Capítulo 3

Principio del palomar

3.1. *Resumen teórico*

Es muy conocido el siguiente acertijo:

En un armario tenemos guardados los calcetines sueltos. Sabemos que tenemos calcetines de tres colores diferentes. Sin encender la luz, necesitamos saber cuántos calcetines debemos sacar del armario para estar seguros de que habrá al menos dos del mismo color.

La respuesta es muy sencilla: basta sacar cuatro calcetines para que obligatoriamente haya al menos dos calcetines del mismo color. Sin embargo, tres no son suficientes pues podrían ser todos de color diferente.

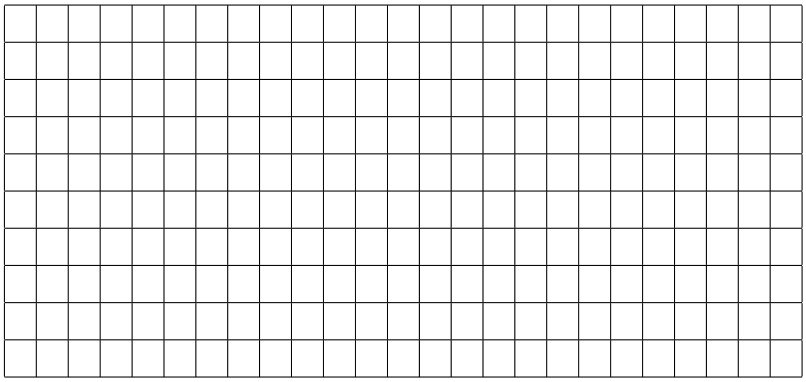
Veamos otro problema que se resuelve utilizando el mismo principio.

En cualquier momento, siempre hay en Nueva York al menos dos personas con el mismo número de cabellos.

Para obtener la respuesta, partimos de la estimación que una persona posee como máximo 150 cabellos por centímetro cuadrado. Incluso suponiendo el caso patológico de una persona de 2 metros de altura cubierta completamente de pelo, podría llegar a tener 7000000 de cabellos. Si estimamos la población de Nueva York en 9 millones de habitantes, basta aplicar el principio del palomar para demostrar la afirmación inicial.

Otro problema, de apariencia distinta pero basado en el mismo principio, es el siguiente.

Si se eligen en un plano reticulado cinco puntos aleatoriamente, siempre existen dos de ellos de tal manera que el segmento que los une contiene otro punto del retículo. Concretamente, el punto medio de dicho segmento es un punto de la cuadrícula. Con cuatro puntos la propiedad puede no ser cierta.



Solución. Es sabido que el punto medio del segmento que une los puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ viene dado por $M = \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$. El punto M estará en el retículo si sus coordenadas son enteras, es decir si, tanto x_1 y x_2 como y_1 e y_2, tienen la misma paridad. Con dos coordenadas hay cuatro posibles parejas de paridades: par/par, par/impar, impar/impar, impar/par. Si tenemos cinco puntos, habrá al menos dos de ellos con la misma combinación. Así pues, el punto medio entre dichos puntos tendrá ambas coordenadas enteras.

A pesar de su simplicidad, estos problemas están basados en una propiedad matemática de gran importancia, llamada **principio del palomar o principio de Dirichlet**, que podemos enunciar de cualquiera de las siguientes formas equivalentes.

Teorema 3.1.1. *a) Si m palomas se colocan en m palomares, uno de los palomares está vacío si y sólo si un palomar está ocupado por más de una paloma.*

b) Si $n > m$ palomas se colocan en m palomares, hay al menos un palomar que contiene más de una paloma. Más precisamente, habrá algún palomar con al menos $\left[\dfrac{n-1}{m}\right] + 1$ palomas (donde el símbolo $[x]$ representa la parte entera de x).

c) Sea $\operatorname{card}(A)$ el número de elementos de un conjunto finito A. Para dos conjuntos finitos A y B, existe una correspondencia biunívoca $f : A \to B$ si y sólo si $\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(B)$.

Dos extensiones del mismo principio son las siguientes.

Teorema 3.1.2. *1) Si $m \cdot n + 1$ palomas se colocan en n palomares, habrá al menos un palomar que contiene como mínimo $m + 1$ palomas.*

2) Si colocamos $p_1 + \cdots + p_n - n + 1$ palomas en n palomares, existe algún k tal que el k-ésimo palomar tiene al menos p_k palomas.

El principio tiene por supuesto aplicaciones más serias que la indicada. Enunciaremos algunas de ellas.

Ejemplo 1. *Consideremos un conjunto de 12 números naturales. ¿Es posible elegir dos de ellos cuya diferencia sea múltiplo de 11?*

Los posibles restos de la división de un número por 11 son $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$. Como hay 11 posibles restos, habrá al menos dos números de la colección cuyo resto sea el mismo. Por tanto la diferencia entre dichos números será múltiplo de 11.

Ejemplo 2. *Consideremos un tablero de ajedrez en el que se quitan dos esquinas diagonalmente opuestas. ¿Es posible cubrir el tablero con fichas de dominó, cada una de ellas del tamaño de dos cuadros del tablero?*

La respuesta es negativa: los dos cuadrados diagonalmente opuestos son del mismo color. Al quitarlos, el número de cuadrados de un color excede en dos al número de cuadrados del otro color. Sin embargo, cada ficha de dominó cubre un cuadrado de cada color. Es decir, mediante las fichas se establece una correspondencia biunívoca entre el conjunto de cuadrados blancos y el conjunto de cuadrados negros. Al tener ambos conjuntos un número distinto de elementos, por el principio del palomar, no es posible una correspondencia así entre los dos conjuntos.

Ejemplo 3. *Dado un conjunto de siete números reales distintos, demostrar que existen dos de ellos, digamos x e y, que verifican la desigualdad* $0 < \dfrac{x-y}{1+xy} < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Indicación. Observar que todo número real x puede escribirse como $x = \operatorname{tg}\alpha$, con $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$. Utilizar también la identidad trigonométrica $\operatorname{tg}(a-b) = \dfrac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$.

Así pues, dados siete números distintos $\{x_1, x_2, \dots, x_7\}$, existen siete números $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_7\} \subset (-\pi/2, \pi/2)$ tales que $x_i = \operatorname{tg}\alpha_i$. Si consideramos los seis intervalos $(-\pi/2, -\pi/3)$, $[-\pi/3, -\pi/6)$, $[-\pi/6, 0)$, $[0, \pi/6)$, $[\pi/6, \pi/3)$, $[\pi/3, \pi/2)$, dos de ellos, digamos α y β (con $\alpha > \beta$) están en el mismo intervalo, es decir $0 < \alpha - \beta < \pi/6$. Entonces $0 < \operatorname{tg}(\alpha - \beta) < 1/\sqrt{3}$. Si llamamos $x = \operatorname{tg}\alpha$, $y = \operatorname{tg}\beta$, entonces $0 < \dfrac{x-y}{1+xy} < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Ejemplo 4. *Seleccionemos un conjunto de 55 enteros $1 \le x_1 < x_2 < \ldots < x_{55} \le 100$. Independientemente de la selección, dos de ellos difieren en 9, dos de ellos difieren en 10, dos de ellos difieren en 12 y dos de ellos difieren en 13. Sorprendentemente, no puede haber ningún par de ellos que difieran en 11.*

Sugerencia. Si añadimos al conjunto dado los números $\{y_1, y_2, \dots, y_{55}\}$ de modo que $y_i = x_i + 9$, tenemos un conjunto de 110 números comprendidos entre 1 y 109. Por el principio del palomar, debe haber dos de ellos que son iguales, $x_i = y_j$. Esto indica que x_i y x_j se diferencian en nueve.

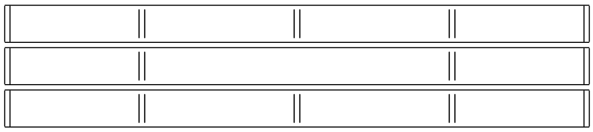
Por otra parte, en cada uno de los cinco conjuntos $\{1, 2, \dots, 20\}$, $\{21, 22, \dots, 40\}$, $\{41, 42, \dots, 60\}$, $\{61, 62, \dots, 80\}$, $\{81, 82, \dots, 100\}$, hay 10 parejas que difieren en 10. Si elegimos 55 números, por el principio del palomar, alguno de estos conjuntos debe contener al menos 11 de estos números. De ellos, tiene que haber alguna pareja que se diferencien en 10.

El mismo razonamiento se aplica con parejas que se diferencian en 12 y 13.

Sin embargo, el conjunto $\{1, \dots, 11, 23, \dots, 33, 45, \dots, 55, 67, \dots, 77, 89, \dots, 99\}$ no contiene ninguna pareja con diferencia igual a 11.

Ejemplo 5. *Se trata de disponer las siguientes palabras:*

CAR, MOB, DIM, RED, HEN, SON, SAW, WIT, HUT, CUB *en las casillas del borde de la figura siguiente, con la condición de que dos casillas adyacentes contengan palabras con alguna letra en común.*



Resuelve a continuación el mismo problema sustituyendo las palabras SON, HUT por las palabras SUN, HOT.

Sugerencia. Dibuja un diagrama donde cada palabra esté unida mediante alguna línea con aquellas que tienen alguna letra en común con ella. A continuación busca un circuito que recorra todas las palabras unidas por líneas y que pase una sola vez por cada palabra.

Ejemplo 6. *Un mago pide a un espectador que mezcle un conjunto de diez cartas, numeradas del uno al diez. Con el mago de espaldas a la mesa, el espectador coloca las cartas en una fila sobre la mesa, caras arriba. Un cómplice vuelve de dorso al menos cuatro cartas. Cuando el mago se vuelve de cara, adivina la posición de las cartas ocultas. ¿Cuál es el secreto del truco?*

Solución. La explicación se basa en el teorema de Erdös-Szekeres, cuyo enunciado es el siguiente:

Teorema 3.1.3. *Dada una sucesión de $m \cdot n + 1$ números, siempre existe alguna subsucesión creciente de al menos $m + 1$ elementos o una subsucesión decreciente de al menos $n + 1$ elementos.*

Demostración. Supongamos que el teorema es falso, es decir que no hay subsucesiones crecientes de más de m elementos ni sucesiones decrecientes de más de n elementos.

Para cada x de la sucesión definimos el par ordenado (i, j), donde i representa la longitud de la mayor sucesión creciente que empieza en x, y j representa la longitud de la mayor sucesión decreciente que termina en x. Debido a la suposición inicial, $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$. Como tenemos $m \cdot n + 1$ pares ordenados y como máximo $m \cdot n$ son distintos, por el principio de Dirichlet, habrá dos términos de la sucesión, digamos a y b, asociados al mismo par ordenado (s, t). Supondremos que a precede a b en la sucesión.

- Si $a < b$, entonces la sucesión formada por a y la mayor sucesión creciente que empieza en b tiene $s + 1$ términos, lo que contradice el hecho de que s es la longitud de la mayor sucesión creciente que empieza por a.

- Si $a \geq b$, la sucesión formada por b y la mayor sucesión decreciente que termina en a tiene $t + 1$ términos, lo que contradice el hecho de que la mayor sucesión decreciente que termina en b es de longitud t.

Por reducción al absurdo, se concluye el teorema. □

Basta pues que el cómplice encuentre la subsucesión creciente o decreciente de cuatro términos y oculte dichas cartas. El mago sabrá cuáles son dichas cartas por la misma regla.

Una aplicación importante del principio del palomar es el teorema de Dirichlet en teoría de números, el cual permite establecer el grado de aproximación de cualquier número irracional por una fracción.

Teorema 3.1.4. *Sea x un número real y n un número natural. Existen enteros p, q con $0 \leq q \leq n$ tales que* $\left|\dfrac{p}{q} - x\right| < \dfrac{1}{qn}$.

Demostración. Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $A = \{0, \{x\}, \{2x\}, \ldots, , \{nx\}\}$ (donde $\{z\} = z - [z]$ representa la parte decimal de z). Dividimos el intervalo $[0, 1]$ en los n subintervalos $\left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right)$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Por el principio del palomar, debe haber dos puntos de A en un mismo subintervalo, es decir existen $q_1, q_2 \leq n$ $(q_1 < q_2)$, tales que $|\{q_1 x\} - \{q_2 x\}| < 1/n$.

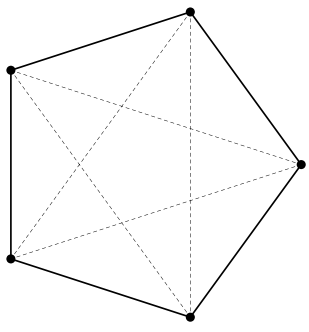
Si llamamos $q = q_2 - q_1$, entonces $0 < q \leq n$ y la distancia entre $\{qx\}$ y el entero más próximo es menor que $1/n$. Así pues, existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que $|qx - p| < 1/n$, o bien $|x - p/q| < 1/qn$. $\square$

Una generalización del principio del palomar la constituye el llamado teorema de Ramsey.

Teorema 3.1.5. *Si tenemos un conjunto infinito y distribuimos sus elementos en un número finito de cajas, entonces hay una caja que contiene infinitos elementos.*

Un problema simple, para el caso finito, es el siguiente: *¿Cuántas personas debe haber en una reunión para poder asegurar que tres de ellas se conocen entre sí (dos a dos) o tres de ellas no se conocen entre sí (dos a dos)?*

La respuesta es seis; cinco personas no son suficientes como muestra el ejemplo ilustrado en la siguiente imagen (los vértices del pentágono representan las cinco personas, las líneas continuas representan personas que se conocen y las líneas discontinuas representan personas que no se conocen entre sí).



Por otra parte, con seis personas $a_1, a_2, \ldots, a_6$, tenemos dos opciones:

a) La primera persona conoce a tres de las otras cinco, digamos que a_1 conoce a a_2, a_3 y a_4. Entonces

   a.1) Si a_2, a_3, a_4 no se conocen entre sí, el problema está resuelto;

   a.2) Si cualquier pareja, por ejemplo a_2, a_3, se conocen, entonces a_1, a_2 y a_3 se conocen entre sí.

b) La primera persona conoce como máximo a dos de las otras cinco, digamos a_5 y a_6.

b.1) Si a_2, a_3 y a_4 se conocen, el problema está resuelto.

b.2) Si a_2 y a_3 (o cualquier otra pareja) no se conocen, entonces a_1, a_2 y a_3 no se conocen entre sí.

3.2. *Problemas propuestos*

Problema 3.1. *Supondremos en el siguiente problema que la relación de amistad es simétrica, es decir si la persona A es amiga de B, entonces B es amiga de A.*

En una fiesta se reúnen 50 *personas. Algunas de ellas son amigas y otras no. Demostrar que al menos dos personas de las* 50 *tienen el mismo número de amigos.*

Problema 3.2. *Probar que, seleccionando cinco puntos cualesquiera en el interior de un triángulo equilátero de lado* 1*, siempre existe un par de ellos cuya distancia es menor o igual a* 0,5.

Sugerencia. Si dividimos el triángulo en cuatro triángulos equiláteros de lado igual a 0,5, al seleccionar cinco puntos, dos de ellos deben caer en el mismo triángulo.

Problema 3.3. *Se lanzan* 7 *dardos a una diana circular de radio* 20 *cm. Probar que al menos dos dardos han quedado situados a una distancia no mayor de* 20 *cm.*

Sugerencia. Dividir el círculo en seis porciones iguales, en forma de sector circular. Dos puntos cualesquiera en la misma porción distan menos de 20 cm.

Problema 3.4. *Si se colocan* 51 *puntos en un cuadrado de lado uno, prueba que tres de ellos se encuentran en un círculo de radio* $1/7$.

Problema 3.5. *El conjunto de números* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ *se divide en tres grupos. Probar que el producto de los números de alguno de estos grupos es mayor que* 71.

Problema 3.6. *Una caja contiene* 900 *tarjetas, numeradas del* 100 *al* 999*. Se extraen al azar tarjetas de la caja y se anota la suma de las cifras de cada tarjeta. ¿Cuál es la menor cantidad de tarjetas que se deben sacar para garantizar que al menos tres de las sumas son iguales?*

Problema 3.7. *Con* 21 *fichas de damas, unas negras y otras blancas, se forma un rectángulo de tamaño* 3×7*. Demostrar que siempre hay cuatro fichas del mismo color situadas en los vértices de un rectángulo.*

Problema 3.8. *Probar que existen dos potencias de* 3 *cuya diferencia es divisible por* 1997.

Problema 3.9. *Probar que existe alguna potencia de* 3 *que termina en* 001*.*

Problema 3.10. *Dados* 4 *puntos en el interior o el borde de un cuadrado de lado* 1*, probar que existe al menos un par de ellos cuya distancia es menor o igual a* 1*.*

Problema 3.11. *Si escogemos* $n+1$ *elementos del conjunto de enteros consecutivos* $\{1, 2, \ldots, 2n\}$*, probar que dos de ellos son primos entre sí.*

Problema 3.12. *Sea* $a > 0$ *un número irracional. Probar que existen infinitos números racionales* $r = p/q$ *tales que*

$$|a - r| < q^{-2}.$$

Problema 3.13 (Desafíos El País)**.** *El número* π *esconde todavía muchos misterios pero los matemáticos saben desde hace muchos años que ningún múltiplo entero de* π *es un entero. Sin embargo hay múltiplos de* π *que se aproximan bastante. Estos son sólo algunos ejemplos:*

$$7 \times \pi = 21,991\ldots$$
$$113 \times \pi = 354,99996\ldots$$
$$265381 \times \pi = 833719,000002\ldots$$

¿Hay algún múltiplo de π *que se aproxime a un entero a distancia menor que* 10^{-20}*?*

Problema 3.14. *Si se sientan 9 personas en una fila formada por 12 sillas, algún conjunto formado por 3 sillas consecutivas está ocupado por 3 personas.*

Problema 3.15. *Si una matriz* 14×14 *formada por ceros y unos tiene 58 unos, alguna submatriz de orden* 2×2 *está formada por todo unos.*

Problema 3.16. *Dado un número impar* n *y cualquier permutación* p *del conjunto* $\{1, \ldots, n\}$*, el producto*

$$(1 - p(1))(2 - p(2)) \cdot \cdots \cdot (n - p(n))$$

es necesariamente par.

Problema 3.17. *Supongamos que cada punto del plano se colorea de rojo o azul. Probar que se puede construir un rectángulo cuyos vértices son todos del mismo color.*

Problema 3.18. *Una persona toma al menos una aspirina al día durante 30 días. Si ha tomado en total 45 aspirinas, en alguna sucesión de días consecutivos ha tomado exactamente 14 aspirinas.*

Problema 3.19. *Un grupo de teatro ha dado 7 actuaciones durante una temporada. Cinco mujeres del grupo actúan en 3 de las representaciones. Entonces en alguna representación actúan al menos 3 mujeres.*

Problema 3.20. *Dados* 6 *puntos en el interior de un círculo de radio* 1*, existe al menos un par de ellos cuya distancia es menor o igual a* 1*.*

Problema 3.21. *Dados* 6 *enteros cualesquiera del* 1 *al* 10*, al menos dos de ellos tienen suma impar.*

Mucha información sobre este principio y sus aplicaciones puede encontrarse en Internet y en textos básicos de Combinatoria.