

# Modélisation du comportement transitoire des aimants à haut champ

Lucas Anki

Supervisé par :

Christophe Prud'Homme and Christophe Trophime

UFR de Mathématique et d'Informatique

26/08/2020

# Introduction



## Résumé du projet

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times A \right) + \sigma \frac{\partial A}{\partial t} = -\sigma \nabla V \quad (1)$$

$$\nabla \cdot (J) = \nabla \cdot \left( \sigma \left( -\nabla V - \frac{\partial A}{\partial t} \right) \right) = 0 \quad (2)$$

$A(r, t)$	le potentiel magnétique,
$V(r, t)$	le potentiel électrique,
$J(r, t)$	la densité de courant,
$\mu_0(r, t)$	la perméabilité du vide,
$\sigma(r, t)$	la conductivité

# Validation

Deux cas test simples pour la validation :

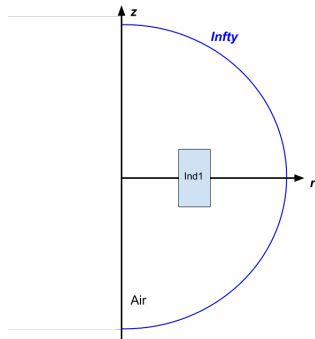


Figure: Un aimant seul

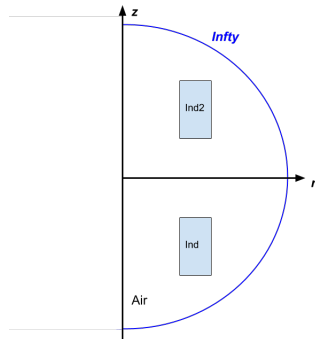


Figure: Un ensemble de deux aimants

# Comparaison entre feelp et getdp

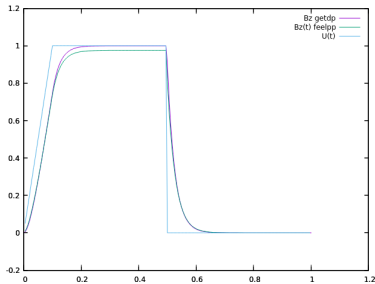


Figure: Cas avec un aimant

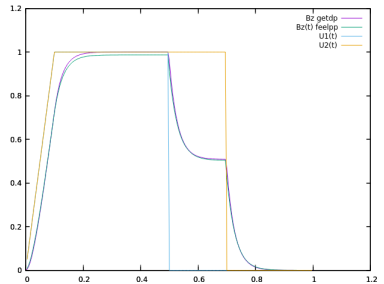


Figure: Cas avec deux aimants

# Explication de l'écart

- ① Pas de temps pas assez petit
- ② Pas d'espace pas assez petit
- ③ L'approximation de certaines constantes, comme  $\sigma$
- ④ L'ordre des éléments finis

## Backward differentiation formula (BDF)

BDF est une famille de méthodes implicites pour l'intégration numérique des équations différentielles ordinaires. Ce sont des méthodes qui, pour une fonction et un temps donné, approchent la dérivée de cette fonction en utilisant des informations de points ayant déjà été calculés, ce qui augmente la précision de l'approximation.

## Backward differentiation formula (BDF)

On utilise BDF pour résoudre les problèmes du type

$$\begin{aligned}y' &= f(t, y) \\ y(t_0) &= y_0\end{aligned}$$

La formule générale peut s'écrire

$$\sum_{k=0}^s a_k y_{n+k} = h\beta f(t_{n+s}, y_{n+s})$$

où  $h$  est le pas et  $t_n = t_0 + nh$



# L'équation de la chaleur

On considère un domaine  $\Omega$ , et on note  $\Gamma$  le bord du domaine. On suppose que  $\Gamma$  est divisé en 3 sous domaines,  $\Gamma_D$ ,  $\Gamma_N$  et  $\Gamma_R$ .

L'équation de la chaleur s'exprime de la façon suivante :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla T) = f \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}^+$$

$$T(x, t = 0) = T_0$$

$$T(x, t) = g(x, t) \quad \text{on } \Gamma_D \times \mathbb{R}^+$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = m(x, t) \quad \text{sur } \Gamma_N \times \mathbb{R}^+$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = h(T - T_w) \quad \text{sur } \Gamma_R \times \mathbb{R}^+$$

Avec  $T$  la température,  $T_0$  la température initiale,  $f$  le terme source,  $g$  et  $m$  les conditions de Dirichlet et Neumann,  $C_p$  la chaleur spécifique,  $\rho$  la densité du matériau et  $h$  et  $T_w$  deux paramètres.

## Formulation faible

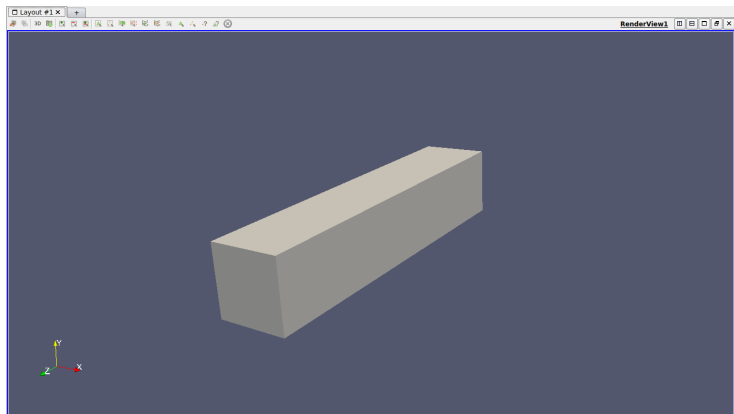
Notons  $V = \{v \in H^1(\Omega) | v = g \text{ on } \Gamma_D\}$  et  $V_0 = \{v \in H^1(\Omega) | v = 0 \text{ on } \Gamma_D\}$ .

Soit  $T \in V$  et  $v \in V_0$ .

La formulation faible s'écrit :

$$\int_{\Omega} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \cdot v + \int_{\Omega} k \nabla T \cdot \nabla v + \int_{\Gamma_R} h T \cdot v = \int_{\Omega} f \cdot v + \int_{\Gamma_R} h T_w \cdot v - \int_{\Gamma_N} m \cdot v$$

# Implémentation de l'équation de la chaleur



# Implémentation de l'équation de la chaleur

Deux cas test :

- Cas 1 : Test des conditions de Dirichlet et Neumann
- Cas 2 : Test des conditions de Dirichlet et Robin

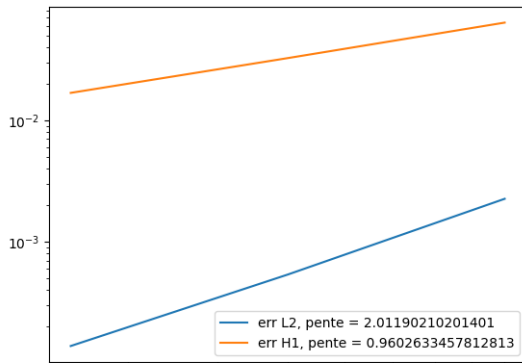
Dans chacun des cas on prend la solution exacte  $T = x^2 yzt$ , et en injectant dans l'équation on obtient le terme source  $f = C_p \rho x^2 yz - 2kyzt$ .

Dans le second cas on considère des conditions de Robin sur le bord en  $z = 5$  et du Dirichlet sur tout le reste.

# Implémentation de l'équation de la chaleur

Erreur  $L^2$  et  $H^1$  en  $t = 0.5$

$h$	0.1	0.05	0.025
$L^2$ error	0.00460	0.000969	0.000250
$H^1$ error	0.11461	0.058510	0.030279



## Couplage équation de la chaleur et équations MQS

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times A \right) + \sigma \frac{\partial A}{\partial t} = -\sigma \nabla V$$

$$\nabla \cdot \left( \sigma \left( -\nabla V - \frac{\partial A}{\partial t} \right) \right) = 0$$

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla T) = \sigma \|E\|^2$$

# Stratégies de résolutions

- Résoudre les équations MQS puis résoudre l'équation de la chaleur (dans le cas où les paramètres ne dépendent pas de la température)
- Résoudre les équations MQS puis résoudre l'équation de la chaleur en approchant les termes non linéaires à l'aide d'une méthode de point fixe
- Résoudre les trois équations en même temps sous forme de bloc

# 1<sup>er</sup> cas: Paramètres ne dépendant pas de la température

## Résultats théoriques

On considère de nouveau l'équation de la chaleur :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla T) = f$$

On s'intéresse à la solution dans une surface cylindrique creuse. On suppose de plus que  $T$  dépend uniquement de  $r$ . Notons  $U$  la différence de potentiel appliqué sur les bords de l'aimant. Le second membre devient donc :

$$f = \sigma \left( \frac{U}{2\pi r} \right)^2$$

Donc l'équation devient :

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r k \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \sigma \left( \frac{U}{2\pi r} \right)^2$$



# 1<sup>er</sup> cas: Paramètres ne dépendant pas de la température

## Résultats théoriques

En intégrant on trouve :

$$rk \frac{\partial T}{\partial r} = -\sigma \left( \frac{U}{2\pi} \right)^2 \ln(r) + Ak$$

où  $A$  est une constante. En intégrant de nouveau on trouve finalement :

$$T = A \ln(r) - \frac{\sigma}{2k} \left( \frac{U}{2\pi} \right)^2 \ln^2(r) + B$$

où  $B$  est une constante. Les constantes  $A$  et  $B$  seront déterminées par les conditions aux bords appliquées au rayon interne  $r_1$  et au rayon externe  $r_2$  de l'aimant.

# 1<sup>er</sup> cas: Paramètres ne dépendant pas de la température

## Résultats théoriques

On s'intéresse maintenant à la température maximale. Elle s'obtient lorsque  $r$  est tel que  $\frac{\partial T}{\partial r} = 0$ . Cela revient à résoudre l'équation :

$$A - \frac{\sigma}{k} \left( \frac{U}{2\pi} \right)^2 \ln(r) = 0$$

ayant pour solution :

$$r = e^{\frac{Ak}{\sigma \left( \frac{U}{2\pi} \right)^2}}$$

Donc :

$$T_{\max} = \frac{A^2 k}{2\sigma \left( \frac{U}{2\pi} \right)^2} + B = 0$$

# 1<sup>er</sup> cas: Paramètres ne dépendant pas de la température

## Conditions aux bords

On suppose que les conditions aux bords sont de type Robin, c'est à dire:

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = h(r)(T(r) - T_w(r))$$

avec  $n$  la normale unitaire de l'aimant. De plus, notons  $h_1 = h(r_1)$ ,  $h_2 = h(r_2)$ ,  $T_1 = T_w(r_1)$  and  $T_2 = T_w(r_2)$ .

En appliquant les conditions de Robin sur la solution  $T$  trouvée précédemment on obtient :

$$T = B - \frac{\sigma}{2k} \left( \frac{U}{2\pi} \right)^2 \ln^2 \left( \frac{r}{r_0} \right) + \frac{T_2 - T_1}{k \left( \frac{1}{h_2 r_2} + \frac{1}{h_1 r_1} \right) + \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right)} \ln(r)$$

avec

$$\ln(r_0) = \frac{\frac{1}{2} \ln(r_1 r_2) \ln \left( \frac{r_1}{r_2} \right) + k \left( \frac{\ln(r_2)}{h_2 r_2} + \frac{\ln(r_1)}{h_1 r_1} \right)}{k \left( \frac{1}{h_2 r_2} + \frac{1}{h_1 r_1} \right) + \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right)}$$

# 1<sup>er</sup> cas: Paramètres ne dépendant pas de la température

Conditions aux bords

Si  $T_2 = T_1$  on a:

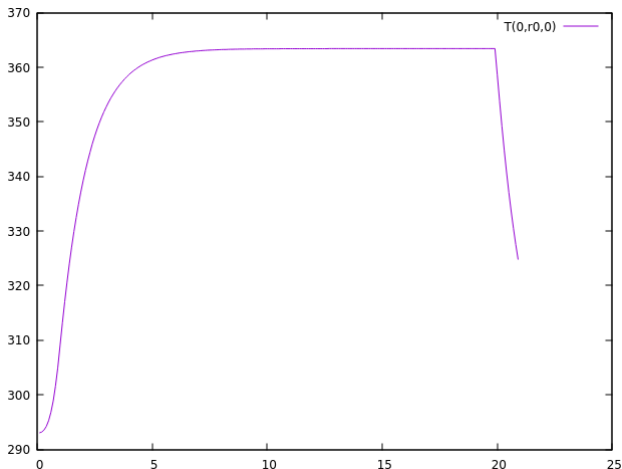
$$T = B - \frac{\sigma}{2k} \left( \frac{U}{2\pi} \right)^2 \ln^2 \left( \frac{r}{r_0} \right)$$

De plus on remarque également que  $B = T_{max}$  et  $r_0 = r_{max}$

# 1<sup>er</sup> cas: Paramètres ne dépendant pas de la température

## Résultats numériques

Résultat de la simulation au point  $(0, r_0, 0)$ , avec  $r_1 = 0.075$ ,  $r_2 = 0.1002$ ,  $h_1 = h_2 = 80000$ ,  $k = 380$ , donc  $r_0 \approx 0.086109025458$ .



# 1<sup>er</sup> cas: Paramètres ne dépendant pas de la température

## Résultats numérique

On peut voir que en fin de plateau, c'est à dire l'équivalent du régime stationnaire, la température est d'environ  $363.4095126K$ .

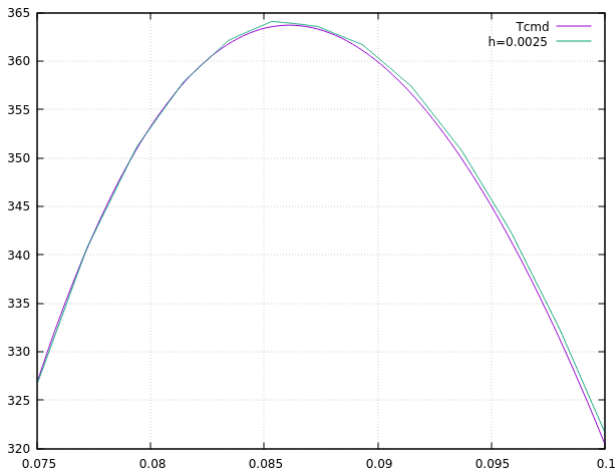
Le résultat théorique attendu, calculé à partir des résultats précédents, est  $T = 363.702800489573K$ .

La température obtenue est donc très proche de celle attendue.

# 1<sup>er</sup> cas: Paramètres ne dépendant pas de la température

## Résultats numérique

Comparons maintenant la température en fonction du rayon, en fin de plateau (Régime stationnaire)



## 1<sup>er</sup> cas: Paramètres dépendant de la température

Dans la réalité, les paramètres  $\sigma$  et  $k$  dépendent de la température de la façon suivante:

$$\sigma(T) = \frac{\sigma_0}{1 + \alpha(T - T_0)}$$
$$k(T) = \frac{k_0}{1 + \alpha(T - T_0)} \frac{T}{T_0}$$

Il faut donc les mettre à jour à chaque pas de temps. Pour cela on procède de la façon suivante :

Au temps 0,  $\sigma_0$  et  $k_0$  sont fixés et on résout les équations MQS. On utilise ensuite une méthode de point fixe afin d'approcher les termes non linéaires de l'équation de la chaleur, et on recommence jusqu'à ce qu'on ait une erreur relative satisfaisante.



# 1<sup>er</sup> cas: Paramètres dépendant de la température

## Résultats numérique

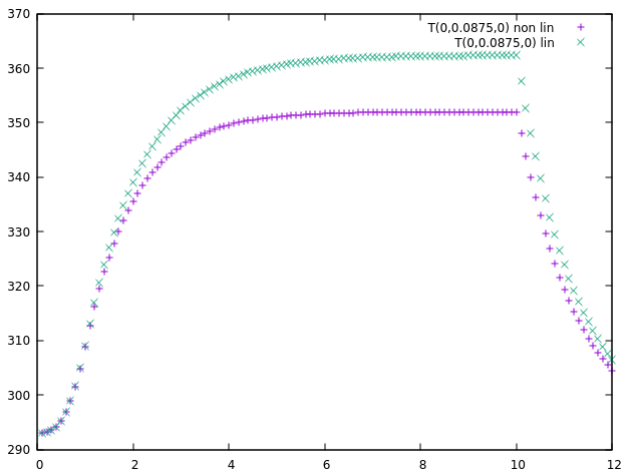
On s'intéresse au même cas que le modèle linéaire, c'est à dire un seul aimant.

On effectue la simulation sur une période de 12 secondes, en augmentant la tension  $U$  jusqu'à  $U_{max} = 0.25$  en  $t = 1$ , puis on a un plateau de 9 secondes avant de couper la tension en  $t = 10$ .

# 1<sup>er</sup> cas: Paramètres dépendant de la température

## Résultats numérique

Voici l'évolution de la température comparée avec le cas linéaire :



# 1<sup>er</sup> cas: Paramètres dépendant de la température

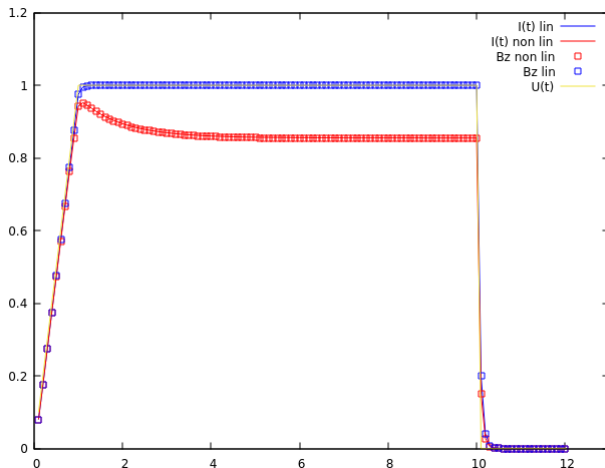
## Résultats numérique

- La température en fin de plateau est plus petite que dans le cas linéaire
- Cela s'explique probablement par le fait que la conductivité  $\sigma$  décroît avec la température, donc le second membre de l'équation représentant les pertes joules sera plus petit, ce qui implique une température plus faible.

# 1<sup>er</sup> cas: Paramètres dépendant de la température

## Résultats numérique

Comparaisons entre I et B dans le cas linéaire et non linéaire :



# 1<sup>er</sup> cas: Paramètres dépendant de la température

## Résultats numérique

- L'intensité et le champ magnétique correspondent parfaitement dans le cas linéaire et non linéaire, ce qui est attendu car  $B$  est linéaire en  $I$ .
- On constate un pic pour le champ magnétique et l'intensité en  $t = 1$
- Il s'explique par le fait que en non linéaire, l'intensité est plus faible, donc la résistance sera plus forte. Le pic représente donc la variation de la résistance entre le cas linéaire et non linéaire, qui se produit en  $t = 1$ .

# Conclusion

- Transition entre stage et projet réussi à l'aide de la modélisation des équations MQS et de la vérifications avec les deux cas de validation
- Implémentation de la BDF satisfaisante
- Implémentation réussie de l'équation de la chaleur avec les équations MQS dans les deux cas vus précédemment

# Conclusion

La suite

- Implémenter la dernière méthode de résolution, la résolution des 3 équations en même temps sous forme de bloc
- Réécrire le code sous les normes feelpp, c'est à dire sous forme de classe, afin d'envisager une implémentation future