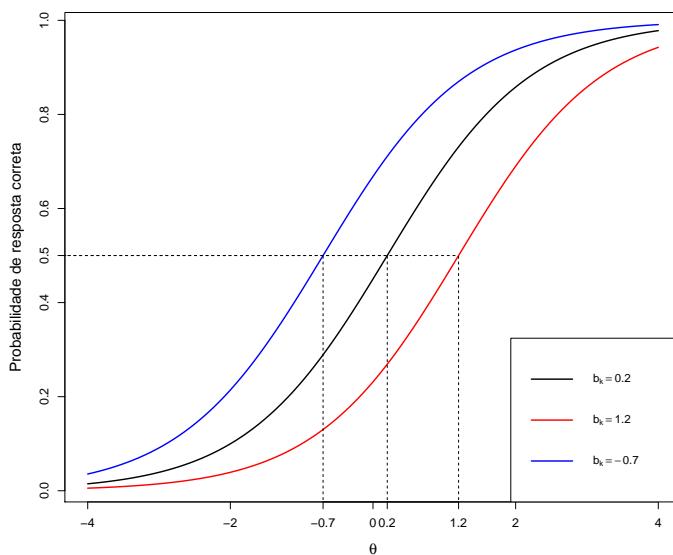


Figura 2.2 – Curvas características do item (CCI) do modelo logístico de um parâmetro correspondente em três níveis de dificuldade.

Na Figura 2.2 são apresentados três CCI correspondentes a Equação (2.3) plotados em diferentes níveis de dificuldades b_1 , b_2 e b_3 . O parâmetro de dificuldade b_k é o ponto na escala de habilidade que corresponde a probabilidade da resposta correta ser igual a 0,5. Dessa forma, se diz que um item é mais fácil do que outro quando possui maior probabilidade de sucesso com o mesmo nível de habilidade. Uma característica relevante do modelo Rasch é que as CCI são paralelos entre si, ou seja, todas as CCI são translações horizontais umas das outras. Além disso, se $P(Y_{ik} = 1|\theta_i, b_k) = 0,5$, então $\theta_i = b_k$, isto é, se a dificuldade do item for justamente igual a θ_i , então a probabilidade de acerto é igual a 0,5 (ambos denifidos na mesma métrica). A dificuldade do item pode ser categorizada em: muito fácil, fácil, média, difícil e muito difícil. Por fim, ressalta-se que b_k independe da amostra de respondentes utilizada, ou seja, o parâmetro de dificuldade independe dos indivíduos.

2.3.2 Modelo logístico de dois parâmetros (ML2)

O modelo Rasch apresenta uma limitação no sentido de que é admitido que todos os itens discriminam os respondentes da mesma forma, ou seja, os itens diferem somente em termos de dificuldade. No modelo logístico unidimensional de dois parâmetros (ML2) para respostas dicotômicas, proposto por Birnbaum (1968) a partir da substituição da distribuição normal acumulada proposta por Lord (1952), um parâmetro de discriminação é adicionado ao modelo (Equação (2.4)), o que implica dizer que a CCI (Figura 2.3) passa a ter um parâmetro de inclinação a_k e, desse modo, os itens não estão mais igualmente relacionados ao parâmetro de habilidade.

$$P(Y_{ik} = 1|\theta_i, a_k, b_k) = \frac{\exp(a_k(\theta_i - b_k))}{1 + \exp(a_k(\theta_i - b_k))} = \frac{1}{1 + \exp(-a_k(\theta_i - b_k))}. \quad (2.4)$$

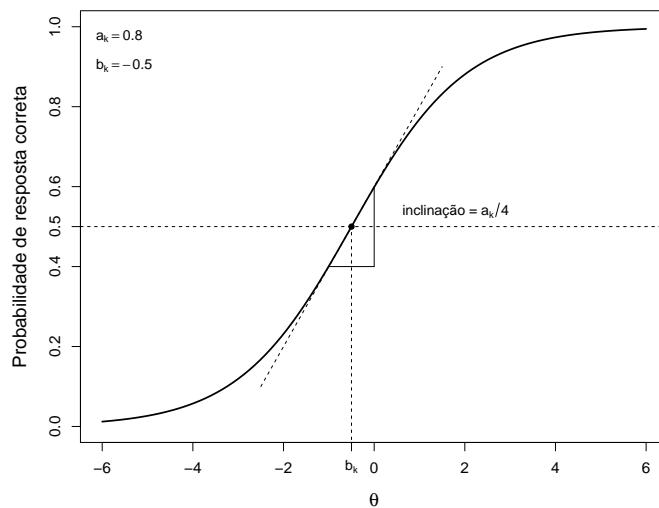


Figura 2.3 – Exemplo de uma Curva Característica do Item (CCI) do modelo TRI de três parâmetros.

Ao observar a Figura 2.3 nota-se que a inclinação de uma CCI é proporcional ao parâmetro de discriminação a_k . Quanto mais inclinadas as curvas estiverem em relação ao eixo dos habilidades, maior será a discriminação do item. Para justificar esse fato, ao denotar $P(Y_{ik} = 1|\theta_i, a_k, b_k)$ por $P(\theta_i)$, tem-se que a derivada de $P(\theta_i)$ em relação a θ_i , ao aplicar a regra do quociente, é dada pela Equação (2.5).

$$\frac{d}{d\theta_i}[P(\theta_i)] = \frac{a_k \cdot \exp(a_k(\theta_i - b_k))(1 + \exp(a_k(\theta_i - b_k))) - a_k \cdot \exp(a_k(\theta_i - b_k))^2}{(1 + \exp(a_k(\theta_i - b_k)))^2} \quad (2.5)$$

Efetuando as devidas simplificações, chega-se em:

$$\frac{d}{d\theta_i}[P(\theta_i)] = \frac{a_k \cdot \exp(a_k(\theta_i - b_k))}{(1 + \exp(a_k(\theta_i - b_k)))^2} = a_k \cdot P(\theta_i)[1 - P(\theta_i)] \quad (2.6)$$

Nota-se que essa função é de fato monótona crescente, visto que $\frac{d}{d\theta_i}[P(\theta_i)] > 0$ para quaisquer θ_i . O fato de $a_k > 0$, que garante essa característica, será justificado mais adiante. Sabe-se que o ponto de inflexão da função logística é $(0, 1/2)$. A seguir será justificado que a ordenada do ponto de inflexão para o modelo ML2 não se altera. Aplicando-se mais uma vez a regra do quociente no resultado obtido na Equação (2.6), chega-se na Equação (2.7).

$$\frac{d^2}{d\theta_i^2}[P(\theta_i)] = \frac{a_k^2 \cdot \exp(a_k(\theta_i - b_k)) \cdot (1 - \exp(a_k(\theta_i - b_k)))}{(1 + \exp(a_k(\theta_i - b_k)))^3} \quad (2.7)$$

Assim:

$$\frac{d^2}{d\theta_i^2}[P(\theta_i)] = 0 \Rightarrow a_k^2 \cdot \exp(a_k(\theta_i - b_k)) \cdot (1 - \exp(a_k(\theta_i - b_k))) = 0.$$

Ou ainda,

$$1 - \exp(a_k(\theta_i - b_k)) = 0 \Rightarrow \theta_i = b_k.$$

Obtendo a ordenada do ponto de inflexão:

$$P(b_k) = \frac{\exp(a_k(b_k - b_k))}{1 + \exp(a_k(b_k - b_k))} = \frac{\exp(0)}{1 + \exp(0)} = \frac{1}{2}$$

Portanto, a ordenada do ponto de inflexão é inalterada no modelo ML2 e, consequentemente, no modelo ML1.

A inclinação da reta tangente à CCI, $\frac{d}{d\theta_i}[P(\theta_i)]\Big|_{\theta_i=b_k}$, ao se fazer as devidas operações, é dada por $\frac{a_k}{4}$. Esse resultado podera ter sido obtido de maneira imediata ao verificar na Equação (2.6) que o valor máximo de $P(\theta_i)[1 - P(\theta_i)]$ é $1/4$, o que implica dizer que o máximo de $a_k \cdot P(\theta_i)[1 - P(\theta_i)]$ é $\frac{a_k}{4}$. De modo geral, a derivada da tangente da CCI no seu ponto de inflexão ($b_k, 1/2$) é proporcional ao parâmetro a_k . Assim, quanto maior o valor de a_k maior será a discriminação do item, em outras palavras este parâmetro reflete a eficácia deste item para discriminar respondentes mais proficientes de respondentes menos proficientes. Caso um item tivesse uma discriminação perfeita, a inclinação da reta tangente à CCI no ponto $\theta = 0$ seria de 90° (Figura 2.4).

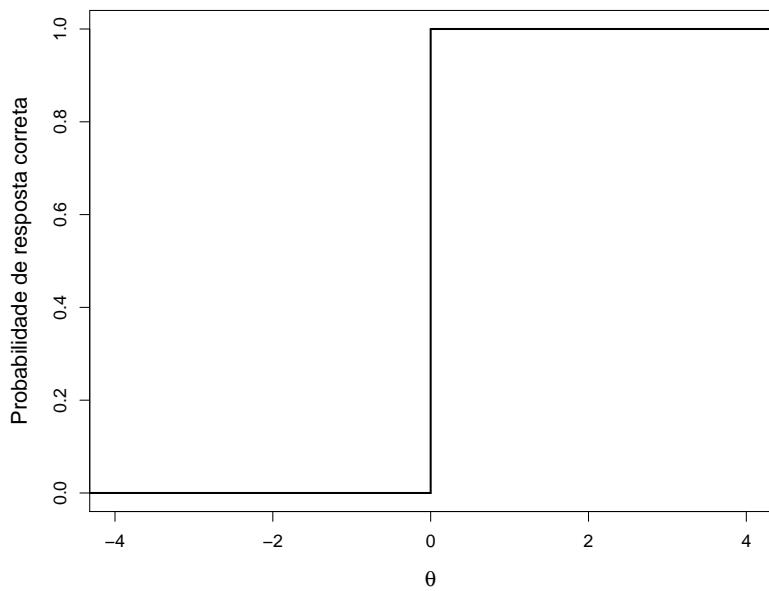


Figura 2.4 – Item com discriminação perfeita em $\theta = 0$.

Ainda sobre a Figura 2.4, percebe-se que respondentes com habilidade $\theta \in (-\infty, 0)$ teriam probabilidade 0 de acertar o item, enquanto que respondentes com habilidade $\theta \in (0, \infty)$ teriam probabilidade 1 de acertar o item. Assim, um item que tem um a_k elevado é capaz de discriminar diferenças infinitesimalmente mínimas de níveis de θ_i .

A interpretação dos parâmetros a_k e b_k em um exemplo que envolve duas CCI diferentes, que assumem o modelo ML2 pode ser visualizada na Figura 2.5. Nota-se que o item 1 ($b_1 = -1,5$) exige menos destreza dos respondentes do que o item 2 ($b_2 = 1$), haja vista que respondentes de aptidão média ($\theta = 0$) têm probabilidade $P(\theta_1) = 0,95$ de acertar o item 1, enquanto que respondentes com a mesma aptidão têm probabilidade $P(\theta_2) = 0,27$. Em termos de discriminação, o item 1 ($a_1 = 1,6$ e inclinação da reta tangente $58,0^\circ$) é mais discriminativo do que o item 2 ($a_2 = 0,8$ e inclinação da reta tangente $38,7^\circ$), ou seja, o item 1 tem maior eficácia para discriminar respondentes mais proficientes no item do que o item 2.

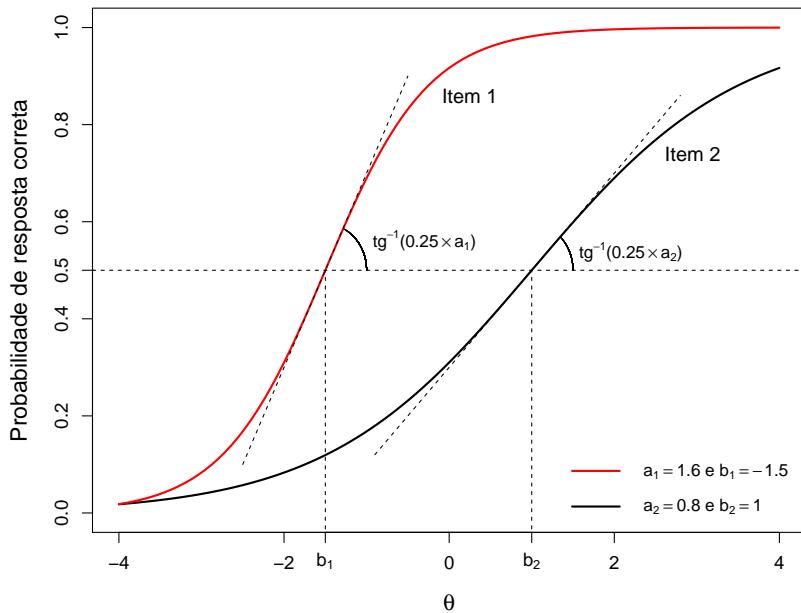


Figura 2.5 – Curvas características do item (CCI) de dois itens distintos do modelo TRI de dois parâmetros logísticos.

O parâmetro a_k hipoteticamente pode variar de $-\infty$ a $+\infty$, mas de acordo com a literatura, a métrica do a_k nos modelos ajustados variam de -3 a 3 . Em contraste, valores negativos para a_k não fazem sentido, visto que neste caso a forma da curva não seria mais um S no sentido que foi definido e, consequentemente, respondentes com maiores traços latentes estariam sujeitos a maiores probabilidades de errar o item. Analogamente, respondentes com menores traços latentes estariam propícios a maiores probabilidades de acertar o item. Portanto, para que faça sentido, a métrica desse parâmetro varia de 0 a 3 , em que 0 significa que não há discriminação e 3 , o item apresenta discriminação aproximadamente perfeita. De acordo com Baker (2001), esse parâmetro pode ser categorizado como: nenhuma (0), muito baixa ($0,01$ a $0,34$), baixa ($0,35$ a $0,64$), moderada ($0,65$ a $1,34$), alta ($1,35$ a $1,69$), muito alta ($1,70$ ou mais) e perfeita ($+\infty$).

2.3.3 Modelo logístico de três parâmetros (ML3)

Quando um indivíduo tem seu traço latente na extremidade inferior da CCI, tem-se uma probabilidade alta de responder o item errado. Por exemplo, espera-se que respondentes com baixa proficiência em matemática respondam incorretamente uma questão. Agora, se a questão está no formato de múltipla escolha, então alguns dos indivíduos de baixa proficiência podem selecionar a opção correta de modo casual, ou seja, o conhecido “chute”. Assim, Birnbaum (1968) modificou o modelo ML2 para incluir um parâmetro que representa a contribuição do acerto casual (*guessing* em inglês) para a probabilidade de resposta correta. O modelo ficou conhecido como modelo logístico de três parâmetros (ML3), Equação (2.8) cuja CCI é apresentada na Figura 2.6, embora tecnicamente não seja mais um modelo logístico.

$$P(Y_{ik} = 1 | \theta_i, a_k, b_k, c_k) = c_k + (1 - c_k) \frac{\exp(a_k(\theta_i - b_k))}{1 + \exp(a_k(\theta_i - b_k))} \quad (2.8)$$

ou, equivalentemente,

$$P(Y_{ik} = 1 | \theta_i, a_k, b_k, c_k) = c_k + (1 - c_k) \frac{1}{1 + \exp(-a_k(\theta_i - b_k))},$$

em que c_k é o parâmetro do item k que representa a probabilidade de indivíduos com baixa habilidade responderem corretamente o item k (em muitos casos referido como a probabilidade de acerto casual). Os demais termos foram definidos anteriormente.

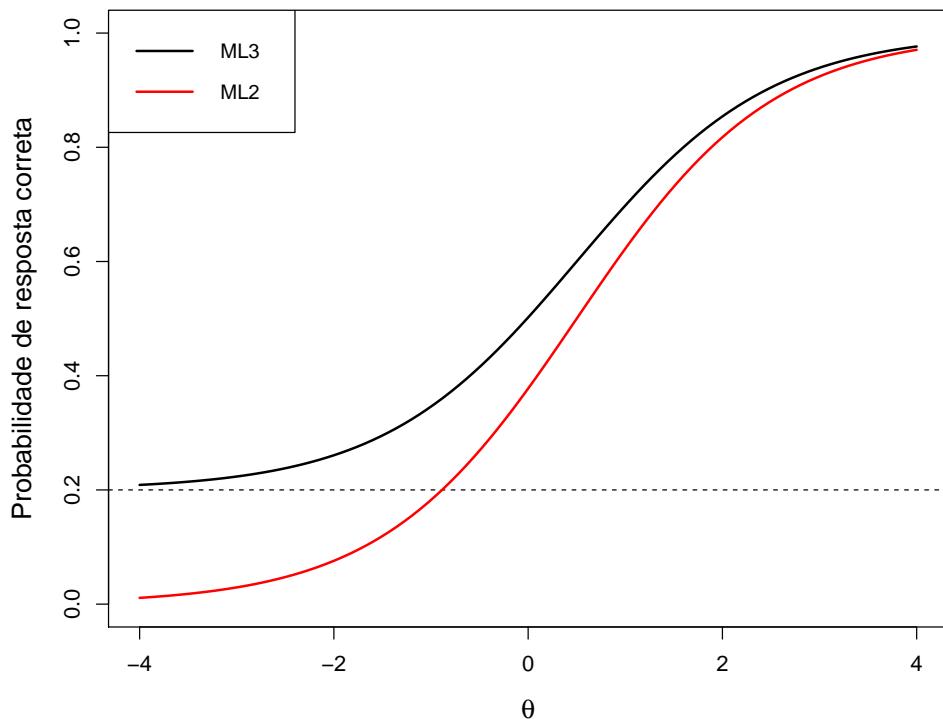


Figura 2.6 – Curvas características do item (CCI) dos modelos TRI de dois e três parâmetros (ML2 e ML3, respectivamente) correspondentes a mesmos níveis de discriminação e dificuldade.

Vale notar que, por definição, c_k não varia em função do nível de habilidade, ou seja, examinandos de menor e maior habilidade têm a mesma probabilidade de acertar o item de maneira casual. Por exemplo, ao observar a Figura 2.6 percebe-se que o parâmetro c_k (nesse caso igual a 0,2) afeta consideravelmente a proporção de respostas corretas dos indivíduos de baixa proficiência quando o modelo ML3 é comparado ao modelo ML2 considerando os mesmos a_k e b_k . Essa contribuição do acerto casual na probabilidade de acerto é reduzida gradativamente à medida que a habilidade do respondente aumenta, apresentando limite igual a 0 quando $\theta \rightarrow +\infty$. Teoricamente c_k varia de 0 a 1, mas na prática, valores próximos de 1 não são aceitáveis, visto que a CCI será próxima de uma reta.

De modo geral, o parâmetro c_k define uma assíntota para a probabilidade de resposta correta. Uma consideração que deve ser levada em conta é que ao utilizar o parâmetro c_k , o parâmetro b_k é alterado, isto é, nos modelos ML1 e ML2 b_k era o ponto na escala de habilidade cuja probabilidade de resposta correta era igual a 0,5. Agora, b_k é o ponto na escala de proficiência em que $P(\theta_i) = c_k + (1 - c_k)0,5$, ou ainda, $P(\theta) = (1 + c)/2$. Note que a probabilidade $\frac{1 + c_k}{2}$ é justamente a ordenada do ponto médio entre $(0, c_k)$ e $(0, 1)$. Já a inclinação da reta tangente à CCI no ponto b_k ainda pode ser interpretado como sendo proporcional à a_k , no entanto, agora tem a influência de c_k , sendo igual a $a_k(1 - c_k)/4$. Note que apesar dessas alterações transparecerem sutis, elas são importantes ao interpretar os resultados das análises do teste. A interpretação geométrica dos parâmetros a_k , b_k e c_k na CCI do modelo ML3 é apresentada na Figura 2.7.

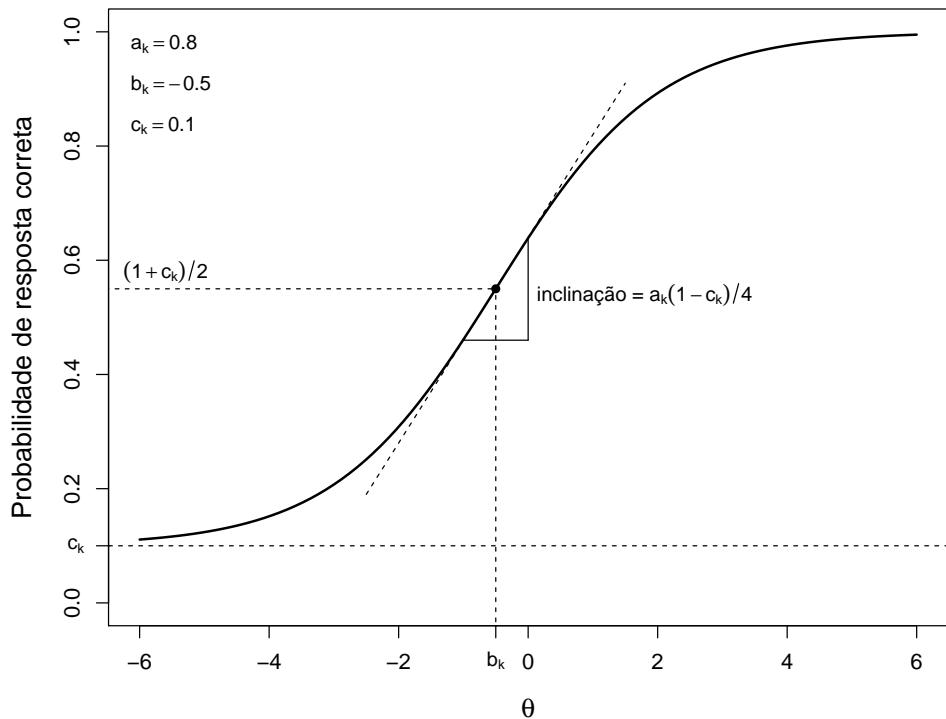


Figura 2.7 – Exemplo de uma Curva Característica do Item (CCI) do modelo TRI de três parâmetros.

Alguns autores definem o modelo ML3 em função da função logística, que é definida por $g : \mathbb{R} \rightarrow (0,1)$ definida por

$$g(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}.$$

Assim, o modelo ML3 pode ser reescrito como:

$$P(Y_{ik} = 1 | \theta_i, a_k, b_k, c_k) = c_k + (1 - c_k) \cdot g(a_k(\theta_i + b_k)).$$

Os modelos ML1 e ML2 também pode ser reescritos dessa maneira, visto que são casos particulares do modelo ML3.

A versão probito do modelo ML3 é definida na literatura (LORD; NOVICK, 1968) como modelo da ogiva normal, em que o ICC é baseado na distribuição normal acumulada (Equação (2.9)),

$$P(Y_{ik} = 1 | \theta_i, a_k, b_k, c_k) = c_k + (1 - c_k) \cdot \Phi(a_k(\theta_i - b_k)) = c_k + (1 - c_k) \cdot \int_{-\infty}^{a_k(\theta_i - b_k)} \phi(z) dz, \quad (2.9)$$

em que $\Phi(\cdot)$ e $\phi(\cdot)$ são a função de distribuição acumulada e a função densidade da normal padrão. A primeira não possui forma fechada e a segunda é definida por:

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot z^2\right).$$

Quando se deseja que os resultados do modelo ML3 sejam semelhantes aos da distribuição $N(0,1)$, acrescenta-se um parâmetro D , em geral igual a 1,7 (Equação (2.10)).

$$P(Y_{ik} = 1 | \theta_i, a_k, b_k, c_k) = c_k + (1 - c_k) \frac{\exp(Da_k(\theta_i - b_k))}{1 + \exp(Da_k(\theta_i - b_k))}. \quad (2.10)$$

Vale ressaltar que processos psíquicos, como o traço latente, de acordo com a literatura (PASQUALI, 2018), se distribuem normalmente entre a população. Desse modo, ao assumir esse fato, aproximadamente 99,97% da população têm escore, assumindo a distribuição $N(0, 1)$, entre -3 e 3 (Figura 2.8).

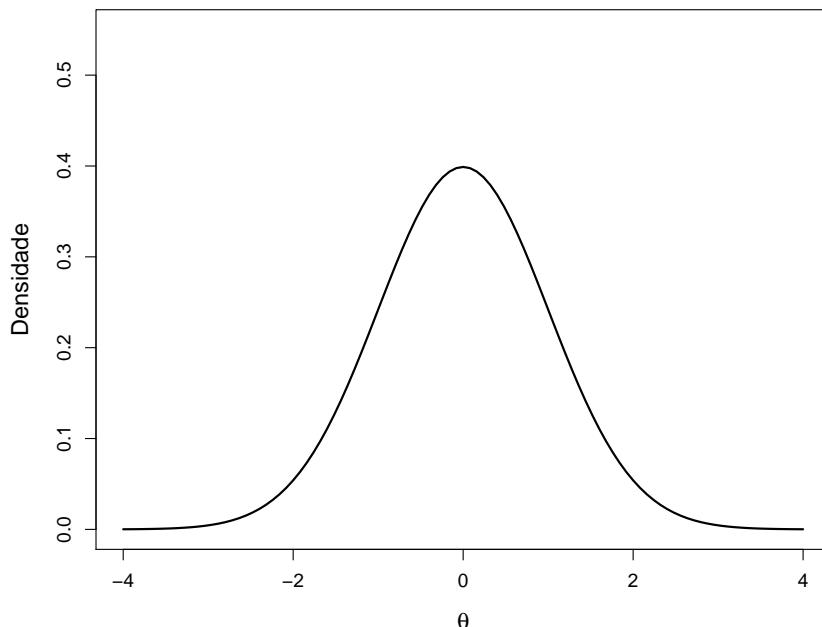


Figura 2.8 – Interpretação geométrica da distribuição normal padrão.

2.3.4 A escala de habilidade

Teoricamente os indivíduos podem assumir habilidades no intervalo de $-\infty$ a $+\infty$, o que se faz necessário estabelecer uma origem e uma unidade de medida para a definição da escala de habilidade para representarem, respectivamente, o valor médio e o desvio-padrão das habilidades dos respondentes da população em estudo. Em todas as situações exemplificadas até o momento foi utilizada a escala $(0, 1)$, ou seja, média 0 e desvio-padrão 1.

Vale ressaltar que a habilidade de um indivíduo é invariante à escala que está sendo utilizada, ou seja, a probabilidade deste indivíduo responder corretamente um determinado item é sempre a mesma. Uma analogia pode ser feita com a temperatura de ebulação da água. Sabe-se que esse ponto é atingido a 100° Celsius, 373° Kelvin ou 32° Fahrenheit, isto é, são diferentes escalas para se representar o mesmo fenômeno, ou ainda, para se medir a mesma coisa. Por exemplo, o ENEM utiliza a escala $(500, 100)$ com base nos resultados obtidos na prova de 2009. Já o Saeb arbitrou uma escala de proficiência única para todos os anos de aplicação nas séries escolares igual a $(250, 50)$.

Por exemplo, para transformar da “escala padrão” $(0, 1)$ para a escala $(500, 100)$ é preciso fazer uma transformação linear com os “coeficientes da métrica de transformação” $(500 \text{ e } 100)$ da seguinte maneira:

$$\theta_i^* = 100 \times \theta_i + 500.$$

Assim, o termo $a_k(\theta_i - b_k)$ é reescrito na forma $(a_k/100)[(100 \times \theta_i + 500) - (100 \times b_k + 500)]$. Os parâmetros a_k , b_k e θ_i na escala $(500, 100)$ passam a ser a_k^* , b_k^* e θ_i^* de modo que

$$(i) \quad \theta_i^* = 100 \times \theta_i + 500;$$

$$(ii) \quad b_k^* = 100 \times b_k + 500;$$

$$(iii) \quad a_k^* = \frac{a_k}{100}.$$

Além disso, $P(Y_{ik} = 1 | \theta_i, a_k, b_k, c_k) = P(Y_{ik} = 1 | \theta_i^*, a_k^*, b_k^*, c_k)$ como mencionado anteriormente. Portanto, para se analisar um item a partir dos parâmetros a_k e b_k é preciso ter conhecimento sobre a escala que eles foram obtidos.

De acordo com Brasil (2012) a escala tem uma interpretação pedagógica, visto que a dificuldade de cada item (questão) é posicionada na mesma régua dos respondentes, isto é, o traço latente estará conforme o conhecimento pedagógico. Assim, o escore de um candidato não depende das notas dos demais candidatos, mas apenas do posicionamento das questões na régua (Figura 2.9). Uma analogia pode ser feita em uma competição de salto em altura. Espera-se que um atleta que salte até 1,7 metros nos treinos não tenha

dificuldades de saltar a uma altura cujo sarrafo esteja a uma altura menor que 1,7 metros. Em contraste, espera-se que ele tenha dificuldade para saltar alturas maiores do que 1,7 metros.

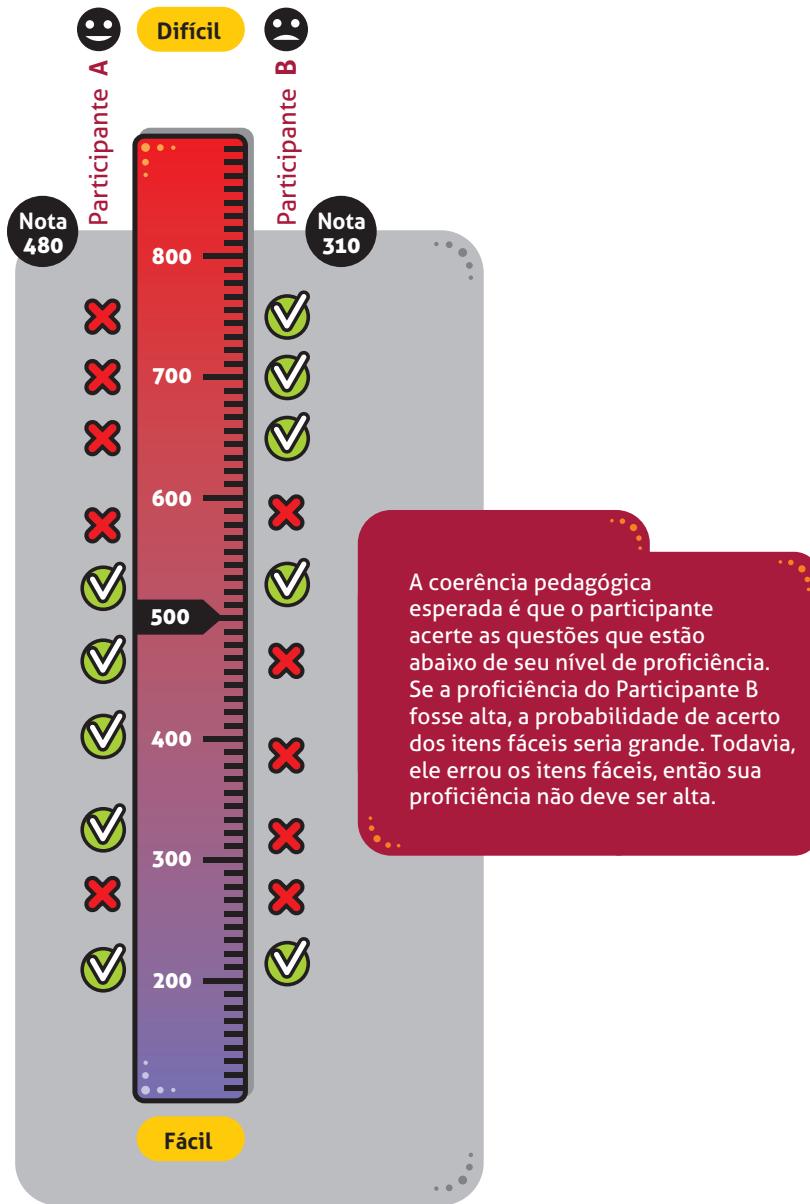


Figura 2.9 – Interpretação da coerência pedagógica na TRI - escala (500, 100).
Fonte: Guia do participante do ENEM (BRASIL, 2012).

2.3.5 As funções de informação

Quando se fala em ter informação, significa dizer que se sabe algo sobre um objeto ou um tópico específico. Em Estatística é similar, mas um pouco mais técnico. O Estatístico Sir Ronald Aylmer Fisher definiu informação como o recíproco da variância do estimador de um parâmetro.

Com base nisso, estimar um parâmetro com maior precisão (menor variabilidade) significa dizer que se sabe mais sobre o valor do parâmetro se essa estimação tivesse sido realizada com menor precisão (maior variabilidade). Na TRI o interesse é estimar o valor do traço latente de um examinando. Se a quantidade de informação for grande, então a estimativa para a habilidade do examinando estará próxima do valor real do parâmetro. Denotando a “informação do item” por $I_k(\theta)$ e a variância do estimador $\hat{\theta}$ por $\sigma^2(\hat{\theta})$, tem-se:

$$I_k(\theta) = \frac{1}{\sigma^2(\hat{\theta})}.$$

A variância assintótica de $\hat{\theta}$ é dada pela Informação de Fisher, que é um limitante para a variância do Estimador Não-Viciado de Variância Uniformemente Mínima (ENVVUM) de θ , que será visto mais adiante que os parâmetros dos itens são estimados por máxima verossimilhança.

$$\sigma^2(\hat{\theta}) = \mathbb{E} \left[\left(\frac{d}{d\theta} \log P(\mathbf{Y}_{i\cdot} | \theta) \right)^2 \right],$$

ou, equivalentemente,

$$\sigma^2(\hat{\theta}) = -\mathbb{E} \left[\frac{d^2}{d\theta^2} \log L(\theta | \mathbf{y}_{i\cdot}) \right],$$

em que Y_{ik} é uma variável aleatória que assume valor 1 se o respondente acerta a questão e 0 caso contrário, ou seja, $Y_{ik} \sim \text{Bernoulli}(p)$ em que $p = P(Y_{ik} = 1 | \theta_i, a_k, b_k, c_k)$; $P(Y = y | \theta)$ é a densidade da distribuição Bernoulli, que é dada por $P(Y_{ik} = y_{ik} | \theta) = p^{y_{ik}}(1-p)^{1-y_{ik}}$; $L(\theta | y)$ é a função de verossimilhança de Y_{ik} . Além disso, $\mathbf{Y}_{i\cdot} = (\mathbf{Y}_{i1}, \mathbf{Y}_{i2}, \dots, \mathbf{Y}_{iK})$ o vetor aleatório das K respostas dos itens do indivíduo i e $\mathbf{y}_{i\cdot}$ são os valores observados de $\mathbf{Y}_{i\cdot}$. Substituindo p por $P(\theta)$, conforme apresentado por Lord (1980) demonstra-se que:

$$\sigma^2(\hat{\theta}) = \frac{P(\theta)Q(\theta)}{\left[\frac{d}{d\theta} P(\theta) \right]^2},$$

em que $P(\theta) = P(Y_{ik} = 1 | \theta_i, a_k, b_k, c_k)$ e $Q(\theta) = 1 - P(\theta)$. Portanto, a informação fornecida pelo item k no nível de habilidade θ é dada por:

$$I_k(\theta) = \frac{\left[\frac{d}{d\theta} P(\theta) \right]^2}{P(\theta)Q(\theta)}. \quad (2.11)$$

No caso do modelo ML3, a Equação (2.11) pode ser reescrita como:

$$I_k(\theta) = a_k^2 \frac{Q(\theta_i)}{P(\theta_i)} \left[\frac{P(\theta_i) - c_k}{1 - c_k} \right]^2.$$

Nota-se que os parâmetros a_k , b_k e c_k têm importância no aumento da informação do item, a saber: (i) quando b_k se aproxima de θ_i ; (ii) quanto maior for a_i ; e (iii) quanto mais c_k se aproxima de 0. Por exemplo, os gráficos de quatro funções de informação do item referentes à Tabela 2.4 estão plotados na Figura 2.10. Os itens 1 e 2 só diferem pelo valor de a_k , sendo o item 1 com maior pico na função de informação (2,25). Quando o item 1 é comparado com o item 3 existe um deslocamento em relação à dificuldade, mas o valor de c_k faz a informação máxima do item 3 (1,50) ser menor do que a do item 1. Já o item 4 apresenta o máximo de informação de 0,20 (o menor de todos os máximos) e isso é justificado, basicamente, pelo menor valor de a_k em relação aos demais itens. Dependendo do objetivo do exame, este item pode ser removido do teste ao perceber essa característica na fase de calibração dos itens.

Tabela 2.4 – Valores dos parâmetros a_k , b_k e c_k , além da informação máxima $\max\{I_k(\theta)\}$, de quatro funções de informação do item que estão plotadas na Figura 2.10.

Item	a_k	b_k	c_k	$\max\{I_k(\theta)\}$	cor
1	3,0	0,0	0,0	2,25	preta
2	2,0	0,0	0,0	1,00	vermelha
3	3,0	1,0	0,2	1,50	verde
4	0,9	-2,0	0	0,20	azul

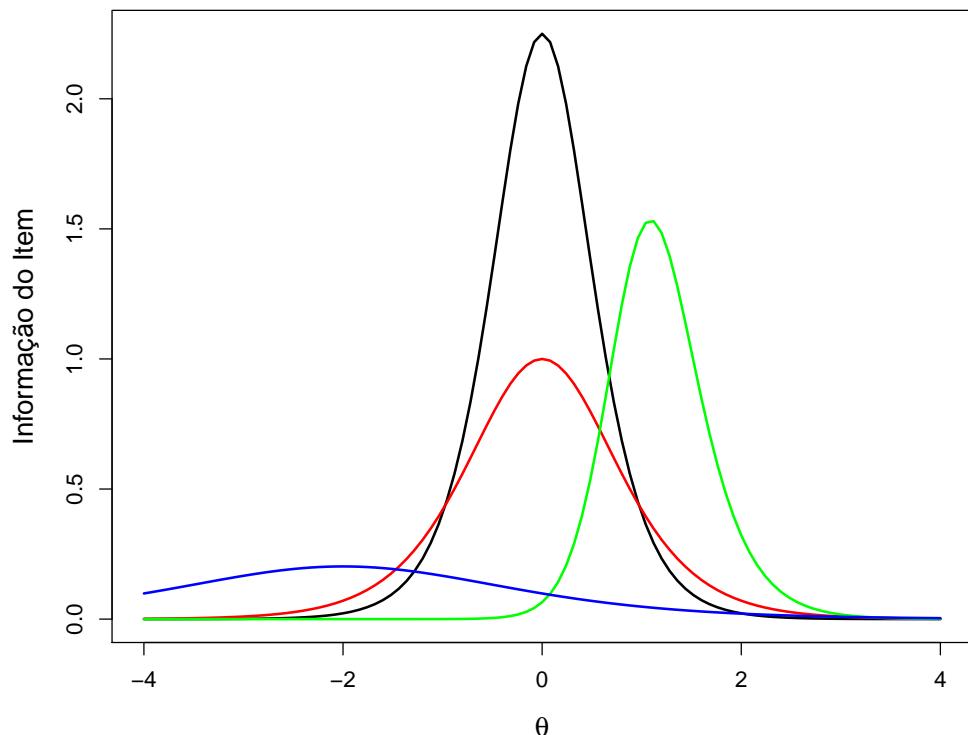


Figura 2.10 – Exemplos de funções de informação do item.

A função de informação do teste é definida pela soma das informações fornecidas pelos K itens que compõem o teste (Equação (2.12)).

$$I(\theta) = \sum_{k=1}^K I_k(\theta). \quad (2.12)$$

Por exemplo, a curva que representa a informação do teste composto pelos quatro itens do exemplo anterior pode ser visualizada na Figura 2.11. Nota-se que o teste é mais informativo para os respondentes com habilidades na vizinhança da habilidade média (0). Essa função é muito relevante, pois a contribuição de um item no teste independe dos demais itens, ou seja, o elaborador do teste pode modificar os itens de um teste sem afetar os demais.

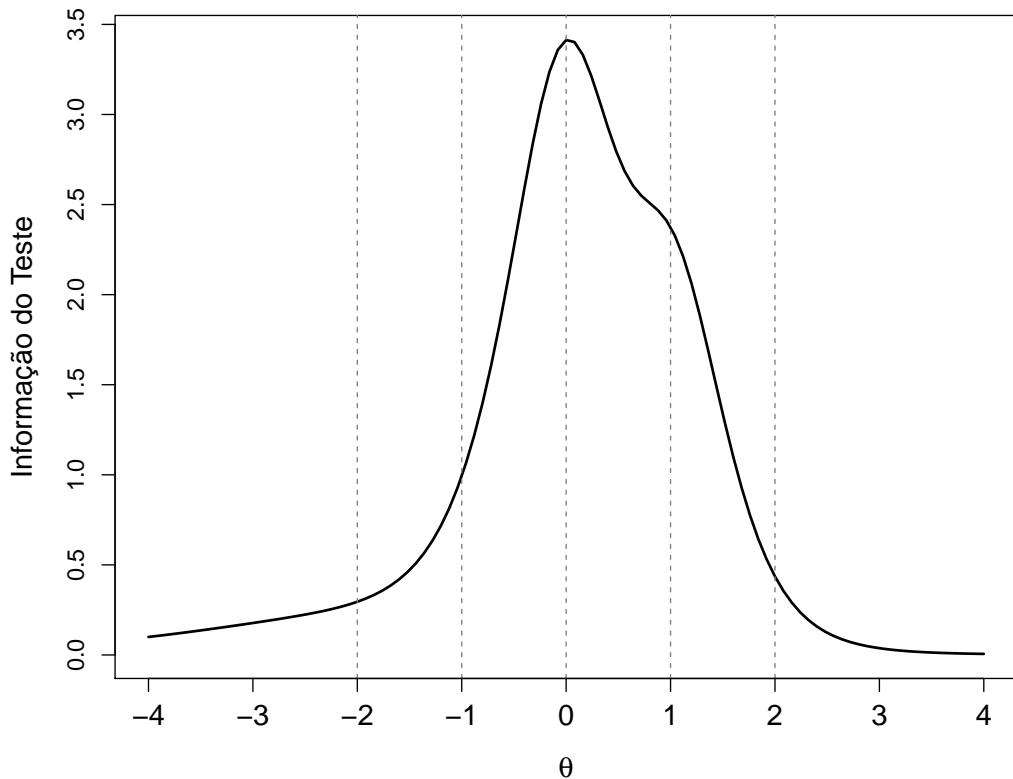


Figura 2.11 – Função de informação do teste composto pelos quatro itens cujos parâmetros estão expostos na Tabela 2.4.

O erro padrão de estimação, $EP(\hat{\theta})$, é uma outra forma de avaliar a função de informação do teste. Conforme a Equação (2.13), tem-se:

$$EP(\hat{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{I(\theta)}}. \quad (2.13)$$

A curva do $EP(\hat{\theta})$ referente aos dados da Tabela 2.4 está plotada na Figura 2.12. Nota-se que o teste é mais eficaz na estimativa das habilidades por volta de -1 a 1 .

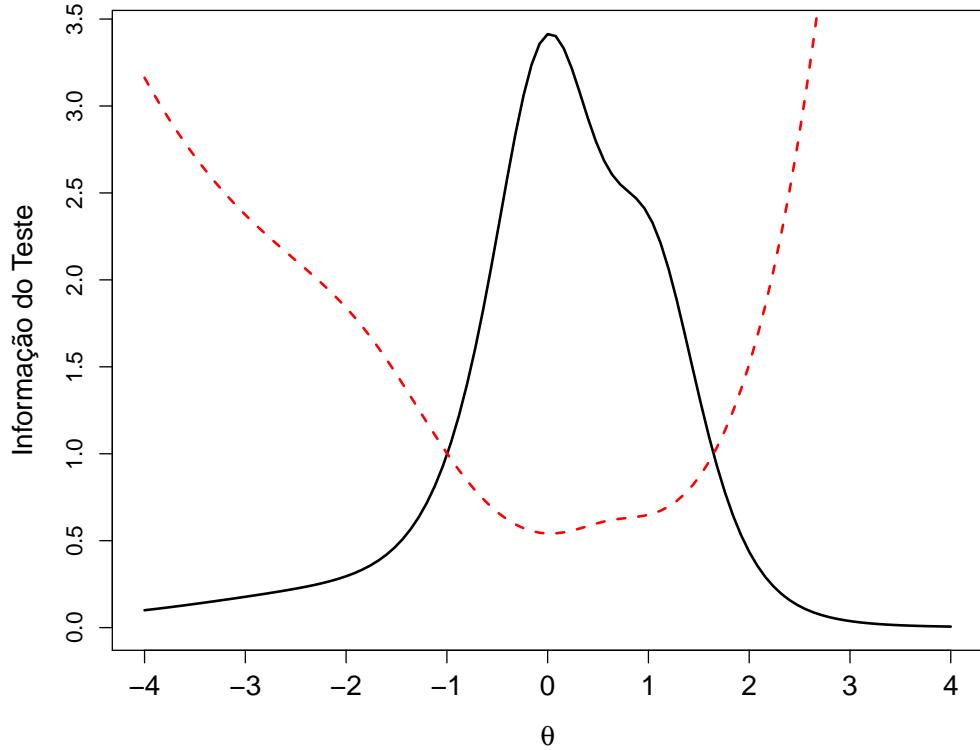


Figura 2.12 – Função de informação do teste composto pelos quatro itens cujos parâmetros estão expostos na Tabela 2.4. A linha tracejada em vermelho representa o erro padrão de estimação de θ .

Uma grande vantagem de se obter $EP(\hat{\theta})$ é a obtenção de intervalos de confiança assintóticos para interpretar as medidas de aptidão dos respondentes. Assim, o intervalo de confiança assintótico para a aptidão de um sujeito considerando um nível de confiança de $(1 - \alpha)$ é

$$IC[\theta_i, (1 - \alpha) \cdot 100\%] = \theta_i \pm z_{1-\alpha/2} \cdot EP(\hat{\theta})$$

em que $z_{1-\alpha/2}$ é o quantil z da distribuição normal padrão até o qual se tem probabilidade $1 - \alpha/2$. Assim, para se obter esse intervalo de confiança, é preciso estimar θ_i do respondente e a $I(\theta_i)$ para saber o erro padrão de estimação nesse ponto.

Por fim, quando dois testes são aplicados para avaliar o mesmo traço latente, existe a função de eficiência, que visa avaliar qual desses testes é mais eficaz para avaliar tal traço. Nesse sentido, se define a eficiência relativa (ER) dos dois testes T_1 e T_2 como a razão entre as respectivas informações desses testes.

$$ER(\theta) = \frac{I_{T_1}(\theta)}{I_{T_2}(\theta)}.$$

De maneira ilustrativa, se $ER(\theta) = 1,5$, então o teste 1 é 50% mais informativo do que o teste 2, ou ainda, que o teste 2 deveria ter 50% mais itens equivalentes para ter o mesmo nível de informação que possui o teste 1.

2.3.6 Estimação dos parâmetros

Nas subseções 2.3.1, 2.3.2 e 2.3.3 ficou compreendido que a probabilidade de acertar um item k por um respondente i depende somente da sua proficiência θ_i e dos parâmetros de dificuldade (b_k), discriminação (a_k) e acerto casual (c_k). Entretanto, apenas as respostas dos itens são conhecidas e a estimação das habilidades dos indivíduos e dos parâmetros dos itens precisa ser realizada, sendo esta etapa uma das mais importantes da TRI. Assim, teoricamente esse problema pode ser dividido em três situações, a saber:

- (i) quando já se conhece os parâmetros dos itens, somente as habilidades dos respondentes precisam ser estimadas;
- (ii) quando as habilidades dos respondentes são conhecidas, os parâmetros dos itens devem ser estimados;
- (iii) quando não se conhece nenhum dos dois tipos de parâmetros, ou seja, as habilidades dos indivíduos e os parâmetros dos itens precisam ser estimados concomitantemente, sendo esta a situação mais comum.

Nas três situações descritas, geralmente é realizada a estimação por Máxima Verossimilhança envolvendo algum método iterativo (Newton-Raphson ou Scoring de Fisher, por exemplo) ou procedimentos bayesianos, que distribuições *prioris* dos parâmetros precisam ser definidas pelo pesquisador a fim de obter suas distribuições *posterioris*, sendo o método MCMC (do inglês *Markov Chain Monte Carlo*) usado com bastante frequência. Nesta parte da revisão de literatura detalhes sobre a estimação dos parâmetros por Máxima Verossimilhança serão abordados, considerando Andrade, Tavares e Valle (2000) como principal referência. Para mais detalhes sobre a estimação bayesiana, ver, por exemplo, Fox (2010).

Para o início do processo de estimação é preciso definir algumas notações (retomar outras) e suposições necessárias para o desenvolvimento do modelo. Sejam θ_i a habilidade e Y_{ik} a variável aleatória que representa a resposta dicotômica (ou dicotomizada) do respondente i ao item k definida por

$$Y_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{se a resposta é correta} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Sejam $\mathbf{Y}_{i\cdot} = (\mathbf{Y}_{i1}, \mathbf{Y}_{i2}, \dots, \mathbf{Y}_{iK})$ o vetor aleatório das K respostas dos itens do indivíduo i e $\mathbf{Y}_{\cdot\cdot} = (Y_{1\cdot}, Y_{2\cdot}, \dots, Y_{k\cdot})$ o conjunto de todas as respostas dos n indivíduos. Além disso, y_{ik} , $\mathbf{y}_{i\cdot}$ e $\mathbf{y}_{\cdot\cdot}$ são os valores observados de Y_{ik} , $\mathbf{Y}_{i\cdot}$ e $\mathbf{Y}_{\cdot\cdot}$. Por fim, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ o vetor dos traços latentes (habilidades, conhecimentos, aptidões ou proficiências) dos n respondentes e $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_p)$ o conjunto dos p parâmetros dos itens.

Nas estimativas serão adotadas duas suposições, a saber:

- (i) as respostas dadas aos itens por indivíduos distintos são independentes;
- (ii) fixada habilidade do respondente, os itens são respondidos de forma independente (independência local).

Nota-se que a segunda suposição é muito forte, visto que para cada valor de θ , se for considerado um conjunto de respondentes com habilidade θ , então as covariâncias entre as respostas para cada par de itens são nulas. Em contraste, ao considerar um conjunto de indivíduos com habilidades variadas, estas covariâncias serão positivas. Assim, a habilidade θ é a única informação necessária para saber se o indivíduo acerta ou erra a questão e, além disso, supõem-se que o respondente não altera a sua proficiência no ato da realização do teste.

Para efeito do cumprimento dos objetivos deste trabalho a estimativa dos parâmetros dos itens sabendo das habilidades dos respondentes não foi discutida. Para mais detalhes sobre essa estimativa ver Andrade, Tavares e Valle (2000). Inicialmente será considerado o caso em que se conhece os parâmetros dos itens e deseja-se estimar o traço latente dos respondentes, ou seja, quando os itens já estão calibrados. A estimativa será feita por Máxima Verossimilhança cujo objetivo é obter o valor de θ que maximiza essa função. Nota-se que θ é um escalar, pois neste estudo está sendo considerado o caso em que existe apenas um traço latente (ou um traço latente dominante) associado a cada indivíduo.

A verossimilhança $L(\boldsymbol{\theta}) = P(\mathbf{Y}_{..} = \mathbf{y}_{..} | \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\zeta})$, já considerando a independência das respostas dos indivíduos, a independência local e a unidimensionalidade do traço latente, é dada por:

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^n P(\mathbf{Y}_{i.} = \mathbf{y}_{i.} | \theta_i, \boldsymbol{\zeta}) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^k P(Y_{ij} = y_{ij} | \theta_i, \boldsymbol{\zeta}_k).$$

Utilizando a notação $P_{ik} = P(Y_{ik} = 1 | \boldsymbol{\theta}_i, \boldsymbol{\zeta})$ e $Q_{ik} = 1 - P_{ik}$, tem-se:

$$P(Y_{ik} = y_{ik} | \theta_i, \boldsymbol{\zeta}) = P_{ik}^{y_{ik}} Q_{ik}^{1-y_{ik}}$$

e

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^k P_{ij}^{y_{ij}} Q_{ij}^{1-y_{ij}}.$$

Portanto, a log-verossimilhança é dada por:

$$\log L(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k [y_{ij} \log P_{ij} + (1 - y_{ij}) \log Q_{ij}].$$

O Estimador de Máxima Verossimilhança (EMV) é o valor que maximiza a verossimilhança, ou seja, após breve desenvolvimento, a solução de

$$\frac{\partial \log L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.14)$$

Desenvolvendo a Equação (2.14) para a habilidade do indivíduo i e aplicando algumas propriedades de derivadas parciais, assim como a regra da cadeia, chega-se em

$$\frac{\partial \log L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} = \sum_{j=1}^k \left\{ (y_{ij} - P_{ij}) \frac{W_{ij}}{P_{ij}^* Q_{ij}^*} \right\} \left(\frac{\partial P_{ij}}{\partial \theta_i} \right), \quad (2.15)$$

em que, por conveniência, $W_{ik} = \frac{P_{ik}^* Q_{ik}^*}{P_{ik} Q_{ik}}$, sendo os fatores do produto presente no seu numerador dados por $P_{ik}^* = (1 + \exp(-a_k(\theta_i - b_k)))^{-1}$ e $Q_{ik}^* = 1 - P_{ik}^*$.

Considerando a derivada parcial presente na Equação (2.15) e o modelo ML3, tem-se:

$$\frac{\partial P_{ik}}{\partial \theta_i} = a_k(1 - c_k)P_{ik}^* Q_{ik}^*.$$

Assim,

$$\frac{\partial \log L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} = \sum_{j=1}^k \left\{ (y_{ij} - P_{ij}) a_j (1 - c_j) P_{ij}^* Q_{ij}^* \frac{W_{ij}}{P_{ij}^* Q_{ij}^*} \right\}$$

Ou ainda,

$$\frac{\partial \log L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} = \sum_{j=1}^k \{ a_j (1 - c_j) (y_{ij} - P_{ij}) W_{ij} \}$$

Portanto, $\hat{\theta}_i$ solução da Equação (2.14) deve ser tal que

$$\sum_{j=1}^k \{ a_j (1 - c_j) (y_{ij} - P_{ij}) W_{ij} \} = 0. \quad (2.16)$$

A solução da Equação (2.16) não possui solução analítica, ou seja, fazer uso de métodos numéricos por meio dos processos iterativos de Newton-Raphson ou “Scoring” de Fisher, que estão devidamente implementados em rotinas específicas para a TRI (por exemplo, o BILOG e BILOG-MG) ou em pacotes do R, por exemplo **ltm** (RIZOPOULOS, 2006) e **mirt** (CHALMERS, 2012).

Um problema nesse tipo de estimativa acontece quando um candidato erra todas as questões ou quando acerta todas as questões. No primeiro caso, o EMV para θ_i será $-\infty$ (escore nulo) e, analogamente, no segundo caso será $+\infty$ (escore perfeito). As formas para se contornar esse problema são descritas por Andrade, Tavares e Valle (2000) e estão devidamente implementadas em rotinas computacionais. Sobre as estimativas iniciais para os métodos interativos geralmente se usa os escores padronizados, como obtidos na TCT.

A estimativa conjunta dos parâmetros dos itens e das habilidades há uma maior complexidade para o entendimento de todas as expressões, além da definição de muitas abordagens que deixariam este trabalho muito extenso. Dessa forma, será feita uma síntese do processo utilizado, destacando que a referência base para a construção desse texto contém um nível de detalhamento que não foi encontrado em nenhuma das demais referências utilizadas neste trabalho.

Destaca-se que a estimativa dos parâmetros utilizando o Método da Máxima Verossimilhança Marginal apresenta algumas vantagens em relação ao Método da Máxima Verossimilhança Conjunta. Para a utilização desse método é preciso definir uma métrica para lidar com o problema da “falta de identificabilidade do modelo” e uma distribuição para as habilidades dos respondentes, que, em geral, é dada por $N(\mu, \sigma^2)$. Ao utilizar a abordagem de Bock e Lieberman (1970), depois de muitos cálculos, conclui-se que as equações de estimativa para os parâmetros a_k , b_k e c_k são:

$$\begin{aligned} a_k &: (1 - c_k) \sum_{i=1}^s r_s \int_{\mathbb{R}} [(y_{ik} - P_i)(\theta - b_k)W_i] g_j^*(\theta) d\theta = 0 \\ b_k &: -a_k(1 - c_k) \sum_{i=1}^s r_s \int_{\mathbb{R}} [(y_{ik} - P_i)(\theta - b_k)W_i] g_j^*(\theta) d\theta = 0 \\ c_k &: \sum_{i=1}^s r_s \int_{\mathbb{R}} \left[(y_{ik} - P_i) \frac{W_i}{P_i^*} \right] g_j^*(\theta) d\theta = 0 \end{aligned}$$

Em geral, nos programas de TRI se utiliza o “método da quadratura” para se obter soluções numéricas para as integrais. De maneira geral, uma função contínua, com integral finita, pode ser aproximada, para qualquer grau de precisão, por uma outra função que assume um número finito de pontos. Sendo assim, para se calcular a integral de uma função contínua, basta obter a soma das áreas de um número finito de retângulos (ANDRADE; TAVARES; VALLE, 2000).

Por fim, nos programas de TRI também está implementado a estimativa dos parâmetros por máxima verossimilhança marginal e por um método bayesiano intitulado “estimação por maximização da distribuição a posteriori” para realizar a calibração dos itens. Destaca-se que em ambos os métodos é preciso definir uma distribuição de probabilidade para os traços latentes, que, em geral, utiliza-se a distribuição normal padrão (ANDRADE; TAVARES; VALLE, 2000).

3 Material e métodos

De acordo com a classificação de pesquisas científicas apresentada por Gonçalves (2005), esta pesquisa é classificada quantitativa, visto que os dados obtidos dizem respeito aos itens do Exame de Seleção (Anexo A) para os cursos técnicos integrados.

3.1 Caracterização da escola

O IFRN atende atualmente cerca de 28 mil alunos, divididos em 21 campi distribuídos por todas as regiões do estado (Figura 3.1). A instituição oferta cursos nas modalidades: Técnico Integrado – que conjuga o curso técnico ao ensino médio; Técnico Subsequente – que promove o ensino técnico a quem já possui o ensino médio; Graduação – nas modalidades tecnológica e licenciatura; e Pós-Graduação – com mestrado e doutorado (INSTITUTO FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE, 2021).



Figura 3.1 – Localização dos 21 *campi* do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte.

Fonte: Elaborada pelo autor com o auxílio do software *QGIS* versão 2.18 - Las Palmas (QGIS DEVELOPMENT TEAM, 2016).

3.2 Dados

As informações referentes aos dados do Exame de Seleção 2020, que ocorreu em 2019, foram disponibilizadas pela Coordenação de Acesso Discente (CADIS), inclusive com um termo de confidencialidade, sigilo e compromisso de que as informações deverão ser de uso exclusivamente acadêmico (Anexo B). As informações de todos os participantes do Exame de Seleção foram disponibilizadas em uma planilha de dados, sendo: (i) campus, (ii) oferta, (iii) turno, (iv) inscrição, (v) candidato, (vii) escola pública, (viii) renda familiar, (ix) etnia, (x) pessoa com deficiência, (xi) lista, (xii) escore, (xiii) nota, (xiv) status e (xv) gabarito algumas das variáveis disponibilizadas pela CADIS.

3.3 Metodologia

O modelo logístico unidimensional de 3 parâmetros, já indicado neste trabalho por ML3, foi utilizado para modelar a probabilidade de acerto ao considerar as respostas dos itens de Língua Portuguesa e Matemática dicotomizadas. Pelo fato do Exame de Seleção do IFRN adotar a TCT para o cálculo dos escores, os itens deste exame não foram calibrados, isto quer dizer que tanto os parâmetros dos itens quanto os traços latentes dos candidatos tiveram que ser estimados. Para isto, foi utilizado o método EAP (do inglês *expected a posteriori*) e o método da quadratura, que consiste em substituir a integral por uma soma finita de áreas de retângulos.

As análises estatísticas foram realizadas com o apoio computacional do software R versão 4.0.3 (R CORE TEAM, 2021) com o auxílio dos pacotes **plotrix** (LEMON, 2006) para inserir a representação de ângulos nas figuras, **xtable** (DAHL et al., 2019) para exportar os códigos das tabelas em LaTeX; **readxl** (WICKHAM; BRYAN, 2019) para ler planilhas do Excel; **tidyverse** (WICKHAM et al., 2019) com o objetivo de realizar filtros, obter estatísticas sumarizadas dos dados e produzir gráficos mais elaborados; **moments** (KOMSTA; NOVOMESTKY, 2015) para calcular a assimetria referente à distribuição dos escores de cada disciplina; e **ltm** (RIZOPOULOS, 2006) para estimar os parâmetros dos itens e os traços latentes dos respondentes. O script utilizado nas análises presentes neste trabalho estão disponíveis no Anexo C e podem ser obtidas no GitHub do autor.

4 Resultados

4.1 Caracterização dos participantes do Exame de Seleção

O Exame de Seleção do IFRN no ano de 2020 teve 22.652 inscritos. Destes, 11.114 (49,1%) estudaram todo o Ensino Fundamental II em escolas públicas; 4.149 (18,3%), em escolas das redes pública e privada de ensino, isto é, Ensino Fundamental II em escolas mistas; 7.360 (32,5%), somente em escolas da rede privada de ensino; e 29 (0,1%) declararam ter estudado em outro tipo de escola. Ressalta-se que 21.039 estudantes estiveram presentes para a realização do exame, ou seja, a abstenção foi de 7,1%. As demais informações sobre o tipo de escola do contingente de alunos presentes podem ser visualizadas na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Contingente dos alunos que fizeram a prova do Exame de Seleção 2020 do IFRN.

Tipo de escola	Sexo		Total
	Feminino	Masculino	
Pública	5723	4393	10116
Particular	3662	3344	7006
Mista	2109	1785	3894
Outro tipo	17	6	23
Total	11511	9528	21039

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Um outro atributo presente no conjunto de dados disponibilizado pela CADIS/IFRN foi a resposta dos alunos em relação à pergunta: “Você se autodeclara preto, pardo ou indígena?”. Do total de inscritos, 12.797 (56,5%) responderam “sim” a essa pergunta. E destes, 7.410 (57,9%) estudaram o Ensino Fundamental II somente em escolas públicas; 2.399 (18,7%), nas redes pública e privada; 2.972 (23,2%); e 16 (0,1%) em outro tipo de escola. Essa informação pode ser relevante para o delineamento amostral para fins da seleção da amostra para a calibração dos itens, considerando a hipótese de utilização da TRI.

A planilha disponibilizada também contém as variáveis: “estado e município cujo candidato reside” e “renda per capita”. A caracterização dos inscritos (ou presentes) para esses atributos não foi realizada por questões do cumprimento dos objetivos propostos neste estudo. Destaca-se que a observação do comportamento destas variáveis ao longo dos anos pode representar uma maior precisão na calibração dos itens, visto que se conhecerá mais informações da população alvo no momento do delineamento amostral.

4.2 Análise descritiva dos dados

Os escores dos candidatos nas provas de Língua Portuguesa e Matemática foram obtidos seguindo a TCT e, por construção, tiveram média 500 e desvio padrão 100. O resumo dos cinco números para os escores considerando as duas disciplinas é apresentado na Tabela 4.2. Nota-se que, de maneira geral, o rendimento dos candidatos foi melhor em Matemática, visto que os maiores escores foram obtidos nesta disciplina. Para visualizar essas informações, a distribuição dos escores são apresentadas nas Figuras 4.1 e 4.2. A título de informação, dois itens (um em cada disciplina) foram anulados e considerados como certos para todos os candidatos no cálculo dos escores.

A distribuição dos escores de Língua Portuguesa tem assimetria negativa ($-0,32$), também chamada de distribuição assimétrica à esquerda, enquanto que a de Matemática tem assimetria positiva ($0,48$), também chamada de distribuição assimétrica à direita.

Tabela 4.2 – Resumo dos cinco números para os escores dos candidatos do Exame de Seleção do IFRN em Língua Portuguesa e Matemática.

Disciplina	Mínimo	1º Quantil	Mediana	3º Quantil	Máximo
Língua Portuguesa	96,5	433,5	508,3	573,0	798,4
Matemática	240,7	424,4	488,6	567,1	923,6

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

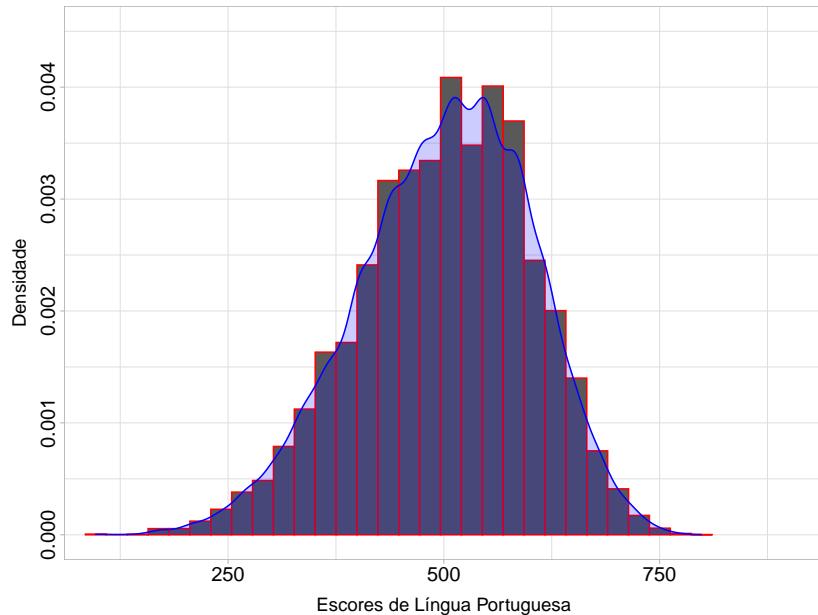


Figura 4.1 – Distribuição dos escores de Língua Portuguesa dos 21.039 candidatos que realizaram o Exame de Seleção do IFRN.

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

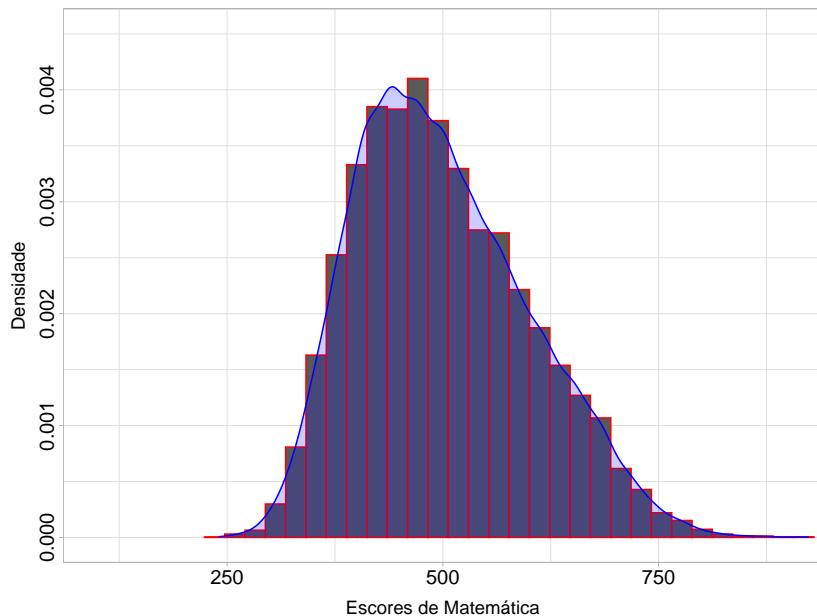


Figura 4.2 – Distribuição dos escores de Matemática dos 21.039 candidatos que realizaram o Exame de Seleção do IFRN.

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Uma abordagem que não é tratada na TCT no cálculo dos escores dos candidatos é a dificuldade de cada item. Além disso, nesse tipo de metodologia a dificuldade de cada item é relacionada diretamente com a proporção de acertos dos candidatos, não havendo uma fase de calibração para os itens. Essas proporções estão apresentadas nas Figuras 4.3 e 4.4, respectivamente para Língua Portuguesa e Matemática. Ressalta-se que as questões seguem a numeração da prova desconsiderando as questões anuladas (Apêndice A).

As questões 6 e 18 da prova de Língua Portuguesa tiveram proporção de acertos próximas de 25% (26,8% e 24,1%, respectivamente). Isto posto, esse item pode ser considerado como “difícil”, uma vez que essa proporção se aproxima da probabilidade teórica de um candidato marcar uma alternativa sem ter conhecimento algum sobre o item, ou seja, ter “chutado” o item. Já em Matemática, essa proporção consta nas questões 24, 30 e 35 (26,6%, 28,3% e 25,6%). Mais a frente alguns desses itens serão comentados neste trabalho. Por outro lado, com relação as questões consideradas fáceis, cuja proporção de acertos foi superior a 75% (critério deste trabalho), somente a prova de Língua Portuguesa apresentou itens com essa característica: questões 3, 4, 7, 9, 11 e 16.

Os gráficos de dispersão entre os escores dos candidatos e a proporção de acertos nas questões de Língua Portuguesa e Matemática estão plotados nas Figura 4.5 e 4.6, respectivamente. Para a construção desse gráfico os itens foram agrupados em intervalos de amplitude 20 e, a partir disso, para cada intervalo a proporção de acertos dos respectivos itens foi obtida. Para melhorar a compreensão das relações entre as variáveis têm-se curvas em azul presentes em cada gráfico, que representam o ajuste via regressão LOESS (do inglês *Local Polynomial Regression*).

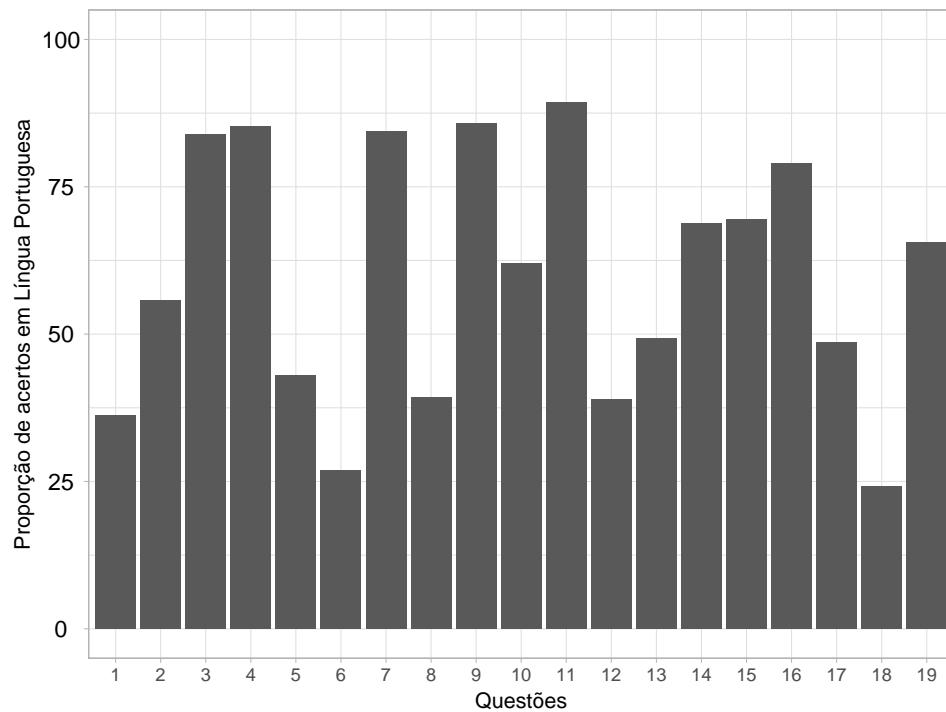


Figura 4.3 – Proporção de acertos nas questões de Língua Portuguesa do Exame de Seleção 2020.

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

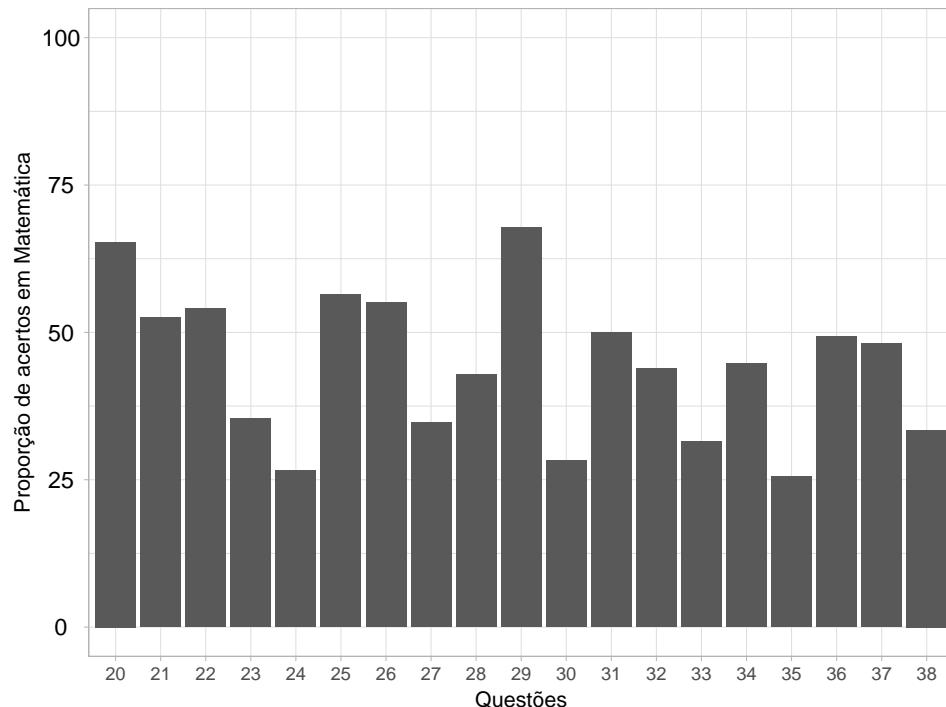


Figura 4.4 – Proporção de acertos nas questões de Matemática do Exame de Seleção 2020.

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Os itens de Língua Portuguesa apresentam curvas ajustadas com formas bem variadas, tendo comportamento de funções monótonas crescentes, ou seja, os maiores escores apresentam as maiores proporções de acertos. Ressalta-se que os itens 1, 9 e 11, somente, apresentam proporções não-nulas (em torno de 0,25) para os menores escores, ou seja, respondentes com as menores pontuações acertaram esses itens com maior frequência. Nota-se que os itens 6 e 18 não apresentam proporções de acertos em torno de 1. Percebe-se que as questões 1, 6, 12, e 18, por exemplo, não apresentaram um bom ajuste. Por outro lado, os itens 2, 9, 10, 13 e 17, por exemplo, apresentam ajuste em forma de “S”, como visto na fundamentação teórica deste trabalho como ponto de partida para os modelos utilizados na TRI.

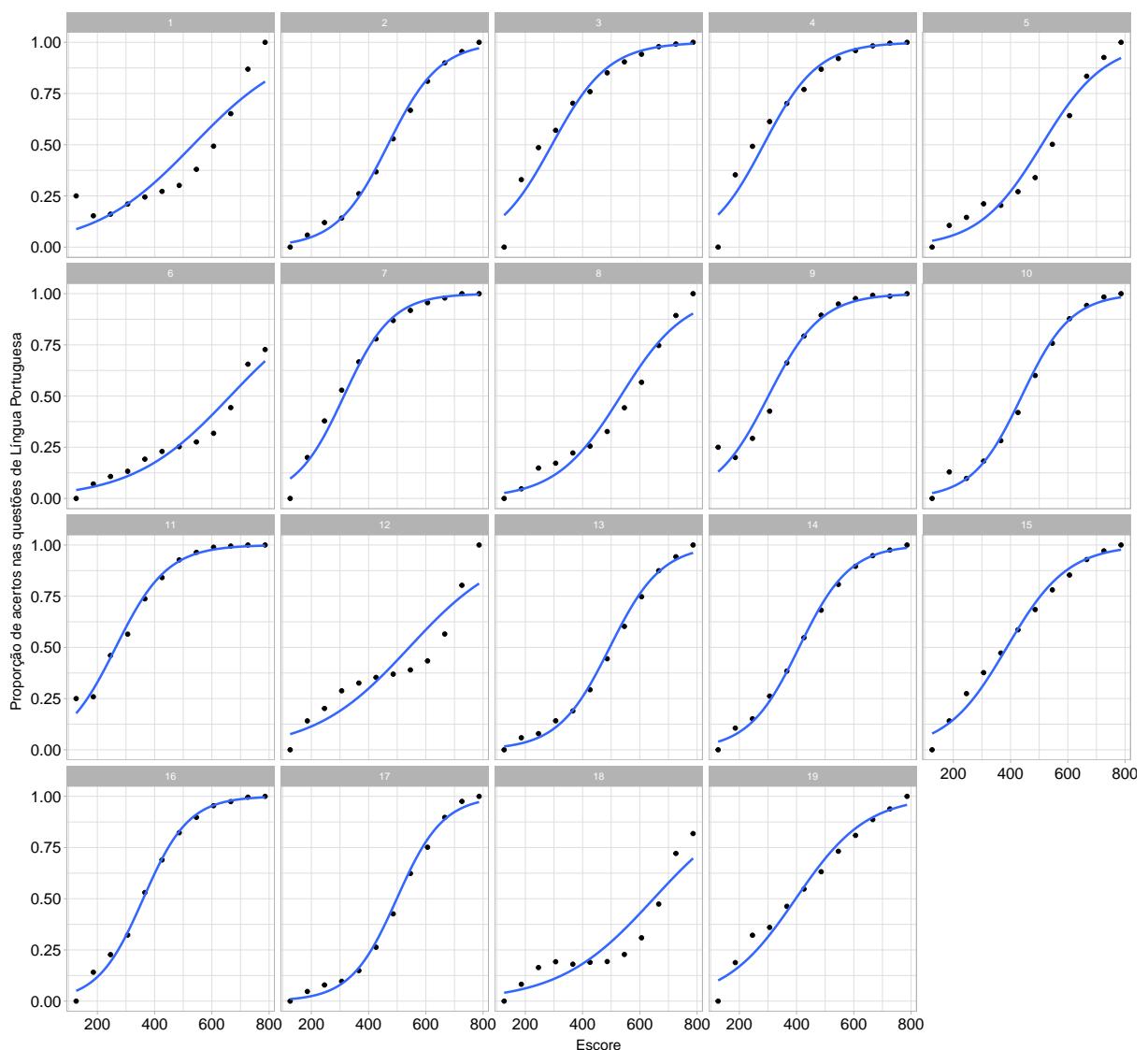


Figura 4.5 – Gráficos de dispersão entre os escores dos candidatos e a proporção de acertos em Língua Portuguesa considerando facetas por questão. A curva em azul representa o ajuste via regressão logística.

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Em Matemática, como em Língua Portuguesa, percebe-se o comportamento monótono crescente nos ajustes para todos os itens. Entretanto, os itens 22, 23, 27 e 33 apresentaram uma queda na proporção de acertos para os maiores escores, o que pode explicar, visualmente, um pior ajuste para esses itens quando comparados aos demais. Uma possível justificativa para esse fato, é o cálculo dos escores ser feito por *campus/curso/turno*, ou seja, há possibilidade de um escore ser alto e o desempenho de acertos ser baixo. Uma outra justificativa pode ser a metodologia adotada pela TCT no cálculo dos escores, que depende do desempenho de todos os candidatos na prova (e não nos itens). Alguns itens têm ajuste em forma de “S” (21, 24, 32 e 34, por exemplo), o que faz lembrar o modelo logístico da TRI apresentado no referencial teórico deste trabalho.

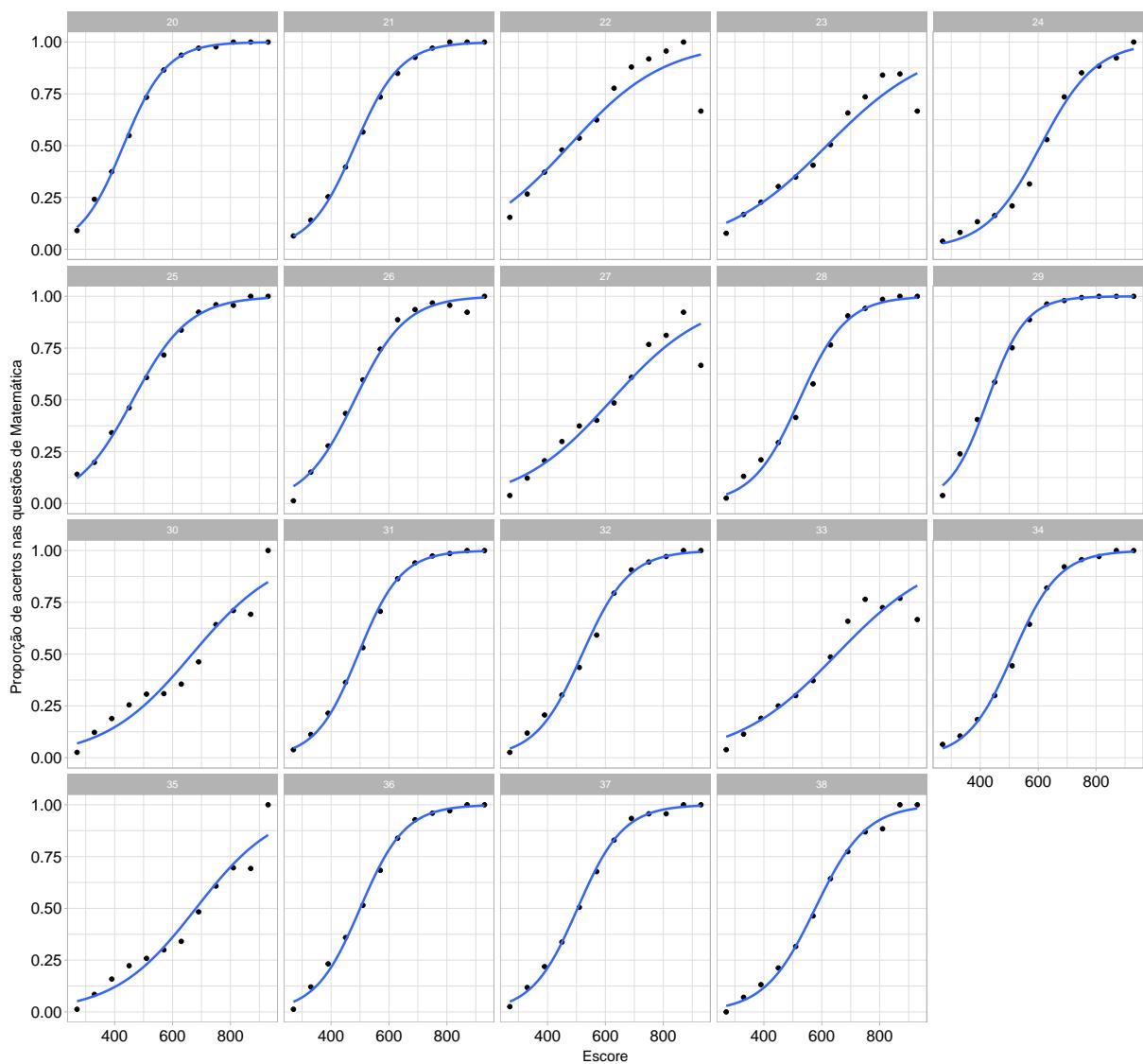


Figura 4.6 – Gráficos de dispersão entre os escores dos candidatos e a proporção de acertos em Matemática considerando facetas por questão. A curva em azul representa o ajuste via regressão logística.

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

4.3 Estimação dos parâmetros dos itens e dos escores dos candidatos

As estimativas dos parâmetros dos 19 itens de Língua Portuguesa e dos 19 itens de Matemática do Exame de Seleção do IFRN, considerando o modelo ML3 da TRI na escala (0, 1), além das respectivas informações máximas, são apresentadas na Tabela 4.3. Houve convergência na estimação quando se considerou a probabilidade máxima de chute (*guessing*) igual a 0,5 para todos os itens, ou seja, adotou-se que respondentes eliminem duas alternativas, que possam não fazer sentido, e haja probabilidade igual a 0,5 para acertar a questão. Uma inconsistência em relação ao exposto no referencial teórico foi a discriminação do item 12 ser negativa, mas, pelo menos, muito próxima de zero. Vale ressaltar que essa inconsistência também foi notada considerando probabilidades menores de acerto ao acaso e também ao se adotar o modelo ML2.

Tabela 4.3 – Parâmetros estimados considerando os itens da Prova de Língua Portuguesa do Exame de Seleção do IFRN para o modelo ML3 da TRI.

Item	Discriminação (a_k)	Dificuldade (b_k)	Acerto casual (c_k)	Informação máxima
1	1,64	2,09	0,31	0,37
2	0,98	-0,29	0,00	0,24
3	0,70	-2,57	0,00	0,12
4	1,12	-0,97	0,50	0,11
5	1,57	1,11	0,26	0,37
6	0,03	34,56	0,02	0,00
7	0,94	-2,10	0,00	0,22
8	1,04	1,49	0,23	0,17
9	1,47	-1,65	0,00	0,54
10	1,52	-0,25	0,12	0,45
11	1,90	-1,24	0,41	0,40
12	-0,08	-5,92	0,00	0,00
13	0,97	0,03	0,00	0,24
14	1,10	-0,88	0,00	0,30
15	0,63	-1,42	0,00	0,10
16	1,40	-1,27	0,00	0,49
17	1,60	0,19	0,07	0,56
18	3,31	2,35	0,23	1,77
19	0,44	-1,53	0,00	0,05

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Rabelo (2013) apresentou uma classificação para os itens de acordo com a dificuldade. Essa classificação, o percentual de itens (considerando a distribuição normal para o traço latente) e o b_k considerando a escala (0, 1) são apresentados na Tabela 4.4. Os itens 6 e 12 apresentam valores, de certa forma, discrepantes para b_k , uma vez que são, na prática, improváveis de se obter respondentes com dificuldades maiores e menores, respectivamente.

Tabela 4.4 – Classificação dos itens e a distribuição esperada no teste de acordo com o parâmetro de dificuldade (b_k).

Classificação	Quantidade no teste	Dificuldade (b_k)
Muito fácil	10%	$\leq -1,28$
Fácil	20%	-1,27 a -0,52
Mediano	40%	-0,51 a 0,51
Diffíl	20%	0,52 a 1,27
Muito difícil	10%	$\geq 1,28$

Fonte: Classificação apresentada por Rabelo (2013).

Informações como essas são muito relevantes e justificam a calibração dos itens, uma vez que itens com essas características poderiam ser descartados ou reformulados para uma nova calibração. Sobre o parâmetro a_k , o item 12 será interpretado como nenhuma discriminação; o item 6 com uma discriminação muito baixa; os itens 15 e 19 com discriminação baixa; os itens 2, 3, 4, 7, 8, 13, e 14 com discriminação moderada; os itens 1, 5, 9, 10, 16 e 17 com discriminação alta; e os itens 11 e 18 com discriminação muito alta. Dessa forma, as CCI correspondentes a cada um dos itens e as curvas de informação dos itens de Língua Portuguesa estão plotadas nas Figuras 4.7 e 4.8, respectivamente.

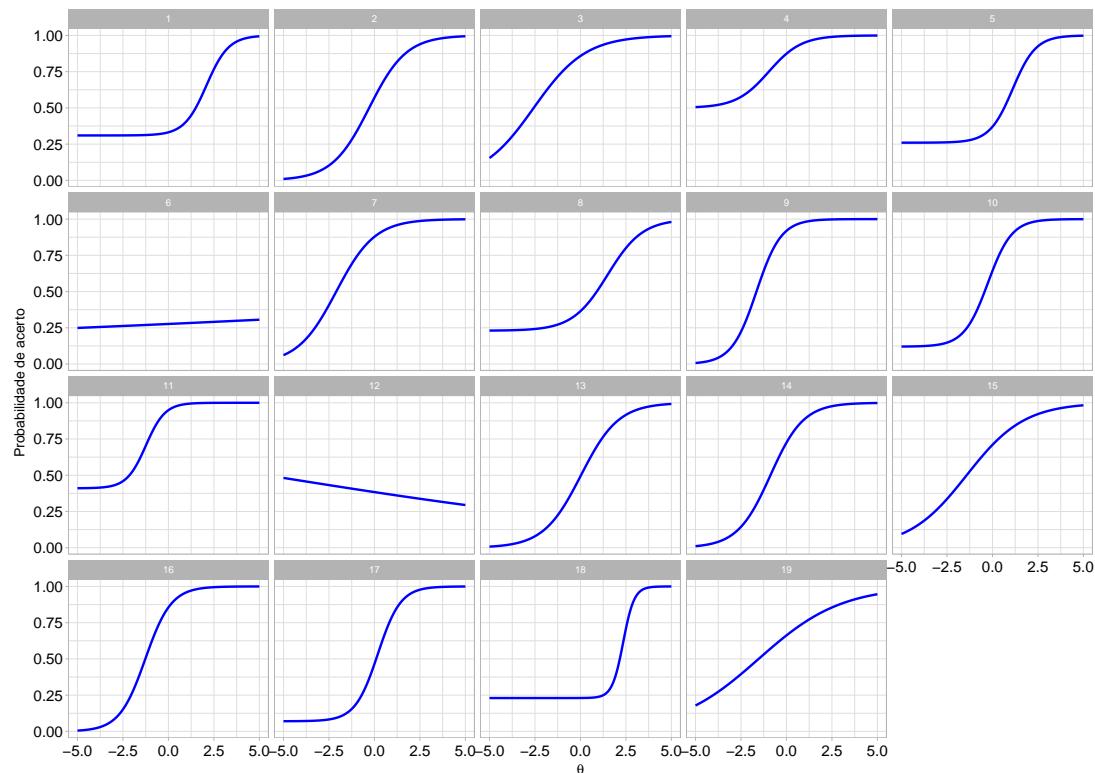


Figura 4.7 – Curvas características dos itens de Língua Portuguesa referentes a prova do Exame de Seleção do IFRN.

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

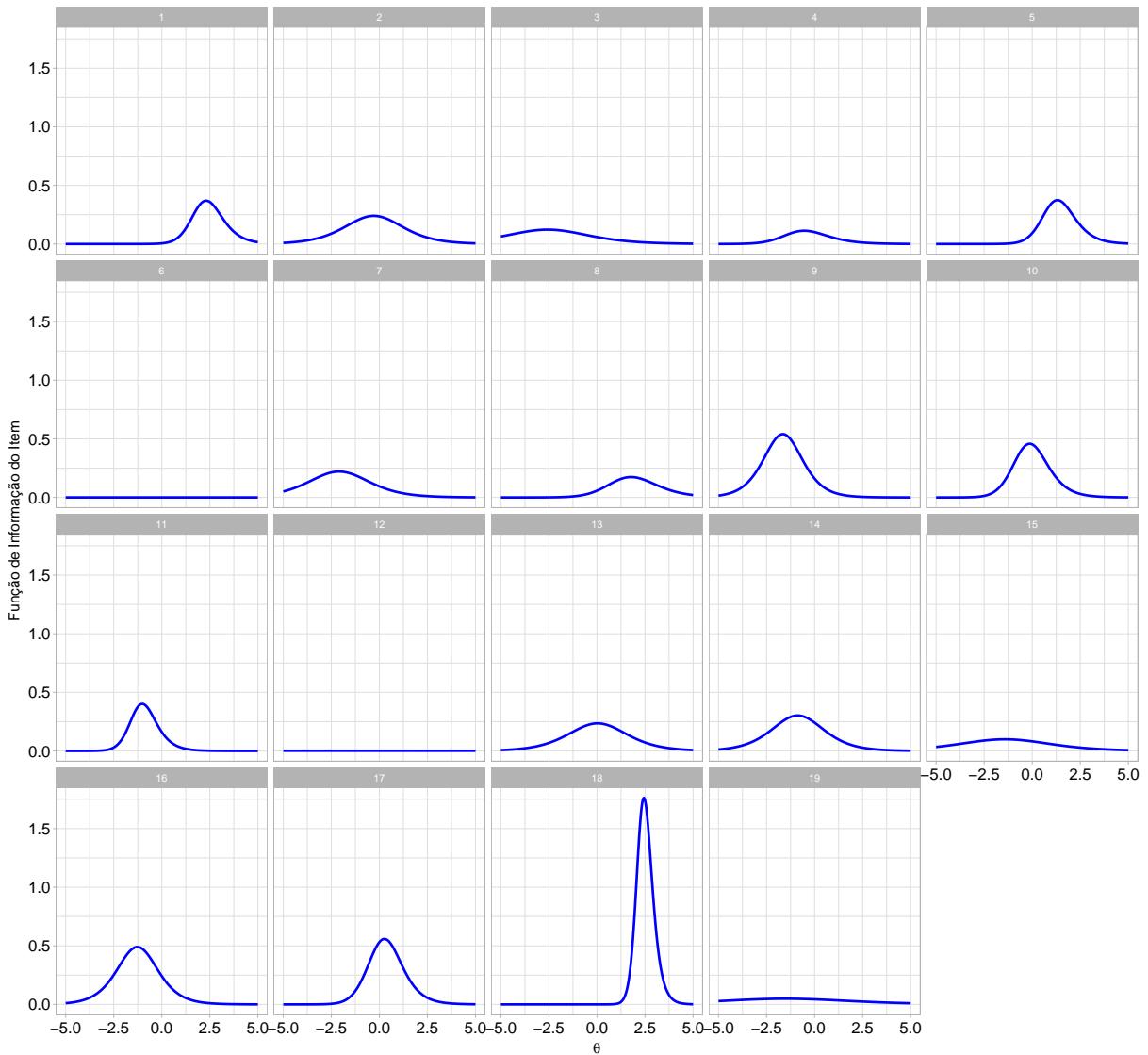


Figura 4.8 – Curvas de informação dos itens de Língua Portuguesa referentes a prova do Exame de Seleção do IFRN.

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Nota-se que alguns itens tem baixa informação e três deles (6, 12 e 19) informação praticamente nula, o que confirma o que foi apresentado quando se discutiu sobre o parâmetro b_k . Esses gráficos são informativos para se tomar decisões acerca dos itens que irão compor um determinado teste, o que poderá ser feito, na prática, se os itens passarem por uma etapa de calibração com uma amostra de respondentes com as mesmas características da população que será submetida ao teste. O item 18, em particular, é o item que apresenta maior informação e esta em torno do traço latente 2,5, ou seja, respondentes cuja aptidão está a 2,5 desvios-padrão da média 0. No tocante a função de informação do teste (Figura 4.9) e o respectivo erro padrão, percebe-se que o teste está melhor avaliando indivíduos com habilidade em torno de -2,5 a 2,5, sendo os traços latentes aquém ou além desse intervalo avaliados com menor precisão.

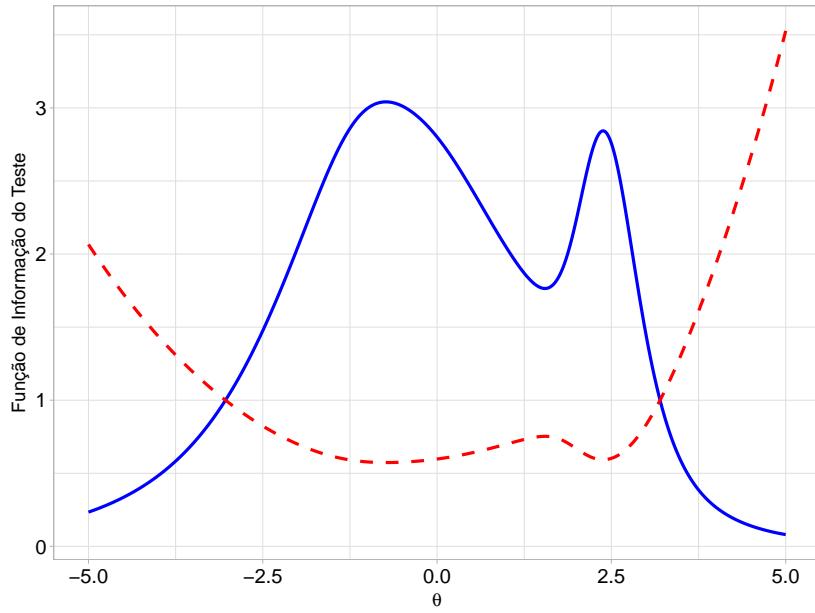


Figura 4.9 – Curva de informação do teste para a prova de Língua Portuguesa do Exame de Seleção do IFRN. A curva tracejada em vermelho representa o erro padrão.

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

No quesito estimação da proficiência em Língua Portuguesa, cada respondente teve um valor de θ estimado via EAP e o método da quadratura para resolução das integrais. Considerando a escala (0,1), o histograma de θ está apresentado na Figura 4.10. Nota-se, como esperado, uma distribuição simétrica em torno de 0 e desvio padrão 1.

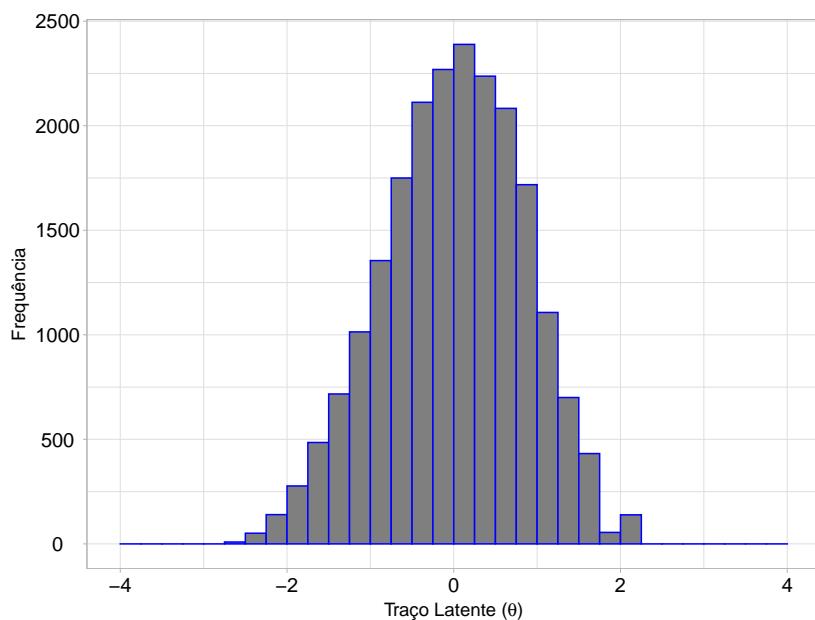


Figura 4.10 – Histograma do traço latente θ dos respondentes dos itens de Língua Portuguesa do Exame de Seleção do IFRN.

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Um gráfico recorrente em livros e artigos sobre TRI é o *scatterplot* entre o número de acertos e a proficiência. Esse gráfico é importante para verificar a amplitude da proficiência para cada total de itens acertados. Neste trabalho, preferiu-se utilizar *boxplots*, visto que há uma informação de cinco números: mínimo, primeiro quantil, mediana, terceiro quantil e máximo. Esse gráfico está apresentado na Figura 4.11. Nota-se, por exemplo, que candidatos que acertaram 5 itens podem ter proficiência maior do que candidatos que acertaram 11 itens (Tabela 4.5). Isso é possível, justamente pela questão da coerência pedagógica comentada no referencial teórico deste trabalho (Figura 2.9). Neste caso, o candidato que totalizou 11 questões corretas, acertou 3 questões muito difíceis e errou, por exemplo, 3 questões fáceis. Por outro lado, o respondente que totalizou 5 questões, acertou 2 itens muito fáceis, 2 itens fáceis e 1 item mediano.

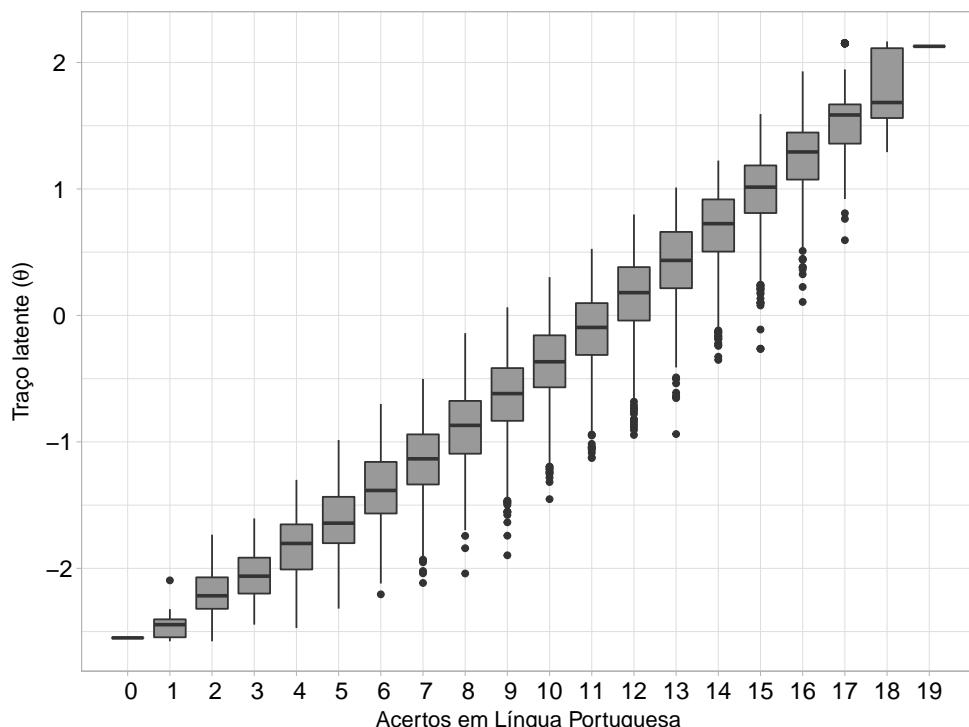


Figura 4.11 – Boxplots do traço latente (θ) dos respondentes agrupados por quantidade de itens corretos de Língua Portuguesa.

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Tabela 4.5 – Vetores de respostas de dois respondentes: a primeira linha com 5 acertos e a segunda linha com 11 acertos.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	θ
0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	-0,985
1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	-1,127
Muito fácil		Fácil		Mediano		Difícil		Muito Difícil											

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

As estimativas dos parâmetros dos itens de Matemática seguiram os mesmos padrões de estimativa que foram realizados para Língua Portuguesa (Tabela 4.6). Todos os itens apresentaram discriminação positiva e, em geral, alta ou muito alta, o que tornam os itens com informação máxima predominantemente acima dos itens de Língua Portuguesa. Além disso, os itens apresentaram, em geral, maior dificuldade quando comparados com a dificuldade dos itens da análise anterior. Os itens de Matemática apresentaram $c_k > 0$, ou seja, probabilidade não nula para o acerto casual.

Tabela 4.6 – Parâmetros estimados considerando os itens da Prova de Matemática do Exame de Seleção do IFRN para o modelo ML3 da TRI.

Item	Discriminação (a_k)	Dificuldade (b_k)	Acerto casual (c_k)	Informação máxima
20	1,75	-0,34	0,14	0,58
21	1,64	0,19	0,14	0,51
22	3,24	1,17	0,46	1,04
23	2,20	1,84	0,30	0,67
24	3,34	1,33	0,16	2,03
25	1,61	0,45	0,30	0,36
26	1,95	0,29	0,24	0,60
27	1,25	2,11	0,27	0,24
28	3,12	0,87	0,26	1,46
29	2,60	-0,01	0,35	0,84
30	2,98	2,27	0,26	1,33
31	2,11	0,35	0,18	0,79
32	2,70	0,78	0,25	1,13
33	2,50	1,67	0,25	0,97
34	2,37	0,58	0,19	0,98
35	1,95	2,24	0,22	0,63
36	2,04	0,49	0,21	0,69
37	2,20	0,51	0,21	0,81
38	1,61	1,00	0,12	0,52

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

A interpretação dos números presentes na Tabela 4.6 é realizada ao plotar as respectivas CCI e as curvas de informações dos itens (Figuras 4.12 e 4.13, respectivamente). O item 27 apresenta a menor informação máxima, ou seja, uma das menores discriminações (1,25 - moderada) e a probabilidade de acerto casual relativamente alta (0,27), o que favorece a diminuição da informação. Já o item 24 tem a maior discriminação (3,34) e está entre as menores probabilidades de acerto ao acaso (0,16). Assim, este item apresenta dificuldade 1,33 e a informação máxima está concentrada na vizinhança desse valor.

A informação da prova de Matemática (Figura 4.14) está concentrada por volta de -1 e 3, isto é, maior informação (máximo por volta de 10, três vezes maior do que o máximo em Língua Portuguesa e concentrada em um intervalo de habilidade razoavelmente menor) captada para indivíduos com habilidades maiores que a média 0. Por outro lado, o erro padrão têm crescimento exponencial para as habilidades menores que -1. A distribuição de θ , evidenciada por seu histograma (Figura 4.16), é assimétrica à direita.

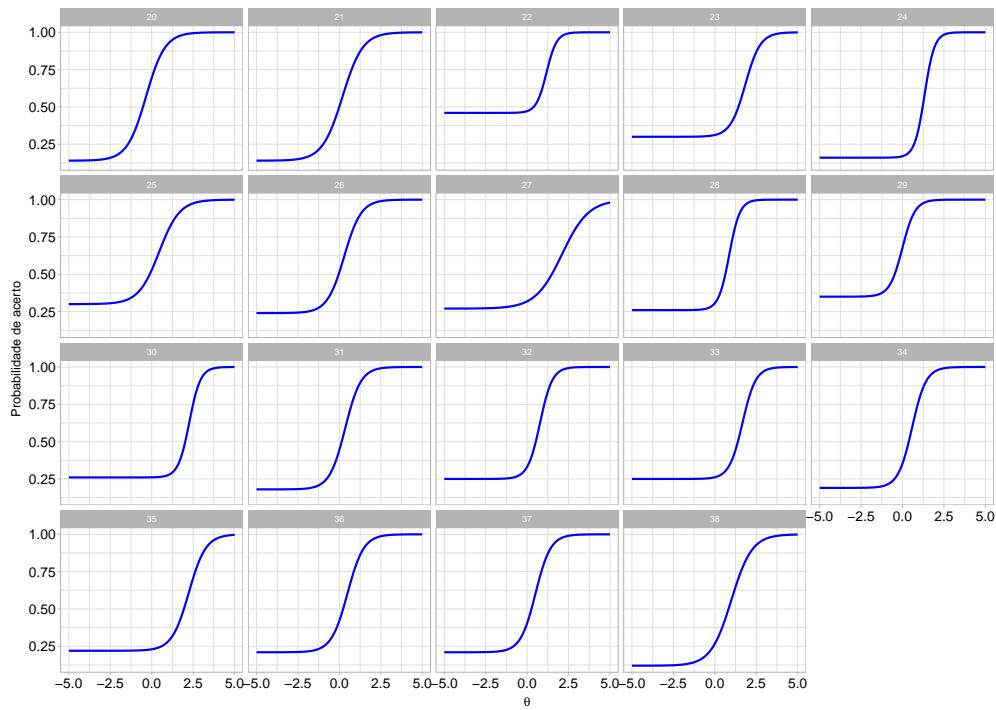


Figura 4.12 – Curvas características dos itens de Matemática referentes a prova do Exame de Seleção do IFRN.

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

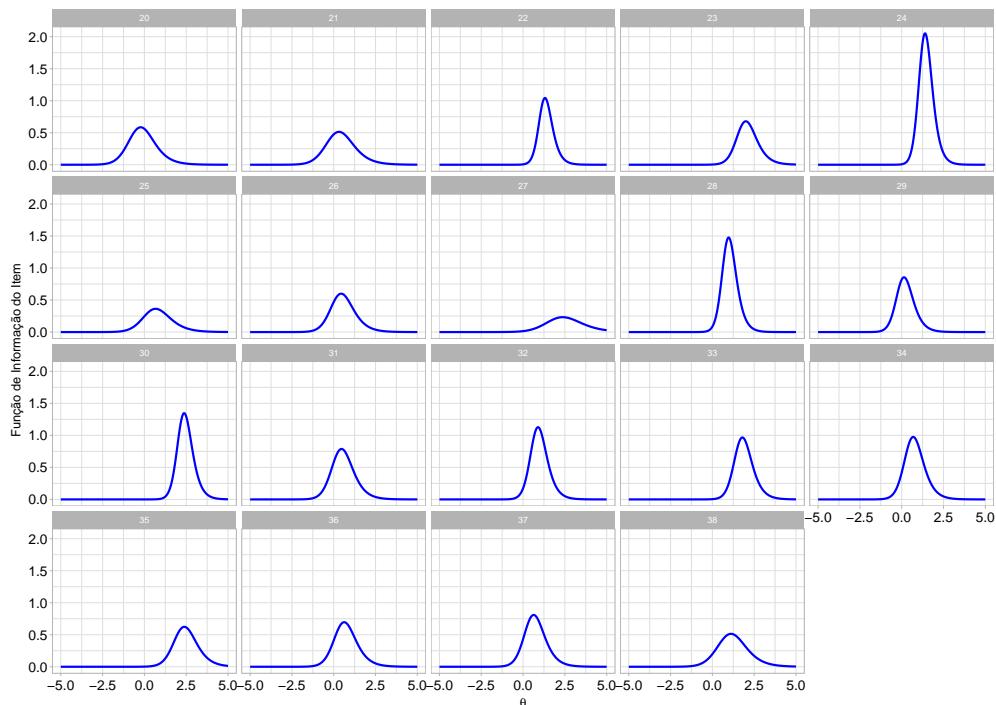


Figura 4.13 – Curvas de informação dos itens de Matemática referentes a prova do Exame de Seleção do IFRN.

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

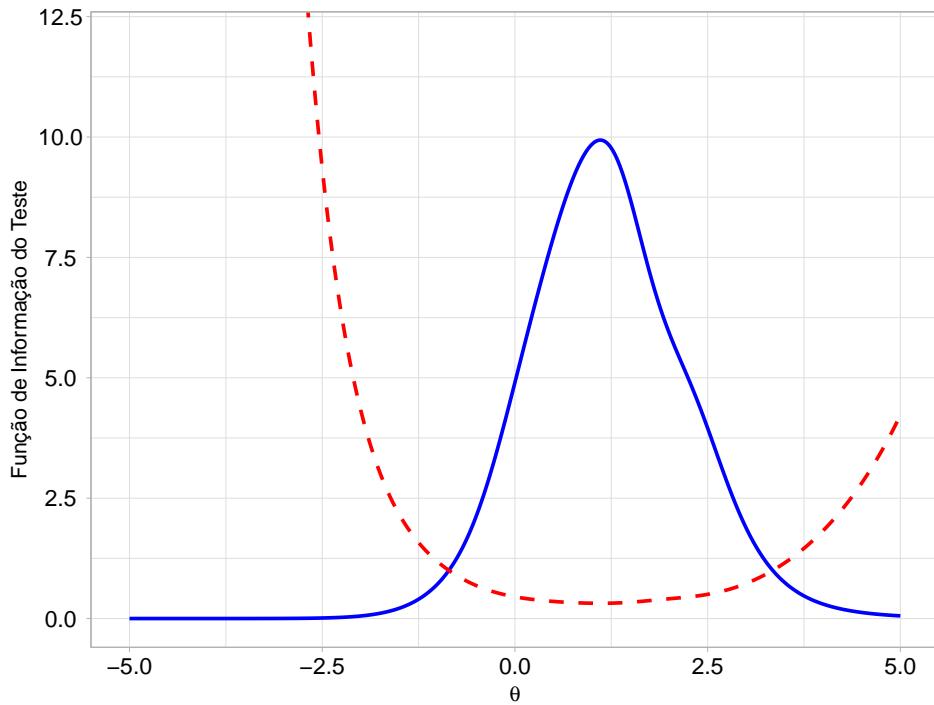


Figura 4.14 – Curva de informação do teste para a prova de Matemática do Exame de Seleção do IFRN. A curva tracejada em vermelho representa o erro padrão.

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

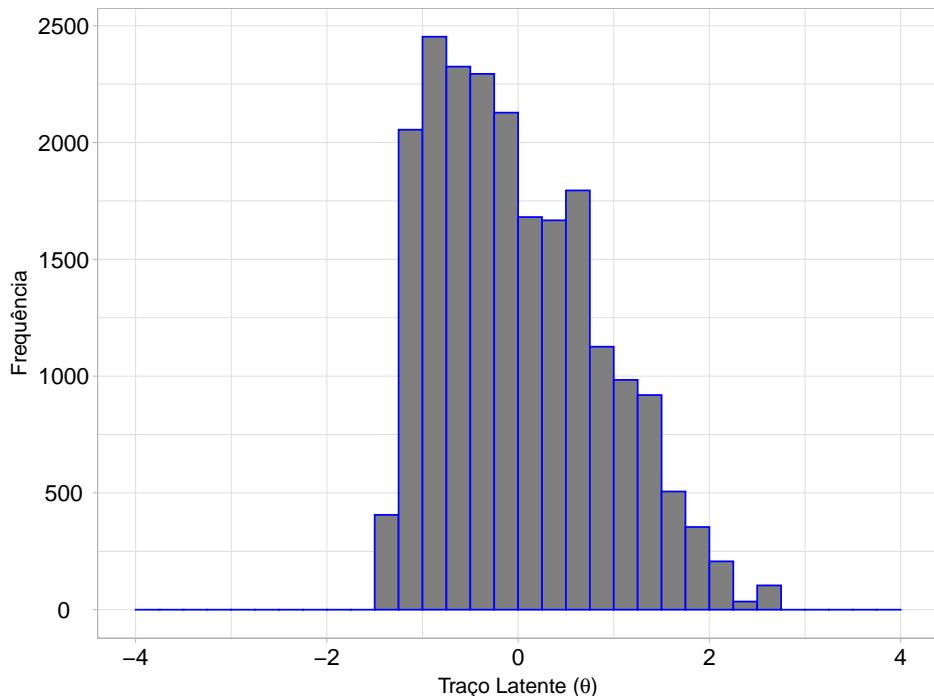


Figura 4.15 – Histograma do traço latente θ dos respondentes dos itens de Matemática do Exame de Seleção do IFRN.

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Os *boxplots* dos traços latentes em relação à quantidade de acertos em Matemática são apresentados na Figura 4.16. A dispersão dos traços latentes vai aumentando com o aumento de acertos e, gradativamente, vai diminuindo até se tornar 0 para os respondentes que acertaram todos os itens. Além disso, percebe-se a presença de *outliers*, sempre na parte inferior dos *boxplots* e uma possível justificativa para esse fato são muitos itens acertados ao acaso. Nota-se que, por exemplo, existem respondentes com 6 acertos que chegam a ter pontuação maior do que respondentes com 12 acertos. A justificativa para esse fato é, como em Língua Portuguesa, a coerência pedagógica, que é evidenciada, por exemplo, pelo ENEM (BRASIL, 2012).

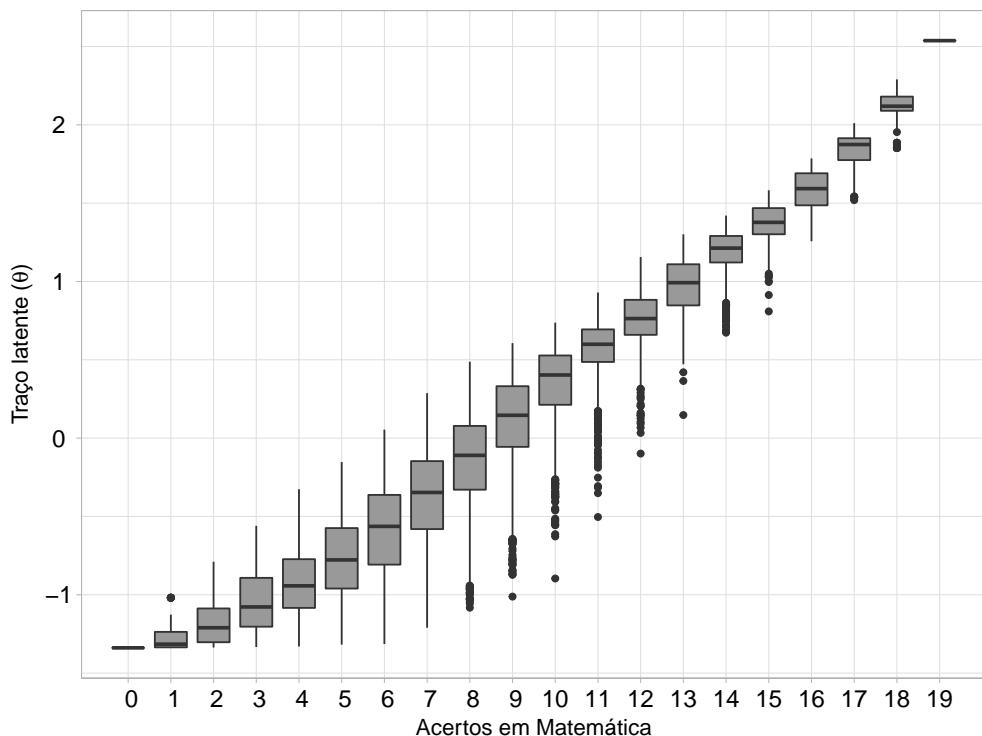


Figura 4.16 – *Boxplots* do traço latente (θ) dos respondentes agrupados por quantidade de itens corretos de Matemática.

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

A última parte desta seção é dedicada à comparação da classificação final dos candidatos. Para isto, foi tomado como exemplo o resultado da seleção para o Curso Técnico Integrado em Eletrônica, turno vespertino do Campus Natal - Zona Norte. Ressalta-se que neste estudo não houve distinção de curso ou verificação se os respondentes eram cotistas. A nota final, via TRI, foi dada pela média aritmética dos valores de θ de Língua Portuguesa e Matemática, escala (500, 100), além da nota da redação considerando a correção valendo 1000 pontos. Dos 50 primeiros escores da TCT, houve mudanças em praticamente todas as posições ao utilizar a TRI como metodologia, por exemplo o 3º colocado da classificação via TRI ficou em 11º na TCT e o 19º da TRI estava em 40º na TCT (Tabela 4.7).

Tabela 4.7 – Cinquenta melhores escores, via Teoria da Resposta ao Item, dos candidatos do Exame de Seleção do IFRN que optaram pelo Curso Técnico Integrado em Eletrônica, turno vespertino do Campus Natal - Zona Norte.

Pos. TRI	Pos. TCT	Acer. Port.	Acer. Mat.	Port. TRI	Mat. TRI	Red.×10	Esc. TCT	Esc. TRI
1	1	18	18	711	709	950	721	790
2	3	16	16	643	644	850	660	712
3	11	15	10	608	545	950	609	701
4	4	16	14	627	618	850	641	698
5	8	17	12	715	574	800	625	697
6	6	15	15	589	653	830	635	691
7	9	15	13	570	613	880	625	688
8	16	13	13	568	615	880	601	688
9	2	18	17	663	696	680	664	679
10	7	16	14	623	624	780	629	676
11	12	13	15	535	648	810	608	665
12	24	14	12	603	575	810	591	663
13	19	14	13	604	599	780	595	661
14	5	17	16	689	644	650	637	661
15	34	15	9	597	525	830	578	651
16	18	14	14	591	628	730	596	650
17	10	15	14	572	610	760	613	647
18	33	13	13	567	588	780	583	645
19	40	17	8	715	526	690	567	644
20	27	12	15	509	656	760	587	642
21	28	14	13	599	586	730	586	638
22	17	14	13	522	580	810	600	638
23	22	15	14	637	635	640	592	637
24	23	16	12	630	590	680	592	633
25	26	15	11	556	557	780	588	631
26	30	14	14	604	629	660	583	631
27	29	15	12	565	606	710	585	627
28	39	15	10	586	559	730	569	625
29	14	14	16	562	651	660	603	624
30	35	14	12	561	574	730	577	622
31	15	16	14	602	633	630	602	622
32	37	13	14	582	618	660	571	620
33	21	16	13	618	606	630	592	618
34	31	12	18	554	704	580	583	613
35	13	16	15	596	642	590	605	609
36	50	12	10	524	541	750	537	605
37	20	16	15	633	645	530	594	603
38	32	13	15	504	629	670	583	601
39	46	12	14	562	625	610	550	599
40	43	14	13	620	615	560	556	598
41	42	13	13	569	567	650	560	595
42	25	16	14	594	628	560	590	594
43	36	15	13	588	579	610	577	593
44	45	15	11	635	558	570	551	588
45	44	14	12	566	603	590	552	586
46	41	15	12	602	576	580	562	586
47	52	11	11	474	550	730	531	585
48	48	15	11	633	557	540	545	577
49	54	13	9	538	529	630	518	566
50	47	17	8	616	494	580	548	563

Fonte: Dados da pesquisa (2021).

5 Considerações Finais

Este trabalho consistiu em aplicar a TRI aos dados do Exame de Seleção 2020 do IFRN e teve como objetivo geral estimar o traço latente (também chamado de proficiência, aptidão entre outros) dos candidatos em relação às provas de Língua Portuguesa e Matemática. Desse modo, por não haver uma fase de calibração dos itens, ou seja, aplicar os itens para uma amostra representativa de indivíduos que estão no 9º ano do Ensino Fundamental II e estimar os parâmetros de dificuldade, discriminação e probabilidade de acerto casual para cada item referentes a prova dessas duas disciplinas.

Após a estimação dos itens e das proficiências de todos os candidatos que fizeram o Exame de Seleção, verificou-se que alguns itens poderiam ter sido retirados da prova de Língua Portuguesa (itens 6 e 12) pela função de informação do item ser praticamente uma reta horizontal em torno da informação 0 e esta prova avaliou, com menor erro padrão, predominantemente candidatos com habilidade em torno da média 0. Em Matemática, os itens se mostraram mais discriminativos e com maior dificuldade em relação à Língua Portuguesa e, além disso, a prova avaliou com mais informação candidatos acima da média 0, justamente pelos itens predominantemente apresentarem dificuldade maior do que 0.

Também foi notada uma certa variabilidade na proficiência dos candidatos quando comparada com o número de acertos nas provas. Esse é um diferencial da TRI, visto que o modo que θ é estimado implica na chamada coerência pedagógica. Além disso, todos os candidatos de todos os *campi*, cursos e turnos podem ter seus escores comparáveis, sem a necessidade de fazer este procedimento para cada campus/curso/turno separadamente.

No tocante à classificação, por exemplo, dos 50 primeiros colocados do Curso Técnico Integrado em Eletrônica, turno vespertino do Câmpus Natal - Zona Norte, houve mudança em praticamente todas as posições, sendo que dois deles estavam abaixo da posição conquista ao considerar a TCT. Notou-se um impacto bem maior nas posições centrais, visto que há uma maior variabilidade nos escores relacionados a 50% de acertos nos itens das respectivas provas.

Portanto, este trabalho se torna relevante para que os gestores das instituições que realizam exames de seleções para a entrada de alunos possam conhecer um pouco mais sobre as vantagens e desvantagens de se implementar a TRI nos referidos certames.

Referências

- ANDRADE, D. F. de; TAVARES, H. R.; VALLE, R. da C. Teoria da resposta ao item: conceitos e aplicações. *ABE, São Paulo*, 2000.
- ANDRADE, J. M. de; LAROS, J. A.; GOUVEIA, V. V. O uso da teoria de resposta ao item em avaliações educacionais: diretrizes para pesquisadores. *Avaliação Psicológica*, Instituto Brasileiro de Avaliação Psicológica, v. 9, n. 3, p. 421–435, 2010.
- AYALA, R. J. D. *The theory and practice of item response theory*. New York: Guilford Publications, 2013.
- BAKER, F. B. *The basics of item response theory*. Washington, DC: ERIC, 2001.
- BAKER, F. B.; KIM, S.-H. *The basics of item response theory using R*. New York: Springer, 2017.
- BIRNBAUM, A. L. Some latent trait models and their use in inferring an examinee's ability. *Statistical theories of mental test scores*, Addison-Wesley, 1968.
- BOCK, R. D.; LIEBERMAN, M. Fitting a response model for dichotomously scored items. *Psychometrika*, Springer, v. 35, n. 2, p. 179–197, 1970.
- BRASIL. *Entenda a sua nota no ENEM: Guia do participante*. Brasília: Ministério da Educação, 2012.
- BRASIL. *ENADE 2017: relatório-síntese Química*. Brasília, 2017. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_superior/enade/relatorio_sintese/2017/Quimica.pdf>.
- CHALMERS, R. P. mirt: A multidimensional item response theory package for the R environment. *Journal of Statistical Software*, v. 48, n. 6, p. 1–29, 2012.
- COUTO, G.; PRIMI, R. Teoria de resposta ao item (tri): conceitos elementares dos modelos para itens dicotômicos. *Boletim de Psicologia*, Associação de Psicologia de São Paulo, v. 61, n. 134, p. 1–15, 2011.
- DAHL, D. B. et al. xtable: Export tables to latex or html. 2019. R package version 1.8-4. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=xtable>>.
- FOX, J.-P. *Bayesian item response modeling: Theory and applications*. Berlin: Springer Science & Business Media, 2010.
- GONÇALVES, H. de A. *Manual de metodologia da pesquisa científica*. Rio de Janeiro: Avercamp, 2005.
- INSTITUTO FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE. *De Escola de Aprendizes Artífices a Instituto Federal*. Natal: IFRN, 2021.
- KLEIN, R. Utilização da teoria de resposta ao item no sistema nacional de avaliação da educação básica (Saeb). *Revista Meta: Avaliação*, v. 1, n. 2, p. 125–140, 2009.

- KOMSTA, L.; NOVOMESTKY, F. moments: Moments, cumulants, skewness, kurtosis and related tests. 2015. R package version 0.14. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=moments>>.
- LEMON, J. Plotrix: a package in the red light district of r. *R-News*, v. 6, n. 4, p. 8–12, 2006.
- LORD, F. M. A theory of test scores (psychometric monograph no. 7). *Iowa City, IA: Psychometric Society*, v. 35, 1952.
- LORD, F. M. *Applications of item response theory to practical testing problems*. Abingdon: Routledge, 1980.
- LORD, F. M.; NOVICK, M. R. *Statistical theories of mental test scores*. Glenview: IAP, 1968.
- PAEK, I.; COLE, K. *Using R for item response theory model applications*. Abingdon: Routledge, 2019.
- PASQUALI, L. Psicometria. *Revista da Escola de Enfermagem da USP*, SciELO Brasil, v. 43, n. SPE, p. 992–999, 2009.
- PASQUALI, L. *Psicometria: teoria dos testes na psicologia e na educação*. Petrópolis: Editora Vozes Limitada, 2017.
- PASQUALI, L. *TRI–Teoria de resposta ao item: Teoria, procedimentos e aplicações*. Curitiba: Editora Appris, 2018.
- PASQUALI, L.; PRIMI, R. Fundamentos da teoria da resposta ao item: Tri. *Avaliação Psicológica: Interamerican Journal of Psychological Assessment*, Instituto Brasileiro de Avaliação Psicológica (IBAP), v. 2, n. 2, p. 99–110, 2003.
- QGIS DEVELOPMENT TEAM. *QGIS Geographic Information System. Open Source Geospatial Foundation Project*. 2016.
- R CORE TEAM. R: A language and environment for statistical computing. Vienna, Austria, 2021.
- RABELO, M. Avaliação educacional: fundamentos, metodologia e aplicações no contexto brasileiro. *Rio de Janeiro: SBM*, v. 29, p. 30–31, 2013.
- RASCH, G. Probabilistic models for some intelligence tests and attainment tests. *Danish Institute for Educational Research, Copenhagen, Denmark*, 1960.
- RIZOPOULOS, D. ltm: An R package for latent variable modelling and item response theory analyses. *Journal of Statistical Software*, v. 17, n. 5, p. 1–25, 2006. Disponível em: <<http://www.jstatsoft.org/v17/i05/>>.
- SARTES, L. M. A.; SOUZA-FORMIGONI, M. L. O. Avanços na psicometria: da teoria clássica dos testes à teoria de resposta ao item. *Psicologia: Reflexão e Crítica*, SciELO Brasil, v. 26, n. 2, p. 241–250, 2013.
- TAVARES, C. Z. Teoria da resposta ao item: uma análise crítica dos pressupostos epistemológicos. *Estudos em Avaliação Educacional*, v. 24, n. 54, p. 56–76, 2013.

WICKHAM, H. et al. Welcome to the tidyverse. *Journal of Open Source Software*, v. 4, n. 43, p. 1686, 2019.

WICKHAM, H.; BRYAN, J. readxl: Read excel files. 2019. R package version 1.3.1. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=readxl>>.

Anexo A

**Itens de Língua Portuguesa e Matemática do Exame de Seleção
2020 do IFRN, desconsiderando as questões anuladas.**

Texto 1

1 em cada 4 crianças já sofreu ofensas na Internet: *cyberbullying* desafia pais

Júlia Marques, O Estado de S.Paulo.
17 de dezembro de 2017 | 03h00

Percentual de vítimas cresce ano a ano: passou de 15% em 2014 para 23% no ano passado. Falta de intimidade de adultos com tecnologia - enquanto crianças são nativas digitais - é uma das explicações para a dificuldade dos pais de identificar riscos

Quando entrou em um colégio novo, na Zona Oeste do Rio, os problemas começaram para Laura, de 13 anos. “Ela é popular. Faz amizade fácil e é bonita. Aquilo provocou a ira de um grupo de colegas”, lembra Rita, de 46 anos, mãe da jovem. Para conter as brigas na escola particular, a menina foi trocada de turno, mas a família jamais imaginaria que, mesmo distante dos antigos colegas, as agressões continuariam em outro espaço: o virtual. “Achei que haveria um basta. Mas foi pior. Pegaram a foto dela e botaram nas redes sociais. Fizeram o horror”, conta a mãe. “Se ela abria o *live* (vídeo ao vivo na Internet), sempre, entrava um e xingava.” Laura foi ofendida com palavras como “rata” e “demônio” nas redes sociais.

Agressões levaram a família a mudar a jovem de escola; hoje, ela faz acompanhamento psicológico. A situação ficou insustentável até que a mãe trocou a menina de escola no meio do ano. “A foto da minha filha deve andar na Internet. Agora, ela está com trauma, no psicólogo. Amava publicar nas redes e não posta mais.” Os nomes de vítimas e familiares foram trocados para preservá-los. Casos como o de Laura não são isolados. Pesquisa do Comitê Gestor da Internet no Brasil (CGI.br), de outubro, mediou o comportamento *online* de jovens.

Os dados revelam que, de cada quatro crianças e adolescentes, um foi tratado de forma ofensiva na Internet, o que corresponde a 5,6 milhões de meninos e meninas entre 9 e 17 anos. O percentual cresce ano a ano: passou de 15% em 2014 para 20% em 2015 até chegar a 23% no ano passado. “Nesse dado (sobre ofensas online), a criança ou adolescente foi exposto a um risco, mas não necessariamente teve alguma sequela”, pondera Maria Eugenia Sozio, coordenadora da pesquisa TIC *Kids Online* Brasil. A taxa, portanto, nem sempre corresponde a *cyberbullying* - quando a agressão virtual é repetida -, mas faz soar o alerta para perigos que crianças e adolescentes correm na *web* e a importância da atenção dos pais. Segundo especialistas, as ofensas na Internet podem ter impacto ainda maior na vida das crianças. “Uma postagem atinge número incontável de pessoas e isso aumenta o sofrimento da vítima. Ela não sabe quem viu ou não”, afirma a psicóloga e pesquisadora da Universidade Estadual Paulista (Unesp) Luciana Lapa.

Em casos de agressão na escola, o jovem encontra refúgio em casa. “No *cyberbullying*, não. Onde quer que ele vá, a agressão vai junto”, diz Luciana. Outro problema é a gravidade das ofensas, encorajadas pela distância física da vítima. Também é comum que as agressões partam de pessoas da mesma faixa etária e que fazem parte do convívio. Para a pedagoga e psicopedagoga clínica e institucional Denise Aragão, as ofensas podem afetar até o desempenho na escola. “As crianças ficam preocupadas em se defender e perdem o desejo de aprender.” O uso crescente dos *smartphones* pelos jovens, com acesso cada vez mais particular, desafia a mediação dos pais.

A gerente de operações Ana, de 53 anos, conhecia os riscos da Internet, mas se assustou quando passou por uma situação constrangedora na família. Quando a filha tinha 14 anos (hoje ela tem 18), uma foto íntima da garota vazou entre alunos de uma escola particular na Zona Sul paulistana após uma brincadeira entre amigas. Os celulares facilitaram a propagação. “Ela ficou envergonhada. Foi uma semana de constrangimentos”, conta. “Em casa, fizemos questão de explicar o quanto sério aquilo era. Mostramos que isso pode ficar no ‘currículo’ dela para o resto da vida”.

A mãe de Helena, de 10 anos, só percebeu o problema depois que notou que a filha estava cabisbaixa e chorava pelos cantos. “Fizeram um grupo no *Whatsapp* (entre os colegas da escola) para xingá-la por causa da cor. Chamavam de macaca e ‘nega’ do cabelo duro”, conta a assistente administrativa Adriana, de 39 anos. Ela procurou os pais dos agressores. “Fazia uma semana que um deles tinha dado um celular para uma das meninas. Foi aí que ele descobriu. Acho que os pais deveriam prestar mais atenção ao que o filho faz na Internet”, desabafa.

Apesar de 23% das crianças e adolescentes terem relatado à pesquisa que foram vítimas de ofensas na Internet, só 11% dos pais disseram que os filhos passaram por incômodos. A falta de intimidade de adultos com a tecnologia - enquanto as crianças são nativas digitais - ajuda a explicar a dificuldade das famílias em identificar riscos. “O *gap* existe, mas é preciso revertê-lo. Uma sugestão é estar disponível, querer saber o que a criança faz na Internet”, diz Heloisa Ribeiro, da Childhood Brasil, entidade de proteção a crianças e adolescentes.

Texto adaptado para fins pedagógicos. Disponível em:
<<https://brasil.estadao.com.br/noticias/geral,1-em-cada-4-criancas-ja-sofreu-ofensas-na-internet-cyberbullying-desafia-pais>> Acesso em: 13 ago de 2019.

Texto 2

Disponível em:
<<https://www.google.com/search?q=+CYBERBULLYING&client=firefox-b-d&tbo>>
Acesso em: 13 ago de 2019.

QUESTÕES DE MÚLTIPLA ESCOLHA - LÍNGUA PORTUGUESA

01. A intenção comunicativa dominante no **Texto 1** é

- (a) informar sobre o aumento do *cyberbullying* no Brasil.
- (b) narrar situações de *cyberbullying* com crianças e jovens.
- (c) criticar a dificuldade das famílias em perceber o *cyberbullying*.
- (d) descrever casos de *cyberbullying* analisados por psicológos.

02. De acordo com o **Texto 1**, as famílias têm dificuldade em identificar o *cyberbullying* devido

- (a) à falta de atenção dada aos filhos pela vida corrida nas grandes cidades.
- (b) ao uso cada vez mais frequente dos *smartphones* pelos jovens.
- (c) ao conhecimento reduzido dos pais sobre as novas tecnologias.
- (d) à ausência de atenção dos pais ao uso indiscriminado da Internet pelos filhos.

03. De acordo com o **Texto 1**,

- (a) as agressões só não são graves por serem oriundas de pessoas que estão fisicamente distantes.
- (b) os ataques sofridos na Internet podem se tornar muito ofensivos e prejudiciais à vida das vítimas.
- (c) o surgimento do *cyberbullying* deve-se ao acesso irrestrito de crianças e jovens aos smartphones.
- (d) o sofrimento das vítimas do *cyberbullying* no Brasil pode ser amenizado por entidades protetivas.

Considere o trecho a seguir para responder às questões de 04 a 06.

Quando entrou em um colégio novo, na Zona Oeste do Rio, os problemas começaram para Laura, de 13 anos. “Ela é popular. Faz amizade fácil e é bonita. Aquilo provocou a ira de um grupo de colegas”, lembra Rita, de 46 anos, mãe da jovem.

04. O vocábulo Quando apresenta ideia de

- (a) tempo.
- (b) espaço.
- (c) movimento.
- (d) atualidade.

05. O trecho constitui-se de

- (a) três períodos e seis orações.
- (b) quatro períodos e sete orações.
- (c) dois períodos e cinco orações.
- (d) cinco períodos e quatro orações.

06. Assinale a opção em que os termos apresentam a mesma função sintática.

- (a) ira e mãe.
- (b) Laura e Rita.
- (c) Ela e Aquilo.
- (d) popular e fácil.

07. De acordo com o **Texto 1**,

- (a) os casos apresentados no texto são isolados, pois não há pesquisas que comprovem a existência de *cyberbullying* no Brasil.
- (b) o uso indiscriminado dos *smartphones* pelos jovens influencia muito pouco a disseminação das agressões a jovens.
- (c) as agressões feitas na Internet podem causar maior impacto na vida das crianças do que aquelas realizadas presencialmente.
- (d) a maioria dos pais percebe, com antecedência, que os filhos estão vivendo alguma agressão por meio das redes sociais.

08. De acordo com o **Texto 1**,

- (a) a família não sabe ainda como proteger os filhos dos riscos do *cyberbullying*.
- (b) a agressão não acontece no contexto escolar, mas em outros espaços sociais.
- (c) o *cyberbullying* é inevitável, pois os pais não se dão conta dos riscos dele.
- (d) o uso de *smartphones* tornou-se uma ameaça à boa convivência familiar.

09. A leitura do **Texto 1** permite inferir que

- (a) o percentual de vítimas de *cyberbullying* começou a decrescer no Brasil, desde 2013.
- (b) a escola é o refúgio de crianças e adolescentes vítimas de agressão e de *cyberbullying*.
- (c) o domínio precoce das tecnologias expõe as crianças aos riscos de *cyberbullying*.
- (d) a parceria entre a escola e a família contra o *cyberbullying* mostrou-se eficaz desde 2014.

Considere o trecho para responder às questões de 10 a 14.

Segundo [1] especialistas, as ofensas na Internet podem ter **impacto** [2] ainda maior na vida das crianças. “Uma postagem atinge número incontável de pessoas e isso aumenta o sofrimento da vítima. **Ela** [3] não sabe quem viu ou não”, afirma a psicóloga e **pesquisadora** [4] da Universidade **Estadual** [5] Paulista (Unesp) Luciana Lapa.

10. O elemento linguístico **Segundo** [1] indica sentido de

- (a) conformidade.
- (b) consequência.
- (c) condição.
- (d) causa.

11. O elemento linguístico **Ela** [3] se refere à

- (a) vítima.
- (b) psicóloga.
- (c) pesquisadora.
- (d) postagem.

12. Os elementos linguísticos **pesquisadora** [4] e **Estadual** [5], respectivamente, assumem valor de

- (a) substantivo e substantivo.
- (b) adjetivo e adjetivo
- (c) adjetivo e substantivo.
- (d) substantivo e adjetivo.

13. No trecho, o uso das aspas justifica-se por

- (a) destacar algumas expressões de conteúdo irônico.
- (b) isolar citação textual que rompe com o registro formal.
- (c) destaca ideia expressa em registro informal.
- (d) isolar citação textual direta de autoria alheia.

14. O vocábulo **impacto [2]** tem sentido de

- (a) efeito.
- (b) causa.
- (c) duração.
- (d) possibilidade.

15. A leitura do **Texto 2** permite inferir que o *cyberbullying* é

- (a) um problema que atinge todos que têm acesso a tecnologias.
- (b) uma brincadeira infantil inofensiva utilizada pelas crianças.
- (c) um perigo para as crianças que usam livremente tecnologias.
- (d) uma brincadeira infantil tão perigosa como outra qualquer.

16. No **Texto 2**, a imagem da mão oferece ideia de

- (a) opressão.
- (b) proteção.
- (c) empatia.
- (d) desrespeito.

17. No **Texto 2**, a ideia de que o jovem está indefeso é dada pelo

- (a) movimento da mão em proteção ao jovem estudante.
- (b) acesso fácil dos jovens aos aparelhos conectados à Internet.
- (c) tamanho da mão em relação ao seu próprio tamanho.
- (d) fato de ser um jovem com farda e mochila a caminho da escola.

18. No **Texto 2**, há o predomínio da

- (a) argumentação caracterizada pela defesa de um ponto de vista.
- (b) narração caracterizada pela veracidade dos fatos.
- (c) argumentação caracterizada pela linguagem verbal.
- (d) narração caracterizada pela presença de personagem.

19. Os **Textos 1 e 2**, respectivamente, são

- (a) notícia e tirinha.
- (b) artigo de opinião e cartaz.
- (c) editorial e cartum.
- (d) reportagem e charge.

QUESTÕES DE MÚLTIPLA ESCOLHA - MATEMÁTICA

20. De acordo com o **Texto 1**, quando entrou em um colégio novo, na Zona Oeste do Rio, os problemas começaram para Laura, de 13 anos. “Ela é popular. Faz amizade fácil e é bonita. Aquilo provocou a ira de um grupo de colegas”, lembra Rita, de 46 anos, mãe da jovem. Sabendo que o texto foi escrito em 2017, a soma dos anos de nascimento de Laura e sua mãe resulta em

- (a) 3974.
- (b) 3975.
- (c) 3976.
- (d) 3977.

21. Ao ler o **Texto 1**, onde Rita, de 46 anos, relata que sua filha Laura, de 13 anos, foi vítima de ofensas, um estudante de Matemática percebeu que a idade de Laura correspondeu a um quarto da idade da sua mãe quando Laura tinha

- (a) 10 anos.
- (b) 11 anos.
- (c) 12 anos.
- (d) 13 anos.

22. Uma das orientações dadas por especialistas para a prevenção do *cyberbullying* é a observação dos limites de idade definidos para o uso de redes sociais. Em uma pesquisa feita com 450 alunos de uma escola, observou-se que $\frac{5}{9}$ dos alunos da escola acessavam uma rede social com idade mínima maior que a sua idade e que, desses, $\frac{3}{5}$ eram meninos. O número de meninos a acessar alguma rede social sem ter a idade mínima necessária é

- (a) 100 meninos.
- (b) 150 meninos.
- (c) 200 meninos.
- (d) 250 meninos.

23. Ao organizar uma campanha de conscientização contra o *cyberbullying*, um grupo de alunos resolve divulgar os males dessa prática. Dispondo de um papel para cartão com 88 cm de comprimento por 104 cm de largura, eles pretendem produzir cartões quadrados com a maior dimensão possível e de tal forma que não sobrem pedaços do papel para cartão. Assim, o lado dos cartões recortados deverá medir

- (a) 8 cm.
- (b) 11 cm.
- (c) 12 cm.
- (d) 13 cm.

24. Um pai preocupado com o *cyberbullying* em escolas e com o tempo de seu filho na internet resolve negociar a frequência com que ele acessará o mundo virtual. O pai estabeleceu que seu filho poderia utilizar a Internet dois quintos do tempo em que permanece estudando. Se o filho estuda 4 horas por dia no colégio, o tempo, em minutos, que deverá estudar em casa para que possa ficar na Internet por um período de duas horas é

- (a) 60 minutos.
- (b) 90 minutos.
- (c) 120 minutos.
- (d) 150 minutos.

25. Segundo o **Texto 1**, 5,6 milhões de meninos e meninas entre 9 e 17 anos foram tratados de forma ofensiva na Internet. Em notação científica, a quantidade de meninos e meninas ofendidos nas redes sociais é

- (a) $5,6 \cdot 10^6$
- (b) $5,6 \cdot 10^7$
- (c) $56 \cdot 10^6$
- (d) $56 \cdot 10^7$

26. Em uma campanha contra o *cyberbullying*, uma escola promoveu uma palestra para pais e alunos. Querendo estimar o público presente, o professor de Matemática observou que o pátio, que tinha forma retangular com 50 m de comprimento por 80 m de largura, estava lotado. Sabendo que, em média, o pátio comporta 4 pessoas por metro quadrado, ele conclui que estavam presentes

- (a) 12.000 pessoas.
- (b) 14.000 pessoas.
- (c) 16.000 pessoas.
- (d) 18.000 pessoas.

27. Os alunos de uma turma resolveram distribuir panfletos contra o *cyberbullying*. Inicialmente, haviam 4.800 panfletos para ser distribuídos e cada aluno iria distribuir a mesma quantidade de panfletos. No dia da distribuição, 6 alunos ficaram doentes e cada um dos alunos presentes teve que distribuir 40 panfletos a mais do que o planejado. O número de alunos presentes para a distribuição foi

- (a) 24.
- (b) 30.
- (c) 34.
- (d) 40.

28. A imagem do **Texto 2** será reproduzida em um outdoor para fomentar um debate sobre o *cyberbullying* em certa comunidade. A gráfica recebeu uma imagem original retangular com medidas de 18 cm de largura por 30 cm de comprimento. Sabendo que a gráfica irá ampliar a figura em 10 vezes do seu tamanho original e que o preço para a confecção desse *outdoor* é de R\$ 120,00 por metro quadrado, o valor cobrado por esse *outdoor* será de

- (a) R\$ 620,00.
- (b) R\$ 648,00.
- (c) R\$ 660,00.
- (d) R\$ 688,00.

29. De acordo com o título do **Texto 1**, uma em cada quatro crianças sofreu ofensas na Internet, no ano de 2017. Essa mesma proporção de crianças, percentualmente, corresponde a

- (a) 50%.
- (b) 4%.
- (c) 25%.
- (d) 10%.

30. A jovem Laura, mencionada no **Texto 1**, passou a ter acompanhamento psicológico após as agressões sofridas na Internet. Considere que, para pagar os custos da terapia, a mãe e o pai da adolescente pagaram juntos um total de 300,00 reais mensais. Supondo que a razão entre a contribuição do pai e a contribuição da mãe é $\frac{4}{11}$, o valor a mais, em reais, que a mãe de Laura paga, mensalmente, em relação ao pai, é de

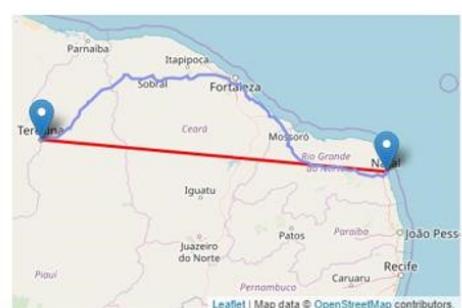
- (a) 120,00.
- (b) 210,00.
- (c) 280,00.
- (d) 140,00.

31. De acordo com o **Texto 1**, a pesquisa do Comitê Gestor da Internet no Brasil (CGI.br), em determinado mês, mediou o comportamento *online* de crianças e adolescentes. “Os dados revelaram que, de cada quatro crianças e adolescentes, um foi tratado de forma ofensiva na Internet, o que corresponde a 5,6 milhões de meninos e meninas entre 9 e 17 anos”. Com base nessas informações, aproximadamente, o total de jovens pesquisados é de

- (a) 22,4 milhões.
- (b) 34,6 milhões.
- (c) 14,2 milhões.
- (d) 23,5 milhões.

32. Na tentativa de superar os traumas das agressões sofridas em ataques de *cyberbullying*, uma adolescente residente em Natal mudou-se para a casa dos avós no Piauí. Curiosa para saber a distância real entre as duas cidades, ela utilizou o mapa da Figura 1, cuja distância, em linha reta, entre as duas capitais mede 6 cm e, a escala adotada é 1:14.200.000. Com base nesses valores, em km, a distância real entre Natal e Piauí é de

- (a) 852.
- (b) 965.
- (c) 754.
- (d) 698.



Disponível em: <https://www.distanciaentreascidades.com.br/distancia-de-teresinaprazil-ate-natal-m-brasil>
Acesso em 13 de ago de 2019

Figura 1

Considere o Gráfico 1 para responder às questões 33 e 34.

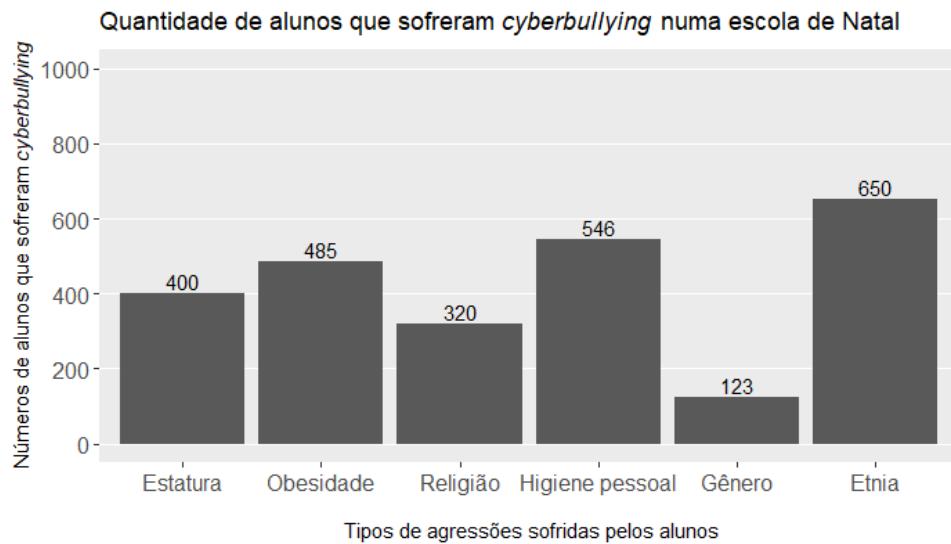


Gráfico 1

33. Em uma escola da grande Natal, uma pesquisa de opinião realizada com 2524 estudantes mostrou que as agressões de *cyberbullying* sofridas por eles estão associadas a: estatura, obesidade, religião, higiene pessoal, etnia e gênero. Supondo que cada aluno só podia relatar um tipo de agressão, o Gráfico 1 mostra o número de alunos em cada tipo de agressão. Com base nessas informações, a diferença percentual entre as agressões com maior e menor registro, em relação ao total de entrevistados, aproximadamente, é de

- (a) 29%.
- (b) 34%.
- (c) 21%.
- (d) 49%.

34. Com base nos dados do Gráfico 1, a média aritmética do número de alunos que sofreu agressão na Internet relacionada a estatura, religião e gênero foi de

- (a) 456.
- (b) 324.
- (c) 281.
- (d) 309.

35. De acordo com o **Texto 1**, o percentual de crianças e adolescentes ofendidos na Internet cresce ano a ano, passando de 15% em 2014 para 20% em 2015 até chegar em 23% no ano de 2016. Considere que uma pesquisa foi feita em 2014 numa cidade A, em 2015 numa cidade B e, em 2016, numa cidade C, sempre com a mesma quantidade x de jovens. Considere também que os percentuais obtidos corresponderam aos resultados indicados no **Texto 1**, para cada ano. A expressão que representa o número total de crianças e adolescentes pesquisados nas três cidades que não sofreram, nesses três anos, agressões na Internet é

(a) $\frac{121x}{50}$.

(b) $\frac{127x}{20}$.

(c) $\frac{117x}{10}$.

(d) $\frac{157x}{50}$.

36. A equipe pedagógica de uma escola estadual sorteou o tema da palestra de abertura do ano letivo, utilizando o lançamento aleatório de um dado honesto, com 12 faces, numeradas de 1 até 12. Para isso, estabeleceram-se as seguintes condições: se após o lançamento do dado a face virada para cima for um número maior que 5, o tema versará sobre “Bullying na Internet” e, se a face voltada para cima for um número menor ou igual a 5, o tema versará sobre “Meio Ambiente”. Após o lançamento do dado, a probabilidade do tema sorteado ser sobre “Bullying na Internet” é de

(a) $\frac{7}{12}$.

(b) $\frac{5}{12}$.

(c) $\frac{2}{3}$.

(d) $\frac{1}{3}$.

37. Um casal resolveu levar a filha, vítima de *cyberbullying*, para passar x dias em um hotel fazenda sem acesso à Internet. O custo total da viagem de y reais corresponde a um valor fixo de R\$150,00 para os gastos com combustível, mais R\$ 390,00 a diária do quarto triplo com direito a todas as refeições. Em função de x dias de hospedagem, a equação que representa o custo total de y reais da viagem é

- (a) $y = 390 \cdot x + 300$.
- (b) $y = 150 \cdot x + 390$.
- (c) $y = 150 \cdot x + 300$.
- (d) $y = 390 \cdot x + 150$.

38. Laura começou um tratamento médico após ter sofrido sérias agressões nas redes sociais. Na prescrição médica, foram receitados dois medicamentos: um deles deve ser ingerido de 8 em 8 horas e o outro, de 10 em 10 horas. Supondo que Laura ingeriu os dois medicamentos às 14 horas do domingo, ela irá ingerir novamente os dois medicamentos juntos

- (a) segunda-feira, às 06 horas.
- (b) segunda-feira, às 14 horas.
- (c) terça-feira, às 06 horas.
- (d) terça-feira, às 14 horas.

Anexo B

Termo de confidencialidade, sigilo e compromisso.



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO RIO GRANDE DO NORTE
PRÓ-REITORIA DE ENSINO
COORDENAÇÃO DE ACESSO DISCENTE**

TERMO DE CONFIDENCIALIDADE, SIGILO E COMPROMISSO

Eu **Thiago Valentim Marques**, Matrícula SIAPE nº **1631864**, CPF **054596684-17**, Professor de Matemática **lotado no Campus Natal - Zona Norte**, assumo o compromisso de que os dados dos candidatos inscritos no processo seletivo para ingresso em **todos os cursos ofertados** por **todos os Campi** no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte, com ingresso no **semestre 2020.1**, os quais terei acesso por este processo eletrônico, serão utilizados, exclusivamente, para fins acadêmicos. Assim como, responsabilizo-me por qualquer divulgação indevida dessas produções textuais.

Pelo não cumprimento do presente Termo de Confidencialidade e Sigilo, fico ciente de todas as sanções judiciais que poderão advir, sujeitando-me às penas estabelecidas pela Lei nº 12 550, de 15 de dezembro de 2011.

Natal/RN, 06 de dezembro de 2019.

Thiago Valentim Marques

Assinatura

Documento Digitalizado Público

Exame de Seleção 2020

Assunto: Exame de Seleção 2020

Assinado por: Thiago Marques

Tipo do Documento: Requerimento

Situação: Finalizado

Nível de Acesso: Público

Tipo do Conferência: Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Thiago Valentim Marques, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO**, em 06/12/2019 15:28:53.

Este documento foi armazenado no SUAP em 06/12/2019. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifrn.edu.br/verificar-documento-externo/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 491705

Código de Autenticação: 171d22359d



Anexo C

```
#####
# # MONOGRAFIA DE GRADUAÇÃO - THIAGO VALENTIM MARQUES #
# # ORIENTADOR: PROF. DR ELIARDO GUIMARÃES DA COSTA #
# #####
#----- FIGURAS UTILIZADAS NO TCC -----#
require(plotrix) #Arcos de círculo

par(mfrow=c(1,1),
mar=c(4,4.3,0.5,1))

### Figura 1

curve(1/(1+exp(-2*(x-0.5))),xlim=c(-4,4),
ylab=expression(P(theta)),
xlab=expression(theta),
lwd=2,cex.lab=1.3, cex.axis=1.1)

### Figura 2

curve((1+exp(0.2-x))^(−1),xlim=c(-4,4),
ylab="Probabilidade de resposta correta",
xlab=expression(theta),
lwd=2,cex.lab=1.3, cex.axis=1.1)
curve((1+exp(1.2-x))^(−1),xlim=c(-4,4),
lwd=2,cex.lab=1.3, cex.axis=1.1,col="red",
add=TRUE)
curve((1+exp(-0.7-x))^(−1),xlim=c(-4,4),
lwd=2,cex.lab=1.3, cex.axis=1.1,col="blue",
add=TRUE)
legend("bottomright",legend=c(expression(b[k]==0.2),
```

```

expression(b[k]==1.2),
expression(b[k]==-0.7)),
col=c("black","red","blue"),lwd=2)
segments(-5,0.5,0.2-log(0.5^(-1)-1),0.5,lty=2)
segments(-5,0.5,1.2-log(0.5^(-1)-1),0.5,lty=2)
segments(0.2-log(0.5^(-1)-1),-1,0.2-log(0.5^(-1)-1),
0.5,lty=2)
segments(1.2-log(0.5^(-1)-1),-1,1.2-log(0.5^(-1)-1),
0.5,lty=2)
segments(-0.7-log(0.5^(-1)-1),-1,-0.7-log(0.5^(-1)-1),
0.5,lty=2)
axis(side=1,at=c(-0.7,0.2,1.2),cex.axis=1.1)
axis(side=2,at=c(0.5),cex.axis=1.1)

```

Figura 3

```

curve((exp(0.8*(x+0.5))/(1+exp(0.8*(x+0.5)))), 
xlim=c(-6,6),ylim=c(0,1),
ylab="Probabilidade de resposta correta",
xlab=expression(theta),
lwd=2,cex.lab=1.3, cex.axis=1.1)
abline(h=0.5,lty=2)
segments(-0.5,-1,-0.5,0.5,lty=2)
points(-0.5,0.50,pch=16)
segments(-1,
(1*0.8/4)*(-1+0.5)+0.50,
0,
(1*0.8/4)*(-1+0.5)+0.50)
segments(0,
(1*0.8/4)*(-1+0.5)+0.50,
0,
(1*0.8/4)*(0+0.5)+0.50)
legend(-7,1.05,
c(expression(a[k]==0.8),
expression(b[k]==-0.5)),bty="n")
axis(1,at=c(-0.5),labels=c(expression(b[k])))
axis(2,at=c(0.5),cex.axis=1.1)
text(1.8,0.54,c(expression(paste("inclinação = ",
a[k]/4))))

```

```
curve((1*0.8/4)*(x+0.5)+0.50,xlim=c(-2.5,1.5),  
lty=2,add=TRUE)  
### Figura 4
```

```
curve(x+15,xlim=c(-4,4),ylim=c(0,1),  
ylab="Probabilidade de resposta correta",  
xlab=expression(theta),  
lwd=2,cex.lab=1.3, cex.axis=1.1)  
segments(-5,0,0,0,lty=1,lwd=2)  
segments(0,0,0,1,lty=1,lwd=2)  
segments(0,1,5,1,lty=1,lwd=2)
```

```
### Figura 5
```

```
curve((1+exp(-0.8*(x-1)))^(-1),xlim=c(-4,4),ylim=c(0,1),  
ylab="Probabilidade de resposta correta",  
xlab=expression(theta),  
lwd=2,cex.lab=1.3, cex.axis=1.1)  
curve((1+exp(-1.6*(x+1.5)))^(-1),xlim=c(-4,4),ylim=c(0,1),  
ylab="Probabilidade de resposta correta",  
xlab=expression(theta),col="red",  
lwd=2,cex.lab=1.3, cex.axis=1.1,add=TRUE)  
legend(1.2,0.16,  
legend=c(expression(paste(a[1]==1.6," e ",  
b[1]==-1.5)),  
expression(paste(a[2]==0.8," e ",  
b[2]==1))),  
col=c("red","black"),lwd=2,bty="n",cex=1.0)  
abline(h=0.5,lty=2)  
axis(2,at=0.5,cex.axis=1.1)  
segments(-1.5,-1,-1.5,0.5,lty=2)  
segments(1,-1,1,0.5,lty=2)  
text(0.25,0.86,labels="Item 1",cex=1.2)  
text(2.95,0.74,labels="Item 2",cex=1.2)  
axis(1,at=c(-1.5,1),  
labels=c(expression(b[1]),expression(b[2])),  
cex.axis=1.1)  
curve((1.6/4)*x-(1.6/4)*(-1.5)+0.5,  
xlim=c(-2.5,-0.5),lty=2,add=TRUE)
```

```

curve((0.8/4)*x-(0.8/4)*(1)+0.5,
xlim=c(-0.9,2.8),lty=2,add=TRUE)
draw.arc(-1.5,0.5, 0.5:1.2, deg2 = 1:64, col = "black")
draw.arc(1,0.5, 0.5:1.2, deg2 = 1:47, col = "black")
text(-0.3,0.562,labels=expression(paste(tg^-1,"(",0.25 %*% a[1],")")),cex=1.0)
text(2.2,0.538,labels=expression(paste(tg^-1,"(",0.25 %*% a[2],")")),cex=1.0)

```

Figura 6

```

curve(0.2+(1-0.2)*(exp(1*(x-0.5))/(1+exp(1*(x-0.5)))), 
xlim=c(-4,4),ylim=c(0,1),
ylab="Probabilidade de resposta correta",
xlab=expression(theta),
lwd=2,cex.lab=1.3, cex.axis=1.1)
abline(h=0.2,lty=2)
curve((exp(1*(x-0.5))/(1+exp(1*(x-0.5))), 
xlim=c(-4,4),ylim=c(0,1),
ylab="Probabilidade de resposta correta",
xlab=expression(theta),col="red",
lwd=2,cex.lab=1.3, cex.axis=1.1,add=TRUE)
legend("topleft",c("ML3","ML2"),
col=c("black","red"),lwd=2)

```

Figura 7

```

curve(0.10+(1-0.1)*(exp(0.8*(x+0.5))/(1+exp(0.8*(x+0.5)))), 
xlim=c(-6,6),ylim=c(0,1),
ylab="Probabilidade de resposta correta",
xlab=expression(theta),
lwd=2,cex.lab=1.3, cex.axis=1.1)
abline(h=0.1,lty=2)
segments(-7,0.55,-0.5,0.55,lty=2)
segments(-0.5,-1,-0.5,0.55,lty=2)
points(-0.5,0.55,pch=16)
segments(-1,
(0.9*0.8/4)*(-1+0.5)+0.55,
0,
(0.9*0.8/4)*(-1+0.5)+0.55)

```

```

segments(0,
(0.9*0.8/4)*(-1+0.5)+0.55,
0,
(0.9*0.8/4)*(0+0.5)+0.55)
legend(-7,1.05,
c(expression(a[k]==0.8),
expression(b[k]==-0.5),
expression(c[k]==0.1)),bty="n")
axis(1,at=c(-0.5),labels=c(expression(b[k])))
axis(2,at=c(0.1),labels=c(expression(c[k])),las=1)
text(-5.6,0.58,c(expression((1+c[k])/2)))
text(1.8,0.54,c(expression(paste("inclinação = ",
a[k](1-c[k])/4))))
curve((0.9*0.8/4)*(x+0.5)+0.55,xlim=c(-2.5,1.5),
lty=2,add=TRUE)

```

```

### Figura 8
curve(dnorm(x,0,1),
xlim=c(-4,4),ylim=c(0,0.55),
ylab="Densidade",
xlab=expression(theta),
lwd=2,cex.lab=1.3, cex.axis=1.1)

```

Figura 9 (Régua - ENEM)

Figura 10

```

inf <- function(x,a,b,c){
tri = c+(1-c)*((exp(a*(x-b)))/(1+exp(a*(x-b))))
ik = a^(2)*((1-tri)/(tri))*((tri-c)/(1-c))^(2)
return(ik)
}

curve(inf(x,3,0,0),lwd=2,xlim=c(-4,4),
xlab=expression(theta),
ylab="Informação do Item",
cex.lab=1.3, cex.axis=1.1)
curve(inf(x,2,0,0),lwd=2,col="red",add=TRUE)
curve(inf(x,3,1,0.2),lwd=2,col="green",add=TRUE)

```

```

curve(inf(x,0.9,-2,0),lwd=2,col="blue",add=TRUE)

inf(0,3,0,0)
inf(0,2,0,0)
inf(1,3,1,0.2)
inf(-2,0.9,-2,0)
#Tabela 2 (em .tex)

```

```

tab2 <- data.frame(item=1:4,a=c(3,2,3,0.9),
b=c(0,0,1,-2),c=c(0,0,0.2,0))

```

Figura 11

```

curve(inf(x,3,0,0)+inf(x,2,0,0) +
inf(x,3,1,0.2)+inf(x,0.9,-2,0),
lwd=2,xlim=c(-4,4),
xlab=expression(theta),
ylab="Informação do Teste",
cex.lab=1.3, cex.axis=1.1,xaxt="n")
abline(v=c(-2,-1,0,1,2),lty=2,col="grey50")
axis(1,at=c(-4:4),labels=c(-4:4),cex.axis=1.3)

```

```

integrate(function(x){inf(x,3,0,0)+inf(x,2,0,0) +
inf(x,3,1,0.2)+inf(x,0.9,-2,0)},-2,2)
integrate(function(x){inf(x,3,0,0)+inf(x,2,0,0) +
inf(x,3,1,0.2)+inf(x,0.9,-2,0)},-100, 100)
(7.018935/7.692922)*100

```

Figura 12

```

curve(inf(x,3,0,0)+inf(x,2,0,0) +
inf(x,3,1,0.2)+inf(x,0.9,-2,0),
lwd=2,xlim=c(-4,4),
xlab=expression(theta),
ylab="Informação do Teste",
cex.lab=1.3, cex.axis=1.1,xaxt="n")
axis(1,at=c(-4:4),labels=c(-4:4),cex.axis=1.3)

curve(1/(inf(x,3,0,0)+inf(x,2,0,0) +

```

```
inf(x,3,1,0.2)+inf(x,0.9,-2,0))^0.5,
lwd=2,xlim=c(-4,4),add=TRUE,lty=2,col="red")

#####
#####

#----- DADOS DO EXAME DE SELEÇÃO -----#  
  
library(readxl)
exame <- read_excel("exam_sel_2020_pre.xlsx")
exame2 <- read_excel("exam_sel_2020.xlsx")  
  
require(tidyverse) #Pacote tidyverse  
  
exame %>%
  group_by('Tipo de escola que cursou o ensino fundamental')%>%
  summarize(n = n())  
  
exame %>%
  filter(Sexo == "F")%>%
  group_by('Tipo de escola que cursou o ensino fundamental')%>%
  summarize(n = n())  
  
exame %>%
  filter(Sexo == "M")%>%
  group_by('Tipo de escola que cursou o ensino fundamental')%>%
  summarize(n = n())  
  
exame2 %>%
  group_by('Você se autodeclara preto, pardo ou indígena?')%>%
  summarize(n = n())  
  
exame2 %>%
  filter('Você se autodeclara preto, pardo ou indígena?']=="Sim")%>%
  group_by('Tipo de escola que cursou o ensino fundamental')%>%
  summarize(n = n())  
  
exame %>%
  group_by('Tipo de escola que cursou o ensino fundamental')%>%
```

```
summarize_at(vars(escore_matematica), c(mean, sd))

exame %>%
  summarize_at(vars(escore_portugues), c(summary))
exame %>%
  summarize_at(vars(escore_matematica), c(summary))
```

Figura 14

```
ggplot(exame,aes(x=escore_portugues))+  
  geom_histogram(aes(y = ..density..),col = "red") +  
  geom_density(fill="blue",col="blue", alpha = 0.2,col="transparent") +  
  xlab("Escores de Língua Portuguesa") +  
  coord_cartesian(xlim = c(100, 900),ylim=c(0,0.0045)) +  
  ylab("Densidade") + theme_light() +  
  #annotate("text",x=70,y=2450,hjust=0,vjust=0,  
  #label="(a)",colour="black",size=4.5)  
  theme(axis.title.y = element_text(size = rel(1.2), angle = 90,  
  vjust=2),  
  axis.title.x = element_text(size = rel(1.2), angle = 0,  
  vjust = -1.0),  
  axis.text.x = element_text(angle = 0, hjust = 0.5,  
  size=14,color="black"),  
  axis.text.y = element_text(angle = 90, hjust = 0.5,  
  size=14,color="black"))
```

Figura 15

```
ggplot(exame,aes(x=escore_matematica))+  
  geom_histogram(aes(y = ..density..),col = "red") +  
  geom_density(fill="blue",col="blue", alpha = 0.2,col="transparent") +  
  xlab("Escores de Matemática") +  
  coord_cartesian(xlim = c(100, 900),ylim=c(0,0.0045)) +  
  ylab("Densidade") + theme_light() +  
  #annotate("text",x=70,y=2450,hjust=0,vjust=0,  
  #label="(a)",colour="black",size=4.5)  
  theme(axis.title.y = element_text(size = rel(1.2), angle = 90,  
  vjust=2),  
  axis.title.x = element_text(size = rel(1.2), angle = 0,
```

```
vjust = -1.0),
axis.text.x = element_text(angle = 0, hjust = 0.5,
size=14,color="black"),
axis.text.y = element_text(angle = 90, hjust = 0.5,
size=14,color="black"))

#install.packages("moments")
require(moments)

skewness(exame$escore_matematica) #Assimetria positiva
skewness(exame$escore_portugues) #Assimetria negativa

#Folhas de respostas na forma de matriz
n=dim(exame)[1]
oficial<-matrix(NA,nrow=n,ncol=40)
oficial<-as.data.frame(oficial)
for(i in 1:dim(exame)[1]){
  for(j in 1:40){
    oficial[i,j]<-substr(exame$leitura_objetivas[i],j,j)
  }
}

oficial<-oficial[,-c(7,26)] #Retirar as questões anuladas
colnames(oficial)<-1:38
head(oficial)

gabarito <- c("A","C","B","A","B","C","C","A","C","A",
"A","D","D","A","C","A","C","A","D",
"B","B","B","A","A","A","C","A","B","C",
"D","A","A","C","C","A","A","D","C")

#Acertos dos itens (dicotomizados)
total<-matrix(NA,nrow=n,ncol=38)
for(i in 1:n){
  total[i,]<-as.numeric(oficial[i,]==gabarito)
}
colnames(total)<-1:38

#Proporção de acertos
```

```
prop<-round(100*apply(total,2,mean),2) #Proporção de acertos
exame.prop <- data.frame(questao=as.factor(1:38),prop)

#Figura 16
prop.port<-exame.prop[1:19,]

ggplot(prop.port,aes(x=questao,y=prop))+geom_col()+
  xlab("Questões") + coord_cartesian(ylim=c(0,100)) +
  ylab("Proporção de acertos em Língua Portuguesa") +
  theme_light() +
  theme(axis.title.x = element_text(size = rel(1.2), angle = 0,
  vjust = 0.0),
  axis.text.x = element_text(size = rel(1.2), angle = 0,
  vjust = 0.5),
  axis.title.y = element_text(size = rel(1.2), angle = 90,
  vjust = 1.5),
  axis.text.y = element_text(angle = 0, hjust = 0.5,
  size=14,color="black"))

#Figura 17
prop.math<-exame.prop[20:38,]

ggplot(prop.math,aes(x=questao,y=prop))+geom_col()+
  xlab("Questões") + coord_cartesian(ylim=c(0,100)) +
  ylab("Proporção de acertos em Matemática") +
  theme_light() +
  theme(axis.title.x = element_text(size = rel(1.2), angle = 0,
  vjust = 0.0),
  axis.text.x = element_text(size = rel(1.2), angle = 0,
  vjust = 0.5),
  axis.title.y = element_text(size = rel(1.2), angle = 90,
  vjust = 1.5),
  axis.text.y = element_text(angle = 0, hjust = 0.5,
  size=14,color="black"))

### Dispersão entre escore e proporção de acertos
### Língua Portuguesa
summary(exame$escore_portugues)
corte<-cut(exame$escore_portugues,
breaks = seq(96.4652,817,60))
```

```
n<-length(table(corte))
ok <- data.frame(total,corte)
levels(ok$corte)<-seq(126,786,60)

matriz <- matrix(NA,nrow=n,ncol=19)
for(i in 1:19){
  matriz[,i]<-tapply(ok[,i],corte,mean)
}
matriz<-as.vector(matriz)
questao<-rep(1:19,each=n)
score<-rep(seq(126,786,60),19)

data<-data.frame(matriz,questao,score)

#Figura 18
ggplot(data,aes(x=score,y=matriz))+geom_point()+
  facet_wrap(~questao)+coord_cartesian(ylim = c(0, 1))+ 
  geom_smooth(method = "glm",
  method.args = list(family = "binomial"),
  se = FALSE)+xlab("Escore")+
  ylab("Proporção de acertos nas questões de Língua Portuguesa")+
  theme_light()+
  theme(axis.title.x = element_text(size = rel(1.2), angle = 0,
  vjust = 0.0),
  axis.text.x = element_text(angle = 0, vjust = 0.5,
  size=14,color="black"),
  axis.title.y = element_text(size = rel(1.2), angle = 90,
  vjust = 1.5),
  axis.text.y = element_text(angle = 0, hjust = 0.5,
  size=14,color="black"))
#Inches 10 x 11

### Dispersão entre escore e proporção de acertos
### Matemática

summary(exame$escore_matematica)
corte<-cut(exame$escore_matematica,
breaks = seq(240,960,60))
n<-length(table(corte))
```

```
ok <- data.frame(total[,20:38],corte)
levels(ok$corte)<-seq(270,930,60)

matriz <- matrix(NA,nrow=n,ncol=19)
for(i in 1:19){
  matriz[,i]<-tapply(ok[,i],corte,mean)
}
mean(matriz[,12])
matriz<-as.vector(matriz)
questao<-rep(20:38,each=n)
score<-rep(seq(270,930,60),19)

data<-data.frame(matriz,questao,score)

#Figura 19
ggplot(data,aes(x=score,y=matriz))+geom_point()+
  facet_wrap(~questao)+geom_smooth(method = "glm",
  method.args = list(family = "binomial"),
  se = FALSE)+
  coord_cartesian(ylim = c(0, 1))+ xlab("Escore")+
  ylab("Proporção de acertos nas questões de Matemática")+
  theme_light()+
  theme(axis.title.x = element_text(size = rel(1.2), angle = 0,
  vjust = 0.0),
  axis.text.x = element_text(angle = 0, vjust = 0.5,
  size=14,color="black"),
  axis.title.y = element_text(size = rel(1.2), angle = 90,
  vjust = 1.5),
  axis.text.y = element_text(angle = 0, hjust = 0.5,
  size=14,color="black"))
#Inches 10 x 11

#####
##### ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS E DAS PROFICIÊNCIAS #####
#####

require(ltm)

#####
```

```
##----- LÍNGUA PORTUGUESA -----##
#####
# Birnbaum's Three Parameter Model (pacote ltm)
fit.port <- tpm(total[,1:19], IRT.param = TRUE,
type="latent.trait", max.guessing = 0.5)
coef(fit.port)
# Latent Trait Model
#fit.port2 <- ltm(total[,1:19] ~ z1,IRT.param = TRUE)

require(mirt)
citation("ltm")
citation("mirt")

info<-NULL
for(i in 1:19){
x <- plot(fit.port,type="IIC",items=i)
info[i]<-max(x[,2])
}
dados2<-data.frame(round(coef(fit.port)[,c(3,2,1)],2),
round(info,2))

TRI<-function(x,a,b,c){
tri = c+(1-c)*((exp(a*(x-b)))/(1+exp(a*(x-b))))
return(tri)
}

par<-NULL
for(i in 1:19){
n<-length(seq(-5,5,0.01))
par[((i-1)*n+1):(n*i)]<-TRI(seq(-5,5,0.01),
dados2[i,1],
dados2[i,2],
dados2[i,3])
}
x<-rep(seq(-5,5,0.01),19)
item<-rep(as.factor(1:19),each=n)
data2<-data.frame(x,par,item)
```

```
# Figura 20
ggplot(data2,aes(x=x,y=par))+geom_line(col="blue",cex=1.05)+  
facet_wrap(~item)+xlab(expression(theta))+  
ylab("Probabilidade de acerto")+\ntheme_light() +  
theme(axis.title.x = element_text(size = rel(1.2), angle = 0,  
vjust = 0.0),  
axis.text.x = element_text(angle = 0, vjust = 0.5,  
size=14,color="black"),  
axis.title.y = element_text(size = rel(1.2), angle = 90,  
vjust = 1.5),  
axis.text.y = element_text(angle = 0, hjust = 0.5,  
size=14,color="black"))  
#Inches 7 x 11  
  
inf <- function(x,a,b,c){  
tri = c+(1-c)*((exp(a*(x-b)))/(1+exp(a*(x-b))))  
ik = a^(2)*((1-tri)/(tri))*((tri-c)/(1-c))^(2)  
return(ik)  
}  
  
par<-NULL  
for(i in 1:19){  
n<-length(seq(-5,5,0.01))  
par[((i-1)*n+1):(n*i)]<-inf(seq(-5,5,0.01),  
dados2[i,1],  
dados2[i,2],  
dados2[i,3])  
}  
x<-rep(seq(-5,5,0.01),19)  
item<-rep(as.factor(1:19),each=n)  
data2<-data.frame(x,par,item)  
  
# Figura 21
ggplot(data2,aes(x=x,y=par))+geom_line(col="blue",cex=1.05)+  
facet_wrap(~item)+xlab(expression(theta))+  
ylab("Função de Informação do Item")+\ntheme_light() +
```

```

theme(axis.title.x = element_text(size = rel(1.2), angle = 0,
vjust = 0.0),
axis.text.x = element_text(angle = 0, vjust = 0.5,
size=14,color="black"),
axis.title.y = element_text(size = rel(1.2), angle = 90,
vjust = 1.5),
axis.text.y = element_text(angle = 0, hjust = 0.5,
size=14,color="black"))
#Inches 7 x 11

```

```

data3 <- data.frame(xx=seq(-5,5,0.01),
yy=as.vector(tapply(data2$par,data2$x,sum)),
zz=1/(as.vector(tapply(data2$par,data2$x,sum)^(0.5))))

```

Figura 22

```

ggplot(data3,aes(x=xx,y=yy))+geom_line(col="blue",cex=1.05)+
xlab(expression(theta))+geom_line(aes(x=xx,y=zz),
col="red",lty=2,cex=1.05)+
ylab("Função de Informação do Teste")+
theme_light()+
theme(axis.title.x = element_text(size = rel(1.2), angle = 0,
vjust = 0.0),
axis.text.x = element_text(angle = 0, vjust = 0.5,
size=14,color="black"),
axis.title.y = element_text(size = rel(1.2), angle = 90,
vjust = 1.5),
axis.text.y = element_text(angle = 0, hjust = 0.5,
size=14,color="black"))
#plot(fit.port,type="ICC",main="")
#plot(fit.port,type="ICC",main="",zrange=c(-5,5),items=c(12,17))
#plot(fit.port,type="IIC",main="",zrange=c(-5,5),items=c(12,17))
#information(fit.port,c(-10,10))

```

```

#Empirical Bayes
theta<-factor.scores(fit.port,method="EAP",
resp.patterns = total[,1:19])

```

```

theta$score.dat #Traços latentes estimados

```

```
names(theta$score.dat)

# Figura 23
theta$score.dat%>%
  ggplot(.,aes(x=z1))+geom_histogram(col="blue",fill="grey50",
  breaks=seq(-4, 4, by=0.25))+
  ylab("Frequênci"+
  xlabel(expression(paste("Traço Latente", " (",
  theta,")")))+
  theme_light()+
  theme(axis.title.x = element_text(size = rel(1.2), angle = 0,
  vjust = 0.0),
  axis.text.x = element_text(angle = 0, vjust = 0.5,
  size=14,color="black"),
  axis.title.y = element_text(size = rel(1.2), angle = 90,
  vjust = 1.5),
  axis.text.y = element_text(angle = 0, hjust = 0.5,
  size=14,color="black"))

##### JUNTAR O ESCORE AO DATASET EXAME
```

```
exame.teste<-exame %>%
  mutate(lat.port = theta$score.dat[,22],
  acertos.port = apply(total[,1:19],1,sum))

lat.port = theta$score.dat[,22]

# Figura 24
ggplot(exame.teste,aes(x=acertos.port,y=lat.port,
group=acertos.port))+geom_boxplot(aes(y=lat.port,group=acertos.port),
fill="grey60")+
  #geom_point(alpha=0.1,color="yellow")+
  #geom_jitter(color="yellow", size=0.3, alpha=0.1) +
  coord_cartesian(xlim=c(-0.5,19.5))+
  scale_x_discrete(name ="Acertos em Língua Portuguesa",
limits=c(0:19))+ylab(expression(paste("Traço latente", " (",
```

```
theta,")"))+
theme_light()+
theme(axis.title.x = element_text(size = rel(1.2), angle = 0,
vjust = 0.0),
axis.text.x = element_text(angle = 0, vjust = 0.5,
size=14,color="black"),
axis.title.y = element_text(size = rel(1.2), angle = 90,
vjust = 1.5),
axis.text.y = element_text(angle = 0, hjust = 0.5,
size=14,color="black"))
ordem.tri <- exame %>%
mutate(lat.port = theta$score.dat[,22],
acertos.port = apply(total[,1:19],1,sum))%>%
select(Nome,escore_portugues,lat.port,acertos.port)%>%
filter(exame$Unidade == "Natal - Zona Norte")%>%
arrange(desc(lat.port))

ordem.esc.port <- exame %>%
mutate(lat.port = theta$score.dat[,22],
acertos.port = apply(total[,1:19],1,sum))%>%
select(Nome,escore_portugues,lat.port,acertos.port)%>%
filter(exame$Unidade == "Natal - Zona Norte")%>%
arrange(desc(escore_portugues))
```

Figura 25

```
head(total[,1:19])

comp5.11<-cbind(total[,1:19],
lat.port = theta$score.dat[,22],
acertos.port = apply(total[,1:19],1,sum))

maior.5 <- as.data.frame(comp5.11)%>%
filter(acertos.port %in% c(5))%>%
arrange(desc(lat.port))
maior.5 <- maior.5[1,]

menor.11 <- as.data.frame(comp5.11)%>%
filter(acertos.port %in% c(11))%>%
```

```
arrange(desc(lat.port))
menor.11 <- menor.11[dim(menor.11)[1],]

tabela3<-rbind(maior.5[,1:19],menor.11[,1:19])

#####
##----- MATEMÁTICA -----##
#####

# Birnbaum's Three Parameter Model (pacote ltm)
fit.mat <- tpm(total[,20:38], IRT.param = TRUE,
type="latent.trait", max.guessing = 0.5)
fit.mat
coef(fit.mat)

info<-NULL
for(i in 1:19){
x <- plot(fit.mat,type="IIC",items=i)
info[i]<-max(x[,2])
}
dados2<-data.frame(round(coef(fit.mat)[,c(3,2,1)],2),
round(info,2))

TRI<-function(x,a,b,c){
tri = c+(1-c)*((exp(a*(x-b)))/(1+exp(a*(x-b))))
return(tri)
}

par<-NULL
for(i in 1:19){
n<-length(seq(-5,5,0.01))
par[((i-1)*n+1):(n*i)]<-TRI(seq(-5,5,0.01),
dados2[i,1],
dados2[i,2],
dados2[i,3])
}
x<-rep(seq(-5,5,0.01),19)
item<-rep(as.factor(20:38),each=n)
data2<-data.frame(x,par,item)
```

```
# Figura 26
ggplot(data2,aes(x=x,y=par))+geom_line(col="blue",cex=1.05)+facet_wrap(~item)+xlab(expression(theta))+ylab("Probabilidade de acerto")+
theme_light()+
theme(axis.title.x = element_text(size = rel(1.2), angle = 0,
vjust = 0.0),
axis.text.x = element_text(angle = 0, vjust = 0.5,
size=14,color="black"),
axis.title.y = element_text(size = rel(1.2), angle = 90,
vjust = 1.5),
axis.text.y = element_text(angle = 0, hjust = 0.5,
size=14,color="black"))
#Inches 7 x 11

inf <- function(x,a,b,c){
  tri = c+(1-c)*((exp(a*(x-b)))/(1+exp(a*(x-b))))
  ik = a^(2)*((1-tri)/(tri))*((tri-c)/(1-c))^(2)
  return(ik)
}

par<-NULL
for(i in 1:19){
  n<-length(seq(-5,5,0.01))
  par[((i-1)*n+1):(n*i)]<-inf(seq(-5,5,0.01),
  dados2[i,1],
  dados2[i,2],
  dados2[i,3])
}
x<-rep(seq(-5,5,0.01),19)
item<-rep(as.factor(20:38),each=n)
data2<-data.frame(x,par,item)

# Figura 27
ggplot(data2,aes(x=x,y=par))+geom_line(col="blue",cex=1.05)+facet_wrap(~item)+xlab(expression(theta))+ylab("Função de Informação do Item")+
theme_light()+
```

```
theme(axis.title.x = element_text(size = rel(1.2), angle = 0,
vjust = 0.0),
axis.text.x = element_text(angle = 0, vjust = 0.5,
size=14,color="black"),
axis.title.y = element_text(size = rel(1.2), angle = 90,
vjust = 1.5),
axis.text.y = element_text(angle = 0, hjust = 0.5,
size=14,color="black"))
#Inches 7 x 11
```

```
data3 <- data.frame(xx=seq(-5,5,0.01),
yy=as.vector(tapply(data2$par,data2$x,sum)),
zz=1/(as.vector(tapply(data2$par,data2$x,sum)^(0.5))))
```

Figura 28

```
ggplot(data3,aes(x=xx,y=yy))+geom_line(col="blue",cex=1.05)+  
xlab(expression(theta))+geom_line(aes(x=xx,y=zz),  
col="red",lty=2,cex=1.05)+  
coord_cartesian(ylim=c(0,12))+  
ylab("Função de Informação do Teste")+\ntheme_light() +  
theme(axis.title.x = element_text(size = rel(1.2), angle = 0,  
vjust = 0.0),  
axis.text.x = element_text(angle = 0, vjust = 0.5,  
size=14,color="black"),
axis.title.y = element_text(size = rel(1.2), angle = 90,  
vjust = 1.5),
axis.text.y = element_text(angle = 0, hjust = 0.5,  
size=14,color="black"))
```

```
#Empirical Bayes  
theta<-factor.scores(fit.mat,method="EAP",  
resp.patterns = total[,20:38])
```

```
theta$score.dat #Traços latentes estimados
```

Figura 29
theta\$score.dat%>%

```
ggplot(.,aes(x=z1))+geom_histogram(col="blue",fill="grey50",
breaks=seq(-4, 4, by=0.25))+  
ylab("Frequênci"+  
xlab(expression(paste("Traço Latente", " (",  
theta,")")))+  
theme_light() +  
theme(axis.title.x = element_text(size = rel(1.2), angle = 0,  
vjust = 0.0),  
axis.text.x = element_text(angle = 0, vjust = 0.5,  
size=14,color="black"),  
axis.title.y = element_text(size = rel(1.2), angle = 90,  
vjust = 1.5),  
axis.text.y = element_text(angle = 0, hjust = 0.5,  
size=14,color="black"))  
  
##### JUNTAR O ESCORE AO DATASET EXAME  
  
exame.teste<-exame %>%  
mutate(lat.mat = theta$score.dat[,22],  
acertos.mat = apply(total[,20:38],1,sum))  
  
lat.mat = theta$score.dat[,22]  
  
# Figura 30  
ggplot(exame.teste,aes(x=acertos.mat,y=lat.mat,  
group=acertos.mat))+  
geom_boxplot(aes(y=lat.mat,group=acertos.mat),  
fill="grey60") +  
coord_cartesian(xlim=c(-0.5,19.5)) +  
scale_x_discrete(name ="Acertos em Matemática",  
limits=c(0:19)) +  
ylab(expression(paste("Traço latente", " (",  
theta,")")))+  
theme_light() +  
theme(axis.title.x = element_text(size = rel(1.2), angle = 0,  
vjust = 0.0),  
axis.text.x = element_text(angle = 0, vjust = 0.5,  
size=14,color="black"),  
axis.title.y = element_text(size = rel(1.2), angle = 90,
```

```
vjust = 1.5),  
axis.text.y = element_text(angle = 0, hjust = 0.5,  
size=14,color="black"))  
  
ordem.tri <- exame %>%  
mutate(lat.mat = theta$score.dat[,22],  
acertos.mat = apply(total[,20:38],1,sum))%>%  
select(Nome,escore_matematica,lat.mat,acertos.mat)%>%  
filter(exame$Unidade == "Natal - Zona Norte")%>%  
arrange(desc(lat.mat))  
  
ordem.esc.mat <- exame %>%  
mutate(lat.mat = theta$score.dat[,22],  
acertos.mat = apply(total[,20:38],1,sum))%>%  
select(Nome,escore_matematica,lat.mat,acertos.mat)%>%  
filter(exame$Unidade == "Natal - Zona Norte")%>%  
arrange(desc(escore_matematica))  
  
# Figura 31  
  
head(total[,1:19])  
  
comp5.11<-cbind(total[,1:19],  
lat.port = theta$score.dat[,22],  
acertos.port = apply(total[,1:19],1,sum))  
  
maior.5 <- as.data.frame(comp5.11)%>%  
filter(acertos.port %in% c(5))%>%  
arrange(desc(lat.port))  
maior.5 <- maior.5[1,]  
  
menor.11 <- as.data.frame(comp5.11)%>%  
filter(acertos.port %in% c(11))%>%  
arrange(desc(lat.port))  
menor.11 <- menor.11[dim(menor.11)[1],]  
  
tabela3<-rbind(maior.5[,1:19],menor.11[,1:19])  
  
#-----#
```

```
#----- PONTUAÇÃO FINAL -----#
#-----#  
  
final.tct <- exame%>%
  select(Nome,escore_final,pontos_redacao,Unidade)%>%
  mutate(acer.port = apply(total[,1:19],1,sum),
  acer.mat = apply(total[,20:38],1,sum),
  lat.mat = lat.mat,
  lat.port = lat.port)%>%
  filter(exame$Unidade == "Natal - Zona Norte",
  exame$'Opção de vaga'=="nº 51 Eletrônica (Res. 30/2011-CONSUP) - Vespertino - Natal")
  arrange(desc(escore_final))  
  
final.tri <- exame%>%
  select(Nome,escore_final,pontos_redacao,Unidade)%>%
  mutate(acer.port = apply(total[,1:19],1,sum),
  acer.mat = apply(total[,20:38],1,sum),
  lat.mat = lat.mat*100+500,
  lat.port = lat.port*100+500,
  red = 10*pontos_redacao,
  escore.tri = (lat.mat+lat.port+red)/3)%>%
  filter(exame$Unidade == "Natal - Zona Norte",
  exame$'Opção de vaga'=="nº 51 Eletrônica (Res. 30/2011-CONSUP) - Vespertino - Natal")
  arrange(desc(escore.tri))  
  
pos.tct<-data.frame(final.tct$Nome,pos.tct=rownames(final.tct))
  names(pos.tct)[1]<-"Nome"
  pos.tri<-data.frame(final.tri$Nome,pos.tri=rownames(final.tri))
  names(pos.tri)[1]<-"Nome"  
  
pos<-merge(pos.tri,pos.tct,by.x="Nome",sort = FALSE)  
  
tabela_final <- data.frame(pos[,c(3)],
  final.tri[,c(5,6,8,7,9,2,10)])
```