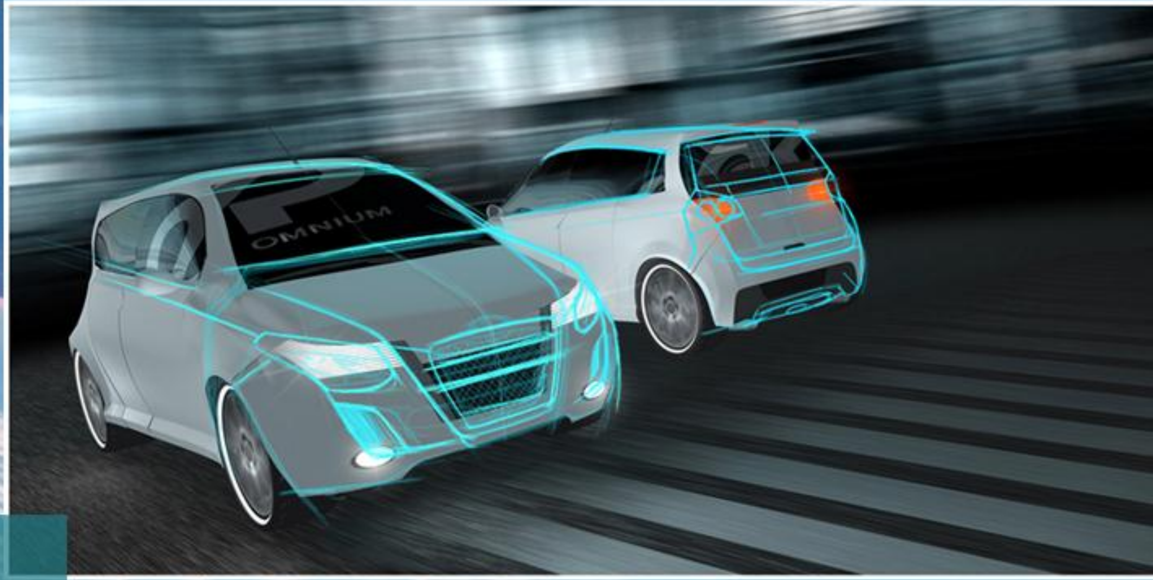
Utilisation de la base propre de l’opérateur Curl avec des conditions aux limites d’imperméabilité généralisée pour la modélisation des équations de Navier-Stokes



Surowiec Benjamin

2011.11.24 ● R&I Product

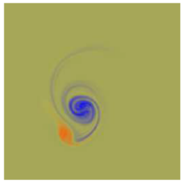
Sommaire

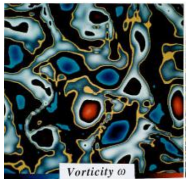
- **Positionnement de l’étude**
- **Modélisation**
  - Problème
  - Condition initiale et conditions aux limites
- **Relèvement des conditions aux limites**
  - Relèvement des conditions aux limites
  - Modèle finalement retenu
- **Spectre de l’opérateur curl**
  - Problème
  - Propriétés
- **Modèle numérique**
- **Conclusion**

Modele de NS avec base propre du curl : NS_{curl}

- **Méthode de résolution temporelle de Navier-Stokes :**
  - LES / DES (volumes finis ou éléments finis)
    - Taille des maillages
    - Lois de parois pour DES / Dirichlet pour LES
  - Méthode spectrale à partir de bases d’ondelettes
    - bases d’ondelettes à divergence nulle et à rotationnel nul pour construire le champ de vitesse - CL associées de type périodique (IMAG)
    - bases d’ondelettes pour le calcul de la vorticité cohérente (IRPHEE et ENS)

- **Contrôle par modèle réduit (LIMSI, PPRIME)**
  - Base créée à partir d’une PIV avec vérification de la divergence nulle
  - Résolution par utilisation des modes d’écoulement sélectionnés





Modele de NS avec base propre du curl : NS_{curl}

- **Méthode de résolution temporelle de Navier-Stokes :**

  Résolution de Navier Stokes par une méthode spectrale à partir des fonctions propres de l'opérateur curl associé à des conditions aux limites d'imperméabilité généralisée aux parois dans un espace à divergence nulle

- **Caractéristiques de la méthode :**
  - Décomposition de la vitesse de type Helmoltz
  - Découplage espace - temps :
    - fonctions propres uniquement spatiales
    - coefficients associés uniquement temporels => gain de temps
  - **Préparation du modèle en espace puis contrôle en temps**

Modélisation : conditions aux limites

- Nous cherchons (v,p) solution des équations de Navier-Stokes incompressibles adimensionnalisées dans $Q_T = \Omega \times [0,T]$ où Ω un ouvert de $\Re^3$ et $\partial\Omega$ sa frontière.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v + \nabla p - \dfrac{1}{\mathrm{Re}} \Delta v - f = 0 & (1) \\ div\ v = 0 & (2) \end{cases}$$

- Pour que le problème soit bien posé, il nous faut ajouter un condition initiale:

$$v(0,\bullet) = v_0(\bullet) \qquad (3)$$

- Et des conditions aux limites; pour celles-ci, nous avons le choix entre :
  - Conditions standards (Dirichlet, Neumann, Navier,…)
  - Conditions périodiques
  - Conditions d'imperméabilité ou perméabilité généralisée

Modélisation : conditions aux limites

- Que sont les conditions de perméabilité/imperméabilité généralisée ?

- 3 conditions aux limites scalaires:
  - Une condition sur le flux de vitesse
  - Une condition sur le flux de vorticité
  - Une condition sur le flux du rotationnel de la vorticité

$$\begin{cases} v \cdot n\big|_{\partial\Omega} = \alpha_0 & (4a) \\ \omega \cdot n\big|_{\partial\Omega} = \alpha_1 & (4b) \\ (curl\ \omega)\cdot n\big|_{\partial\Omega} = \alpha_2 & (4c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left|v(t,\bullet)\cdot n(\bullet)\right|_{\partial\Omega} = 0 \ \ ou \ \ \alpha_0(t,\bullet) \\ \left|\omega(t,\bullet)\cdot n(\bullet)\right|_{\partial\Omega} = 0 \ \ ou \ \ \alpha_1(t,\bullet) \\ (curl\ \omega)\cdot n\big|_{\partial\Omega} = 0 \ \ ou \ \ \alpha_2(t,\bullet) \end{cases}$$

Où n est la normale extérieure et $\omega = curl\ v$

Modélisation : problème

- Nous cherchons donc (v,p) dans Q_T solution du problème suivant:

$$
(S_1) \quad \begin{cases}
\dfrac{\partial v}{\partial t} + \omega \times v + \nabla q + \dfrac{1}{\mathrm{Re}} curl^2 v - f = 0 & (1) \\
div \;\; v = 0 & (2) \\
v\big|_{t=0} = v_0 & (3) \\
v \cdot n\big|_{\partial\Omega} = \alpha_0 & (4a) \\
\omega \cdot n\big|_{\partial\Omega} = \alpha_1 & (4b) \\
curl \;\; \omega \cdot n\big|_{\partial\Omega} = \alpha_2 & (4c)
\end{cases}
$$

Où $q = \dfrac{|v|^2}{2} + p$ et l'opérateur $curl$ est celui associé au conditions aux limites d'imperméabilité généralisée

Modélisation : principaux apports

- Définition d'un nouvel espace de solutions

$$D^1(\Omega)^3 = \left\{ v \in W^{1,2}(\Omega) / \, div \;\, v = 0;\; v \cdot n\big|_{\partial\Omega} = 0;\; curl \;\, v \cdot n\big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$$

opérateur curl défini dans D¹ : $D(curl) = D^1(\Omega)^3$ avec les propriétés suivantes :

- Solution régulière en C² $(\in W^{1,2})$
- Divergence nulle
- Pas de flux de vitesse à la paroi
- Pas de flux de vorticité à la paroi

$$\begin{cases} div \;\, v = 0 \\ v \cdot n\big|_{\partial\Omega} = 0 \\ curl \;\, v \cdot n\big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

- Espace à CL homogènes => nécessité de relever ces conditions aux limites

- Modèle continu jusqu'aux parois
- Prise en compte du comportement tangentiel du fluide aux parois
- Aucune loi de paroi
- Calculs pression – vitesse découplés dans la formulation faible

Relèvement des conditions aux limites

- Nous souhaitons relever les conditions aux limites (4a) et (4b); pour cela nous définissons une fonction $a \in W^{1.2}(\Omega)^3$ telle que :

$$a := curl\ \chi_1 + \nabla \chi_0$$

- La fonction a ainsi construite possède les propriétés suivantes:

$$div\ a = 0$$

$$a \cdot n \big|_{\partial\Omega} = \alpha_0$$

$$curl\ a \cdot n \big|_{\partial\Omega} = \alpha_1$$

$$curl^2 a = 0$$

Relèvement des conditions aux limites

- Nous souhaitons relever les conditions aux limites (4a) et (4b); pour cela nous définissons une fonction $a \in W^{1.2}(\Omega)^3$ telle que :

$$\boxed{a := \nabla \chi_0 + curl\ \chi_1}$$

$\chi_0 \in W^{1,2}(\Omega)$

solution d'un problème harmonique

$(\chi_1, \underline{P}) \in D^1(\Omega)^3 \times W^{1,2}(\Omega)$

solution d'un problème de Stokes et d'un problème harmonique :

$$(S_2)_t \begin{cases} \boxed{\Delta \chi_0 = 0} \\ \nabla \chi_0 \cdot n\big|_{\partial\Omega} = \alpha_0 \end{cases}$$

$$(S_3)_t \begin{cases} \boxed{curl^2 \chi_1 + \nabla \underline{P} = 0} \\ div\ \chi_1 = 0 \\ \chi_1 \cdot n\big|_{\partial\Omega} = 0 \\ curl\ \chi_1 \cdot n\big|_{\partial\Omega} = 0 \\ curl^2 \chi_1 \cdot n\big|_{\partial\Omega} = \alpha_1 \end{cases} \Longleftarrow (S_4)_t \begin{cases} \Delta \underline{P} = 0 \\ \nabla \underline{P} \cdot n\big|_{\partial\Omega} = \alpha_1 \end{cases}$$

- Qui permet de décomposer la solution cherchée en : v = a+u

Modèle finalement retenu

- Nous cherchons maintenant alors (u,q) dans Q_T solution du problème suivant:

$$
(S_5)\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} + curl\ u \times u + \boxed{curl\ u \times a + curl\ a \times u} + \nabla q + \dfrac{1}{\mathrm{Re}} curl^2 u - \boxed{h} = 0 \\
div\ u = 0 \\
u\big|_{t=0} = v_0 - a(0,\bullet) \\
u \cdot n\big|_{\partial\Omega} = \boxed{0} \\
curl\ u \cdot n\big|_{\partial\Omega} = \boxed{0} \\
curl^2 u \cdot n\big|_{\partial\Omega} = \alpha_2
\end{cases}
$$

Où $v = u + a$ et $h = f - \boxed{\dfrac{\partial a}{\partial t} - curl\ a \times a}$

Modèle numérique

- Nous cherchons u solution du problème (S5) sous la forme d'une décomposition du type Galerkin

$$u(t,\bullet)=\sum_{i=1}^{+\infty} c_i(t) g_i(\bullet)$$

- Nous savons que la solution approchée $u_M(t,\bullet)=\sum_{i=1}^{M} c_i(t) g_i(\bullet)$ converge vers la solution exacte.

- Cependant cette valeur de M n'est pas connue Il faudra donc l'étalonner numériquement

- Il nous faut maintenant choisir les valeurs de $(g_i)_{i\in 1,2,\ldots}$ qui engendrerons l'espace $D^1(\Omega)^3 = D(curl_{imperm})$ dans lequel nous cherchons la solution u

Spectre de l'opérateur curl : problème

- Une des bases qui engendre D^1 est l'ensemble des g_i qui vérifient le problème aux valeurs propres suivant :

$$(\lambda_i, g_i) \in \Re \times D^1(\Omega)^3 \qquad (S_6) \quad \begin{cases} curl^2 g_i = \lambda_i g_i \\ div\ g_i = 0 \\ g_i \cdot n|_{\partial\Omega} = 0 \\ curl\ g_i \cdot n|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

- Tout élément de $D^1(\Omega)^3$ peut s'écrire $g_i = g_i^0 + \nabla\psi_i$ avec $g_i^0|_{\partial\Omega} = 0$ et $\nabla\psi_i \cdot n|_{\partial\Omega} = 0$

- Dans $D^1(\Omega)^3$ les fonctions propres des opérateurs $curl$, $curl^2$ et $-\Delta$ sont identiques.
- Les valeurs propres des opérateurs $curl^2$ et $-\Delta$ sont identiques.

- Les valeurs propres de l'opérateur curl associé aux g_i sont les racines carrées positives $\lambda_i^+ = \sqrt{\Lambda_i}$ et négatives $\lambda_i^- = -\sqrt{\Lambda_i}$ des valeurs propres de l'opérateur curl².

- La base devant être libre nous ne conserverons qu'une seule des 2 valeurs propres. le signe sera contenu dans le coefficient c_k

Modèle numérique : problème approché

- Nous cherchons $\left(c_k\right)_{1\leq k\leq M}$ dans $\Re^M$ solutions du système différentiel ordinaire suivant, pour $1\leq k\leq M$:

en décomposant dans (S5) u = sum (…) avec lambda et g_i connu

- dans la formulation faible la pression disparaît. Celle est calculée en post-traitement de la vitesse

$$(S_7)_{1\leq k\leq M} \quad \begin{cases} \dfrac{dc_k}{dt} + \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} c_i\,\lambda_i\,c_j\,r_{ijk} + \sum_{i=1}^{M} c_i\,\lambda_i\,r_{ik}^{a} + \sum_{i=1}^{M} c_j\,r_{jk}^{curl\ a} + \lambda_k^2 c_k = r_k^h - r_k^{\alpha_2} \\ c_k(0) = c_k^0 \end{cases}$$

Où $r_{ijk} = \left\langle g_i \times g_j, g_k \right\rangle_\Omega$, $r_{ik}^{a} = \left\langle g_i \times a, g_k \right\rangle_\Omega$, $r_{jk}^{curl\ a} = \left\langle curl\ a \times g_j, g_k \right\rangle_\Omega$,

$r_k^h = \left\langle h, g_k \right\rangle_\Omega$ et $r_k^{\alpha_2} = \left\langle \alpha_2, \psi_k \right\rangle_{\partial\Omega}$ Ne sont calculés qu'une seule fois

- Les dimensions spatiales sont portées uniquement par les fonctions propres de l'opérateur curl.

- La dimension temporelle est portée par les coefficients de la décomposition de type Galerkin.

Resolution NS sur base curl : modèle numérique

- **Plan de modélisation**
  - **Décomposition v = u + a**

  - **Résolution de a :** $a := curl\ \chi_1 + \nabla \chi_0$
    - (S4) problème de poisson $\underline{P}$: $\Delta \underline{P} = 0$
    - (S3) Problème de Stokes χ_1: $curl^2 \chi_1 + \nabla \underline{P} = 0 \quad et \quad div\ \chi_1 = 0$
    - (S2) Problème de Poisson χ_0: $\Delta \chi_0 = 0$

  - **Résolution de u =>**

Resolution NS sur base curl : modèle numérique

- **Plan de modélisation**
  - **Résolution de u**
    - Décomposition u : $u(t,\bullet)=\sum_{i=1}^{+\infty} c_i(t) g_i(\bullet)$
    - (S6) Problème aux valeurs propres $g_i(x)$: $curl^2 g_i = \lambda_i g_i \quad et \quad div\ g_i = 0$
    - Décomposition de g_i: $g_i = g_i^0 + \nabla \psi_i$
    - Résolution de g_i^0: $\Delta g_i^0 = \Delta g_i$
    - Résolution de ψ_i : $\Delta \psi_i = -div\, g_i^0$
    - Calcul de R_k : $r_k^{\alpha_2} = \left\langle \alpha_2 , \psi_k \right\rangle_{\partial\Omega}$
    - (S7) Problème spectral Ci(t) : $\frac{dc_k}{dt} + \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} c_i \lambda_i c_j r_{ijk} + \sum_{i=1}^{M} c_i \lambda_i r_{ik}^{a} + \sum_{i=1}^{M} c_j r_{jk}^{curl\ a} + \lambda_k^2 c_k = r_k^h - r_k^{\alpha_2}$
  - **Recombinaison de u** $u(t,\bullet)=\sum_{i=1}^{+\infty} c_i(t) g_i(\bullet)$ **avec C_i et g_i connu**
  - **Recombinaison de v = u + a avec u et a connu**

Modèle numérique : premiers résultats

- **maquette numérique**
  - logiciel free fem ++
  - maillage hypermesh et export format acusolve
  - lecture maillage tetra dans free fem ++
  - calcul FEM des modes (gradient conjugé ou Arnoldi)
  - calcul des coefficients
    - linéarisation avec Newton (S7)
    - résolution avec AX=B avec Gauss Seidel
    - RK2 en temporel
  - construction du champ de vitesse
  - export format medit
  - représentation dans free fem ++ et medit

- **calcul des modes et des coefficients sur 250 000 mailles en 2 heures sur un cas stationnaire**

Conclusion

- Nouvelle approche des équations de Navier-Stokes
- Nouvelles conditions aux limites

- Définition d'un nouvel espace de solutions

$$D^1(\Omega)^3 = \left\{ v \in W^{1,2}(\Omega) / \, div \ v = 0; \ v \cdot n\big|_{\partial\Omega} = 0; \ curl \ v \cdot n\big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$$

- Définition de l'opérateur $curl$ dans cet espace : $D(curl) = D^1(\Omega)^3$
- Modèle continu jusqu'aux parois
- Prise en compte du comportement tangentiel du fluide aux parois
- Aucune loi de paroi
- Calculs pression – vitesse découplés dans la formulation faible

- Les dimensions spatiales sont portés uniquement par les fonctions propres de l'opérateur curl.
- La dimension temporelle est portée par les coefficients de la décomposition de type Galerkin.
- Travail initial de génération de la base de fonctions propres pour la $1^{ère}$ itération puis utilisation des mêmes fonctions propres pour les itérations suivantes => gain de temps

Merci pour votre attention