In [109]:
```
import scipy.stats as sts
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import math
%matplotlib inline
```

In [110]:
```
N = 100
```

In [111]:
```
stand_norm = sts.norm(0,1)
X = stand_norm.rvs(N)
```

(a)

Пусть $X_1, \dots, X_n \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ — независимая выборка из нормального распределения, где σ^2 — известная дисперсия. Определим произвольное $\gamma \in [0, 1]$ и построим доверительный интервал для неизвестного среднего μ.

Утверждение. Случайная величина

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

имеет стандартное нормальное распределение $\mathrm{N}(0, 1)$.

Пусть z_γ — γ-квантиль стандартного нормального распределения. Тогда в силу симметрии последнего имеем:

$$\mathbb{P}\left(-z_{1-\frac{\gamma}{2}} \le Z \le z_{1-\frac{\gamma}{2}}\right) = 1 - \gamma.$$

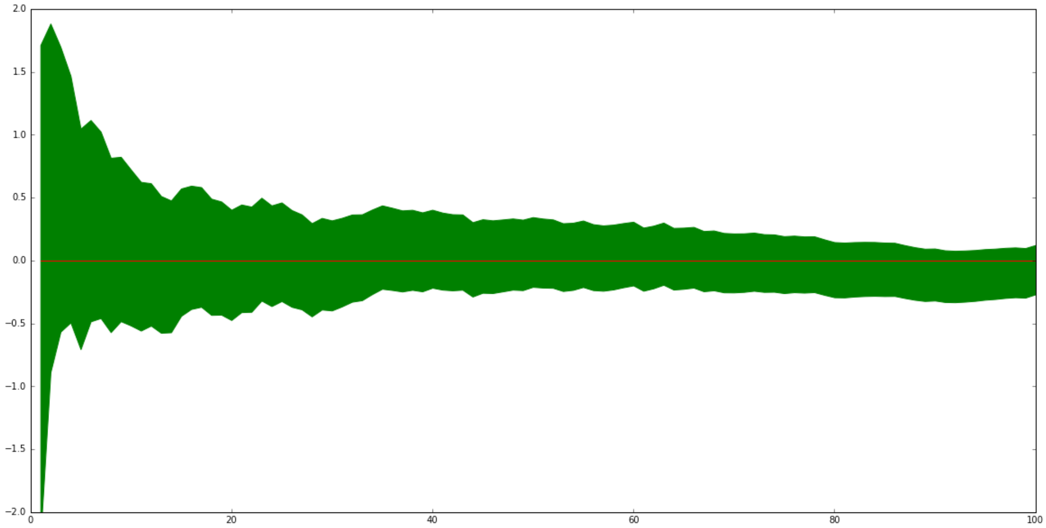
Квантили стандартного нормального распределения

Вероятность (уровень квантили), %	99,99	99,90	99,00	97,72	97,50	95,00	90,00	84,13	50,00
Квантиль	3,715	3,090	2,326	2,000	1,960	1,645	1,282	1,000	0,000

После подстановки выражения для Z и несложных алгебраических преобразований получаем пункт (a) при $\gamma = 0.95$:

$$\mathbb{P}\left(\bar{X} - z_{1-\frac{\gamma}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + z_{1-\frac{\gamma}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \gamma.$$

In [112]:
```
#gamma = 0.05
#quantile 1 - gamma/2 = 1 - 0.05/2=0.975
sigma  = 1
quantile = 1.960
est_left = np.array([X[:n].mean() - quantile/math.sqrt(n)  for n in rang
e(1,101,1)])
est_right = np.array([X[:n].mean() + quantile/math.sqrt(n) for n in rang
e(1,101,1)])
x = np.arange(1,101,1)
plt.figure(figsize=(20,10))
plt.fill_between(x, est_left, est_right, color = "green")
plt.plot(x, np.linspace(0,0,100), color='red')
plt.ylim(-2,2)
plt.show()
```



Как видим, прекрасный доверительный интервал!

(c)

Пусть $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ — независимая выборка из нормального распределения, где μ, σ^2 — неизвестные константы. Построим доверительный интервал для неизвестного среднего μ.

Утверждение. Случайная величина

$T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}},$

где S — несмещённое выборочное стандартное отклонение, имеет распределение Стьюдента с $n-1$ степенями свободы $\mathrm{t}(n-1)$. Пусть $t_{\alpha,n-1}$ — α-квантили распределения Стьюдента. Тогда в силу симметрии последнего имеем:

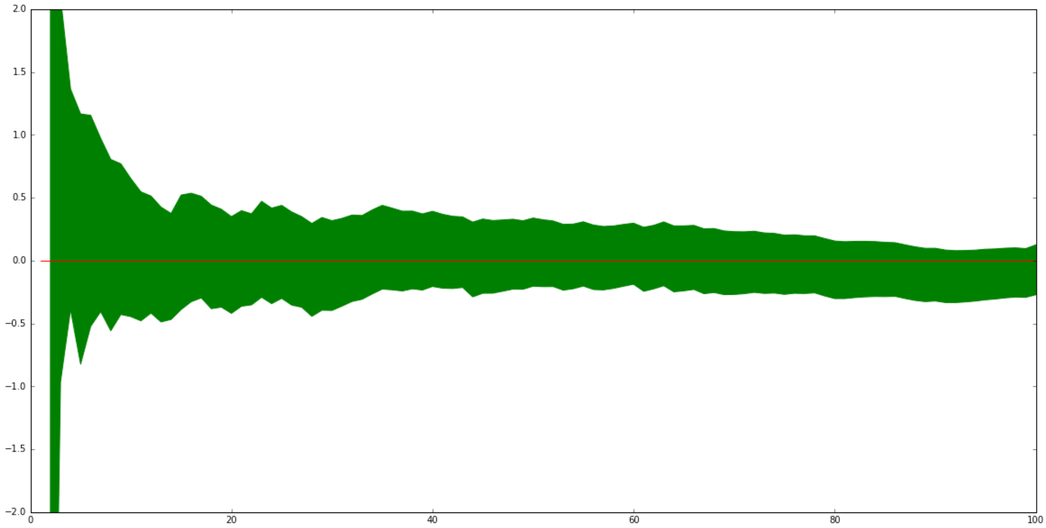
$\mathbb{P}\left(-t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \leq T \leq t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}\right) = 1-\alpha.$

После подстановки выражения для T и несложных алгебраических преобразований получаем пункт (c):

$\mathbb{P}\left(\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha.$

$\gamma = 1-\alpha = 0.95,\ \alpha = 0.05$

In [113]:
```
alpha = 0.05
quantile = [sts.t.ppf(1- alpha/2.,n) for n in range (0, N)]
est_left = np.array([X[:n].mean() - math.sqrt(X[:n].var()/(n-0.))*quanti
le[n-1]  for n in range(1,N+1,1)])
est_right = np.array([X[:n].mean() + math.sqrt(X[:n].var()/(n-0.))*quant
ile[n-1]  for n in range(1,N+1,1)])
x = np.arange(1,101,1)
plt.figure(figsize=(20,10))
plt.fill_between(x, est_left, est_right, color = "green")
plt.plot(x, np.linspace(0,0,100), color='red')
plt.ylim(-2,2)
plt.show()
```



А этот интервал очень похож на предыдущий, не сказать, что он хуже.

(b)

Пусть $X_1,\ldots,X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ — независимая выборка из нормального распределения, где μ — известное среднее. Определим произвольное $\alpha \in [0, 1]$ и построим α — доверительный интервал для неизвестной дисперсии σ^2.

Утверждение. Случайная величина

$$H = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}$$

имеет распределение $\chi^2(n)$. Пусть $\chi^2_{\alpha,n}$ — α-квантиль этого распределения. Тогда имеем:

$$\mathbb{P}\left(\chi^2_{\frac{1-\alpha}{2},n} \leqslant H \leqslant \chi^2_{\frac{1+\alpha}{2},n}\right) = \alpha.$$

После подстановки выражения для H и несложных алгебраических преобразований получаем случай (b):

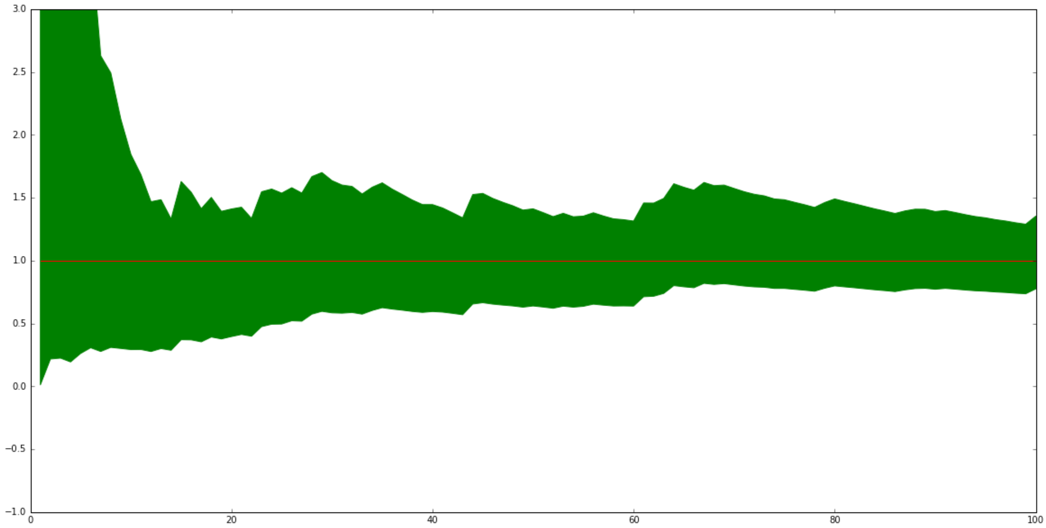
$$\mathbb{P}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{1+\alpha}{2},n}} \leqslant \sigma^2 \leqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{1-\alpha}{2},n}}\right) = \alpha.$$

$$\gamma = \alpha = 0.95$$

In [114]:
```
alpha = 0.95
quantile_plus = np.array([sts.chi2.ppf((1+ alpha)/2.,n) for n in range (
0, N+1)])
quantile_minus = np.array([sts.chi2.ppf((1- alpha)/2.,n) for n in range
(0, N+1)])

est_left = np.array([ (X[:n]**2).sum() / quantile_plus[n] for n in range
(1,N+1)])
est_right = np.array([ (X[:n]**2).sum() / quantile_minus[n] for n in ran
ge(1,N+1)])

x = np.arange(1,101,1)
plt.figure(figsize=(20,10))
plt.fill_between(x, est_left, est_right, color = "green")
plt.plot(x, np.linspace(1,1,100), color='red')
plt.ylim(-1,3)
plt.show()
```



Снова прекрасный интервал.

(d)

Случай неизвестного среднего

Пусть $X_1,\ldots,X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ — независимая выборка из нормального распределения, где μ, σ^2 — неизвестные константы. Построим доверительный интервал для неизвестной дисперсии σ^2.

Теорема Фишера для нормальных выборок. Случайная величина

$$H = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2},$$

где S^2 — несмещённая выборочная дисперсия, имеет распределение $\chi^2(n-1)$. Тогда имеем:

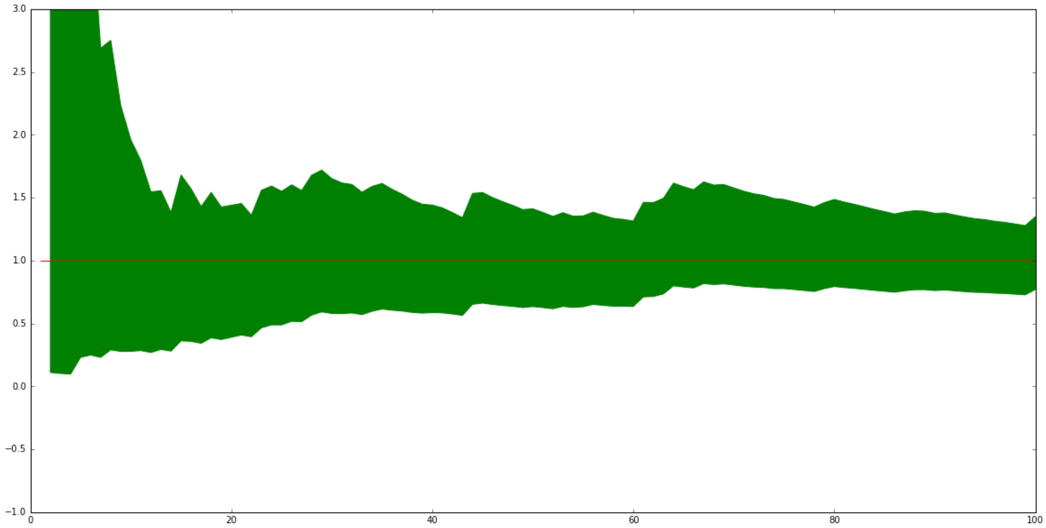
$$\mathbb{P}\left(\chi^2_{\frac{1-\alpha}{2},n-1} \leqslant H \leqslant \chi^2_{\frac{1+\alpha}{2},n-1}\right) = \alpha.$$

После подстановки выражения для H и несложных алгебраических преобразований получаем пункт (d):

$$\mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{1+\alpha}{2},n-1}} \leqslant \sigma^2 \leqslant \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{1-\alpha}{2},n-1}}\right) = \alpha.$$

In [115]:
```
alpha = 0.95
# Квантили уже посчитаны
est_left = np.array([ X[:n].var()*(n-1) / quantile_plus[n-1] for n in ra
nge(1,N+1)])
est_right = np.array([ X[:n].var()*(n-1) / quantile_minus[n-1] for n in
range(1,N+1)])

x = np.arange(1,101,1)
plt.figure(figsize=(20,10))
plt.fill_between(x, est_left, est_right, color = "green")
plt.plot(x, np.linspace(1,1,100), color='red')
plt.ylim(-1,3)
plt.show()
```



Видно, что практически нет никакой разницы между тем, чтобы оценивать матожидание с известной дисперсией или с неизвестной дисперсией.

Аналогично с оценкой дисперсии с известным/неизвестным матожиданием

In [ ]: