

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
И ИНФОРМАТИКИ

Кафедра компьютерных технологий и систем

Е. С. Чеб

# ПРИНЦИП СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Методические указания и задания  
для контроля самостоятельной работы студентов  
факультета прикладной математики  
и информатики  
по курсу «Функциональный анализ и интегральные  
уравнения»

Минск  
2021

УДК 517()  
ББК

Рекомендовано Ученым советом  
факультета прикладной математики и информатики

**Чеб, Е. С.**  
Принцип сжимающих отображений Е.С. Чеб. – Мн. : БГУ,  
2021. – с.

УДК 517()  
ББК

© Чеб Е. С., 2021  
© БГУ, 2021

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Понятие неподвижной точки отображения одно из фундаментальных понятий функционального анализа. Вопрос существования и единственности неподвижной точки, связан с существованием и единственностью решений уравнений (например, алгебраических, дифференциальных, интегральных и т. д.). Наиболее простым критерием существования неподвижной точки отображения, порожденного уравнением, является принцип сжимающих отображений в полных пространствах.

В экономике считается, что цены поднимаются, если спрос превышает предложение, и растут тем сильнее, чем выше эксцесс спроса. Если описать этот процесс математически, получим уравнение вида

$$p_{t+1} = p_t + DE(p_t),$$

где  $E(p_t)$  – эксцесс или избыток спроса (т. е. разница между спросом и предложением),  $D$  – диагональная матрица с неотрицательными коэффициентами. В этом случае неподвижная точка дает стационарные, неизменные по времени цены. Такие цены называются *равновесными*.

Таким образом, нас будут интересовать следующие вопросы:

- 1) Существуют ли неподвижные точки?
- 2) Сколько их, одна или несколько?
- 3) Устойчивость в какомнибудь смысле;
- 4) Как вычислить неподвижные точки точно или приближенно?

В приложениях часто приходится иметь дело с неподвижными точками многозначных отображений.

## ПРИНЦИП СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть в банаховом пространстве  $E$  действует отображение  $f$ .

Определение 1. Точка  $x^* \in E$  называется *неподвижной точкой* отображения  $f$ , если

$$f(x^*) = x^*. \quad (1)$$

Таким образом, неподвижные точки  $f$  – это решения уравнения

$$x = f(x), \quad (2)$$

а поскольку к такому виду довольно часто удастся преобразовать уравнение  $F(x) = 0$ , где  $F$  действует из банахова пространства  $X$  в банахово пространство  $Y$ , то важность определения неподвижных точек не вызывает сомнения.

Отображение  $f$  может и не иметь неподвижной точки. Например, отображение  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + a$ , где  $a \neq 0$ .

Среди отображений  $f: E \rightarrow F$  выделим класс отображений специального вида.

Определение 2. Будем говорить, что отображение  $f$  является *сжимающим* (*сжатием*), если существует константа  $0 < \alpha < 1$  такая, что

$$\|f(x) - f(y)\|_E \leq \alpha \|x - y\|_E, \quad \forall x, y \in E. \quad (3)$$

Число  $\alpha$  в (3) называют *коэффициентом сжатия*.

**Теорема 1 (принцип сжимающих отображений).** Пусть отображение  $f$  отображает замкнутое в банаховом пространстве  $E$  множество  $M$  в себя и является на  $M$  сжимающим с коэффициентом сжатия  $\alpha$ . Тогда на множестве  $M$  отображение  $f$  имеет единственную неподвижную точку  $x^*$ , которая может быть найдена методом последовательных приближений

$$x_n = f(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где  $(x_n) \subset M$  и  $x_n \rightarrow x^*$  при  $n \rightarrow \infty$ . Кроме того, справедлива оценка скорости сходимости

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \|x_0 - x_1\|. \quad (5)$$

Доказательство. Поскольку  $f(M) \subset M$ , то  $(x_n) \subset M$ . Покажем, что последовательность  $x_n$  фундаментальна. Предварительно оценим для любого  $k \in \mathbb{N}$  норму между соседними итерациями:

$$\|x_k - x_{k+1}\| = \|f(x_{k-1}) - f(x_k)\| \leq \alpha \|x_{k-1} - x_k\| \leq \dots \leq \alpha^k \|x_0 - x_1\|.$$

Пусть  $m > n$ , пользуясь неравенством треугольника и формулой суммы геометрической прогрессии, получим

$$\begin{aligned} \|x_m - x_n\| &\leq \|x_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_{n+2}\| + \dots + \|x_{m-1} - x_m\| \\ &\leq (\alpha^n + \dots + \alpha^{m-1}) \cdot \|x_0 - x_1\| = \frac{\alpha^n - \alpha^m}{1 - \alpha}. \end{aligned} \quad (6)$$

Учитывая, что  $0 < \alpha < 1$ , получаем, что последовательность  $(x_m)$  – фундаментальна. Вследствие полноты  $E$ , последовательность в  $E$  сходится к некоторому элементу  $x^* \in E$ . Так как  $M$  замкнуто, то  $x^* \in M$ .

Докажем теперь, что  $x^*$  является неподвижной точкой отображения  $f$ . Из условия сжатия вытекает непрерывность и равномерная непрерывность отображения  $f$ . Перейдем в равенстве (4) к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получим  $x^* = f(x^*)$ .

Докажем, что  $x^*$  – единственная неподвижная точка на  $M$ . Пусть  $y^*$  – еще одна неподвижная точка на  $M$ , тогда  $y^* = f(y^*)$ . Оценим норму

$$0 \leq \|x^* - y^*\| = \|f(x^*) - f(y^*)\| \leq \alpha \|x^* - y^*\|.$$

Это неравенство возможно лишь при  $\|x^* - y^*\| = 0$ , откуда  $x^* = y^*$ .

Докажем оценку скорости сходимости. Для этого в неравенстве (6) перейдем к пределу при  $m \rightarrow \infty$ , получим

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \|x_0 - x_1\|.$$

⊗

Условие сжатия нельзя, вообще говоря, заменить на более слабое, например:  $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$  для всех  $x, y \in M$ .

*Пример 1.* Пусть  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  и  $f(x) = |x| + \frac{1}{1 + |x|}$ . Видно, что отображение  $f$  не имеет неподвижной точки. Однако справедлива оценка

$$|f(x) - f(y)| = \left| (1 - (1 + |x|)^{-1}(1 + |y|)^{-1}) \right| (|x| - |y|) \leq |x - y|.$$

Отметим теперь, что наиболее часто принцип сжимающих отображений применяется в двух следующих случаях:  $M = E$  – все пространство и  $M = B[x_0, r_0]$ . Сформулируем соответствующие утверждения в виде следствий из теоремы 1.

**Следствие 1.** Пусть  $f$  отображает банахово пространство  $E$  само на себя и является сжатием. Тогда  $f$  имеет единственную неподвижную точку, которая может быть найдена методом последовательных приближений.

**Следствие 2.** Пусть  $f$  определено на  $B[a, r_0] \subset E$ ,  $E$  – банахово пространство. Пусть  $f$  является на  $B[a, r_0]$  сжатием и выполнено условие  $\|f(a) - a\| \leq (1 - \alpha)r_0$ . Тогда в шаре  $B[a, r_0]$  существует единственная неподвижная точка отображения  $f$ , которая может быть найдена методом последовательных приближений.

**Доказательство.** Достаточно показать, что шар инвариантен относительно отображения  $f$ , т. е.  $f(B[a, r_0]) \subset B[a, r_0]$ . Действительно, пусть  $x \in B[a, r_0]$ , т. е.  $\|x - a\| \leq r_0$ , тогда

$$\begin{aligned} \|f(x) - a\| &\leq \|f(x) - f(a)\| + \|f(a) - a\| \leq \\ &\leq \alpha\|x - a\| + r_0(1 - \alpha) \leq \alpha r_0 + r_0(1 - \alpha) = r_0, \end{aligned}$$

Это означает, что  $f(x) \in B[a, r_0]$ . ⊗

Теорема 1 фактически устанавливает единственность решения нелинейного уравнения, что сравнительно редко.

Замечание.

Метод последовательных приближений позволяет построить приближенное решение уравнения  $x = f(x)$ . Поскольку точное решение уравнения, как правило, неизвестно, то для организации итерационного процесса используют следующие оценки точности:

- априорная оценка  $\|x_n - x^*\| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \|x_0 - x_1\|$ ;
- апостериорная оценка  $\|x_n - x^*\| \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} \|x_n - x_{n+1}\|$ .

С помощью априорной оценки можно предварительно оценить достаточное число итераций для нахождения приближенного решения с заданной точностью из неравенства

$$\frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \|x_0 - x_1\| \leq \varepsilon.$$

Откуда

$$n_{apr} = \left\lceil \log_{\alpha} \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{\|x_0 - x_1\|} \right\rceil + 1.$$

Апостериорная оценка используется в процессе организации итерационного процесса, где на каждом шаге сравнивают значения  $x_n$  и  $x_{n-1}$  по формуле

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} \|x_n - x_{n-1}\| \leq \varepsilon.$$

Фактическое число итераций всегда не превышает  $n_{apr}$ .

Приведем одно обобщение теоремы о неподвижной точке.

**Теорема 2.** Пусть отображение  $f$  отображает замкнутое множество  $M \subset E$  в себя и при этом при некотором  $m \in \mathbb{N}$  отображение  $f^m(x)$  является на  $M$  сжатием. Тогда в  $M$  существует единственная неподвижная точка  $f$ .

Доказательство. Если  $m = 1$ , то мы имеем теорему 1. Пусть  $m > 1$ . Рассмотрим сжатие  $g = f^m$ . По теореме 1  $g$  имеет единственную неподвижную точку  $x^* : g(x^*) = x^*$ . Поскольку  $g$  и  $f$  перестановочны на  $M$ , имеем  $g(f^m(x^*)) = f g(x^*) = f(x^*)$ . Это означает, что  $f(x^*) \in M$  и является неподвижной точкой отображения  $g$ . Но  $g$  имеет единственную неподвижную точку, поэтому  $x^* = f(x^*)$ .  $\otimes$

В заключение приведем еще одно следствие из теоремы 1.

**Следствие 3.** Пусть отображение  $f$  отображает замкнутое выпуклое множество  $M \subset E$  в себя, причем на  $M$  оно непрерывно дифференцируемо и  $\|f'(x)\|_E \leq \alpha < 1$ . Тогда справедливы утверждения теоремы 1.

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 1.** Показать, что отображение

$$F : L_2[0,1] \rightarrow L_2[0,1] \quad F(x)(t) = \frac{1}{4} x \left( \sqrt[4]{t} \right) + t.$$

является сжимающим. Вычислить  $x_3(t)$ , если  $x_0(t) = 0$ .

Решение. По определению сжимающего отображения оценим  $\|F(x) - F(y)\|_{L_2[0,1]}$ :

$$\begin{aligned}
\|F(x) - F(y)\|_{L_2[0,1]} &= \left( \int_0^1 \left| \frac{1}{4}x(\sqrt[4]{t}) + t - \frac{1}{4}y(\sqrt[4]{t}) - t \right|^2 dt \right)^{1/2} \leq \\
&\leq \left( \frac{1}{16} \int_0^1 |x(z) - y(z)|^2 4z^3 dz \right)^{1/2} = \frac{1}{2} \left( \int_0^1 |x(z) - y(z)|^2 dz \right)^{1/2} = \\
&= \frac{1}{2} \|x - y\|_{L_2[0,1]}.
\end{aligned}$$

Значит, отображение сжимающее с коэффициентом сжатия  $\alpha = 1/2$ . Построим последовательные приближения

$$\begin{aligned}
x_1 &= F(x_0) = \frac{1}{4} x_0 (\sqrt[4]{t}) + t = t, \\
x_2 &= F(x_1) = \frac{1}{4} x_1 (\sqrt[4]{t}) + t = \frac{1}{4} \sqrt[4]{t} t, \\
x_3 &= F(x_2) = \frac{1}{4} x_2 (\sqrt[4]{t}) + t = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{4} (\sqrt[4]{\sqrt[4]{t}}) + \sqrt[4]{t} \right) + t = \frac{1}{16} t^{1/16} + \frac{1}{4} t^{1/4} + t.
\end{aligned}$$

**Задача 2.** Показать, что последовательность цепных дробей

$$2, 2 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}, \dots$$

сходится. Найти ее предел.

**Решение.** Используем принцип сжимающих отображений в  $\mathbb{R}$  и построим приближения

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 2 + \frac{1}{x_1}, \quad \dots, \quad x_n = 2 + \frac{1}{x_{n-1}} \quad (n \geq 2).$$

Заметим, что  $x_n \leq 5/2$  для всех  $n \geq 1$ . А так как  $x_n = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x_{n-2}}}$

для  $n \geq 3$ , то  $x_n \geq 2$ .

Рассмотрим отображение  $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$  отрезка  $[2, 5/2]$  в себя. Оно является сжимающим, поскольку  $|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| \leq \frac{1}{4} |x - y|$ . Следовательно, существует неподвижная точка отображения  $f$ . Найдем ее



$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{x_{n-1}}\right) = 2 + \frac{1}{x^*}.$$

Решая уравнение  $x^* = 2 + \frac{1}{x^*}$ , находим  $x^* = 1 + \sqrt{2}$ .

Таким образом, последовательность цепных дробей сходится, ее предел равен  $1 + \sqrt{2}$ .

**Задача 3.** Приводя уравнение к виду, для которого справедлив принцип сжимающих отображений, найти корни уравнения

$$g(x) = 3x^2 - 18x + 11 = 0.$$

с точностью  $\varepsilon = 10^{-2}$ .

**Решение.** Приведем уравнение  $g(x) = 0$  к уравнению вида  $x = f(x)$  и применим локальный принцип сжимающих отображений. Для этого найдем шар  $B[a, r_0]$ , инвариантный относительно отображения  $f$ , на котором отображение будет сжимающим. Перепишем уравнение в виде

$$x = \frac{1}{18}(3x^2 + 11),$$

тогда  $f(x) = \frac{1}{18}(3x^2 + 11)$ . Поскольку функция  $f$  является дифференцируемой, то в качестве константы Липшица можно взять  $\alpha = \max_x |f'(x)|$ . В нашем случае  $|f'(x)| = \frac{1}{3}x$ . Согласно локального принципа сжимающих отображений условие  $|f'(x)| < 1$  выполнено, если  $|x| < 3$ . Построим шар с центром в точке  $a = 0$ . Радиус шара  $r_0$ , в котором существует неподвижная точка, выберем из следующих условий:

$$\begin{cases} \|a - f(a)\| < (1 - \alpha)r_0, \\ \alpha(r_0) < 1, \end{cases}$$

где  $\alpha(r_0) = \frac{r_0}{3}$ ,  $f(a) = \frac{11}{18}$ . Наши условия примут вид

$$\begin{cases} \frac{11}{18} < \left(1 - \frac{r_0}{3}\right)r_0, \\ \frac{r_0}{3} < 1. \end{cases}$$

Выберем оно из решений этой системы. Пусть  $r_0 = 1$ . Тогда отрезок  $[-1, 1]$  инвариантен относительно отображения  $f$ , на нем отображение

сжимающее с коэффициентом сжатия  $\alpha = \frac{1}{3}$ . Оценим расстояние

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \|x_1 - x_0\| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{11}{18} \leq \frac{1}{100}.$$

Следовательно, уже  $x_5$  является приближенным решением с требуемой точностью  $\varepsilon$ , при условии, что в качестве начального приближения выбрано  $x_0 = 0$ .

Для нахождения второго корня уравнения перепишем уравнение в виде

$$x = \sqrt{\frac{18x - 11}{3}}.$$

Тогда

$$\alpha = \max_x |f'(x)| = \max_x \left| \frac{3}{\sqrt{\frac{18x - 11}{3}}} \right| < 1.$$

Выберем шар с центром в точке  $a = 2$  радиуса  $r_0 = 1$ . Шар  $B[2, 1]$  инвариантен относительно отображения  $f$ , на котором есть второй корень уравнения. Аналогично можно посчитать количество итераций для его нахождения. Выберем  $x_0 = 2$ ,  $\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{22}}$ .

В общем случае для применения принципа сжимающих отображений целесообразно провести процедуру отделения корней.

## ЗАДАНИЯ

1. Доказать, что всякое непрерывное отображение отрезка в себя имеет неподвижную точку.

2. Пусть  $f : m \rightarrow m$  и  $(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}$  — некоторая фиксированная последовательность. При каком условии на  $(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}$  отображение будет сжимающим.

3. При каком условии отображение  $f : \ell_1 \rightarrow \ell_1$  будет сжимающим, если

$$f(x) = \left( \sum_{i=1}^{\infty} a_{1i} x_i, \sum_{i=1}^{\infty} a_{2i} x_i, \dots \right)$$

## ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

Одним из подходов для приближенного решения уравнений можно отнести метод последовательных приближений (последовательных итераций). Остановимся на его рассмотрении.

Пусть задано уравнение

$$x = f(x) \quad (7)$$

где  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ . Сформулируем для него принцип сжимающих отображений.

**Теорема 3.** Пусть  $f$  удовлетворяет условию Липшица с константой  $L < 1$ . Тогда уравнение (7) имеет единственное решение  $x^* \in [a, b]$ , которое может быть найдено методом последовательных приближений

$$x_n = f(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Теорема 3 вытекает из основной теоремы 1. Здесь в качестве множества  $A$  выступает отрезок  $[a, b]$ .

Рассмотрим применение теоремы 3 к решению уравнения, заданного в общем виде

$$g(x) = 0. \quad (9)$$

Предположим, что функция  $g(x) \in C^{(1)}[a, b]$ , т. е. является непрерывно дифференцируемой. Пусть выполнены на  $[a, b]$  следующие ограничения

$$0 < k_1 \leq g'(x) \leq k_2 \text{ или } 0 < -k_1 \leq g'(x) \leq -k_2. \quad (10)$$

Перепишем (9) в виде

$$x = x - \lambda g(x) \text{ или } x = f(x), \quad (11)$$

где  $f(x) = x - \lambda g(x)$ . С помощью (10) выберем параметр  $\lambda$  таким образом, чтобы отображение  $f$  переводило отрезок  $[a, b]$  в себя и при этом было сжимающим.

Предположим, что выполнено первое соотношение в (10). Тогда

$$1 - \lambda k_2 \leq f'(x) = 1 - \lambda g'(x) \leq 1 - \lambda k_1.$$

В качестве параметра  $\lambda$  можно взять точку минимума функции

$$h(\lambda) = \max\{|1 - \lambda k_1|, |1 - \lambda k_2|\},$$

т. е.

$$\lambda^* = \frac{2}{k_1 + k_2}.$$

В этом случае

$$|f'(x)| \leq \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1} < 1. \quad (12)$$

Так как уравнение (7) имеет решение, то  $a < f(a), b > f(b)$ , а это означает, что  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ . Следовательно, к уравнению (11) применим принцип сжимающих отображений. Для вычисления коэффициента сжатия можно воспользоваться оценкой на производную.

*Пример 2.* Покажем, что уравнение

$$x(t) - e^{-x(t)} = \sin t$$

имеет единственное решение в пространстве  $C[0, 1]$ . Перепишем уравнение в виде

$$x(t) = e^{-x(t)} + \sin t.$$

Рассмотрим отображение  $f : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$  и оценим его на сжатие.

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq e^{-\xi(t)} |x_1 - x_2| \leq \max_{x_1(t) \leq \xi(t) \leq x_2(t)} |e^{-\xi(t)}| \cdot \|x_1 - x_2\|_{C[0,1]}.$$

Теперь для любого  $\delta > 0$  рассмотрим множество  $X_\delta = \{x(t) \in C[0, 1] : x(t) \geq \delta\}$ . На  $X_\delta$  функция  $|e^{-\xi(t)}| \leq 1$ , однако множество  $X_\delta$  не инвариантно относительно отображения  $f$ . Поэтому будем строить замкнутое множество  $A$ , которое присутствует в основной теореме 1. Итак,

$$f(x) \leq e^{-\xi(t)} + \sin t \leq 2, \quad f(x) \geq e^{-\xi(t)} \geq e^{-2},$$

так как  $x(t) \leq 2$ . В качестве множества  $A$  рассмотрим множество

$$A = \{x(t) \in C[0, 1] : e^{-2} \leq x(t) \leq 2\},$$

которое инвариантно относительно отображения  $f$  и является сжатием с коэффициентом  $\alpha = e^{-(e^{-2})}$ . Поэтому существует неподвижная точка  $x^*(t) \in A$ .

Перейдем к рассмотрению нелинейных уравнений.

Рассмотрим уравнение

$$x(t) = f(t, x(t)), \quad (13)$$

где  $x(t)$  – неизвестная функция  $x(t) \in C[a, b]$ . Сформулируем для (13) достаточные условия существования решения, которое можно найти по принципу сжимающих отображений.

**Теорема 4.** Пусть  $f(t, u)$  непрерывна на множестве  $[a, b] \times \mathbb{R}$  и по переменной  $u$  удовлетворяет условию Липшица с константой  $L < 1$ . Тогда уравнение (13) имеет единственное решение  $x^* \in C[a, b]$ , которое может быть найдено методом последовательных приближений

$$x_n = f(t, x_{n-1}(t)), \quad n = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Выполнение условия Липшица по переменной  $u$  означает, что

$$\left| f(t, u) - f(t, v) \right| \leq L|u - v|, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

А это фактически сжатие отображения.

## ЗАДАНИЕ

Приводя уравнение  $g(x) = 0$  к виду, для которого справедлив принцип сжимающих отображений, найти корни уравнения с точностью  $\varepsilon = 10^{-4}$ . Составить алгоритм и написать программный код, реализующий метод последовательных приближений, предусматривающий:

- построение графика  $g(x)$ ;
- вычисление априорной оценки количества итераций;
- вывод на печать последней итерации и ее номер.

$$1. x^7 + 4x^5 + 2x + 1 = 0; \quad 15. 8x - 3\sqrt{3} - 3\sin x + 3(\operatorname{arctg} \pi x - 3\pi) = 0;$$

$$2. x + \sin \frac{x}{2} + \frac{x}{1+x^2} - 6 = 0; \quad 16. 3x + \sin x + \sqrt{1+x^2} = 0;$$

$$3. 3x + \ln(1+x^2) + \sin x + \cos x - 7 = 0; \quad 17. x^5 + x^3 - 1 = 0;$$

$$4. 2x + \sin x + \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2} - 6 = 0; \quad 18. x^3 \sin x - 12x + 1 = 0;$$

$$5. x + \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2} - 3 = 0; \quad 19. 2x + \cos x + \frac{2x}{1+x^2} = 0;$$

$$6. x^7 + x^3 + 2x^2 + x - 1 = 0; \quad 20. x^3 + 5x^2 - 15x - 7 = 0;$$

$$7. x^5 + 3x - 1 = 0; \quad 21. x\sqrt{5} + \sqrt{1+x^2} - \sin^2 x + 4 = 0;$$

$$8. \frac{5}{2}x + \sqrt{3}\sin x - \cos x - 6 = 0; \quad 22. x^4 + 10x^3 - 1 = 0;$$

9.  $2x + \frac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x - 4 = 0$ ; 23.  $x^{13} - x^5 + x - 1 = 0$ ;  
 10.  $x^{13} + x^7 + x - 1 = 0$ ; 24.  $5x + \cos^2(3x) + \sqrt{1+x^2} + 7 = 0$ ;  
 11.  $x^5 + 2x^3 + x - 2 = 0$ ; 25.  $3x - \cos(2x+1) + 6x - 15 = 0$ ;  
 12.  $x\sqrt{2} + \ln x^2 + 1 + \operatorname{arctg} 4x + 4 = 0$ ; 26.  $x^7 + 14x - 14 = 0$ ;  
 13.  $x^3 + 5x^2 - 15x - 7 = 0$ ; 27.  $x\sqrt{3} + \operatorname{arctg} 3x - 2 - \sin^2 x = 0$ ;  
 14.  $x\sqrt{5} + \sin x - \sqrt{3}\cos x - \sqrt{5} = 0$ ; 28.  $x^{11} + 3x - 1 = 0$ .

## ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СЛАУ

Метод сжимающих отображений широко применяется при решении СЛАУ (систем линейных алгебраических уравнений). Наиболее эффективен данный метод при решении систем большой размерности с сильно разреженной матрицей. Проблема решения таких систем возникает при решении прикладных задач, например, поиска безусловного экстремума функций многих переменных с помощью необходимых условий, при применении неявных методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m &= b_2, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mm}x_m &= b_m, \end{aligned} \quad (15)$$

которую можно записать в матричном виде

$$AX = B. \quad (16)$$

Предположим, что определитель матрицы  $A$   $\det A \neq 0$ , тогда существует единственное решение системы (15). Для применения принципа сжимающих отображений перепишем уравнение (16) в виде

$$X = CX + D. \quad (17)$$

Обозначим через  $F(X) = CX + D$ , тогда отображение  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  задается системой линейных уравнений

$$y_i = \sum_{j=1}^m c_{ij}x_j + d_i \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (18)$$

Если отображение  $F$  – сжатие, то мы можем применить метод последовательных приближений к решению уравнения  $X = F(X)$ .

При каких условиях отображение  $F$  будет сжатием? Ответ на этот вопрос зависит от выбора нормы в  $\mathbb{R}^m$ .

Рассмотрим в  $\mathbb{R}^m$  кубическую норму  $\|x\|_k = \max_{1 \leq i \leq m} |x_i|$ . Тогда

$$\begin{aligned} \|y^{(1)} - y^{(2)}\|_k &= \max_{1 \leq i \leq m} |y_i^{(1)} - y_i^{(2)}| = \max_{1 \leq i \leq m} \left| \sum_{j=1}^m c_{ij} (x_j^{(1)} - x_j^{(2)}) \right| \leq \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^m |c_{ij}| \cdot |x_j^{(1)} - x_j^{(2)}| \leq \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^m |c_{ij}| \cdot \max_{1 \leq j \leq m} |x_j^{(1)} - x_j^{(2)}| = \\ &= \left( \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^m |c_{ij}| \right) \cdot \|x^{(1)} - x^{(2)}\|_k = \alpha \|x^{(1)} - x^{(2)}\|_k. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что условие сжимаемости имеет вид

$$\alpha = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^m |c_{ij}| < 1. \quad (19)$$

Рассмотрим в  $\mathbb{R}^m$  октаэдрическую норму  $\|x\|_0 = \sum_{i=1}^m |x_i|$ , тогда

$$\begin{aligned} \|y^{(1)} - y^{(2)}\|_0 &= \sum_{i=1}^m |y_i^{(1)} - y_i^{(2)}| = \sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^m c_{ij} (x_j^{(1)} - x_j^{(2)}) \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |c_{ij}| \cdot |x_j^{(1)} - x_j^{(2)}| \leq \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^m |c_{ij}| \cdot \sum_{j=1}^m |x_j^{(1)} - x_j^{(2)}| = \\ &= \left( \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^m |c_{ij}| \right) \cdot \|x^{(1)} - x^{(2)}\|_0 = \alpha \|x^{(1)} - x^{(2)}\|_0. \end{aligned}$$

Условие сжатия имеет вид

$$\alpha = \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^m |c_{ij}| < 1. \quad (20)$$

Таким образом, если выполнено хотя бы одно из условий (19), (20), то выполнены условия теоремы 1 и ее можно сформулировать в эквивалентной формулировке

**Теорема 5.** Если матрица  $C$  системы (17) такова, что  $0 \leq \alpha < 1$ , где величина  $\alpha$  определяется формулой (19) или (20), то система уравнений (17) имеет единственное решение. Это решение может быть найдена методом последовательных приближений

$$x_i^{(n+1)} = \sum_{j=1}^m c_{ij} x_j^{(n)} + d_i, \quad (21)$$

а в качестве  $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_m^{(0)})$  можно взять любую точку из  $\mathbb{R}^m$ . Скорость сходимости итерационного процесса оценивается неравенством (5).

Отметим, что условие (19) или (20) не являются необходимыми для применения метода последовательных приближений, а лишь достаточными.

Важно заметить, что если матрица  $C = (c_{ij})_{i,j=1}^m$  симметрична, то по сферической норме условие сжатия имеет вид

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m |a_{ij}| < 1, \quad (22)$$

и, фактически означает, что  $\|C\| < 1$ . Из курса линейной алгебры известно, что  $\|C\|$  совпадает с  $|\lambda_1|$ , где  $\lambda_1$  – наибольшее по абсолютной величине собственное значение матрицы  $C$ . Тогда условие (22) не только достаточно, но и необходимо для сходимости метода последовательных приближений. Действительно, выбирая в (17) собственный вектор, отвечающий  $\lambda_1$ , и полагая  $x_i^{(0)} = 0$ , получим  $x_i^{(1)} = d_i$ ,  $x_i^{(n+1)} = (1 + \lambda_1 + \dots + \lambda_1^n) b_i$ , откуда следует, что при  $n \rightarrow \infty$  последовательность  $(x_i^{(n)})$  не имеет предела, если  $|\lambda_1| \geq 1$  ( $b_i \neq 0$ ).

Таким образом, когда матрица  $C$  симметрична, процесс последовательных приближений для решения системы линейных уравнений сходится к решению тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы  $C$  меньше единицы по абсолютной величине.

Обратимся к вопросу преобразования системы (16) к виду (17).

Самый простой способ следующий. Из первого уравнения (15) выразим  $x_1$ , из второго  $x_2$  и т. д. Тогда на главной диагонали матрицы  $C$  стоят нули, а ненулевые элементы выражаются по формулам

$$c_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{ii}}, \quad d_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i, j = \overline{1, m}, \quad i \neq j. \quad (23)$$



Обратимся ко второму способу. Пусть  $A^\top$  – транспонированная к  $A$  матрица,  $E$  – единичная матрица,  $\lambda(A^\top A)$  – максимальное собственное значение матрицы  $A^\top A$ . Тогда исходное уравнение (16) можно записать так:

$$X = \left( E - \frac{A^\top A}{\lambda(A^\top A)} \right) X + \frac{A^\top B}{\lambda(A^\top A)}, \quad (24)$$

тогда

$$C = E - \frac{A^\top A}{\lambda(A^\top A)}, \quad D = \frac{A^\top B}{\lambda(A^\top A)}, \quad (25)$$

Если матрица  $C$  получена таким образом, то все ее собственные числа положительны и меньше единицы.

Рассмотрим теперь бесконечную систему линейных алгебраических уравнений с бесконечным числом неизвестных

$$y_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j + b_i \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (26)$$

Решением такой системы назовем бесконечную последовательность  $(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$ , которая обращает (26) тождество. Заметим, что в этом случае автоматически требуется сходимость рядов, входящих в (26). Ограничимся случаем, когда последовательность  $(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$  ограничена, т. е.  $x \in m$ ,  $\sup_i |x_i| < \infty$ . Как и в первом случае приведем систему к виду

$$x_i = \sum_{j=1}^m c_{ij} x_j + b_i \quad (i = 1, 2, \dots), \quad (27)$$

где  $c_{ij} = -a_{ij} + \delta_{ij}$ ,  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

**Определение 3.** Система (27) называется *вполне регулярной*, если  $\exists q : 0 < q < 1$  такое, что

$$\sum_{i,j=1}^m c_{ij} \leq q \quad \forall i. \quad (28)$$

Определим отображение  $F : m \rightarrow m$  и потребуем, чтобы вектор правой части  $b = (b_1, b_2, \dots, b_i, \dots) \in m$ .

**Теорема 6.** *Вполне регулярная система (27) имеет единственное решение  $x \in m$  при любом  $b = (b_1, b_2, \dots, b_i, \dots) \in m$ . Если  $\|b\|_m \leq B$ , то*

$$|x_i| \leq \frac{B}{1-q}, \quad i = 1, 2, \dots$$

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 1.** Методом последовательных приближений решить систему линейных алгебраических уравнений с точностью  $\varepsilon = 10^{-2}$

$$\begin{cases} 0,7x_1 + 0,1x_2 = 1, \\ 0,2x_1 - 1,4x_2 + 0,01x_3 = 2, \\ 0,2x_2 - 0,9x_3 = 5. \end{cases}$$

**Решение.** Перепишем систему в виде  $x = Bx + y$ .

$$\begin{cases} x_1 = 0,3x_1 - 0,1x_2 = -1, \\ x_2 = 0,2x_1 - 0,4x_2 + 0,01x_3 = 2, \\ x_3 = 0,2x_2 + 0,1x_3 = 5, \end{cases}$$

где матрица  $B$  имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,1 & 0 \\ 0,2 & -0,4 & 0,01 \\ 0 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, решение системы равносильно нахождению неподвижной точки отображения  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , в  $\mathbb{R}^3$  будем рассматривать кубическую норму. Вычислим норму матрицы  $B$  по формуле (19), получим  $\|B\| = 0,61$ . Пусть  $x_0 = (0, 0, 0)^\top$ , тогда  $x_1 = F(x_0) = (-1, 2, 5)^\top$ . Для получения решения с точностью  $\varepsilon = 10^{-2}$  нам понадобится  $n$  итераций, которые находятся по формуле

$$\|x_n - x\|_{\mathbb{R}^3} \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \|x_0 - x_1\|_{\mathbb{R}^3} = \frac{0,61^n}{1-0,61} \cdot 5 < 10^{-2}.$$

Откуда следует, что  $n = 8$ . Последовательные приближения вычисляются по формуле  $x_n = Bx_{n-1} + y$ . Расчеты проведены с использованием системы компьютерной математики. Полученное решение имеет вид  $x_1 = 1,595$ ,  $x_2 = -1,163$ ,  $x_3 = 5,297$ .

## ЗАДАНИЯ

Найти решение системы линейных алгебраических уравнений с точностью  $\varepsilon = 10^{-3}$ . Составить алгоритм и написать программный код, реализующий метод последовательных приближений, предусматривающий:

- приведение системы к специальному виду для применения метода последовательных приближений;
- вычисление коэффициента сжатия;
- вычисление априорной оценки количества итераций;
- вывод на печать последней итерации и ее номер.

$$1.1. \begin{cases} 3,2x_1 - 11,5x_2 + 3,8x_3 = 2,8, \\ 0,8x_1 + 1,3x_2 - 6,4x_3 = -6,5, \\ 2,4x_1 + 7,2x_2 - 1,2x_3 = 4,5. \end{cases}$$

$$1.2. \begin{cases} 6,25x_1 - x_2 + 0,5x_3 = 7,5, \\ -x_1 + 5x_2 + 2,12x_3 = -8,68, \\ 0,5x_1 + 2,12x_2 + 3,6x_3 = -0,24. \end{cases}$$

$$1.3. \begin{cases} 9x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 - 7x_2 + x_3 = -6, \\ x_1 + x_2 + 9x_3 = -3. \end{cases}$$

$$1.4. \begin{cases} -0,1x_1 + 0,1x_3 = -1, \\ -0,3x_1 + 0,9x_2 + 0,1x_3 = 1, \\ -0,1x_1 + 0,2x_2 + 1,1x_3 = -1. \end{cases}$$

$$1.5. \begin{cases} -1,1x_1 + 0,1x_3 = 0, \\ -0,1x_1 + 1,4x_2 = 1, \\ -0,2x_1 + 0,4x_2 + 0,9x_3 = -1. \end{cases}$$

$$1.6. \begin{cases} 1,2x_1 + 0,2x_2 + 0,1x_3 = 1, \\ x_2 + 0,1x_3 = 1, \\ 0,1x_1 + 1,3x_3 = 1. \end{cases}$$

$$1.7. \begin{cases} 0,9x_1 + 0,1x_2 + 0,1x_3 = 1, \\ 0,2x_1 + 1,1x_2 + 0,2x_3 = 1, \\ 0,1x_1 + 0,2x_2 + 1,2x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
1.8. \quad & \begin{cases} -1, 3x_1 - 0, 2x_2 = 0, \\ -0, 2x_1 + 1, 0x_2 + 0, 1x_3 = 1, \\ -0, 1x_2 + 1, 0x_3 = 1. \end{cases} \\
1.9. \quad & \begin{cases} -0, 13x_1 - 0, 02x_2 = 0, \\ -0, 02x_1 + 0, 1x_3 = 0, 1, \\ -0, 1x_2 + 1, 0x_3 = 1. \end{cases} \\
1.10. \quad & \begin{cases} -1, 4x_1 - 0, 1x_3 = 1, \\ 0, 1x_1 + 1, 1x_2 - 0, 1x_3 = 0, \\ 0, 1x_2 - 1, 2x_3 = -1. \end{cases} \\
1.11. \quad & \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 = -38, \\ 20x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 29, \\ x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 = -8, \\ 3x_1 + 3x_2 + 8x_3 - x_4 = 29. \end{cases} \\
1.12. \quad & \begin{cases} 6x_1 + x_2 - 40x_3 + 15x_4 = 29, \\ -4x_1 - 2x_3 + 20x_4 = 70, \\ -5x_1 + 10x_2 + 3x_3 - x_4 = -41, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1. \end{cases} \\
1.13. \quad & \begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 32, \\ -16x_1 - 3x_3 + 5x_3 - 4x_4 = -74, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 10x_4 = 0, \\ -x_1 + 20x_2 + 12x_3 = -6. \end{cases} \\
1.14. \quad & \begin{cases} 16x_1 - 5x_2 - 2x_3 + x_4 = 55, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 = 28, \\ -2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 25x_4 = 144, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_4 = -14. \end{cases} \\
1.15. \quad & \begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 8x_4 = 77, \\ 5x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 9x_4 = 62, \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 59, \\ x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 84. \end{cases} \\
1.16. \quad & \begin{cases} 8x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 102, \\ -6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -47, \\ 3x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 8x_4 = -122, \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 2x_4 = -24. \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1.17. \quad & \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8, \\ x_1 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases} \\
1.18. \quad & \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + x_4 = 15, \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 60, \\ 9x_1 - 2x_2 + 9x_3 + 3x_4 = 13, \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 35. \end{cases} \\
1.19. \quad & \begin{cases} x_1 - 12x_2 + 2x_3 - x_4 = 17, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 + 7x_4 = 128, \\ 6x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = 158. \end{cases} \\
1.20. \quad & \begin{cases} 7x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 94, \\ 8x_1 + 7x_2 + 2x_3 + x_4 = 45, \\ 9x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 27, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 39. \end{cases} \\
1.21. \quad & \begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 3x_4 = 20, \\ 10x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 8x_4 = 70, \\ 15x_1 - 7x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 645, \\ -8x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 = -210. \end{cases} \\
1.22. \quad & \begin{cases} 2x_2 - 5x_3 + 5x_4 = -43, \\ 2x_1 + x_4 = 3, \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 42, \\ 3x_1 + 7x_2 - 6x_3 - 6x_4 = 7. \end{cases} \\
1.23. \quad & \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_4 = 19,5, \\ 3x_1 + 4x_3 + x_4 = 23, \\ 2x_1 + 5x_3 + 3x_4 = 27, \\ 6x_1 + x_2 + 2x_4 = 39. \end{cases} \\
1.24. \quad & \begin{cases} -8x_1 + 7x_2 + 2x_3 + x_4 = 79, \\ 9x_1 + 2x_2 - 15x_3 = -27, \\ 4x_1 + 3x_3 - 14x_4 = 303, \\ 3x_1 + 9x_2 - 3x_3 - 6x_4 = 246. \end{cases}
\end{aligned}$$

$$1.25. \begin{cases} 2x_1 - 2x_3 - x_4 = -1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 60, \\ 7x_1 + 7x_2 - 7x_3 - 2x_4 = 5, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 27. \end{cases}$$

## ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

*Интегральными уравнениями* называют уравнения относительно неизвестной функции, входящей в уравнение под знаком интеграла.

Ограничимся рассмотрением уравнений вида

$$a(t)x(t) - \int_a^b \mathcal{K}(t, s; x(s))ds = y(t), \quad t \in [a, b], \quad (29)$$

здесь  $a(t)$ ,  $y(t)$  – заданные функции;  $\mathcal{K}(t, s; x(s))$  – заданная функция, называемая *ядром интегрального уравнения*;  $x(t)$  – неизвестная функция. Решение  $x(t)$  разыскивается в различных пространствах функций в зависимости от свойств функции  $\mathcal{K}(t, s; z)$  и  $y$ . Пространства выбираются так, чтобы интеграл в (29) существовал. Уравнение (29) называется уравнением Фредгольма. Если  $a(t) \equiv 0$ , то уравнение (29) называется уравнением Фредгольма первого рода, соответственно, при  $a(t) \equiv 1$  – второго рода и уравнением третьего рода при  $a(t) \neq 0$ . Исследование уравнений второго и третьего рода не отличаются, поэтому мы ограничимся рассмотрением случая  $a(t) = 1$ .

Интегральное уравнение (29) называется *линейным*, если функция  $\mathcal{K}(t, s, z)$  линейна по  $z$ . Если  $y(t) = 0$ , то уравнение (29) называется *однородным*, в противном случае *неоднородным*.

*Решением* уравнения (29) называется функция  $x(t)$ , при подстановке которой в уравнение выполняется равенство для всех  $t \in [a, b]$  или почти всех. Линейное однородное уравнение всегда имеет решение  $x(t) \equiv 0$ .

Выделим класс уравнений с переменным верхним пределом вида

$$a(t)x(t) - \int_a^t \mathcal{K}(t, s; x(s))ds = y(t), \quad (30)$$

называемые *интегральными уравнениями Вольтерра*.

Уравнение Вольтерра является частным случаем уравнения Фредгольма, если переопределить ядро  $\mathcal{K}(t, s; x(s))$ .

Идея применения принципа сжимающих отображений и интегральным уравнениям (29) либо (30) заключается в следующем.

Пусть имеется интегральное уравнение

$$x(t) = \int_T \mathcal{K}(t, s; x(s)) \, ds + y(t), \quad (31)$$

где  $T = [a, b]$  либо  $T = [a, t]$ . Соответствие  $x \rightarrow \int_T \mathcal{K}(t, s; x(s)) \, ds + y(t)$  определяет отображение множества функций, заданных на  $T$ , на себя. Тогда уравнение (31) записывается в виде  $x = F(x)$ , а это означает, что искомое решение является неподвижной точкой отображения  $F$ . Для того, чтобы применить принцип сжимающих отображений, нужно:

- выбрать банахово пространство функций;
- проверить, что (31) определяет сжимающее отображение.

Покажем, каким образом такая схема реализуется в пространстве  $C[a, b]$  непрерывных функций на отрезке  $[a, b]$  для линейного неоднородного уравнения Фредгольма

$$x(t) - \lambda \int_a^b \mathcal{K}(t, s)x(s) \, ds = y(t). \quad (32)$$

**Теорема 7.** Пусть  $\mathcal{K}(t, s)$  – непрерывная функция на множестве  $[a, b] \times [a, b] = \Omega$  и  $M = \max_{(t,s) \in \Omega} |\mathcal{K}(t, s)|$ , тогда для любого  $\lambda$  такого,

что  $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$  интегральное уравнение Фредгольма второго рода имеет единственное решение для любой правой части  $y(t) \in C[a, b]$ .

*Доказательство.* Зафиксируем пространство  $C[a, b]$ . Формула

$$F(x)(t) = \lambda \int_a^b \mathcal{K}(t, s)x(s) \, ds + y(t)$$

задает отображение банахова пространство  $C[a, b]$  на  $C[a, b]$ . Проверим, что отображение  $F$  сжимающее. Оценим норму

$$\begin{aligned} \|F(x_1) - F(x_2)\|_{C[a,b]} &= \max_{a \leq t \leq b} \left| \lambda \int_a^b \mathcal{K}(t, s)(x_1(s) - x_2(s)) ds \right| \leq \\ &\leq |\lambda| \max_{a \leq t \leq b} \int_a^b |\mathcal{K}(t, s)| |x_1(s) - x_2(s)| ds \leq |\lambda| \max_{t,s} |\mathcal{K}(t, s)| (b - a) \times \\ &\times \max_{a \leq s \leq b} |x_1(s) - x_2(s)| = |\lambda| M(b - a) \|x_1 - x_2\| = \alpha \|x_1 - x_2\|_{C[a,b]}. \end{aligned}$$

Тогда  $\alpha = |\lambda| M(b - a) < 1$ , так как  $|\lambda| < \frac{1}{M(b - a)}$ . Следовательно, отображение  $F$  – сжимающее. Значит, по принципу сжимающих отображений уравнение (32) имеет единственное решение, которое может быть найдено методом последовательных приближений. Процесс последовательных приближений строится по формуле

$$x_n(t) = \lambda \int_a^b \mathcal{K}(t, s)x_{n-1}(s) ds + y(t).$$

⊗

Перейдем к рассмотрению нелинейного уравнения

$$x(t) - \lambda \int_a^b \mathcal{K}(t, s; x(s)) ds = y(t). \quad (33)$$

Выясним, можно ли применить метод последовательных приближений к построению решения уравнения (33)

**Теорема 8.** Пусть  $\mathcal{K}(t, s; z)$  – непрерывная функция переменных  $t, s, z$ , удовлетворяющая условию Липшица по переменной  $z$  с константой  $L > 0$ . Если выполнено условие  $L(b - a)|\lambda| < 1$ , то интегральное уравнение (33) имеет единственное непрерывное решение для любой правой части  $y(t) \in C[a, b]$ .



Доказательство. Рассмотрим отображение

$$F(x)(t) = \lambda \int_a^b \mathcal{K}(t, s; x(s)) \, ds + y(t)$$

и покажем, что  $F: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ . Поскольку  $y(t) \in C[a, b]$ , то достаточно показать, что  $z(t) = \int_a^b \mathcal{K}(t, s, x(s)) \, ds$  непрерывна. Действительно, при фиксированной непрерывной функции  $x$  подынтегральная функция  $\mathcal{K}(t, s, x(s))$  есть непрерывная функция переменных  $t$  и  $s$  и по теореме об непрерывности интеграла, зависящего от параметра, непрерывна.

Покажем, что отображение  $F$  сжимающее. Используя условие Липшица, имеем

$$\begin{aligned} |F(x_1) - F(x_2)| &\leq |\lambda| \int_a^b |\mathcal{K}(t, s; x_1(s)) - \mathcal{K}(t, s; x_2(s))| \, ds \leq \\ &\leq |\lambda| L \int_a^b |x_1(s) - x_2(s)| \, ds \leq |\lambda| L(b-a) \|x_1 - x_2\| = \alpha \|x_1 - x_2\|_{C[a, b]}, \end{aligned}$$

где  $\alpha = |\lambda| L(b-a) < 1$ . ⊗

Таким образом, разрешимость уравнений Фредгольма зависит от условий на ядро. Покажем, что для уравнения Вольтерра условие разрешимости проще.

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение Вольтерра

$$x(t) - \lambda \int_a^t \mathcal{K}(t, s) x(s) \, ds = y(t). \quad (34)$$

Выясним, когда можно применить метод последовательных приближений для его решения.

**Теорема 9.** Пусть  $\mathcal{K}(t, s)$  – непрерывная функция по переменным  $t$  и  $s$ . Тогда для любой  $y(t) \in C[a, b]$  и любого  $\lambda$  из поля  $P$  интегральное уравнение Вольтерра второго рода имеет единственное решение.

Доказательство. Зафиксируем пространство  $C[a, b]$  и рассмотрим отображение

$$F(x) = \lambda \int_a^t \mathcal{K}(t, s)x(s) \, ds + y(t).$$

Покажем, что некоторая степень отображения  $F$  является сжатием. Для этого рассмотрим ряд последовательных оценок.

$$|F(x_1) - F(x_2)| \leq |\lambda| \int_a^t |\mathcal{K}(t, s)| |x_1(s) - x_2(s)| \, ds \leq |\lambda| M(t-a) \|x_1 - x_2\|,$$

где  $M = \max_{t,s} |\mathcal{K}(t, s)|$ .

$$\begin{aligned} |F^2(x_1) - F^2(x_2)| &\leq |\lambda|^2 \int_a^t \int_a^s |\mathcal{K}(t, s)| |\mathcal{K}(s, \tau)| |x_1(\tau) - x_2(\tau)| \, d\tau \, ds \leq \\ &\leq |\lambda|^2 M^2 \frac{(t-a)^2}{2!} \|x_1 - x_2\| \leq |\lambda|^2 M^2 \frac{(b-a)^2}{2!} \|x_1 - x_2\|, \end{aligned}$$

и т. д. Следовательно,

$$\|F^N(x_1) - F^N(x_2)\| \leq |\lambda|^N M^N \frac{(b-a)^N}{N!} \|x_1 - x_2\|.$$

Из последнего соотношения следует, что найдется такое натуральное  $N$ , что  $|\lambda|^N M^N \frac{(b-a)^N}{N!} < 1$ , тогда  $F^N$  является сжатием и, следовательно,  $F$  имеет единственную неподвижную точку. Это означает, что интегральное уравнение Вольтерра имеет единственное решение.  $\otimes$

Существует класс интегральных уравнений, которые сводятся к линейным системам алгебраических уравнений. Это линейные интегральные уравнения с вырожденным ядром.

Ядро  $\mathcal{K}(t, s)$  называется *вырожденным*, если оно имеет вид

$$\mathcal{K}(t, s) = \sum_{i=1}^m a_i(t) b_i(s), \quad (35)$$

где  $a_i(t)$ ,  $b_i(s)$  – равномерно непрерывные, линейно независимые функции, хотя независимость функций не существенна. Предположим, что уравнение (32) является уравнением с вырожденным ядром.

Пусть  $x(t)$  — решение уравнения (32), тогда

$$x(t) = \lambda \int_a^b \sum_{k=1}^m a_i(t) b_i(s) x(s) \, ds + y(t),$$

или

$$x(t) = \lambda \sum_{k=1}^m a_i(t) \int_a^b b_i(s) x(s) \, ds + y(t).$$

Положим  $c_i = \int_a^b b_i(s) x(s) \, ds$ , тогда

$$x(t) = \lambda \sum_{i=1}^m a_i(t) c_i + y(t). \quad (36)$$

Таким образом, если решение уравнения (32) существует, то оно имеет вид (35). Подставим (35) в уравнение, введем обозначения

$$a_{ij} = \lambda \int_a^b b_i(s) a_j(s) \, ds, \quad y_i = \int_a^b b_i(s) y(s) \, ds,$$

получим

$$c_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} c_j + y_i. \quad (37)$$

Итак, всякое решение интегрального уравнения (32) с ядром (34) однозначно определяется набором  $(c_1, \dots, c_m)$ . Этот набор единственен в силу линейной независимости  $a_i(t)$ . Таким образом, задача свелась к исследованию СЛАУ.

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 1.** Решить интегральное уравнение Фредгольма второго рода вида

$$x(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 t s x(s) \, ds + \frac{5}{6} t.$$

Решение. Поскольку ядро  $\mathcal{K}(t, s) = ts$  непрерывно в квадрате  $[0, 1] \times [0, 1]$ , причем  $|\mathcal{K}(t, s)| \leq 1 = M$ , то коэффициент сжатия  $\alpha = |\lambda|M(b-a) = 1/2$ . Следовательно, условие сжатия выполнено, и интегральное уравнение можно решить по принципу сжимающих отображений. Пусть

$$x_0(t) = \frac{5}{6}t.$$

$$x_1(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 tsx_0(s) ds + \frac{5}{6}t = \frac{5}{6}t \left(1 + \frac{1}{6}\right),$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 tsx_1(s) ds + \frac{5}{6}t = \frac{5}{6}t \left(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2}\right),$$

.....

$$x_n(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 tsx_{n-1}(s) ds + \frac{5}{6}t = \frac{5}{6}t \left(1 + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{6^n}\right).$$

Значит,

$$x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{6}t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6^n} = t.$$

Заметим, что если в качестве начального приближения выбрать  $x_0(t) = t$ , то за одну итерацию получим решение интегрального уравнения. Таким образом, выбор начального приближения влияет на скорость сходимости итерационного процесса.

**Задача 2.** Решить интегральное уравнение Вольтерра второго рода вида

$$x(t) + \int_0^t (t-s)x(s) ds = t.$$

Решение. Известно, что интегральное уравнение Вольтерра разрешимо в пространстве непрерывных функций при любой правой части. Построим последовательные приближения по правилу  $x_n(t) = t - \int_0^t (t-s)x_{n-1}(s) ds$ . В качестве начального приближения выберем

$x_0(t) = 0$ . Тогда

$$x_1(t) = t, x_2(t) = t - \int_0^t (t-s)s \, ds = t - \frac{t^3}{3!},$$

$$x_3(t) = t - \int_0^t (t-s) \left( t - \frac{t^3}{3!} \right) ds = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!}$$

Очевидно, что

$$x_n(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

Тогда решение интегрального уравнения  $x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = \sin t$ .

**Задача 3.** Найти приближенное решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$x(t) + \int_0^t (t-s)x(s) \, ds = 1.$$

с точностью  $\varepsilon = 10^{-3}$ .

**Решение.** Приближенное решение уравнения, построенное по принципу сжимающих отображений имеет вид

$$x_n(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

За приближенное решение примем с заданной точностью примем  $x_2(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!}$ . Действительно, по критерию Лейбница для знакочередующихся рядов погрешность не превосходит максимума первого члена отброшенного остатка ряда, т. е.

$$\varepsilon \leq \max_t \left| \frac{t^6}{6!} \right| = \frac{1}{720} \approx 0,0014.$$

**Задача 4.** Выяснить, при каких значениях параметра  $\lambda \neq 0$  к интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$x(t) - \lambda \int_0^1 ts^2 x(s) ds = t^2.$$

применим принцип сжимающих отображений в пространстве  $C[0, 1]$  и в пространстве  $L_2[0, 1]$ . При  $\lambda = 1/3$  найти приближенное решение уравнения с точностью  $\varepsilon = 10^{-3}$  и сравнить его с точным решением.

Решение. Приведем уравнение к виду  $x = F(x)$ , тогда можно применить принцип сжимающих отображений при условии, что в банаховых пространствах  $C[0, 1]$  и  $L_2[0, 1]$  отображение является сжимающим.

Пусть  $F(x) = \lambda \int_0^1 ts^2 x(s) ds + t^2$ . Рассмотрим пространство  $C[0, 1]$ .

Отображение  $F$  задает отображение  $C[0, 1]$  на  $C[0, 1]$ , так как представляет собой сумму двух непрерывных функций. Покажем, что отображение на  $C[0, 1]$  является сжимающим, т. е. существует постоянная  $0 < \alpha < 1$  такая, что для всех непрерывных функций  $x(t)$  и  $z(t)$  выполняется неравенство  $\|F(x) - F(z)\|_{C[0, 1]} \leq \alpha \|x - z\|_{C[0, 1]}$ .

$$\begin{aligned} \|F(x) - F(z)\|_{C[0, 1]} &= \max_{0 \leq t \leq 1} \left| \lambda \int_0^1 ts^2 (x(s) - z(s)) ds \right| \leq \\ &\leq |\lambda| \int_0^1 s^2 ds \max_{0 \leq s \leq 1} |x(s) - z(s)| = |\lambda|/3 \|x - z\|_{C[0, 1]}. \end{aligned}$$

Тогда  $\alpha = |\lambda|/3$  является коэффициентом сжатия и при  $|\lambda| < 3$  к исходному интегральному уравнению в пространстве  $C[0, 1]$  можно применить принцип сжимающих отображений.

Рассмотрим приближенное решение уравнения при  $\lambda = 1/3$ . Для этого оценим количество приближений по формуле

$$\|x_n - x\|_{C[0, 1]} \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \|x_0 - x_1\|.$$

Пусть  $x_0 = 0$ , тогда  $x_1 = F(x_0) = t^2$ ,  $\alpha = 1/9$ ,  $\|x_0 - x_1\| = 1$ . Для определения  $n$  решаем неравенство  $\left(\frac{1}{9}\right)^n \cdot \frac{9}{8} < \varepsilon$ . Откуда  $n = 4$ . Следовательно,  $x_4$  является приближенным решением интегрального уравнения с точностью  $\varepsilon$ . Данное  $n$  представляет собой априорную оценку количества итераций.

Вычислим последовательно  $x_2, x_3, x_4$ :

$$x_2 = F(x_1) = \frac{1}{3} \int_0^1 t s^2 x_1(s) \, ds + t^2 = \frac{1}{3} t \int_0^1 s^2 \cdot s^2 \, ds + t = \frac{1}{15} t + t^2;$$

$$x_3 = F(x_2) = \frac{1}{3} \int_0^1 t s^2 x_2(s) \, ds + t^2 = \frac{13}{180} t + t^2;$$

$$x_4 = F(x_3) = \frac{1}{3} \int_0^1 t s^2 x_3(s) \, ds + t = \frac{157}{1728} t + t^2.$$

Таким образом, приближенное решение исходного уравнения имеет вид

$$x_4 = \frac{157}{2160} t + t^2.$$

Поскольку данное уравнение представляет собой интегральное уравнение с вырожденным ядром, то можно найти его точное решение.

Обозначим через  $c = \int_0^1 s^2 x(s) \, ds$ . Тогда  $x(t) = \frac{1}{3} c t + t^2$ . Подставляя его в исходное уравнение, получаем  $c \left(1 - \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{5}$  или  $c = \frac{12}{55}$ . Значит точное решение уравнения имеет вид

$$x(t) = \frac{4}{55} t + t^2.$$

Вычислим  $\|x_4 - x\|$ :

$$\max_{0 \leq t \leq 1} \left| \left( \frac{157}{2160} - \frac{4}{55} \right) t \right| < 10^{-3}.$$

Рассмотрим пространство  $L_2[0, 1]$ . Оценим ядро  $\mathcal{K}(t, s) = \lambda t s^2$ :

$$\int_0^1 \int_0^1 |\mathcal{K}(t, s)|^2 \, dt \, ds = |\lambda|^2 \int_0^1 t^2 s^4 \, dt \, ds = |\lambda|^2 \frac{1}{15} < \infty.$$

Отображение  $F$  отображает пространство  $L_2[0, 1]$  на себя и является сжимающим, если  $|\lambda| < \sqrt{15}$ . Поэтому при  $\lambda = 1/3$  можно применить принцип сжимающих отображений в пространстве  $L_2[0, 1]$ . В

этом случае понадобится число итераций, определяемое соотношением

$$\frac{\left(\frac{1}{3\sqrt{15}}\right)^n}{1 - \frac{1}{3\sqrt{15}}} \left( \int_0^1 |x_1(s) - x_0(s)|^2 ds \right)^{1/2} < \varepsilon,$$

$$\frac{1}{(3\sqrt{15})^n} \cdot \frac{3\sqrt{15}}{3\sqrt{15} - 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} < 10^{-3}.$$

Из последнего неравенства следует, что  $n = 3$ .

## ЗАДАНИЯ

**Задание 1.** Выяснить, при каких значениях параметра  $\lambda \neq 0$  к интегральному уравнению Фредгольма второго рода применим принцип сжимающих отображений в пространстве  $C[a, b]$  и в пространстве  $L_2[a, b]$ . При  $\lambda = \lambda_0$  найти приближенное решение уравнения с точностью  $\varepsilon = 10^{-3}$  и сравнить его с точным решением.

$$1.1. \ a = 0, \ b = 1, \ x(t) - \lambda \int_0^1 (1+t)s^2 x(s) ds = t^2;$$

$$1.2. \ a = 0, \ b = 1, \ x(t) - \lambda \int_0^1 e^{t-s} x(s) ds = 1;$$

$$1.3. \ a = 0, \ b = 1, \ x(t) - \lambda \int_0^1 \cos \pi(t-s) x(s) ds = 1;$$

$$1.4. \ a = 0, \ b = 1, \ x(t) - \lambda \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+s}} x(s) ds = t^2;$$

$$1.5. \ a = -1, \ b = 1, \ x(t) - \lambda \int_0^1 (t^2 - 1)s^3 x(s) ds = t;$$

$$1.6. \ a = 0, \ b = 1, \ x(t) - \lambda \int_0^1 \frac{t}{1+s} x(s) ds = -5;$$

$$1.7. \ a = 0, \ b = 1, \ x(t) - \lambda \int_0^1 t^2 s x(s) ds = t^3;$$

$$1.8. \ a = -1, \ b = 1, \ x(t) - \lambda \int_0^1 (t^2 - 1)s x(s) ds = t;$$



$$1.9. a = -2, b = 2, x(t) - \lambda \int_{-2}^2 (1+t)(1+s)x(s) \, ds = t;$$

$$1.10. a = 0, b = 1, x(t) - \lambda \int_0^1 \frac{\sqrt{1+t}}{1+s} x(s) \, ds = 3;$$

$$1.11. a = 0, b = 1, x(t) - \lambda \int_0^1 t\sqrt{1-s} x(s) \, ds = \sqrt{1-t};$$

$$1.12. a = 0, b = 1, x(t) - \lambda \int_0^1 t^3 s^2 x(s) \, ds = t^2;$$

$$1.13. a = -1, b = 1, x(t) - \lambda \int_{-1}^1 (1+t)s^2 x(s) \, ds = t^2;$$

$$1.14. a = 0, b = 1, x(t) - \lambda \int_0^1 \frac{\sqrt[4]{1+t}}{1+s} x(s) \, ds = 1+t;$$

$$1.15. a = 0, b = 1, x(t) - \lambda \int_0^1 \frac{t}{1+s} x(s) \, ds = t;$$

$$1.16. a = 0, b = 1, x(t) - \lambda \int_0^1 t^2(1+s)x(s) \, ds = 2;$$

$$1.17. a = 0, b = 1, x(t) - \lambda \int_0^1 t^3 \sqrt{1+s} x(s) \, ds = t^2;$$

$$1.18. a = -1, b = 1, x(t) - \lambda \int_{-1}^1 t(s^2 - 1)x(s) \, ds = 1 + \frac{4}{3}t;$$

$$1.19. a = -1, b = 1, x(t) - \lambda \int_{-1}^1 (ts + t^2)x(s) \, ds = 1;$$

$$1.20. a = -1, b = 1, x(t) - \lambda \int_{-1}^1 s^2 e^t x(s) \, ds = 1+t;$$

$$1.21. a = 0, b = 1, x(t) - \lambda \int_0^1 s^2(t^2 + 1)x(s) \, ds = 1;$$

$$1.22. a = 0, b = 1, x(t) - \lambda \int_0^1 s(t^2 - 1)x(s) \, ds = t;$$

$$1.23. a = -1, b = 1, x(t) - \lambda \int_{-1}^1 t^3 s x(s) \, ds = t;$$

$$1.24. \ a = 0, \ b = 1, \ x(t) - \lambda \int_{-1}^1 \frac{1+t}{1+s} x(s) \, ds = t;$$

$$1.25. \ a = 0, \ b = 1, \ x(t) - \lambda \int_0^1 t^3 s x(s) \, ds = t^2;$$

$$1.26. \ a = 1, \ b = e, \ x(t) - \lambda \int_1^e \frac{\ln s}{t} x(s) \, ds = \ln t;$$

$$1.27. \ a = 0, \ b = 1, \ x(t) - \lambda \int_0^1 t e^{t-s} x(s) \, ds = e^t.$$

**Задание 2.** Методом последовательных приближений найти решение следующих уравнений Вольтерра второго рода в пространстве  $C[0, 1]$ :

$$2.1. \ x(t) - \int_0^t (t-s)x(s) \, ds = t;$$

$$2.2. \ x(t) + \int_0^t (t-s)x(s) \, ds = 1;$$

$$2.3. \ x(t) - \int_0^t (t-s)x(s) \, ds = 1;$$

$$2.4. \ x(t) + \int_0^t x(s) \, ds = \frac{t^2}{2} + t;$$

$$2.5. \ x(t) - \int_0^t (t-s)x(s) \, ds = 1 + t;$$

$$2.6. \ x(t) + \int_0^t x(s) \, ds = 2t + 2;$$

$$2.7. \ x(t) - \int_0^t x(s) \, ds = \frac{t^3}{3} - 2t;$$

$$2.8. \ x(t) + \int_0^t t x(s) \, ds = 2t^2 + 2;$$

$$2.9. \ x(t) - \int_0^t (t-s)x(s) \, ds = 1 + t.$$

$$2.10. \ x(t) - \int_0^t t s^2 x(s) \, ds = 1;$$

$$2.11. \quad x(t) - \int_0^t ts^3 x(s) \, ds = t;$$

$$2.12. \quad x(t) - \int_0^t tx(s) \, ds = 2t^2 + t;$$

$$2.13. \quad x(t) - \int_0^t t^2 s^2 x(s) \, ds = t.$$

Учебное издание

**Чеб** Елена Сергеевна

**ПРИНЦИП  
СЖИМАЮЩИХ  
ОТОБРАЖЕНИЙ**

**Методические указания и задания  
для контролю самостоятельной работы студентов  
факультета прикладной математики  
и информатики  
по курсу «Функциональный анализ и интегральные  
уравнения»**

В авторской редакции

Ответственный за выпуск *Е. С. Чеб*

Подписано в печать 00.00.2021. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.

Усл. печ. л. 3,01. Уч.-изд. л. 2,02. Тираж 50 экз. Заказ

Белорусский государственный университет.

ЛИ № 02330/0494425 от 08.04.2009.

Пр. Независимости, 4, 220030, Минск.

Отпечатано с оригинала-макета заказчика на копировально-множительной технике факультета  
прикладной математики и информатики

Белорусского государственного университета.

Пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск.