

Parte I Enumeración

En esta parte se presentan diversas técnicas para contar los elementos de un conjunto. Paralelamente a la descripción de técnicas usuales de enumeración, se presentan también problemas clásicos de combinatoria, a los cuales se aplican los resultados que se van obteniendo.

Las técnicas más sencillas basadas en la enumeración de permutaciones y combinaciones se tratan en el primero de los tres capítulos que componen esta primera parte, y se aplican estas técnicas a problemas de enumeración de funciones entre conjuntos, palabras de alfabetos, distribuciones, particiones de enteros y la fórmula del binomio. En el segundo capítulo se analizan algunos principios básicos de enumeración, especialmente el principio de inclusión-exclusión, y se consideran los problemas de desarreglos, función de Euler, números de Catalan y particiones de enteros. Aunque no son estrictamente principios de enumeración, se incluyen también en este capítulo el principio del palomar y el teorema de Ramsey. El último capítulo de esta parte está dedicado a las ecuaciones de recurrencia y las funciones generadoras. Aunque hemos intentado mantener un nivel asequible, estos son los temas que requieren más nivel matemático, y resultarán más fáciles al lector que tenga cierta familiaridad con las series de potencias. Esta primera parte se cierra con los números de Stirling y de Bell. Algunos temas de enumeración que requieren conocimientos adicionales se ven en otras partes del texto. Así, por ejemplo, ciertos problemas de enumeración de grafos se tratan en la segunda parte, y la teoría de enumeración de Pólya se presenta en la tercera parte.

Capítulo 2

Combinaciones y permutaciones

1. Selecciones ordenadas y no ordenadas
2. Algunos ejemplos de aplicación
3. Propiedades de los coeficientes binomiales

En este capítulo se exponen los problemas más simples de enumeración que forman parte de la combinatoria elemental. Los modelos básicos se basan en la enumeración de selecciones ordenadas y no ordenadas, con o sin repetición, de los elementos de un cierto conjunto. En la sección 1 se obtienen las fórmulas de enumeración de estas selecciones. A pesar de su simplicidad, estos problemas de enumeración permiten resolver una diversidad considerable de problemas, de los cuales hay algunos ejemplos interesantes en la sección 2: el número de palabras que pueden formarse a partir de un alfabeto, el número de soluciones de ciertas ecuaciones enteras, el número de aplicaciones entre dos conjuntos, la fórmula del binomio y problemas relacionados, y los problemas de distribuciones. Los llamados coeficientes binomiales tienen una importancia singular y permiten expresar muchos de los resultados de enumeración; la tercera sección está dedicada a analizar las propiedades más importantes de estos números.

2.1 Selecciones ordenadas y no ordenadas

Comenzaremos con un recorrido por la combinatoria elemental contando de cuántas maneras diferentes se pueden seleccionar un cierto número de elementos de un conjunto. Para contar este número es preciso fijar los criterios con que se diferencia una selección de otra. Aquí tendremos en cuenta dos tipos de criterios: el orden de los elementos y el número de veces que puede aparecer cada uno.

Si distinguimos dos selecciones: cuando tienen elementos diferentes, o bien, cuando los elementos aparecen en un orden diferente, hablaremos de *permutaciones*. En cambio, si no distinguimos dos selecciones que sólo difieren en la ordenación de sus elementos, entonces hablaremos de *combinaciones*. Por otra parte, si cada elemento puede aparecer como mucho una vez, hablaremos de selecciones *sin repetición*, mientras que, si no hay esta restricción, hablaremos de selecciones *con repetición*. Por ejemplo, en el conjunto

$$X = \{1, 2, 3, 4\}$$

podemos formar 16 permutaciones, con repetición, de dos elementos,

11	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34
41	42	43	44

12 permutaciones, sin repetición, de dos elementos,

	12	13	14
21		23	24
31	32		34
41	42	43	

10 combinaciones, con repetición, de dos elementos,

11	12	13	14
	22	23	24
		33	34
			44

y 6 combinaciones, sin repetición, de dos elementos,

	12	13	14
		23	24
			34

En esta sección obtendremos una fórmula para la enumeración del número de selecciones diferentes de k elementos, tomados de un conjunto X de n elementos, que identificaremos con $\{1, 2, \dots, n\}$.

Lo que resulta más sencillo de contar es el número de selecciones ordenadas con repetición de k elementos. Llamamos PR_n^k a este número, que se lee “permutaciones con repetición de n

elementos tomados de k en k ". Tenemos n elecciones para el primer elemento de la selección, y para cada elección podemos formar todas las permutaciones con repetición de n elementos, pero ahora tomados de $k - 1$ en $k - 1$. Es decir,

$$PR_n^k = nPR_n^{k-1}$$

Aplicando esta fórmula sucesivamente, y teniendo en cuenta que $PR_n^1 = n$ (hay n elecciones para el último elemento), obtenemos

$$PR_n^k = nPR_n^{k-1} = n^2PR_n^{k-2} = \dots = n^k$$

En el ejemplo anterior obtenemos $PR_4^2 = 4^2 = 16$ permutaciones con repetición de cuatro elementos tomados de 2 en 2.

Consideremos ahora las permutaciones sin repetición de n elementos tomados de k en k , el número de las cuales denotaremos por P_n^k . Como cada elemento puede aparecer como mucho una sola vez en la selección, es preciso que $k \leq n$. Podemos calcular este número con un argumento similar al anterior. Tenemos n opciones para el primer elemento y para cada uno podemos formar las permutaciones de los $n - 1$ elementos restantes (ahora un elemento puede salir en la selección como mucho una vez) tomados de $k - 1$ en $k - 1$, de manera que

$$P_n^k = nP_{n-1}^{k-1}$$

Como $k \leq n$, la aplicación sucesiva de esta relación lleva a $P_{n-(k-1)}^1 = n - (k - 1)$ (el último elemento se puede escoger entre los $n - (k - 1)$ que aún no han sido escogidos), de donde

$$P_n^k = n \cdot (n - 1) \cdots (n - k + 1)$$

En particular, cuando $k = n$, obtenemos las *permutaciones* de n elementos, el número de las cuales se denota simplemente como $P_n = n \cdot (n - 1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$. Este número se representa con el símbolo $n!$ y se lee *factorial* de n . En particular, el símbolo factorial permite escribir P_n^k de manera más económica como

$$P_n^k = \frac{n!}{(n - k)!}$$

notación que se puede extender al caso $n = k$ si adoptamos el convenio que $0! = 1$. Veremos más adelante que este convenio tiene una justificación combinatoria y permite además dar cohesión a muchas notaciones, de manera que es universalmente aceptado.

Se puede considerar una situación intermedia entre las permutaciones con repetición y las permutaciones sin repetición y también es fácil de contar. Consiste en fijar de entrada el número de veces que cada elemento debe aparecer en la selección. Por ejemplo, se pueden formar 12 permutaciones con los elementos de $X = \{1, 2, 3, 4\}$ de manera que 1 aparezca exactamente dos veces, 2 y 3 aparezcan una sola vez y 4 ninguna,

1123 1213 1231 2113 2131 2311
1132 1312 1321 3112 3121 3211

En general, supongamos que el elemento i aparece k_i veces en la selección. Formemos un nuevo conjunto

$$Y = \{1_1, \dots, 1_{k_1}, 2_1, \dots, 2_{k_2}, \dots, n_1, \dots, n_{k_n}\}$$

de $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ elementos, en el cual hemos distinguido provisionalmente las k_i apariciones de cada elemento. Formemos ahora las $k!$ permutaciones de los elementos de este conjunto y agrupemos aquellas que difieren sólo en una permutación de los elementos del mismo tipo. En el ejemplo anterior obtendríamos los grupos siguientes,

$1_1 1_2 23$	$1_1 21_2 3$	$1_1 231_2$	$21_1 1_2 3$	$21_1 31_2$	$231_1 1_2$
$1_2 1_1 23$	$1_2 21_1 3$	$1_2 231_1$	$21_2 1_1 3$	$21_2 31_1$	$231_2 1_1$
$1_1 1_2 32$	$1_1 31_2 2$	$1_1 321_2$	$31_1 1_2 2$	$31_1 21_2$	$321_1 1_2$
$1_2 1_1 32$	$1_2 31_1 2$	$1_2 321_1$	$31_2 1_1 2$	$31_2 21_1$	$321_2 1_1$

En general, cada grupo tiene $k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!$ elementos, que representan de hecho la misma permutación cuando dejamos de distinguir los subíndices. Así, el número de permutaciones de n elementos en los cuales el elemento i aparece k_i veces, que denotaremos por $P_n^{k_1, \dots, k_n}$, vale

$$P_n^{k_1, \dots, k_n} = \frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!}, \quad k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$$

Vamos a considerar ahora selecciones no ordenadas o combinaciones. Dos selecciones serán diferentes si y sólo si tienen elementos diferentes. Primero contaremos las combinaciones sin repetición de n elementos tomados de k en k (donde k no puede ser más grande que n), y denotaremos este número como C_n^k . Para esto consideramos provisionalmente todas las P_n^k selecciones ordenadas, y agrupamos aquellas que sólo difieren en el orden de sus elementos. En el ejemplo al comienzo de la sección, en el que se formaban selecciones de dos elementos de un conjunto de cuatro, obtendríamos los grupos,

12	13	14
21	31	41
	23	24
	32	42
		34
		43

En general, cada uno de los grupos contiene $k!$ permutaciones que representan la misma combinación, de manera que

$$C_n^k = \frac{P_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}, \quad 0 \leq k \leq n$$

Este número aparece con tanta frecuencia en la combinatoria que recibe también una notación y denominación especiales: se llama *coeficiente binomial* y se denota por $\binom{n}{k}$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

(se dice ‘n sobre k’ o ‘n escoge k’). En una sección posterior trataremos algunas de las propiedades y aplicaciones de estos números. De momento observemos que este número coincide también con el de permutaciones de dos elementos en que uno se repite $k_1 = k$ veces y el otro $k_2 = n - k$ veces,

$$P_2^{k,n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} = C_n^k \quad (2.1)$$

En la sección siguiente discutiremos una interpretación combinatoria de este resultado, pero de momento nos será útil para contar el último de los números que nos interesan aquí: el de las *combinaciones con repetición* de n elementos tomados de k en k , que denotaremos por CR_n^k (aquí no es preciso que $k \leq n$). Observemos que si agrupamos las permutaciones con repetición que sólo difieren en el orden, no todos los grupos tienen el mismo tamaño. En el ejemplo del comienzo de la sección, el grupo que corresponde a la combinación $\{1, 1\}$ tiene un único elemento, mientras que el que corresponde a $\{1, 2\}$ contiene las dos permutaciones 12 y 21. Por lo tanto, la técnica que hemos usado antes para contar combinaciones sin repetición ya no nos es útil aquí.

En este caso nos serviremos de una estrategia ingeniosa. Pongamos $n - 1$ barras que definan n espacios, uno para cada elemento del conjunto original. Identifiquemos cada una de las combinaciones con repetición poniendo en cada uno de estos espacios tantas estrellas como elementos correspondientes haya en la combinación. En el ejemplo tendríamos las correspondencias,

$$\begin{array}{ll} 11 \leftrightarrow \star\star | & 12 \leftrightarrow \star | \star | \\ 13 \leftrightarrow \star | & 14 \leftrightarrow \star | | \star \\ 22 \leftrightarrow | \star\star | & 23 \leftrightarrow | \star | \star | \\ 24 \leftrightarrow | \star | & 33 \leftrightarrow | | \star\star | \\ 34 \leftrightarrow | & 44 \leftrightarrow | | | \star\star \end{array}$$

De acuerdo con esta correspondencia, hay tantas combinaciones con repetición de n elementos tomados de k en k como permutaciones de dos elementos (barras y estrellas) con exactamente $n - 1$ barras y k estrellas. Ya hemos visto en la expresión 2.1 que este número coincide con el de las combinaciones de $k + n - 1$ elementos tomados de k en k , de manera que,

$$CR_n^k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Con este número se completan las expresiones más comunes de la combinatoria elemental que resumimos en la tabla que sigue.

Tabla 2.1: Número de selecciones

	permutaciones	combinaciones
sin repetición	$P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \quad k \leq n$	$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}, \quad k \leq n$
con repetición	$PR_n^k = n^k$	$CR_n^k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$
con repeticiones k_1, \dots, k_n $k = k_1 + \dots + k_n$	$P_n^{k_1, \dots, k_n} = \frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!}$	1

2.2 Algunos ejemplos de aplicación

El problema de contar el número de selecciones de elementos de un conjunto que hemos usado como modelo en la sección anterior es sólo una referencia a la cual se pueden reducir muchos de los problemas de la combinatoria elemental. En esta sección expondremos unos cuantos de estos problemas y su relación con el problema original.

Palabras de alfabetos

Dado un alfabeto de n símbolos, $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, n\}$, queremos contar el número de posibles palabras diferentes que se pueden formar de acuerdo con diversos criterios.

El número de palabras de una longitud fijada k que se pueden formar con n símbolos coincide con el de selecciones ordenadas con repetición:

$$PR_n^k = n^k$$

Por ejemplo, con ocho bits (ceros o unos) se pueden formar $2^8 = 256$ palabras. En el caso de que todos los símbolos de una palabra sean diferentes (por tanto $k \leq n$), podemos formar

tantas palabras como selecciones ordenadas de k elementos de un conjunto de n , es decir, el número de permutaciones de n elementos tomados de k en k ,

$$P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Si fijamos la cantidad de cada uno de los símbolos que aparece en cada palabra, es decir, exigimos que haya k_i símbolos i para $1 \leq i \leq n$ (y por tanto la palabra tiene longitud $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$), el número de palabras que se pueden formar es el de permutaciones con repeticiones fijadas,

$$P_k^{k_1, \dots, k_n} = \frac{k!}{k_1! \dots k_n!}$$

En particular, si el alfabeto sólo tiene dos símbolos, el número de palabras en que uno de los símbolos aparece exactamente k veces y el otro $n - k$ es

$$P_2^{k, n-k} = \frac{k!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

es decir, el número de combinaciones de n elementos tomados de k en k .

Conjuntos y aplicaciones

El número de permutaciones con repetición de k elementos de un conjunto de tamaño n se puede interpretar también como una aplicación que le asigna uno de los n elementos a cada una de las k posiciones de la selección. En la figura siguiente se ilustra esta asignación para $k = 7$ y $n = 5$.

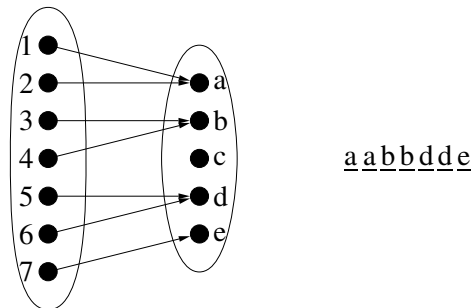


Figura 2.1: Relación entre aplicaciones y selecciones

Con esta analogía, si $B = \{1, 2, \dots, k\}$ y $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ son dos conjuntos finitos, cada aplicación $f : B \rightarrow A$ se puede identificar con la selección ordenada $(f(1), \dots, f(k))$ de elementos de A . El número de aplicaciones de B en A es entonces el de permutaciones con repetición $PR_n^k = n^k$ (por ello se suele representar el conjunto de aplicaciones de B en A por A^B).

Por otra parte, el número de aplicaciones inyectivas (es decir, dos posiciones diferentes no pueden tener el mismo elemento) que se pueden definir de B en A es el número de permutaciones de n elementos tomados de k en k , P_n^k (y entonces tiene que ser $k \leq n$). En una sección posterior se trata la enumeración de aplicaciones exhaustivas (problema 5 del capítulo siguiente).

Las combinaciones se asocian de manera natural con subconjuntos. Una selección no ordenada de k elementos de un conjunto de tamaño n es de hecho un subconjunto de tamaño k . El número de subconjuntos de k elementos de un conjunto de tamaño n es entonces el de las combinaciones C_n^k . Aquí admitimos que hay un subconjunto de cero elementos (el subconjunto vacío) y uno de n elementos (el conjunto de partida), de donde

$$C_n^0 = \frac{n!}{n!0!} = C_n^n = 1$$

cosa que justifica el convenio que hemos adoptado de escribir $0! = 1$.

Una manera de representar los subconjuntos de tamaño k de un conjunto de tamaño n consiste en enumerar los elementos del conjunto, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, y expresar cada subconjunto $B \subset A$ como una palabra de longitud n de 0's y 1's, $x_1 x_2 \dots x_n$, $x_i \in \{0, 1\}$, de manera que x_i vale 1 si el elemento a_i pertenece a B y vale cero de otro modo. Por ejemplo, el subconjunto $B = \{a_2, a_5\}$ de $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ se representaría por la palabra 010010, mientras que el conjunto A entero se representa por la palabra 111111. Volvemos a encontrar, entonces, que el número de palabras de longitud n con k 1's y $(n - k)$ 0's es el mismo que el número de subconjuntos de tamaño k de un conjunto de tamaño n , $\binom{n}{k}$.

Binomios y otras expresiones aritméticas

El origen de la denominación *coeficiente binomial* para los números $\binom{n}{k}$ se encuentra en el cálculo del desarrollo de la expresión binomial

$$(a + b)^n = \underbrace{(a + b) \cdot (a + b) \cdots (a + b)}_n$$

donde n es un número entero. Desarrollando el producto de los n paréntesis, se obtiene una expresión en la cual aparecen términos del estilo $a^i b^{n-i}$ con $0 \leq i \leq n$. Cada término $a^i b^{n-i}$ aparece al escoger a en i de los paréntesis y b en los $n - i$ restantes al hacer el producto. Como

esta elección se puede hacer de $\binom{n}{i}$ maneras diferentes, se obtiene la expresión

$$(a+b)^n = \binom{n}{n} a^n b^0 + \binom{n}{n-1} a^{n-1} b^1 + \cdots + \binom{n}{0} a^0 b^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

llamada *fórmula del binomio*, en la cual los coeficientes de cada monomio son números combinatorios.

De manera similar se obtiene la llamada fórmula multinomial que permite expresar el desarrollo de

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^k = \underbrace{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \cdots (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)}_k$$

Razonando de la misma manera que en el caso anterior, el coeficiente de $a_1^{k_1} \cdot a_2^{k_2} \cdots a_n^{k_n}$ en este desarrollo es el número de elecciones de a_i en k_i de los paréntesis, para cada i , $1 \leq i \leq n$, de donde

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^k = \sum \frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_n!} a_1^{k_1} \cdot a_2^{k_2} \cdots a_n^{k_n}$$

donde el sumatorio se extiende a todas las combinaciones de enteros no negativos k_1, k_2, \dots, k_n tales que $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k$. De aquí proviene también la denominación de coeficiente multinomial para $P_n^{k_1 k_2 \dots k_n}$. Por analogía con el coeficiente binomial, el multinomial se expresa también como

$$\binom{k_1 + k_2 + \cdots + k_n}{k_1, k_2, \dots, k_n} = \frac{(k_1 + k_2 + \cdots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_n!}$$

Supongamos ahora que extendemos la expresión multinomial al caso de que haya una cantidad infinita numerable de sumandos. Para simplificar la situación supondremos que los sumandos son potencias de a ,

$$\left(\sum_{i \geq 0} a^i \right)^n = (1 + a + a^2 + a^3 + \cdots)^n$$

En este caso obtendremos una expresión del estilo

$$c_0 + c_1 a + c_2 a^2 + c_3 a^3 + \cdots$$

donde el coeficiente c_i corresponde al número de maneras de escoger un sumando en cada uno de los n paréntesis $(1 + a + a^2 + a^3 + \cdots)$ de manera que la suma de las potencias sea i . Para calcular este coeficiente se puede seguir la estrategia siguiente. Identificamos cada uno de los paréntesis con una bola numerada (de 1 a n), y extraemos una selección no ordenada de i bolas

con repeticiones permitidas. Identificamos la selección con una elección de potencias en cada paréntesis de la manera siguiente. Si en la selección hay r_1 bolas 1, r_2 bolas 2, y en general r_i bolas i , tomamos a^{r_1} en el primer paréntesis, a^{r_2} en el segundo y, en general, a^{r_i} en el i -ésimo, $i \leq n$. Así, hay tantas combinaciones con repetición de n elementos tomados de i en i como maneras de escoger un sumando en cada paréntesis de manera que las potencias escogidas sumen i , o sea que $c_i = \binom{n+i-1}{i}$. De aquí que

$$\left(\sum_{i \geq 0} a^i\right)^n = (1 + a + a^2 + a^3 + \cdots)^n = \sum_{i \geq 0} \binom{n+i-1}{i} a^i \quad (2.2)$$

Ecuaciones enteras

Directamente relacionado con los últimos ejemplos, se puede considerar el número de maneras diferentes en que se puede escribir un entero como suma ordenada de enteros no negativos, es decir, el número de soluciones de la ecuación

$$k = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \quad x_i \geq 0$$

con x_i entero no negativo. Por ejemplo, 4 se puede expresar como suma de tres enteros no negativos de las 15 maneras siguientes

$$\begin{array}{lll} 0+0+4 & 0+4+0 & 4+0+0 \\ 0+2+2 & 2+0+2 & 2+2+0 \\ 0+1+3 & 0+3+1 & 1+0+3 \\ 1+3+0 & 3+0+1 & 3+1+0 \\ 1+1+2 & 1+2+1 & 2+1+1 \end{array}$$

Este número se puede contar de la manera siguiente. Consideremos combinaciones con repetición de k elementos de $X = \{1, 2, \dots, n\}$. En cada combinación llamamos x_j al número de veces que aparece el elemento j . Entonces, $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$, y cada una de las combinaciones corresponde a una solución de la ecuación. Además, dos combinaciones diferentes dan dos soluciones diferentes. En el ejemplo anterior, la combinación con repetición 2333 del conjunto $\{1, 2, 3\}$ corresponde a la solución $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ y $x_3 = 3$. El número de soluciones es entonces

$$CR_n^k = \binom{n+k-1}{k}$$

Hay otra manera de obtener el mismo resultado. Ponemos k como la suma de k 1's. Cada expresión de k como suma de n enteros no negativos se corresponde con una agrupación de los

k unos en n grupos, cosa que se puede conseguir poniendo $n - 1$ ‘separaciones’ en el grupo de k unos. Por ejemplo, en la lista anterior,

$$4 = 1 + 1 + 2 \rightarrow 1 \bullet 1 \bullet 11$$

$$4 = 1 + 0 + 3 \rightarrow 1 \bullet \bullet 111$$

$$4 = 0 + 2 + 2 \rightarrow \bullet 11 \bullet 11$$

Así, hay $n + k - 1$ posiciones en las cuales es preciso poner $n - 1$ separaciones y k unos. Esto se puede hacer de $\binom{n+k-1}{k}$ maneras.

Este problema admite diversas variaciones. Por ejemplo, el número de soluciones de la ecuación

$$r = y_1 + y_2 + \cdots + y_n, \quad y_i > 0$$

donde y_i son ahora enteros positivos y $r > n$ se puede obtener del problema anterior poniendo $x_i = y_i - 1$ (que será no negativo) y $k = r - n$, es decir, el número de soluciones vuelve a ser

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{r-1}{n-1}$$

Si hacemos ahora $z_i = x_i + a$, $1 \leq i \leq n$ con a un entero positivo, el número de soluciones de la ecuación

$$t = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$$

con $z_i \geq a$ y $t > na$ es nuevamente

$$\binom{t-na+n-1}{n-1}$$

Ejercicio 2.1. ¿Cuál es el número de soluciones enteras de la ecuación

$$8 = x_1 + x_2 + x_3$$

de manera que x_i sean enteros entre 1 y 4?

Distribuciones

Para acabar esta pequeña lista de ejemplos consideremos el problema siguiente. Supongamos que tenemos n cajas numeradas y k bolas que se ponen en las cajas. El objetivo es contar cuántas disposiciones diferentes de las bolas en las cajas se pueden obtener atendiendo a diversos criterios.

Si cada caja puede contener como mucho una bola, y estas están numeradas (es decir, son distinguibles), el número de disposiciones diferentes es el de permutaciones de n elementos tomados de k en k , P_n^k (y tiene que ser $k \leq n$).

Si cada caja puede contener más de una bola, el número de disposiciones diferentes es el de permutaciones con repetición, PR_n^k .

Si las bolas no son distinguibles (sólo diferenciamos dos disposiciones por el número de bolas en cada caja), tenemos CR_n^k disposiciones diferentes, y en el caso de que cada caja pudiese contener sólo una bola, habría C_n^k bolas.

Este ejemplo tiene una aplicación interesante a la física de partículas. El estado macroscópico de un sistema de k partículas se identifica dando el nivel energético de cada una de ellas (y cada una puede estar en $n > k$ niveles). Así entonces, cada estado se corresponde con una manera de poner k bolas (las partículas) en n cajas (los niveles). En el modelo de Maxwell-Boltzmann, se asume que las partículas son distinguibles (no es lo mismo que la partícula 1 tenga nivel a y la 2 nivel b , que la 1 tenga nivel b y la 2 nivel a) de manera que hay PR_n^k estados diferentes. En el modelo de Bose-Einstein, se considera que las partículas no son distinguibles, de manera que el número de estados es CR_n^k . En el modelo de Fermi-Dirac se asume que las partículas son indistinguibles y que cumplen el principio de exclusión de Pauli, según el cual dos partículas diferentes no pueden estar en el mismo estado. El número de estados es entonces C_n^k . Cada una de estas hipótesis corresponde al comportamiento empírico de diferentes tipos de partículas subatómicas.

Ejercicio 2.2. ¿De cuántas maneras se pueden poner $k > n$ bolas en n cajas de manera que cada caja contenga al menos una bola si a) las bolas son distinguibles, b) las bolas no son distinguibles?

Ejercicio 2.3. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir k tareas en n procesadores de manera que cada procesador tenga asignada como mucho una tarea?

2.3 Propiedades de los coeficientes binomiales

Como ya hemos comentado antes, los coeficientes binomiales aparecen con tanta frecuencia que resulta interesante conocer algunas de sus propiedades. En las demostraciones de estas propiedades usaremos siempre que sea posible argumentos combinatorios, aunque no sean, en muchos casos, la única vía de demostración. Hasta que no se indique lo contrario, supondremos siempre que, en la expresión $\binom{n}{k}$, n y k son enteros no negativos y que $k \leq n$.

Si tenemos en cuenta que $\binom{n}{k}$ cuenta el número de palabras de longitud n con exactamente k ceros y $n - k$ unos, está claro que la elección de la posición de los k ceros determina la de los

$n - k$ unos, de manera que

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad (2.3)$$

Esta es la *propiedad de simetría* de los coeficientes binomiales, y dice que la sucesión

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$$

tiene una simetría central. Los primeros y últimos términos de la sucesión son $1, n, n(n-1)/2, \dots$ y $\dots, n(n-1)/2, n, 1$ respectivamente. Comparando dos términos consecutivos, tenemos

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}} = \frac{k+1}{n-k} \begin{cases} < 1 & \text{si } k < \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \\ \geq 1 & \text{si } k \geq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \end{cases}$$

de manera que la sucesión anterior crece para $0 \leq k \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ y decrece para $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1 \leq k \leq n$. Si n es par, el valor más grande es $\binom{n}{n/2}$, mientras que si n es impar, los términos más grandes son $\binom{n}{(n-1)/2} = \binom{n}{(n+1)/2}$.

Hay un algoritmo clásico para calcular $\binom{n}{k}$ para valores moderados de n que se llama *triángulo de Pascal* (o también *triángulo de Tartaglia*) y que se basa en la siguiente propiedad de los coeficientes binomiales:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, \quad 0 < k < n \quad (2.4)$$

Esta es la *propiedad de la adición* de los coeficientes binomiales. Desde el punto de vista combinatorio, la expresión se puede deducir de la manera siguiente. La familia de subconjuntos de tamaño k de un conjunto X de tamaño n se puede partir en dos subfamilias: la de los subconjuntos que *no* contienen un cierto elemento $a \in X$, de los cuales hay tantos como elecciones de k elementos entre los $n-1$ que quedan, $\binom{n-1}{k}$, y la de los que contienen a , tantos como elecciones de $k-1$ elementos entre los $n-1$ diferentes de a , $\binom{n-1}{k-1}$. De aquí la igualdad 2.4.

Usando la relación anterior, se pueden disponer los números combinatorios en un triángulo

$$\begin{array}{ccccccc} & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} \\ & & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\ & & & & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \end{array}$$

donde el primer y el último número de cada fila valen 1 y cada uno de los otros es la suma de los dos que tiene encima en la fila anterior. Numéricamente,

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & 1 & & \\
 & & 1 & 2 & 1 & & \\
 & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\
 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & &
 \end{array}$$

La identidad 2.4 permite obtener otras expresiones combinatorias. Usándola de forma iterada podemos escribir

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \\
 &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} = \\
 &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k-2} + \binom{n-3}{k-3} \\
 &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \cdots + \binom{n-k}{1} + \binom{n-k-1}{0}
 \end{aligned}$$

Esta igualdad se puede expresar de una manera más legible poniendo $n+k+1$ en el lugar de n :

$$\sum_{i=0}^k \binom{n+i}{i} = \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \cdots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k} \quad (2.5)$$

que proporciona la suma de coeficientes binomiales contiguos en los cuales la parte superior y la inferior difieren siempre en una constante (n en la expresión anterior), motivo por el cual nos referiremos a ella como la *propiedad de la adición paralela*. Sobre el Triángulo de Pascal, esta suma es la de los términos de un segmento de diagonal como en la figura 2.2.

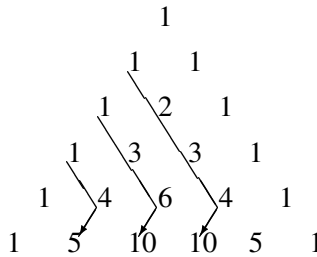


Figura 2.2: La propiedad de la adición paralela

Como el triángulo de Pascal tiene un eje de simetría central, se tendría que poder obtener una fórmula similar a la igualdad 2.5 aplicando esta simetría sobre las diagonales de la

figura 2.2. Efectivamente, de esta manera se obtiene la fórmula

$$\sum_{i=k}^n \binom{i}{k} = \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} \quad (2.6)$$

que proporciona la suma de coeficientes binomiales contiguos en los que el índice superior sigue el índice de sumación y el inferior es constante, y que llamaremos *propiedad de la adición superior*. Sobre el Triángulo de Pascal, esta propiedad corresponde a sumas diagonales como las de la figura 2.3.

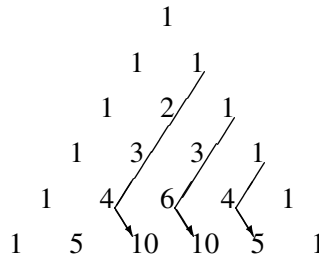


Figura 2.3: La propiedad de la adición superior

Ejercicio 2.4. Obtener la propiedad de la adición superior de las dos maneras siguientes.

1. Usando la propiedad de adición como para obtener la igualdad 2.4, pero descomponiendo el otro sumando.
2. Con el argumento combinatorio siguiente. Tenéis un conjunto de $n + 1$ bolas numeradas de 0 a n y formáis la familia de subconjuntos de tamaño $k + 1$. Esta familia se puede partir en las subfamilias formadas por los subconjuntos que tienen la bola más alta numerada i , $i = k, k + 1, \dots, n$.

Las dos propiedades anteriores son muy similares y tienen diversas aplicaciones particulares. Por ejemplo, para $n = 1$ obtenemos,

$$\sum_{i=0}^{k-1} \binom{1+i}{i} = 1 + 2 + \cdots + (k-1) + k = \binom{k+1}{k-1} = \binom{k+1}{2} = \frac{k(k+1)}{2} \quad (2.7)$$

que proporciona una fórmula para la suma de los k primeros naturales. Los números que se obtienen, $\binom{k+1}{2}$, se llaman *números triangulares* porque cuentan el número de términos en las n primeras líneas del triángulo de Pascal (o en una disposición triangular de bolas). Los primeros son los de la figura 2.4.

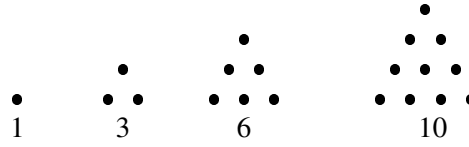


Figura 2.4: Representación geométrica de los primeros números triangulares

La fórmula 2.6 para $k = 2$ da la expresión

$$\sum_{i=2}^n \binom{i}{2} = \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \cdots + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3} = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}$$

que corresponde a la suma de los n primeros números triangulares. Por similitud con éstos, los números $\binom{n+1}{3}$ se llaman *números piramidales*, ya que cuentan el número de elementos de una pirámide de base triangular y $n - 1$ pisos, siendo el piso i un triángulo como los de la figura 2.4. La suma de números piramidales daría también el número de puntos de un objeto ... en cuatro dimensiones.

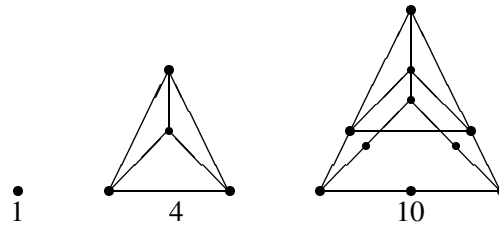


Figura 2.5: Representación geométrica de los primeros números piramidales

Expresiones más complejas involucran sumas de productos de coeficientes binomiales. La más conocida de estas expresiones es la *convolución de Vandermonde*,

$$\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k} \quad (2.8)$$

que se deduce con el argumento combinatorio siguiente. Para obtener todos los subconjuntos de tamaño k de un conjunto de n bolas blancas y m bolas negras, podemos formar todos los que no tienen ninguna bola blanca (los hay $\binom{n}{0} \binom{m}{k}$), los que tienen una (los hay $\binom{n}{1} \binom{m}{k-1}$) y

así sucesivamente hasta los que tienen todas las bolas blancas (contando que, cuando $a < b$, entonces $\binom{a}{b} = 0$). Observemos que, para $m = 1$, reobtenemos la fórmula de adición.

Los coeficientes multinomiales se pueden obtener también como productos de coeficientes binomiales. Recordemos que

$$\binom{k}{k_1, \dots, k_n} = \frac{k!}{k_1! \cdots k_n!}, \quad k = k_1 + \cdots + k_n$$

cuenta el número de permutaciones de n elementos en las cuales se repite k_i veces el elemento i . Para contar este número podíamos haber hecho lo siguiente. Escogemos primero las k_1 posiciones del elemento 1 (hay $\binom{k}{k_1}$ maneras de hacerlo). Después escogemos las k_2 posiciones del elemento 2 en las posiciones que quedan (de $\binom{k-k_1}{k_2}$ maneras) y así sucesivamente para obtener,

$$\binom{k}{k_1, \dots, k_n} = \binom{k}{k_1} \binom{k-k_1}{k_2} \binom{k-k_1-k_2}{k_3} \cdots \binom{k_n}{k_n} \quad (2.9)$$

Por ejemplo,

$$\binom{k}{k_1, k_2} = \binom{k}{k_1} \binom{k-k_1}{k_2}$$

Ejercicio 2.5. Demostrar la identidad

$$\binom{k}{k_1} \binom{k_1}{k_2} = \binom{k}{k_2} \binom{k-k_2}{k_1-k_2}$$

La fórmula del binomio

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \cdots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

permite también obtener diversas expresiones con números combinatorios. Poniendo $a = b = 1$ obtenemos

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n \quad (2.10)$$

En términos de conjuntos, la identidad dice que un conjunto de n elementos tiene un total de 2^n subconjuntos, que es también el número de palabras de longitud n que se pueden formar con ceros y unos y también la suma de todos los coeficientes binomiales de una línea horizontal del Triángulo de Pascal.

Poniendo $a = 1$ y $b = -1$ en la fórmula binomial se obtiene

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} + (-1)^n \binom{n}{n} = 0 \quad (2.11)$$

es decir, que la suma con signos alternados de cada línea del Triángulo de Pascal da cero, otra consecuencia de su simetría central.

Acabamos esta sección con algunos comentarios sobre la fórmula del binomio. Tal como ha sido escrita y deducida, la fórmula sólo es válida para valores de n naturales. Lo que resulta más sorprendente es que, con una extensión adecuada (pero bien natural) de los coeficientes binomiales $\binom{x}{k}$ para valores reales de x , Newton obtuvo una fórmula del binomio válida para cualquier potencia (negativa, fraccionaria o irracional). En la definición del coeficiente binomial, podemos escribir, para n y k enteros no negativos,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

La parte derecha de esta igualdad permite definir $\binom{x}{k}$ para x real de la manera siguiente,

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!} \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.12)$$

Así, por ejemplo,

$$\binom{-2}{3} = \frac{(-2)(-3)(-4)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = -4$$

o

$$\binom{1/2}{3} = \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{2^4}$$

Observemos que si x es un entero menor que k , el numerador en la expresión 2.12 es cero. En esta definición, el miembro inferior del coeficiente binomial, k , es siempre un entero no negativo. Se puede generalizar la definición para todos los enteros poniendo

$$\binom{x}{k} = 0 \quad k \text{ entero negativo}$$

Hay una relación precisa entre esta generalización de los coeficientes binomiales y la versión original cuando x es un entero negativo, $x = -n$. Esta relación, llamada *propiedad de inversión*, se obtiene de la manera siguiente,

$$\begin{aligned} \binom{-n}{k} &= \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!} = \\ &= (-1)^k \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!} = \\ &= (-1)^k \binom{n+k-1}{k} \end{aligned}$$

La fórmula es, de hecho, simétrica, de manera que se puede escribir

$$\binom{r}{k} = (-1)^k \binom{k-r-1}{k} \quad r \in \mathbb{Z} \quad (2.13)$$

Ejercicio 2.6. Hemos demostrado la fórmula anterior cuando r es un entero negativo. Demos-trarla cuando r es un entero positivo.

Esta extensión de los coeficientes binomiales permite generalizar la fórmula del binomio a cualquier entero, positivo o negativo. Recordemos que en la fórmula 2.2 de la sección anterior habíamos obtenido,

$$(1 + a + a^2 + a^3 + \cdots)^n = \sum_{i \geq 0} \binom{n+i-1}{i} a^i$$

Cada uno de los factores es la suma de una serie geométrica de razón a . Si $0 < a < 1$, esta suma vale $\frac{1}{1-a}$, de manera que, usando la ecuación anterior, se puede escribir

$$(1+a)^{-n} = \left(\frac{1}{(1-(-a))} \right)^n = \sum_{k \geq 0} \binom{n+k-1}{k} a^k (-1)^k$$

donde ahora el sumatorio de la derecha tiene una cantidad no finita de términos. Usando la fórmula de inversión, podemos escribir

$$(1+a)^r = \sum_{k \geq 0} \binom{r}{k} a^k \quad r \in \mathbb{Z} \quad (2.14)$$

que proporciona una generalización de la fórmula del binomio para cualquier entero r . Si r es positivo, los términos del sumatorio con el índice inferior k más grande que r son nulos y el sumatorio tiene de hecho $r+1$ términos, mientras que si r es negativo, el sumatorio tiene infinitos términos.

Se puede demostrar (usando el desarrollo en serie de Taylor de la función $f(x) = (1+x)^r$ alrededor del origen) que la fórmula 2.14 es válida para cualquier valor real de r . En un capítulo posterior, al tratar funciones generadoras, usaremos esta fórmula y comentaremos qué papel juega la convergencia de la serie que se obtiene.

Notas bibliográficas

Desde un punto de vista histórico, el desarrollo inicial de la combinatoria elemental se produjo con el nacimiento del cálculo de probabilidades, a finales del siglo XVII y en relación sobre todo a problemas relacionados con los juegos de azar. Una de las primeras obras que sistematiza los

primeros resultados en el cálculo de probabilidades, el *Ars conjectandi* de J. Bernouilli (1713), contiene ya una expresión de la fórmula del binomio que después generalizará Newton. Este origen hace que en muchos textos de probabilidad haya una buena introducción a esta parte de la combinatoria. Un ejemplo excelente en este sentido es el del libro de Feller [3].

El material cubierto en este capítulo se puede encontrar en cualquier texto elemental de combinatoria o de matemática discreta. El libro de Anderson [1] contiene una exposición a nivel sencillo, mientras que en el de Berge [2] se hace una exposición más compacta. En lo que respecta a las propiedades de los números combinatorios, el texto de Graham, Knuth y Patashnik [4] es una referencia completa y de lectura agradecida.

Bibliografía

- [1] I. Anderson. *Introducción a la Combinatoria*, Ed. Vicens Vives, 1992.
- [2] C. Berge. *Principes de Combinatoire*, Dunod, Paris, 1968.
- [3] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and its Applications* (Vol. I), Wiley Interscience, 1968.
- [4] R. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik. *Concrete Mathematics*, Addison Wesley, 1989.

Problemas

1. Queremos codificar los símbolos alfanuméricos (28 letras y 10 cifras) en palabras de una cierta longitud k de un alfabeto binario $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. ¿Cuál es la mínima longitud necesaria para poderlo hacer?
2. ¿Es suficiente con palabras de hasta 4 de longitud para representar todas las letras del alfabeto ordinario en lenguaje Morse (el lenguaje Morse dispone sólo de dos símbolos: punto y raya)?
3. ¿De cuántas maneras se pueden escoger tres números del 1 al 9 de manera que no salgan dos consecutivos?
4. Las placas de matrícula tienen cuatro dígitos numéricos seguidos de dos alfabéticos. ¿Cuántos coches se pueden matricular? Una vez se han agotado, se propone que las matrículas puedan estar formadas por seis dígitos alfanuméricos (es decir, cifras del 0 al 9 o letras de la A a la Z). ¿Cuántas matrículas nuevas se pueden hacer? Una vez agotadas éstas, ¿qué estrategia proporcionaría más matrículas nuevas, hacer matrículas con 7 dígitos, o bien añadir un símbolo al alfabeto?

5. ¿Cuántos números hay entre 100 y 900 que tengan las cifras diferentes? ¿Cuántos números más grandes que 6600 con todas las cifras diferentes y sin ninguna de las cifras 7, 8 ni 9?
6. ¿Cuántas palabras de longitud 4 se pueden formar con las cinco vocales sin que se repita ninguna? ¿Y de longitud 5 (también sin que se repita ninguna)?
7. Un código de colores con barras usa 6 colores para pintar 4 barras, pero dos barras consecutivas no pueden tener el mismo color. ¿Cuántas palabras diferentes se pueden formar?
8. En un alfabeto de 10 consonantes y 5 vocales, ¿cuántas palabras de cinco letras sin dos vocales seguidas ni tres consonantes seguidas se pueden formar?
9. La música serial se basa en el principio de que en cualquier línea melódica han de aparecer los 12 tonos de la escala antes de repetirse alguno. ¿Cuántas líneas melódicas de 12 notas se pueden formar según este principio?
10. En problemas de diseño de redes de interconexión se suelen usar grafos que tienen por vértices palabras de un alfabeto. Por ejemplo, los llamados grafos de Kautz tienen por vértices las palabras de longitud k que se pueden formar de un alfabeto de n símbolos con la condición que dos letras consecutivas no pueden ser iguales. ¿Cuántas de estas palabras hay?
11. Sea $A = \{1, 2, \dots, n\}$ y $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ un conjunto de k símbolos. Una aplicación $f : X \rightarrow A$ es *ordenada* si $f(x_1) \leq f(x_2) \leq \dots \leq f(x_k)$ y *estrictamente ordenada* si las desigualdades son estrictas. ¿Cuántas aplicaciones ordenadas y cuántas estrictamente ordenadas hay de X en A ?
12. En una reunión de una empresa hay ocho representantes de los accionistas, seis representantes de acreedores, cuatro representantes de los trabajadores y tres técnicos. Para resolver más ágilmente la organización de la reunión deciden nombrar una comisión formada por tres representantes de los accionistas, dos representantes de acreedores, un representante de los trabajadores y un técnico. ¿Cuántas comisiones diferentes se podrían formar? Si uno de los accionistas se niega en rotundo a formar parte de la comisión con dos de los representantes de los trabajadores, a los cuales tiene manía, ¿cuántas comisiones se podrían formar?
13. Una empresa de sondeos escoge una muestra de 20 estudiantes al azar de entre una comunidad de 500 estudiantes para hacer una encuesta. ¿Cuántas muestras diferentes puede obtener? Uno de los estudiantes está encantado de que le pasen la encuesta. ¿Cuántas de estas muestras contienen a este estudiante?

14. ¿De cuántas maneras se pueden poner n bolas numeradas en k cajas numeradas de manera que en cada caja haya al menos una bola? ¿Y si las bolas no están numeradas?
15. Usando la propiedad de inversión, demostrar que la suma parcial de los términos de una línea del Triángulo de Pascal con los signos alternados vale

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{n}{i} = (-1)^k \binom{n-1}{k}$$

16. Demostrar la identidad

$$\sum_{i=0}^k \binom{k+r}{i} x^i y^{k-i} = \sum_{i=0}^k \binom{-r}{i} (-x)^i (x+y)^{k-i}$$

Usando esta identidad para $x = -1$ e $y = 1$, o bien, $x = y = 1$ y $r = k + 1$, obtener, respectivamente,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k \binom{k+r}{i} (-1)^i &= \binom{-r}{k}, \quad k \text{ entero positivo,} \\ \sum_{i=0}^k \binom{2k+1}{k} &= \sum_{i=0}^k \binom{k+i}{i} 2^{k-i} = 2^k \end{aligned}$$