РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РЮКЗАКЕ АЛГОРИТМОМ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задача о рюкзаке (англ. Knapsack problem) — дано n предметов, предмет i имеет массу $w_i > 0$ и стоимость $p_i > 0$. Необходимо выбрать из этих предметов такой набор, чтобы суммарная масса не превосходила заданной величины W (вместимость рюкзака), а суммарная стоимость была максимальна.

Рассмотрим задачу **Неограниченный рюкзак** (англ. Unbounded Knapsack Problem), в которой любой предмет может быть выбран любое количество раз.

Формулировка Задачи

Каждый предмет может быть выбран любое число раз. Задача выбрать количество x_i предметов каждого типа так, чтобы

максимизировать общую стоимость: $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$;

выполнялось условие совместности: $\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq W$;

где $x_i \geq 0$ целое, для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Решить здачу:

$\max 1x_1 + 3x_2 + 4x_3$

s.t. $2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 6$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ — целые.

Для заполнения таблицы будем использовать следующий алгоритм:

Knapsack(n, W)

for $w = 1$ to W **do**
  $f[0, w] = 0$;
end for
for $i = 1$ to n **do**
  for $w = 1$ to W **do**
    $f[i, w] := \max\{f[i-1, w], v_i + f[i-1, w - w_i]\}$;
    if $f[i, w] = f[i-1, w]$ **then**
      $p[i, w] := 0$
    else
      $p[i, w] := 1$
    end if
  end for
end for
return $f[n, W]$;

Решение:

w	f_1	p_1	f_2	p_2	f_3	p_3
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
2	1	1	3	1	0	0
3	1	1	3	1	4	1
4	2	1	6	1	6	0
5	2	1	6	1	6	0
6	3	1	9	1	9	0

Оптимальное решение задачи: $OPT = f_3(6) = 9$.

Обратный ход:
Стартуем с $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.
$p_3(6) = 0$, следовательно $x_3 = x_3 + 0$.
Объем не изменился, осталось 6 единиц.
$p_2(6) = 1 \Rightarrow x_2 = x_2 + 1$;
Объем изменился, осталось 6-2=4 единицы.
$p_2(4) = 1 \Rightarrow x_2 = x_2 + 1$;
Объем изменился, осталось 4-2=2 единицы.
$p_2(2) = 1 \Rightarrow x_2 = x_2 + 1$;
Объем изменился, осталось 2-2=0 единиц.
Стоп. Оптимальное решение задачи: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решите следующую задачу о рюкзаке, записав результаты рекурсии динамического программирования в таблицу. Напишите алгоритм обратного хода. Вы не получите очков только за то, что записали ответ:

1. $\max 3x_1 + 6x_2 + 8x_3$
   s.t. $2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 8$
   $x_1, x_2, x_3 \ge 0$ — целые.
2. $\max 3x_1 + 8x_2 + 12x_3$
   s.t. $2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 8$
   $x_1, x_2, x_3 \ge 0$ — целые.
3. $\max 4x_1 + 9x_2 + 16x_3$
   s.t. $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 9$
   $x_1, x_2, x_3 \ge 0$ — целые.
4. $\max 3x_1 + 8x_2 + 15x_3$
   s.t. $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 9$
   $x_1, x_2, x_3 \ge 0$ — целые.
5. $\max 3x_1 + 8x_2 + 14x_3$
   s.t. $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 9$
   $x_1, x_2, x_3 \ge 0$ — целые.
6. $\max 3x_1 + 7x_2 + 12x_3$
   s.t. $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 9$
   $x_1, x_2, x_3 \ge 0$ — целые.
7. $\max 3x_1 + 8x_2 + 13x_3$
   s.t. $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 9$
   $x_1, x_2, x_3 \ge 0$ — целые.
8. $\max 3x_1 + 7x_2 + 15x_3$
   s.t. $2x_1 + 3x_2 + 6x_3 \le 9$
   $x_1, x_2, x_3 \ge 0$ — целые.
9. $\max 3x_1 + 7x_2 + 14x_3$
   s.t. $2x_1 + 3x_2 + 6x_3 \le 9$
   $x_1, x_2, x_3 \ge 0$ — целые.
10. $\max 3x_1 + 7x_2 + 17x_3$
    s.t. $2x_1 + 3x_2 + 7x_3 \le 9$
    $x_1, x_2, x_3 \ge 0$ — целые.
11. $\max 3x_1 + 7x_2 + 17x_3$
    s.t. $2x_1 + 3x_2 + 6x_3 \le 9$
    $x_1, x_2, x_3 \ge 0$ — целые.
12. $\max 3x_1 + 7x_2 + 17x_3$

s.t. $2x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 9$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ — целые.

13. $\max 3x_1 + 7x_2 + 17x_3$
s.t. $2x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 10$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ — целые.
14. $\max 3x_1 + 7x_2 + 15x_3$
s.t. $2x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 10$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ — целые.
15. $\max 3x_1 + 7x_2 + 16x_3$
s.t. $2x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 10$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ — целые.
16. $\max 2x_1 + 6x_2 + 8x_3$
s.t. $2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 10$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ — целые.
17. $\max 3x_1 + 8x_2 + 12x_3$
s.t. $2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 10$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ — целые.
18. $\max 3x_1 + 7x_2 + 12x_3$
s.t. $2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 10$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ — целые.
19. $\max 4x_1 + 8x_2 + 13x_3$
s.t. $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 10$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ — целые.
20. $\max 4x_1 + 8x_2 + 13x_3$
s.t. $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 10$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ — целые.
21. $\max 5x_1 + 8x_2 + 15x_3$
s.t. $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 10$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ — целые.
22. $\max 4x_1 + 8x_2 + 15x_3$
s.t. $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 10$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ — целые.
23. $\max 4x_1 + 8x_2 + 15x_3$
s.t. $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 10$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ — целые.
24. $\max 4x_1 + 8x_2 + 13x_3$
s.t. $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 10$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ — целые.
25. $\max 4x_1 + 8x_2 + 13x_3$
s.t. $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 10$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ — целые.