Études d'EDP: Laplacien, Laplacien non linéaire, ADR, Stokes

Méthodes numériques pour les EDP

1 Vérification

1.1 Le Laplacien

L'objectif est de vérifier que les différentes formulations du Laplacien en fonction des conditions aux limites (voir chapitre 3 sur les problèmes coercifs)

— Dirichlet non homogène
— Neumann non homogene
— Fourier (ou encore appelée Robin)

satisfont les résultats du théorème 1 page 38 des notes de cours pour des approximations $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$ ($k = 1$ et $k = 2$) en 2D.

Afin de vérifier ces résultats, nous allons d'abord considérer le problème suivant : soit Ω le cercle unité tel que $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_R$ avec

— $\Gamma_D = \{\mathbf{x} = (\cos\theta, \sin\theta),\ \theta \in (0, \pi/2)\}$
— $\Gamma_N = \{\mathbf{x} = (\cos\theta, \sin\theta),\ \theta \in (\pi/2, \pi)\}$
— $\Gamma_F = \{\mathbf{x} = (\cos\theta, \sin\theta),\ \theta \in (\pi, 2\pi)\}$

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \\ u &= g \quad \text{sur} \quad \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= m \quad \text{sur} \quad \Gamma_N \\ u + \frac{\partial u}{\partial n} &= l \quad \text{sur} \quad \Gamma_F \end{aligned} \tag{1}$$

1. Créer le maillage d'un domaine Ω quelconque (pas un carré), nommer les bords physiques `Dirichlet`, `Neumann` et `Fourier`.
2. prendre $f = 1$, $g = m = l = 0$ et $h = 0.05$
   — écrire la formulation variationnelle
   — résoudre le problème avec `feelpp_toolbox_coefficientformpdes` et afficher dans le rapport le maillage ainsi que la solution u du problème (1)
3. Ensuite considérez la fonction $u(x, y) = \sin(\pi x)cos(\pi y)$ et calculez f, g, m, l pour que u soit solution de (1). Faites une étude de convergence en échelle log-log et observer les pentes des droites associées aux approximations $\mathbb{P}_2$. Sont elles celles attendues par le théorème 1 page 38 ?

Afin de présenter les résultats, vous rentrerez les erreurs L_2 et H_1 dans un tableau1 et sur une figure 1. Les résultats factices sont dans `res.dat`.

h	$\|\cdot\|_{L_2}$	$\|\cdot\|_{H_1}$
0.400	$1.42 \cdot 10^{-1}$	$4.88 \cdot 10^{-4}$
0.200	$2.63 \cdot 10^{-2}$	$1.66 \cdot 10^{-5}$
0.100	$5.74 \cdot 10^{-3}$	$7.87 \cdot 10^{-7}$
0.050	$1.34 \cdot 10^{-3}$	$4.31 \cdot 10^{-8}$
0.025	$3.36 \cdot 10^{-4}$	$2.70 \cdot 10^{-9}$

TABLE 1 – Erreur de convergence

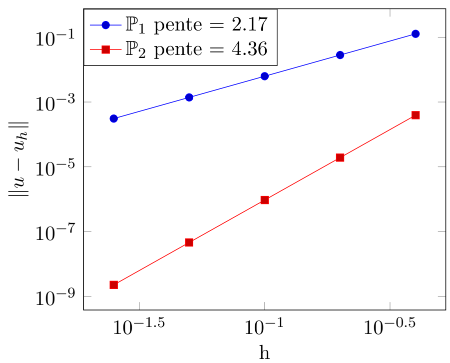

FIGURE 1 – Illustration

1.2 Fonctions peu régulières

Solutions singulières. On considere à présent le domaine $\Omega = \left\{\mathbf{x} = r(\cos\theta, \sin\theta)^T, r \in\ (0,1), \theta \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)\right\}$ et le problème de Poisson avec condition de Dirichlet

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \text{ dans } \Omega \\ u &= g \text{ sur} \partial\Omega \end{aligned} \tag{2}$$

avec g définie telle que u définie en coordonnée polaire par

$$u(r,\theta) = r^{2/3} \sin\left(\frac{2}{3}\theta\right)$$

soit la solution exacte du problème. Cette fonction est peu régulière proche de l'origine et conduit donc à des approximations peu précises près de l'origine.

— Vérifier que le Laplacien de u est bien nul puis déterminer g telle que u soit solution du problime.
— Montrer que $u \in H^1(\Omega)$ mais que le gradient de u n'est pas borné à l'origine. En déduire que
$$u \notin H^2(\Omega)$$
— Créer le maillage avec Gmsh.
— Faire l'étude de convergence. Qu'observez vous ?

2 Méthode de stabilisation

On considère le problème d'advection-diffusion stationnaire :

$$
\begin{aligned}
-\varepsilon\Delta u + \beta \cdot \nabla u + \mu u &= f, \\
u &= g
\end{aligned}
$$

dans le domaine Ω est rectangulaire. Les paramètres sont les suivants : la vitesse d'advection est égale à $\beta = (1,1)^T$, le coefficient d'amortissement μ est égal à 1 et l'on souhaite faire varier le coefficient de diffusion ε parmi les valeurs $\{10, 1, 10^{-1}, 10^{-3}\}$. Pour commencer, on considère une condition de Dirichlet homogène $g = 0$

1. Tester la formulation variationnelle (directe) avec éléments finis P1 pour les différentes valeurs de ε. Commenter.
2. Implémenter les méthodes de stabilisation SUPG et GaLS et comparer les résultats avec la version sans stabilisation dans le cas P_1 ainsi qu'avec la méthode implémentée via les options `stabilization.type=gls,supg`
3. Vérifier l'ordre de convergence de la méthode GaLS avec des éléments P1 et P2 (pour $\varepsilon = 10^{-3}$). Pour cela, considérer une solution manufacturée (faite avec les mains) : considérer une fonction $u(x,y)$ puis calculer f et g telle que u soit solution du problème. Prendre à présent un domaine en forme de L : $\Omega =]0,4\,[^2 \backslash]0,2\,[^2$. Les paramètres sont les suivants : $\varepsilon = 10^{-3}, \beta = (y, -x)^T, \mu = 0$ et $f = 0$. Sur le bord gauche $\{x = 0, 2 \leqslant y \leqslant 4\}$, on applique une condition de Dirichlet $u = 1$. Sur le bord bas $\{2 \leqslant x \leqslant 4, y = 0\}$, on applique une condition de Neumann homogène. Sur les autres bords, on applique une condition de Dirichlet homogène.

3 Stokes

On considère le problème de Stokes suivant :

$$
\begin{aligned}
-\Delta u + \nabla p &= f \text{ dans } \Omega \\
\nabla \cdot u &= 0 \\
u &= g \text{ sur } \partial\Omega
\end{aligned}
$$

Une solution exacte est donnée par la solution de Kovasznay :

$$
u = \begin{bmatrix} 1 - e^{\lambda x}\cos(2\pi y) \\ \frac{\lambda}{2\pi} e^{\lambda x}\sin(2\pi y) \end{bmatrix}, \quad p(x,y) = -\frac{e^{2\lambda x}}{2} + C
$$

avec

$$
\lambda = 1/(2\nu) - \sqrt{1/\left(4\nu^2\right) + 4\pi^2}, C \in \mathbb{R}
$$

une constante et le second membre f est déterminé de telle sorte que u soit solution.

On considère le domaine $\Omega = (-0.5, 1) \times (-0.5, 1.5)$ et $\nu = 0.035$. Les conditions de Dirichlet sur le bord sont obtenues en évaluant la solution exacte.

— Déterminer f de telle sorte que u soit solution puis $C \in \mathbb{R}$ tel que p soit à moyenne nulle sur Ω.

— Créer le maillage du domaine Ω.

— Ecrire la formulation variationnelle pour le problème suivant :

$$\begin{aligned} -\Delta u + \nabla p &= f, \quad \text{dans}\Omega \\ \nabla \cdot u &= 0 \\ u &= g \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

— Résoudre avec les éléments P_1/P_1, Commenter vos résultats.
— Résoudre avec les éléments P_2/P_1 et calculer la moyenne de la pression. Commenter.
— Faire une analyse de convergence en vitesse et pression pour les éléments P_2/P_1.
— Implémenter la méthode de Galerkin moindres carrés pour le problème de Stokes discrétisé dans le cas d'espace incompatibles $P_1/P_!$, conduiser l'étude de convergence et montrer que les résultats de convergence sont obtenus.

Pour calculer la valeur moyenne de la pression, utilisez les outils de postprocessing.

Application à Navier-Stokes : Reproduire les résultats du cas test `https://github.com/feelpp/feelpp/blob/develop/toolboxes/coefficientformpdes/cases/fluid/TurekHron/`, expliciter les équations qui sont résolues ainsi que les quantités qui sont calculées en post processing.