

# Algebra Lineare e Geometria

Fabio Ferrario

@fefabo

2023/2024

# Indice

0.1	Ripasso concetti base . . . . .	4
0.1.1	Sottoinsieme . . . . .	5
0.1.2	Operazioni su insiemi . . . . .	5
0.1.3	Insiemi di numeri . . . . .	5
0.1.4	Funzioni . . . . .	6

# Introduzione

Questi appunti di Algebra Lineare e Geometria sono stati fatti con l'obiettivo di riassumere tutti (o quasi) gli argomenti utili per l'esame di Algebra Lineare e Geometria del corso di Informatica dell'Università degli Studi di Milano Bicocca.

## Il Corso

Gli appunti fanno riferimento alle lezioni di GAL erogate nel secondo semestre dell'anno accademico 22/23.

## Programma del corso

Il programma si sviluppa come segue:

### 1. Algebra Lineare

- Spazi Vettoriali
- Dipendenza Lineare
- Basi
- Prodotto scalare euclideo
- Prodotto vettoriale

### 2. Matrici

- Operazioni
- Rango
- Invertibilità
- Determinante
- Trasformazioni elementari e riduzione a scala

**3. Sistemi di equazioni lineari**

- Risultati di base
- Teoremi di Rouché-Capelli e Cramer
- Cenni alla regressione lineare semplice

**4. Applicazioni lineari**

- Matrice associata
- Proprietà

**5. Diagonalizzabilità di Matrici**

- Autovalori
- Autovettori
- Molteplicità algebrica e geometrica
- Teorema Spettrale

**6. Geometria Analitica nel Piano**

- Sottospazi lineari affini
- Classificazione delle coniche

**7. Geometria Analitica nello spazio**

- Sottospazi lineari Affini

**Prerequisiti**

I prerequisiti per questo corso sono: Teoria di insiemi di base. Insiemi con strutture (monoidi e gruppi). Dimostrazioni per assurdo e per induzione.

**0.1 Ripasso concetti base**

- Insieme
- Sottoinsieme

La definizione matematica di insieme è complessa, verrà quindi data una definizione intuitiva. Si tratta di un gruppo di elementi distinti (l'ordine non conta).

**Esempio**  $A = \{1, 2, 3\}$  è un insieme, mentre  $B = \{1, 1, 2\}$ , NON è un insieme.

### 0.1.1 Sottoinsieme

Dato  $A = 1, 2, 3, 4$   $B = 2, 3$  è un sottoinsieme di  $A$  e si indica con  $A \subset B$ . Si tratta quindi di un insieme contenuto all'interno dell'insieme di partenza (definizione assolutamente non formale).

### 0.1.2 Operazioni su insiemi

- Unione - Siano  $A$  e  $B$  due insiemi,  $A \cup B$  è definito come l'insieme che contiene gli elementi di  $A$  e  $B$ .
- Intersezione - Siano  $A$  e  $B$  due insiemi,  $A \cap B$  è l'insieme degli elementi comuni tra  $A$  e  $B$ .
- Complemento - Siano  $A \subset B$  due insiemi. L'insieme complemento  $B \setminus A$  oppure  $B - A = \{x \in B : x \notin A\}$
- Prodotto Cartesiano -  $A, B$  insiemi.  $A \times B$ :  
 $A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$   
 $B \times A = \{(x, y) : x \in B, y \in A\}$

**Osservazione notazione** Scrivere  $(x, y)$  è diverso che scrivere  $\{x, y\}$ , perchè nel primo caso sto considerando la coppia di elementi  $x, y$ , mentre nel secondo caso sto considerando l'insieme contenente gli elementi  $x, y$ . Quindi  $(x, y) \neq (y, x)$ , mentre  $\{x, y\} = \{y, x\}$ .

#### Osservazioni Prodotto cartesiano

- Non gode della proprietà commutativa
- Gode della proprietà distributiva

### 0.1.3 Insiemi di numeri

- $\mathbb{N}$  - Insieme numeri naturali
- $\mathbb{Z}$  - Insieme numeri interi -  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
- $\mathbb{Q}$  - Insieme numeri razionali -  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$  - Numeri  $\frac{n}{m}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$
- $\mathbb{R}$  - Insieme numeri reali -  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  - Numeri come  $\pi, \sqrt{q}, e$

### 0.1.4 Funzioni

Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , una funzione è una relazione che associa ogni elemento di  $A$  a uno e un solo elemento di  $B$ . L'insieme  $A$  viene chiamato **Dominio**, mentre  $B$  è il **Codominio**.