Projet Axessim : Calcul de matrice d'impédance pour la simulation numérique des lignes de transmission multi-conducteur

Proposé par C. Giraudon, P. Helluy et T. Strub,

avec G. Dollé, N. Pham, A. Samake, A. Assmar, qui

Semaine d'étude Maths-Entreprises

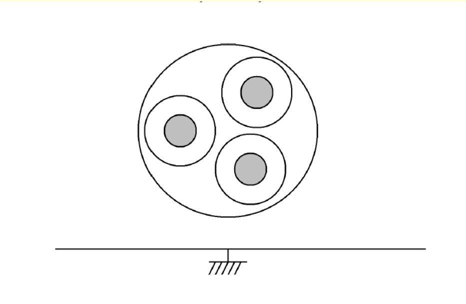
Strasbourg, le 27 juin 2014

Plan de la présentation I

Plan

Problème physique

Calculer les tensions $U(z,\omega) = (u_1 \cdots u_N)^T$ et les courants $I(z,\omega) = (I_1 \cdots I_N)$ complexes dans un faisceau de conducteurs w_i, $i = 1 \cdots N$. Les cables sont entourés d'un blindage w_0. La forme du faisceau est fixée dans le plan (x, y) et invariante suivant z.



Exemple de section de cab

Ligne de transmission

Équation des lignes de transmissions ($j^2 = -1$)

$$\frac{\partial U}{\partial z} = ZI, \quad Z = R + j\omega L,$$
$$\frac{\partial I}{\partial z} = YU, \quad Y = G + j\omega C.$$

Matrices : Impédance Z, Résistance R, Inductance L, Admittance Y, Conductance G, Capacité $C = L^-1$.

Propriétes des matrices :

- Symétrique
- Définie positive

Problème

Flux magnétique $\varphi(x, y)$.
Champ magnétique : dd́rive d'un potentiel vecteur

$$B = \nabla \times (0, 0, \varphi)^T.$$

et

$$\nabla \times B = (0, 0, j_z)^T$$

avec

- $j_z(x, y)$: densité de courant suivant z
- $I_i = \int_{w_i}(x, y)dxdy$: courant

On a

$$-\nabla\varphi = \begin{cases} j_z \\ 0 \qquad \text{sur } \Omega = w_0 \setminus \cup_i w_i, \end{cases} \tag{1}$$

Plan

Sous forme de matrice

On peut écrire

$$\varphi = \sum_k \phi_k \tilde{\varphi}_k \tag{2}$$

avec $\tilde{\varphi}$ est solution de problème suivante

$$\begin{cases} -\Delta\tilde{\varphi} = 0 \quad \text{sur } \Omega \\ \tilde{\varphi} = \delta_{ij} \end{cases} \tag{3}$$

donc on a

$$\sum_j \phi_j \left(\int_{w_i} -\Delta\tilde{\varphi}_j \right) = I_i \tag{4}$$

ou bien

$$\sum_j \phi_j \left(\int_{\partial w_i} -\nabla\tilde{\varphi}_j \right) \cdot n = I_i \tag{5}$$

en d'éduit

$$\sum_j M_{ij}\phi_j = I_i \quad \forall i \tag{6}$$

Calcul la matrice M

On a

$$M_{ij} = \int_{\partial w_j} \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \tag{7}$$

Properties de la matrice M

- Symétrique
- Définie positive
- Inversible

Ou bien

$$M\phi = I \quad \text{ou bien } \phi = LI \quad \text{où } L = M^{-}1 \tag{8}$$

Calcul la matrice M

Problème quand on a calculer directement l'intégrale : La matrice M n'est plus symétrique => solution : formulation faiblement

$$\int_{\Omega} -\Delta\varphi\psi = \int_{w} \nabla\varphi\psi - \int_{\partial w} \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{n}\psi = \int_{\partial w} \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{n} \qquad (9)$$

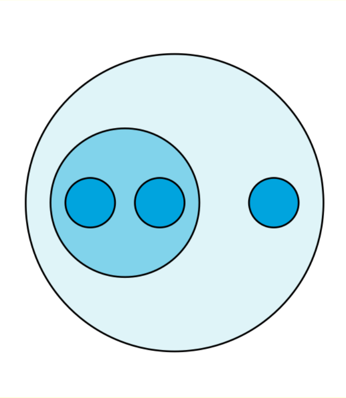
avec $\psi \in H(w)$ satifait

$$\psi(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \in w \\ 1 & \text{si } z \in \partial w \end{cases} \qquad (10)$$

Plan

Cas des cables et des blindages

- Blindage de rérérence w_0 et $N1$ conducteurs $w_1 \cdots w_N 1$
- Chaque conducteur w_i a NN_i sous conducteurs dedans
- Chaque conducteur w_i matrice d'inductance L^i_{int}
- L_{ext} : matrice d'inductance des conducteurs extérieurs



Cas des cables et des blindages

On obtient

$$\begin{bmatrix} \phi_{ext} \\ \tilde{\phi}_{int}^{1} \\ \vdots \\ \tilde{\phi}_{int}^{N_{int}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ext} & & & \\ & L_{int}^{1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & L_{int}^{N_{int}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_{ext} \\ I_{int}^{1} \\ \vdots \\ I_{int}^{N_{int}} \end{bmatrix}$$

en d'éduite

$$\begin{bmatrix} \phi_{ext} \\ \tilde{\phi}_{int} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ext} & \\ & L_{int} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_{ext} \\ I_{int} \end{bmatrix}$$

($\tilde{\phi}_{int}$ potentiel intérieux calculé avec une référence sur les blindages)

Cas des cables et des blindages

Changement de variables

$$\phi_{int} = \tilde{\phi}_{int} + \delta^T \phi_{ext}, \tag{11}$$

avec δ : matrice de taille $N_{ext} \times N_{int}$ et

$$\delta(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si le conducteur } j + N_{ext} \text{ est dans le conducteur } i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{12}$$

De plus,

$$\phi_{ext} = L\tilde{I}_{ext} = L(I_{ext} - \delta I_{int}) \tag{13}$$

La matrice d'inductance globale

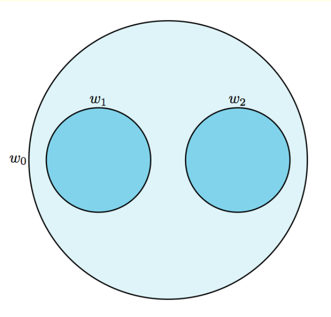
$$\begin{bmatrix} \phi_{ext} \\ \phi_{int} \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} I_{ext} \\ I_{int} \end{bmatrix}$$

avec

$$L = P_I^T \begin{bmatrix} L_{ext} & 0 \\ 0 & L_{int} \end{bmatrix} P_I, \qquad \begin{bmatrix} 1 & -\delta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Plan

Cas simple d'un blindage avec des conducteurs



Blindage de rérérence w_0, 2 conducteurs w_1, w_2

- 1^{ere} étape : calcul φ_i avec $i = 1, 2$-solution de

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_i = 0 \quad \text{sur } w0 \\ \varphi_i = \end{cases} \tag{14}$$

- Chaque conducteur w_i a NN_i sous conducteurs dedans
- Chaque conducteur w_i matrice d'inductance L^i_{int}
- L_{ext} : matrice d'inductance des conducteurs extérieurs

Plan

Bilan :

- AAA
- BBB
- CCC

Bilan :

- AAA
- BBB
- CCC

Perspectives :

- Cas général
- Problème global -> local
- Autres
- Modèles plus complexes

Merci de votre attention !