



Título del documento

Dr. Ciro Rodríguez Rodríguez

19 de septiembre del 2023

Jesus Stevan Diaz Ingol

Combinaciones y permutaciones

Ejercicio 1

Queremos codificar los símbolos alfanuméricos (28 letras y 10 cifras) en palabras de una cierta longitud k de un alfabeto binario $A = \{0, 1\}$. ¿Cuál es la mínima longitud necesaria para poderlo hacer?

Solución

Para que la palabra tenga la menor longitud posible, debemos poder representar la mayor cantidad de símbolos posibles con la menor cantidad de bits posibles. En este sentido, elegimos a la permutación con repetición como estrategia de conteo. Dado que cada ordenamiento representa un símbolo distinto, estamos aprovechando al máximo la cantidad de bits disponibles.

Sea PR_2^k el total de permutaciones con repetición de 2 dígitos tomados de k en k , tenemos

$$PR_2^k = 2^k$$

Se nos pide representar como mínimo 38 símbolos distintos, entonces

$$2^k \geq k$$

$$k \geq \log_2 38$$

$$k \geq 5.248$$

Siendo que la longitud de la palabra debe ser un número entero, tenemos que la longitud mínima es 6.

Ejercicio 2

¿Es suficiente con palabras de hasta 4 de longitud para representar todas las letras del alfabeto ordinario en lenguaje Morse (el lenguaje Morse dispone sólo de dos símbolos: punto y raya)?

Solución

El total de posibles palabras Morse de longitud 4 equivale al total de permutaciones con repetición de 2 dígitos tomados de 4 en 4, es decir

$$PR_2^4 = 2^4 = 16$$

Debemos considerar que el enunciado no exige que la longitud sea 4, mas bien, especifica una longitud máxima. Considerando las palabras de longitud 3, 2 y 1, tenemos

$$PR_2^4 + PR_2^3 + PR_2^2 + PR_2^1 = 16 + 8 + 4 + 2 = 30$$

Notamos que el total de palabras Morse de longitud máxima 4 es suficiente para representar todas las letras del alfabeto ordinario, el cual consta de 26 letras (sin contar la ñ).

Ejercicio 3

De cuántas maneras se pueden escoger tres números del 1 al 9 de manera que no salgan dos consecutivos?

Solución

Para resolver este problema, empezamos considerando el total de permutaciones con repetición de 2 dígitos del 1 al 9 tomados de 3 en 3 (sin restricciones), es decir

$$PR_9^3 = 9^3 = 729$$

Podemos entender a este número como los nodos finales de un árbol de tres niveles, cada nivel representando a un dígito de la permutación. Así, el primer nivel tendrá 9 nodos, cada uno representando a un dígito del 1 al 9. Dado que en el escenario actual no existen restricciones de consecutividad, de cada nodo se ramifican 9 nodos más.

Pasemos a considerar las ramas que, dadas las restricciones del problema, no pueden existir. En general, ningún nodo puede ramificarse hacia otro nodo que representa el dígito consecutivo. Esto significa que, en el primer nivel, se debe eliminar un subnodo de cada nodo del 1 al 8, incluyendo los 9 subnodos de cada uno de estos subnodos. En total, se eliminan 72 nodos finales.

El único nodo del primer nivel que conserva todos sus subnodos es el 9. Con estos, hacemos lo mismo que hicimos antes: eliminamos un subnodo de cada nodo del 1 al 8. En total, se eliminan 8 nodos finales.

El nodo 8 del primer nivel ha perdido su subnodo 9, por lo que ahora tiene 8 subnodos del 1 al 8. Con estos hacemos lo mismo: eliminamos un subnodo de cada nodo del 1 al 8. En total, se eliminan 8 nodos finales.

Los nodos 1 al 7 del primer nivel también han perdido un subnodo. Por ejemplo

- El nodo 1 ha perdido a su subnodo 2, quedándole los subnodos $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, de los cuales, a excepción del 9, se elimina un subnodo de cada uno de ellos.
- El nodo 2 ha perdido su subnodo 3, quedándole los subnodos $\{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, de los cuales, a excepción del 9, se elimina un subnodo de cada uno de ellos.

Notamos que a cada caso se eliminan 7 nodos finales. En total, se eliminan 49 nodos finales.

Finalmente, restamos todos los nodos finales eliminados al total de nodos finales del árbol, obteniendo

$$729 - 72 - 8 - 8 - 49 = 592$$

Entonces, se pueden escoger tres números del 1 al 9 de 592 maneras distintas de manera que no salgan dos consecutivos.

Ejercicio 4

Las placas de matrícula tienen cuatro dígitos numéricos seguidos de dos alfabéticos. ¿Cuántos coches se pueden matricular? Una vez se han agotado, se propone que las matrículas puedan estar formadas por seis dígitos alfanuméricos (es decir, cifras del 0 al 9 o letras de la A a la Z). ¿Cuántas matrículas nuevas se pueden hacer? Una vez agotadas éstas, ¿qué estrategia proporcionaría más matrículas nuevas, hacer matrículas con 7 dígitos, o bien añadir un símbolo al alfabeto?

Solución

En el primer caso, el total de matrículas posibles equivale al total de permutaciones con repetición de 10 dígitos tomados de 4 en 4, multiplicado por el total de permutaciones con repetición de 26 letras tomadas de 2 en 2, es decir

$$PR_{10}^4 \cdot PR_{26}^2 = 10^4 \cdot 26^2 = 6760000$$

En el segundo caso, el total de matrículas posibles equivale al total de permutaciones con repetición de 36 dígitos alfanuméricos (10 cifras o 26 letras sin contar la ñ) tomados de 6 en 6, es decir

$$PR_{36}^6 = 36^6 = 2176782336$$

En el tercer caso, por un lado tenemos el total de permutaciones con repetición de 36 dígitos tomados de 7 en 7, es decir

$$PR_{36}^7 = 36^7 = 78364164096$$

Por otro lado, tenemos el total de permutaciones con repetición de 36 dígitos alfanuméricos más uno nuevo, tomados de 6 en 6, es decir

$$PR_{37}^6 = 37^6 = 2565726409$$

Notamos que la primera estrategia proporciona más matrículas nuevas.

Ejercicio 5

¿Cuántos números hay entre 100 y 900 que tengan las cifras diferentes? ¿Cuántos números más grandes que 6600 con todas las cifras diferentes y sin ninguna de las cifras 7, 8 ni 9?

Solución

En el primer caso, las siguientes condiciones pueden derivarse del enunciado:

- El primer dígito puede ser cualquier número entre 1 y 8. En total son 8 posibilidades.
- El segundo dígito puede ser cualquier número entre 0 y 9, excepto aquel que se eligió para el primer dígito. En total son 9 posibilidades.
- El tercer dígito puede ser cualquier número entre 0 y 9, excepto aquellos que se eligieron para el primer y segundo dígito. En total son 8 posibilidades.

Por el principio de multiplicación, el total de números entre 100 y 900 que tienen las cifras diferentes es

$$8 \cdot 9 \cdot 8 = 576$$

En el segundo caso, notamos que ningún número de cuatro cifras puede satisfacer el enunciado, pues para que sea mayor a 6600, o bien

- El primer dígito aumenta (lo que es imposible, pues no puede ser 7, 8 ni 9)
- El primer dígito permanece y el segundo aumenta (lo que es imposible, pues no puede ser 7, 8 ni 9)
- Los dos primeros dígitos permanecen y cualquiera de los dos últimos aumenta (lo que es imposible, pues se estarían repitiendo los dos primeros dígitos)

Así, el total de números más grandes que 6600 con todas las cifras diferentes y sin ninguna de las cifras 7, 8 ni 9 es 0.

Ejercicio 6

Cuántas palabras de longitud 4 se pueden formar con las cinco vocales sin que se repita ninguna? ¿Y de longitud 5 (también sin que se repita ninguna)?

Solución

En el primer caso, se efectúa una permutación sin repetición de 5 elementos tomados de 4 en 4, es decir

$$P_5^4 = \frac{5!}{(5-4)!} = 120$$

En el segundo caso, se efectúa una permutación sin repetición de 5 elementos tomados de 5 en 5, es decir

$$P_5^5 = \frac{5!}{(5-5)!} = 120$$

Ejercicio 7

Un código de colores con barras usa 6 colores para pintar 4 barras, pero dos barras consecutivas no pueden tener el mismo color. ¿Cuántas palabras diferentes se pueden formar?

Solución

Notamos que la primera barra puede ser pintada con cualquiera de los 6 colores. El resto de barras puede ser pintado con cualquiera de los 6 colores excepto por el color que se eligió para la barra inmediatamente anterior (puede tomar el color de barras anteriores a la inmediatamente anterior). Por el principio de multiplicación, el total de palabras diferentes que se pueden formar es $6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 750$

Ejercicio 8

En un alfabeto de 10 consonantes y 5 vocales, ¿cuántas palabras de cinco letras sin dos vocales seguidas ni tres consonantes seguidas se pueden formar?

Solución

Para el propósito de representar fácilmente las distribuciones de letras, usaremos cadenas de letras C para consonantes y V para vocales.

Los casos que satisfacen las condiciones del enunciado son

- VCVCV: $PR_5^3 \cdot PR_{10}^2 = 5^3 \cdot 10^2 = 12500$
- CVCVC: $PR_{10}^3 \cdot PR_5^2 = 10^3 \cdot 5^2 = 25000$
- VCCVC: $PR_{10}^3 \cdot PR_5^2 = 10^3 \cdot 5^2 = 25000$
- VCVCC: $PR_{10}^3 \cdot PR_5^2 = 10^3 \cdot 5^2 = 25000$
- CVCCV: $PR_{10}^3 \cdot PR_5^2 = 10^3 \cdot 5^2 = 25000$
- CCVCC: $PR_{10}^4 \cdot PR_5^1 = 10^4 \cdot 5^1 = 50000$

El total de palabras de cinco letras sin dos vocales seguidas ni tres consonantes seguidas que se pueden formar es

$$12500 + 25000 + 25000 + 25000 + 25000 + 50000 = 162500$$

Ejercicio 9

La música serial se basa en el principio de que en cualquier línea melódica han de aparecer los 12 tonos de la escala antes de repetirse alguno. ¿Cuántas líneas melódicas de 12 notas se pueden formar según este principio?

Solución

El total de líneas melódicas de 12 notas que se pueden formar equivale al total de permutaciones sin repetición de 12 elementos tomados de 12 en 12, es decir

$$P_{12}^{12} = \frac{12!}{(12-12)!} = 479001600$$

Ejercicio 10

En problemas de diseño de redes de interconexión se suelen usar grafos que tienen por vértices palabras de un alfabeto. Por ejemplo, los llamados grafos de Kautz tienen por vértices las palabras de longitud k que se pueden formar de un alfabeto de n símbolos con la condición que dos letras consecutivas no pueden ser iguales. ¿Cuántas de estas palabras hay?

Solución

La primera letra del vértice puede ser cualquiera de las n letras del alfabeto. El resto de letras puede ser cualquiera de las $n - 1$ letras del alfabeto, excepto por la letra que se eligió para la letra inmediatamente anterior (puede tomar el color de letras anteriores a la inmediatamente anterior). Por el principio de multiplicación, el total de palabras que se pueden formar es $n(n - 1)^{k-1}$

Ejercicio 11

Sea $A = \{1, 2, \dots, n\}$ y $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ conjunto de k símbolos. Una aplicación $f : X \rightarrow A$ es ordenada si $f(x_1) \leq f(x_2) \leq \dots \leq f(x_k)$ y estrictamente ordenada si las desigualdades son estrictas. ¿Cuántas aplicaciones ordenadas y cuántas estrictamente ordenadas hay de X en A ?

Solución

Se nos pide todas las permutaciones con repetición de elementos del conjunto A (que contiene todos los números enteros del 1 al n) tomados de k en k , en las que

- En el primer caso, a cada elemento le siga uno mayor o igual (aplicación ordenada)
- En el segundo caso, a cada elemento le siga uno mayor (aplicación estrictamente ordenada)

En el primer caso, el primer elemento $f(x_1)$ puede tomar cualquier valor del 1 al n (total de n posibilidades). Cada elemento restante $f(x_i)$ está restringido a el valor del elemento inmediatamente anterior $f(x_{i-1})$ y n (total de $n - f(x_{i-1}) + 1$ posibilidades).

Entonces, el total de aplicaciones ordenadas en función de n y k es

$$n \cdot (n - f(x_1) + 1) \cdot (n - f(x_2) + 1) \cdot \dots \cdot (n - f(x_{k-1}) + 1)$$

En el segundo caso, la única diferencia es que cada elemento restante $f(x_i)$ debe ser mayor que el elemento inmediatamente anterior $f(x_{i-1})$, no solo mayor o igual (total de $n - f(x_{i-1})$ posibilidades).

Entonces, el total de aplicaciones estrictamente ordenadas en función de n y k es

$$n \cdot (n - f(x_1)) \cdot (n - f(x_2)) \cdot \dots \cdot (n - f(x_{k-1}))$$

Ejercicio 12

En una reunión de una empresa hay ocho representantes de los accionistas, seis representantes de acreedores, cuatro representantes de los trabajadores y tres técnicos. Para resolver más ágilmente la organización de la reunión deciden nombrar una comisión formada por tres representantes de los accionistas, dos representantes de acreedores, un representante de los trabajadores y un técnico. ¿Cuántas comisiones diferentes se podrían formar? Si uno de los accionistas se niega en rotundo a formar parte de la comisión con dos de los representantes de los trabajadores, a los cuales tiene manía, ¿cuántas comisiones se podrían formar?

Solución

En el primer caso, el total de comisiones diferentes que se pueden formar equivale al producto de

- Accionistas: $C_8^3 = 56$
- Acreedores: $C_6^2 = 15$
- Trabajadores: $C_4^1 = 4$
- Técnico: $C_3^1 = 3$

$$C_8^3 \cdot C_6^2 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 = 56 \cdot 15 \cdot 4 \cdot 3 = 10080$$

En el segundo caso, tenemos que restarle al total hallado anteriormente al total de comisiones diferentes que no se pueden formar producto de las preferencias del accionista de no trabajar con dos trabajadores determinados. El total de estos casos equivale al producto de

- Accionista en cuestión: 1
- Resto de accionistas: $C_7^2 = 21$
- Acreedores: $C_6^2 = 15$
- Trabajadores en cuestión: $C_2^1 = 2$
- Técnico: $C_3^1 = 3$

$$1 \cdot C_7^2 \cdot C_6^2 \cdot C_2^1 \cdot C_3^1 = 1 \cdot 21 \cdot 15 \cdot 2 \cdot 3 = 1890$$

Entonces, el total de comisiones diferentes que se pueden formar en el segundo caso es

$$10080 - 1890 = 8190$$

Ejercicio 13

Una empresa de sondeos escoge una muestra de 20 estudiantes al azar de entre una comunidad de 500 estudiantes para hacer una encuesta. ¿Cuántas muestras diferentes puede obtener? Uno de los estudiantes está encantado de que le pasen la encuesta. ¿Cuántas de estas muestras contienen a este estudiante?

Solución

En el primer caso, el total de muestras diferentes que se pueden obtener equivale al total de combinaciones sin repetición de 500 elementos tomados de 20 en 20, es decir

$$C_{500}^{20} = \frac{500!}{20!(500-20)!} = 2.667 \cdot 10^{35}$$

En el segundo caso, el total de muestras diferentes que contienen al estudiante en cuestión equivale al total de combinaciones sin repetición de 499 elementos tomados de 19 en 19, multiplicado por 1 (el estudiante en cuestión), es decir

$$C_{499}^{19} = \frac{499!}{19!(499-19)!} = 1.066 \cdot 10^{34}$$

Ejercicio 14

¿De cuántas maneras se pueden poner n bolas numeradas en k cajas numeradas de manera que en cada caja haya al menos una bola? ¿Y si las bolas no están numeradas?

Solución

En el primer caso, se distinguirá a las bolas por su número. Cada caja puede albergar como mínimo 1 bola y como máximo $n - (k - 1)$, de tal modo que la suma de bolas en todas las cajas sea n . Por el principio de multiplicación, el total de maneras de poner n bolas numeradas en k cajas numeradas es

$$C_n^1 \cdot C_{n-1}^1 \cdot \dots \cdot C_{n-(k-1)}^1 = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-(k-1))$$