

Vérification d'estimation a priori pour le Laplacien

Méthodes numériques pour les EDP

1 Vérification

1.1 Le Laplacien

L'objectif est de vérifier que les différentes formulations du Laplacien en fonction des conditions aux limites (voir chapitre 3 sur les problèmes coercifs)

- Dirichlet non homogène
- Neumann non homogène
- Fourier (ou encore appelée Robin)

satisfont les résultats du théorème 1 page 38 des notes de cours pour des approximations \mathbb{P}_1 et \mathbb{P}_3 ($k = 1$ et $k = 3$) en 2D.

Afin de vérifier ces résultats, nous allons d'abord considérer le problème suivant : soit Ω le cercle unité tel que $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_F$ avec

- $\Gamma_D = \{\mathbf{x} = (\cos \theta, \sin \theta), \theta \in (0, \pi/2)\}$
- $\Gamma_N = \{\mathbf{x} = (\cos \theta, \sin \theta), \theta \in (\pi/2, \pi)\}$
- $\Gamma_F = \{\mathbf{x} = (\cos \theta, \sin \theta), \theta \in (\pi, 2\pi)\}$

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \\ u &= g \quad \text{sur } \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= m \quad \text{sur } \Gamma_N \\ u + \frac{\partial u}{\partial n} &= l \quad \text{sur } \Gamma_F \end{aligned} \tag{1}$$

1. Créer le maillage d'un domaine Ω quelconque (pas un carré), nommer les bords physiques **Dirichlet**, **Neumann** et **Fourier**.
2. prendre $f = 1, g = m = l = 0$ et $h = 0.05$
 - écrire la formulation variationnelle
 - résoudre le problème avec `feelpq_laplacian` et afficher dans le rapport le maillage ainsi que la solution u du problème (??)
3. Ensuite considérez la fonction $u(x, y) = \sin(\pi x) \cos(\pi y)$ et calculez f, g, m, l pour que u soit solution de (??). Faites une étude de convergence en échelle log-log et observez les pentes des droites associées aux approximations \mathbb{P}_2 . Sont elles celles attendues par le théorème 1 page 38 ?

Afin de présenter les résultats, vous rentrerez les erreurs L_2 et H_1 dans un tableau?? et sur une figure ?? . Les résultats factices sont dans `res.dat`.

h	$\ \cdot\ _{L_2}$	$\ \cdot\ _{H_1}$
0.400	$1.42 \cdot 10^{-1}$	$4.88 \cdot 10^{-4}$
0.200	$2.63 \cdot 10^{-2}$	$1.66 \cdot 10^{-5}$
0.100	$5.74 \cdot 10^{-3}$	$7.87 \cdot 10^{-7}$
0.050	$1.34 \cdot 10^{-3}$	$4.31 \cdot 10^{-8}$
0.025	$3.36 \cdot 10^{-4}$	$2.70 \cdot 10^{-9}$

TABLE 1 – Erreur de convergence

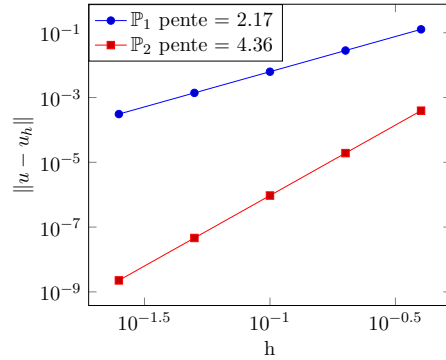


FIGURE 1 – Illustration

1.2 Fonctions peu régulières

Solutions singulières. On considère à présent le domaine $\Omega = \{\mathbf{x} = r(\cos \theta, \sin \theta)^T, r \in (0, 1), \theta \in (0, \frac{3\pi}{2})\}$ et le problème de Poisson avec condition de Dirichlet

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \text{ dans } \Omega \\ u &= g \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned} \tag{2}$$

avec g définie telle que u définie en coordonnée polaire par

$$u(r, \theta) = r^{2/3} \sin\left(\frac{2}{3}\theta\right)$$

soit la solution exacte du problème. Cette fonction est peu régulière proche de l'origine et conduit donc à des approximations peu précises près de l'origine.

- Vérifier que le Laplacien de u est bien nul puis déterminer g telle que u soit solution du problème.
- Montrer que $u \in H^1(\Omega)$ mais que le gradient de u n'est pas borné à l'origine. En déduire que

$$u \notin H^2(\Omega)$$

- Créer le maillage avec Gmsh.
- Faire l'étude de convergence. Qu'observez-vous ?