

Études d'EDP: Laplacien, Laplacien non linéaire, ADR, Stokes

Méthodes numériques pour les EDP

1 Vérification

1.1 Le Laplacien

L'objectif est de vérifier que les différentes formulations du Laplacien en fonction des conditions aux limites (voir chapitre 3 sur les problèmes coercifs)

- Dirichlet non homogène
- Neumann non homogène
- Fourier (ou encore appelée Robin)

satisfont les résultats du théorème 1 page 38 des notes de cours pour des approximations \mathbb{P}_1 et \mathbb{P}_2 ($k = 1$ et $k = 2$) en 2D.

Afin de vérifier ces résultats, nous allons d'abord considérer le problème suivant : soit Ω le cercle unité tel que $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_F$ avec

- $\Gamma_D = \{\mathbf{x} = (\cos \theta, \sin \theta), \theta \in (0, \pi/2)\}$
- $\Gamma_N = \{\mathbf{x} = (\cos \theta, \sin \theta), \theta \in (\pi/2, \pi)\}$
- $\Gamma_F = \{\mathbf{x} = (\cos \theta, \sin \theta), \theta \in (\pi, 2\pi)\}$

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \\ u &= g \quad \text{sur } \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= m \quad \text{sur } \Gamma_N \\ u + \frac{\partial u}{\partial n} &= l \quad \text{sur } \Gamma_F \end{aligned} \tag{1}$$

1. Créer le maillage d'un domaine Ω quelconque (pas un carré), nommer les bords physiques **Dirichlet**, **Neumann** et **Fourier**.
2. prendre $f = 1, g = m = l = 0$ et $h = 0.05$
 - écrire la formulation variationnelle
 - résoudre le problème avec `feelp_toolbox_coefficientform` et afficher dans le rapport le maillage ainsi que la solution u du problème (1)
3. Ensuite considérez la fonction $u(x, y) = \sin(\pi x) \cos(\pi y)$ et calculez f, g, m, l pour que u soit solution de (1). Faites une étude de convergence en échelle log-log et observez les pentes des droites associées aux approximations \mathbb{P}_2 . Sont elles celles attendues par le théorème 1 page 38 ?

Afin de présenter les résultats, vous rentrerez les erreurs L_2 et H_1 dans un tableau et sur une figure 1. Les résultats factices sont dans `res.dat`.

h	$\ \cdot\ _{L_2}$	$\ \cdot\ _{H_1}$
0.400	$1.42 \cdot 10^{-1}$	$4.88 \cdot 10^{-4}$
0.200	$2.63 \cdot 10^{-2}$	$1.66 \cdot 10^{-5}$
0.100	$5.74 \cdot 10^{-3}$	$7.87 \cdot 10^{-7}$
0.050	$1.34 \cdot 10^{-3}$	$4.31 \cdot 10^{-8}$
0.025	$3.36 \cdot 10^{-4}$	$2.70 \cdot 10^{-9}$

TABLE 1 – Erreur de convergence

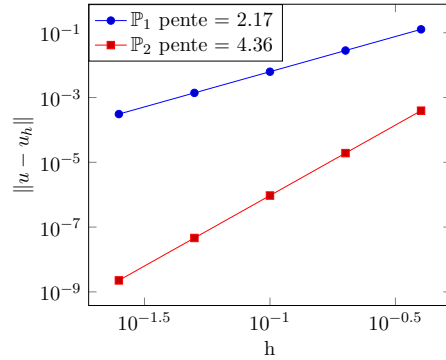


FIGURE 1 – Illustration

1.2 Fonctions peu régulières

Solutions singulières. On considère à présent le domaine $\Omega = \{\mathbf{x} = r(\cos \theta, \sin \theta)^T, r \in (0, 1), \theta \in (0, \frac{3\pi}{2})\}$ et le problème de Poisson avec condition de Dirichlet

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \text{ dans } \Omega \\ u &= g \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned} \tag{2}$$

avec g définie telle que u définie en coordonnée polaire par

$$u(r, \theta) = r^{2/3} \sin\left(\frac{2}{3}\theta\right)$$

soit la solution exacte du problème. Cette fonction est peu régulière proche de l'origine et conduit donc à des approximations peu précises près de l'origine.

- Vérifier que le Laplacien de u est bien nul puis déterminer g telle que u soit solution du problème.
- Montrer que $u \in H^1(\Omega)$ mais que le gradient de u n'est pas borné à l'origine. En déduire que

$$u \notin H^2(\Omega)$$

- Créer le maillage avec Gmsh.
- Faire l'étude de convergence. Qu'observez-vous ?

2 Méthode de stabilisation

On considère le problème d'advection-diffusion stationnaire :

$$\begin{aligned} -\varepsilon \Delta u + \beta \cdot \nabla u + \mu u &= f, \\ u &= g \end{aligned}$$

dans le domaine Ω est rectangulaire. Les paramètres sont les suivants : la vitesse d'advection est égale à $\beta = (1, 1)^T$, le coefficient d'amortissement μ est égal à 1 et l'on souhaite faire varier le coefficient de diffusion ε parmi les valeurs $\{10, 1, 10^{-1}, 10^{-3}\}$. Pour commencer, on considère une condition de Dirichlet homogène $g = 0$

1. Tester la formulation variationnelle (directe) avec éléments finis P1 pour les différentes valeurs de ε . Commenter.
2. Implémenter les méthodes de stabilisation SUPG et GaLS et comparer les résultats avec la version sans stabilisation dans le cas P_1 ainsi qu'avec la méthode implémentée via les options `stabilization.type=glS,supg`
3. Vérifier l'ordre de convergence de la méthode GaLS avec des éléments P1 et P2 (pour $\varepsilon = 10^{-3}$). Pour cela, considérer une solution manufacturée (faite avec les mains) : considérer une fonction $u(x, y)$ puis calculer f et g telle que u soit solution du problème. Prendre à présent un domaine en forme de L : $\Omega =]0, 4[^2 \setminus]0, 2[^2$. Les paramètres sont les suivants : $\varepsilon = 10^{-3}$, $\beta = (y, -x)^T$, $\mu = 0$ et $f = 0$. Sur le bord gauche $\{x = 0, 2 \leq y \leq 4\}$, on applique une condition de Dirichlet $u = 1$. Sur le bord bas $\{2 \leq x \leq 4, y = 0\}$, on applique une condition de Neumann homogène. Sur les autres bords, on applique une condition de Dirichlet homogène.

3 Stokes

On considère le problème de Stokes suivant :

$$\begin{aligned} -\Delta u + \nabla p &= f \text{ dans } \Omega \\ \nabla \cdot u &= 0 \\ u &= g \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

Une solution exacte est donnée par la solution de Kovasznay :

$$u = \begin{bmatrix} 1 - e^{\lambda x} \cos(2\pi y) \\ \frac{\lambda}{2\pi} e^{\lambda x} \sin(2\pi y) \end{bmatrix}, \quad p(x, y) = -\frac{e^{2\lambda x}}{2} + C$$

avec

$$\lambda = 1/(2\nu) - \sqrt{1/(4\nu^2) + 4\pi^2}, C \in \mathbb{R}$$

une constante et le second membre f est déterminé de telle sorte que u soit solution.

On considère le domaine $\Omega = (-0.5, 1) \times (-0.5, 1.5)$ et $\nu = 0.035$. Les conditions de Dirichlet sur le bord sont obtenues en évaluant la solution exacte.

- Déterminer f de telle sorte que u soit solution puis $C \in \mathbb{R}$ tel que p soit à moyenne nulle sur Ω .
- Créer le maillage du domaine Ω .

— Ecrire la formulation variationnelle pour le problème suivant :

$$-\Delta u + \nabla p = f, \quad \text{dans } \Omega$$

$$\nabla \cdot u = 0$$

$$u = g \text{ sur } \partial\Omega$$

- Résoudre avec les éléments P_1/P_1 , Commenter vos résultats.
- Résoudre avec les éléments P_2/P_1 et calculer la moyenne de la pression. Commenter.
- Faire une analyse de convergence en vitesse et pression pour les éléments P_2/P_1 .
- Implémenter la méthode de Galerkin moindres carrés pour le problème de Stokes discrétisé dans le cas d'espace incompatibles P_1/P_1 , conduire l'étude de convergence et montrer que les résultats de convergence sont obtenus.

Pour calculer la valeur moyenne de la pression, utilisez les outils de postprocessing.

Application à Navier-Stokes : Reproduire les résultats du cas test <https://github.com/feellpp/feellpp/blob/develop/toolboxes/coefficientformpdes/cases/fluid/TurekHron/>, expliciter les équations qui sont résolues ainsi que les quantités qui sont calculées en post processing.