

Projet Axessim : Calcul de matrice d'impédance pour la simulation numérique des lignes de transmission multi-conducteur

J. Aghili, G. Dollé, N. Pham, A. Samake, S. Asmar

supervisé par

C. Giraudon, P. Helluy et T. Strub,

Semaine d'étude Maths-Entreprises



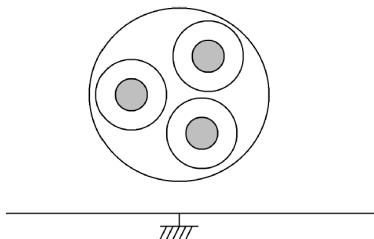
Strasbourg, le 27 juin 2014

Plan de la présentation I

- 1 Introduction
- 2 Problème
- 3 Conducteurs et blindages
- 4 Simulation sur des multi-conducteurs
- 5 Conclusions et perspectives

Problème physique

Calculer les tensions $U(z, \omega) = (u_1 \cdots u_N)^T$ et les courants $I(z, \omega) = (I_1 \cdots I_N)$ complexes dans un faisceau de conducteurs w_i , $i = 1 \cdots N$. Les cables sont entourés d'un blindage w_0 . La forme du faisceau est fixée dans le plan (x, y) et invariante suivant z .



Exemple de section d'un cable.

Ligne de transmission

Équation des lignes de transmissions ($j^2 = -1$)

$$\frac{\partial U}{\partial z} = ZI, \quad Z = R + j\omega L,$$

$$\frac{\partial I}{\partial z} = YU, \quad Y = G + j\omega C.$$

Matrices : Impédance Z , Résistance R , Inductance L , Admittance Y , Conductance G , Capacité $C = L^{-1}$.

Propriétés des matrices :

- Symétrique
- Définie positive

Problème

Flux magnétique $\varphi(x, y)$.

Champ magnétique : dérive d'un potentiel vecteur

$$B = \nabla \times (0, 0, \varphi)^T.$$

et

$$\nabla \times B = (0, 0, j_z)^T$$

avec

- $j_z(x, y)$: densité de courant suivant z
- $I_i = \int_{w_i} j_z(x, y) dx dy$: courant

On a

$$-\Delta\varphi = \begin{cases} j_z \\ 0 \end{cases} \quad \text{sur } \Omega = w_0 \setminus \cup_i w_i, \quad (1)$$

Sous forme de matrice

On peut écrire

$$\tilde{\varphi} = \sum_k \phi_k \tilde{\varphi}_k \quad (2)$$

avec $\tilde{\varphi}$ est solution de problème suivante

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = 0 & \text{sur } \Omega \\ \varphi = \delta_{ij} \end{cases} \quad (3)$$

donc on a

$$\sum_j \phi_j \left(\int_{w_i} -\Delta \tilde{\varphi}_j \right) = I_i \quad (4)$$

ou bien

$$\sum_j \phi_j \left(\int_{\partial w_i} -\nabla \tilde{\varphi}_j \right) \cdot n = I_i \quad (5)$$

en déduit

$$\sum M_{ij} \phi_j = I_i \quad \forall i \quad (6)$$

Calcul la matrice M

On a

$$M_{ij} = \int_{\partial w_j} \frac{\partial \varphi_i^{-1}}{\partial n} \quad (7)$$

Propriétés de la matrice M

- Symétrique
- Définie positive
- Inversible

Ou bien

$$M\phi = I \quad \text{ou bien} \quad \phi = LI \quad \text{où} \quad L = M^{-1} \quad (8)$$

Calcul la matrice M

Problème quand on a calculer directement l'intégrale : La matrice M n'est plus symétrique \Rightarrow solution : formulation faible

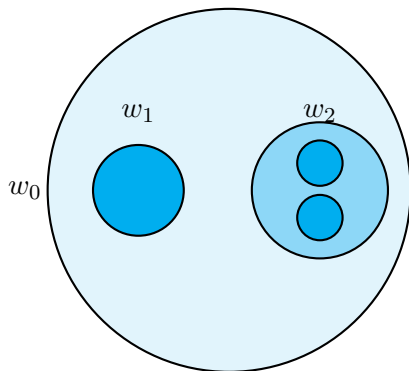
$$\int_w -\Delta\varphi\psi = \int_w \nabla\varphi\nabla\psi - \int_{\partial w} \nabla\varphi \cdot n\psi = \int_{\partial w} \nabla\varphi \cdot n \quad (9)$$

avec $\psi \in H^1(w)$ satisfait

$$\psi(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \in w \\ 1 & \text{si } z \in \partial w \end{cases} \quad (10)$$

Cas des cables et des blindages

- Blindage de référence w_0 et N conducteurs $w_1 \dots w_N$
- Chaque conducteur w_i contient N_{int}^i sous conducteurs dedans
- Chaque conducteur w_i matrice d'inductance L_{int}^i
- L_{ext} : matrice d'inductance des conducteurs extérieurs



Cas des câbles et des blindages

On obtient

$$\begin{bmatrix} \phi_{ext} \\ \tilde{\phi}_{int}^1 \\ \vdots \\ \tilde{\phi}_{int}^{N_{int}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ext} & & & \\ & L_{int}^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & L_{int}^{N_{int}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_{ext} \\ I_{int}^1 \\ \vdots \\ I_{int}^{N_{int}} \end{bmatrix}$$

en d'éduite

$$\begin{bmatrix} \phi_{ext} \\ \tilde{\phi}_{int} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ext} & \\ & L_{int} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_{ext} \\ I_{int} \end{bmatrix}$$

($\tilde{\phi}_{int}$ potentiel intérieur calculé avec une référence sur les blindages)

Cas des câbles et des blindages

Changement de variables

$$\phi_{int} = \tilde{\phi}_{int} + \delta^T \phi_{ext}, \quad (11)$$

avec δ : matrice de taille $N_{ext} \times N_{int}$ et

$$\delta(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si le conducteur } j + N_{ext} \text{ est dans le conducteur } i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (12)$$

De plus,

$$\phi_{ext} = L \tilde{I}_{ext} = L(I_{ext} - \delta I_{int}) \quad (13)$$

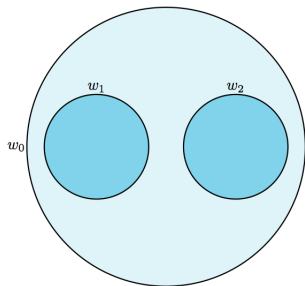
La matrice d'inductance globale

$$\begin{bmatrix} \phi_{ext} \\ \phi_{int} \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} I_{ext} \\ I_{int} \end{bmatrix}$$

avec

$$L = P_I^T \begin{bmatrix} L_{ext} & 0 \\ 0 & L_{int} \end{bmatrix} P_I, \quad P_I \begin{bmatrix} 1 & -\delta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cas simple d'un blindage avec des conducteurs



Blindage de référence w_0 , 2 conducteurs w_1, w_2

- 1^{ère} étape : calcul φ_i avec $i = 1, 2$ -solution de

$$\begin{cases} -\Delta \varphi_i = 0 & \text{sur } \Omega \\ \varphi_i = \begin{cases} 1 & \text{sur } w_i \\ 0 & \text{sur } \{w_0, w_1, w_2\} \setminus w_i \end{cases} \end{cases} \quad (14)$$

- 2^{ème} étape : Chercher des fonction test ψ_i pour chaque φ_i
- 3^{ème} étape : Caculer les coefficients de la matrice M

$$M_{ij} = \int_{w_i} -\Delta \varphi_j \psi \quad (15)$$

Cas simple d'un blindage avec des conducteurs

Résultat :

- La matrice M obtenu est symétrique définie positive et inversible
- La matrice $L = M^{-1}$ est symétrique définie positive

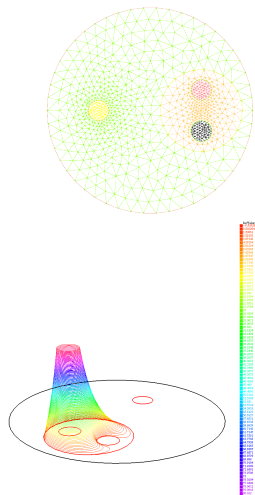
Stratégie pour la résolution du problème

Plusieurs stratégie possible :

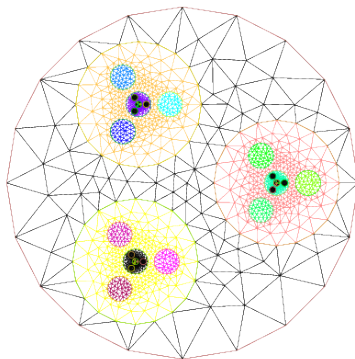
- Méthode intégrale (Choix Axessim)
- Méthode élément finis
 - Découplage du problème en sous problème simple (Nécessite un réassemblage des sous-matrices L et de générer le découpage du maillage).
 - Résolution du système complet (FreeFEM, Feel++).

Génération de conducteurs et maillage

- Maillage explicite sur des cas tests simples.
- Généralisation sur des géométrie contenant des conducteurs imbriqués sur différents niveaux (blindages successifs).
- Utilisation d'outils de maillage automatique et paramétrique (GMSH et FreeFem)



Maillage multi-niveaux



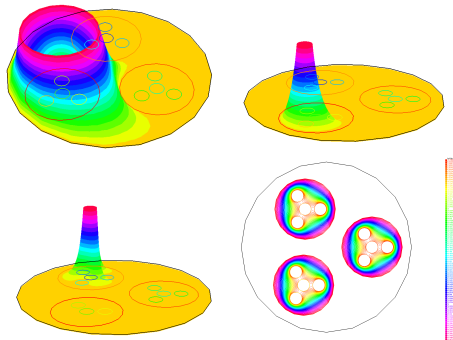
Création de différent niveaux de conducteurs par construction itérative :

- Blindage principale extérieur contenant 3 blindages
- Chaque sous blindage contient 3 conducteurs et 1 blindage
- Répétition des deux précédentes étapes dans les étages inférieurs

L'idée est de retrouver le défaut de positivité qui apparait sur ce genre de géométrie.

Comparaison et difficultés

- Découpez chaque niveau de maillage en sous maillage en respectant la numérotation.
- Dans le cas du découplage, chaque conducteur est considéré comme un trou sur la géométrie.



Observation : Le modèle simple à deux niveaux avec peu de cables ne reproduit pas le problème.

Nécessite d'étudier un problème un peu plus complexe :

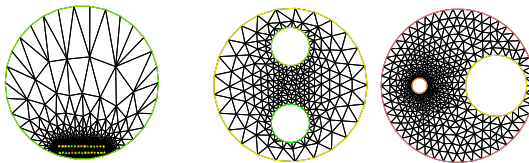


Figure : Second blindage à deux niveaux

Plan d'attaque

Procédure d'assemblage :

- Calculer les matrices M du plus bas niveau vers le haut
 - Définir la géométrie (FF++)
 - M_{ij} nécessite d'introduire une certaine fonction ψ_j localisée autour de ∂w_j (pour obtenir une parfaite symétrie)
- Procédures d'inversions de matrices denses ($M \rightarrow L$)
- Assembler δ sur le niveau le plus haut puis la matrice globale (Non achevé)

Exemple de solution

TEST

Observations

En pratique, difficultés rencontrées :

- Comprendre la théorie
- S'assurer que M est bien symétrique :
 - FreeFem++ : Automatisation des conditions aux bords multiples
 - ψ_j doit être parfaitement localisée : défauts de symétrie constatés dans le cas de simples projections.
- Adapter le maillage.

Observations

- A tous les niveaux, M, L ont les propriétés attendues
 - Définies positive, $\kappa \simeq 15$
 - Symétriques

	Niv.1	Niv. 2	Niv.3
M_{ext}	-	-	-
L_{ext}	-	-	-

Table : Temps de calculs

Bilan :

- Résolution des problèmes locaux vers global sur FreeFEM++.
- Résolution du problème global.

Bilan :

- Résolution des problèmes locaux vers global sur FreeFEM++.
- Résolution du problème global.

Perspectives :

- Résoudre le problème global vers local (Meilleure stabilité?).
- Travailler sur des modèles plus complexes.

Merci de votre attention !

References I