Лабораторная работа 1

Моделирование стационарных случайных процессов с заданными корреляционными свойствами

На отрезке времени $[0, T]$ смоделировать n, $n = 150$, отсчетов случайного процесса $X(t)$, имеющего математическое ожидание $\mu = 0$, ковариационную функцию $R(t)$ и спектральную плотность $f(\lambda)$.

Необходимо:

1. Выбрать самостоятельно алгоритм моделирования отсчетов случайного процесса. Для этого можно воспользоваться, например, таблицей 1 и приведенной ниже литературой:

- Харин Ю. С., Степанова М. Д. Практикум по ЭВМ по математической статистике. – Минск: Изд-во «Университетское», 1987. – 304с.
- Методы статистического моделирования в радиотехнике Учебное пособие. Балтийский государственный технический университет. Санкт-Петербург 2003. – 36 с.
- Шапорев С.Д., Родин Б.П. Случайные процессы: учебник. – Балт. гос. техн. ун-т. СПб. 2010. – 237 с.
- Гельгор А.Л. Методы моделирования случайных величин и случайных процессов: учеб. пособие / Гельгор А.Л., Горлов А.И., Попов Е.А. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. — 217 с.
- Прохоров С.А. Аппроксимативный анализ случайных процессов. – 2-е изд., перераб. и доп. / Самар. гос. аэрокосм. ун-т, 2001. – 380 с. (Приложение 10 на стр. 367, Приложение 11 на стр. 368)
- Бакалов В.П. Цифровое моделирование случайных процессов. – М.: САЙНС-ПРЕСС, 2002. – 88 с.

2. Отсчеты $X(1), X(2), \ldots, X(n)$ случайного процесса представить графически.
3. Выполнить предварительный статистический анализ данных (вычислить описательные статистики, построить гистограмму, проверить гипотезу на нормальность, осуществить тренд-анализ). Сделать вывод.
4. Вычислить оценку ковариационной функции. В качестве оценки ковариационной функции рассмотреть статистику

$$\overline{R}(h) = \frac{1}{n-h}\sum_{s=1}^{n-h}\left(X(s+h)-\overline{\mu}\right)\left(X(s)-\overline{\mu}\right), \qquad h = 0, \ldots, n-1,$$

$\overline{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X(j)$. Положить $\overline{R}(-h) = \overline{R}(h)$, $h = \overline{0, n-1}$, и $\overline{R}(h) = 0$ для $|h| \geq n$.

5. На одном рисунке представить графики ковариационной функции и ее оценки для лага $h = 0, \ldots, \frac{2n}{3}$.

Таблица 1. Ковариационные функции $R(t)$

№ п/п	Ковариационная функция, $R(t)$
1	$De^{-\alpha\|t\|}$, $D, \alpha > 0$
2	$\sum_{j=1}^{n} D_j e^{-\alpha_j\|t\|}$, $D_j, \alpha_j > 0$

3	$De^{-\alpha\|t\|}\cos\beta t\,,\quad D,\,\alpha,\,\beta>0$
4	$De^{-\alpha\|t\|}\left(\cos\beta t+\frac{\alpha}{\beta}\sin\beta\|t\|\right),\quad D,\,\alpha,\,\beta>0$
5	$De^{-\alpha\|t\|}\left(\cos\beta t-\frac{\alpha}{\beta}\sin\beta\|t\|\right),\ D,\,\alpha,\,\beta>0$
6	$De^{-\alpha\|t\|}\left(\mathrm{ch}\beta t+\frac{\alpha}{\beta}\mathrm{sh}\beta\|t\|\right),\ \alpha\ge\beta,\ D,\,\alpha,\,\beta>0$
7	$D(1-\|t\|)\mathbf{1}(1-\|t\|),\ D>0,\ \ \mathbf{1}(x)$ – единичная функция
8	$De^{-\alpha\|t\|}(1+\alpha\|t\|),\ \ D,\,\alpha>0$
9	$De^{-\alpha\|t\|}(1-\alpha\|t\|),\ \ D,\,\alpha>0$
10	$De^{-\alpha\|t\|}\left(1+\alpha\|t\|+\frac{\alpha^2t^2}{3}\right),\ D,\,\alpha>0$
11	$De^{-\alpha\|t\|}\left(1+\alpha\|t\|-2\alpha^2t^2+\frac{\alpha^3\|t\|^3}{3}\right),\ D,\,\alpha>0$
12	$2\alpha\frac{\sin\beta t}{t},\ \ \alpha,\,\beta>0$
13	$2\alpha^2(2\cos\beta t-1)\frac{\sin\beta t}{t},\ \beta>0$
14	$De^{-(\alpha t)^3},\ D>0$
15	$D\frac{\sin\alpha t}{\alpha t},\ D>0$
16	$De^{-\alpha^2t^2},\ D>0$
17	$\frac{D}{1+\alpha^2t^2}$
18	$\begin{cases}D(1+\alpha\|t\|), & \|t\|\le 1/\alpha,\\ 0, & \|t\|>1/\alpha.\end{cases}\qquad D,\,\alpha>0$
19	$De^{-\alpha t^2}\cos\beta t\,,\ \ D,\,\alpha>0$
20	$De^{-\alpha^2t^2}\cos\beta t\,,\ \ D,\,\alpha>0$
21	$De^{-\alpha\|t\|}(2\delta(t)-\alpha(\mathrm{sgn}\,t)^2),\ D>0$

$$1(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 1, & x\ge 0.\end{cases}$$

$$\delta(t)=\begin{cases}+\infty, & t=0,\\ 0, & t\ne 0;\end{cases}\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,dt=1$$