

# CheatSheet di Ricerca Operativa e Pianificazione delle Risorse

Fabio Ferrario

@fefabo

2022/2023

# Indice

|          |                                                      |           |
|----------|------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Gli esercizi d'esame</b>                          | <b>3</b>  |
| <b>2</b> | <b>Programmazione Lineare</b>                        | <b>4</b>  |
| 2.1      | Metodo del Simplexso . . . . .                       | 4         |
| 2.1.1    | Due Fasi . . . . .                                   | 6         |
| 2.2      | Dualità . . . . .                                    | 7         |
| 2.2.1    | Passare da Primale a Duale . . . . .                 | 7         |
| 2.3      | Gli Scarti Complementari . . . . .                   | 8         |
| 2.4      | Esercizi su Analisi di Sensitività . . . . .         | 8         |
| <b>3</b> | <b>BranchAndBound</b>                                | <b>9</b>  |
| <b>4</b> | <b>Ottimizzazione Non Lineare</b>                    | <b>10</b> |
| 4.1      | Metodo di Bisezione . . . . .                        | 10        |
| 4.2      | Algoritmo di Newton 1D . . . . .                     | 10        |
| 4.3      | Risoluzione analitica per PNL Multivariati . . . . . | 10        |
| 4.3.1    | Matrice definita positiva/negativa . . . . .         | 11        |
| 4.4      | Algoritmo del Gradiente . . . . .                    | 11        |
| 4.5      | Algoritmo di Newton (Multivariato) . . . . .         | 12        |
| <b>5</b> | <b>Ottimizzazione Non Lineare Vincolata</b>          | <b>13</b> |
| 5.1      | Funzione Lagrangiana . . . . .                       | 13        |
| 5.2      | Condizioni KKT . . . . .                             | 13        |
| 5.2.1    | Differenziare tra Max e Min . . . . .                | 14        |
| 5.2.2    | Risolvere il Sistema . . . . .                       | 14        |
| 5.2.3    | Trovare i punti di Minimo e Massimo . . . . .        | 15        |

# Capitolo 1

## Gli esercizi d'esame

Gli esercizi possibile all'esame sono:

- Metodo del Simplexso e Due Fasi
- Scarti Complementari
- Analisi di Sensitività
- Branch and Bound per PLI o PLB
- Risoluzione Analitica di PNL Multivariato
- Metodo del Gradiente
- Algoritmo di Newton
- Condizioni KKT

Oltre a varie possibili domande di teoria.

# Capitolo 2

## Programmazione Lineare

### 2.1 Metodo del Simplexso

#### Forma Aumentata

Per portare il problema in forma aumentata:

| Vincoli        |        |               |
|----------------|--------|---------------|
| Minoreuguale   | $\leq$ | $=$ + Slack   |
| Maggioreuguale | $\geq$ | $=$ - Surplus |
| Uguale         | $=$    | Invariato     |

| Variabili non positive                                 |                                 |
|--------------------------------------------------------|---------------------------------|
| $x_i \leq 0$                                           | $x_i = -x'_i$ con $x'_i \geq 0$ |
| Ogni apparizione di $x_i$ viene sostituita con $-x'_i$ |                                 |

| Funzione Obiettivo |                                  |
|--------------------|----------------------------------|
| $Z = \Sigma x_i$   | $\rightarrow Z - \Sigma x_i = 0$ |

## Test di Ottimalità

Una volta portato il problema in forma tabellare, eseguo il test di ottimalità:

| Tipo di Problema            | Massimo                           | Minimo                            |
|-----------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| <b>Soluzione Ottima sse</b> | Coefficienti riga (0)<br>$\geq 0$ | Coefficienti riga (0)<br>$\leq 0$ |

**Nuova Soluzione di Base** Una volta verificato che la soluzione non é ottima, bisogna calcolare una nuova soluzione di base:

Definisco:

Demisio.

| Tipo di Problema                             | Massimo                                          | Minimo                                          |
|----------------------------------------------|--------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| <b>Variabile Entrante</b><br>(Colonna Pivot) | Coefficiente riga (0) più Piccolo (Più Negativo) | Coefficiente riga (0) più Grande (Più Positivo) |
| <b>Variabile Uscente</b><br>(Riga Pivot)     | Test del Rapporto Minimo (T.noto/Pivot)          |                                                 |
| <b>Numero Pivot</b>                          | Intersezione Riga/Colonna Pivot                  |                                                 |
| Per la nuova <b>Riga Pivot</b>               |                                                  |                                                 |
| Variabile di Base                            | → Variabile Entrante.                            |                                                 |
| Coefficienti e Termine Noto                  | → Divisi per Numero Pivot.                       |                                                 |

| per ogni <b>altra Riga</b>                                        |                                                             |
|-------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| Definisco                                                         | $P_i$ $i$ -esimo coefficiente della nuova riga pivot        |
|                                                                   | $X_p$ coefficiente della colonna pivot nella riga in esame. |
| il coefficiente $i$ -esimo $x_i$ della riga in esame $X$ diventa: |                                                             |
| $X_p > 0$                                                         | $x_i := x_i -  X_p  \cdot P_i$                              |
| $X_p < 0$                                                         | $x_i := x_i +  X_p  \cdot P_i$                              |
| $X_p = 0$                                                         | La riga in esame resta Invariata                            |

### 2.1.1 Due Fasi

**Funzione Obiettivo:** Somma di tutte le variabili artificiali introdotte.

$$(\min Z = \Sigma y_i \implies \max Z = -\Sigma y_i \implies \max Z + \Sigma y_i = 0)$$

**Vincoli:** Per ogni vincolo che viene violato dalla soluzione Origine, sommo una variabile artificiale (unica) con coefficiente 1.

Tableau iniziale: Le variabili artificiali devono essere in base, quindi devo azzerarle in  $R(0)$  sottraendogli il vincolo a cui sono associate.

Una volta fatte entrare in base tutte le variabili artificiali, posso iterare normalmente.

Finito di iterare, avr  tutte le variabili artificiali  $=1$  in  $(0)$ , rimuovo quindi le colonne artificiali e ripristino la funzione obiettivo.

Adesso faccio entrare in base (nello stesso modo di prima) le variabili che devono essere in base. poi itero normalmente.

## 2.2 Dualità

### 2.2.1 Passare da Primale a Duale

|                                      | Primale          | Duale                  | Ritorno          |
|--------------------------------------|------------------|------------------------|------------------|
| <b>Funzione Obiettivo</b>            | $\max c^T x$     | $\min b^T \lambda$     | $\max c^T x$     |
| Vincoli $\Rightarrow$ Non Negatività | $x_i^T a \leq c$ | $\lambda_i \geq 0$     | $x_i^T a \leq c$ |
|                                      | $x_i^T a \geq c$ | $\lambda_i \leq 0$     | $x_i^T a \geq c$ |
|                                      | $x_i^T a = c$    | $\lambda_i$ Free       | $x_i^T a = c$    |
| Non Negatività $\Rightarrow$ Vincoli | $x_j \geq 0$     | $\lambda_j^T a \geq c$ | $x_j \geq 0$     |
|                                      | $x_j \leq 0$     | $\lambda_j^T a \leq c$ | $x_j \leq 0$     |
|                                      | $x_j$ Free       | $\lambda_j^T a = c$    | $x_j$ Free       |

**Duale con le matrici** Un trucco per generare rapidamente il duale é utilizzare le matrici:

Avendo il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{l}
 \text{Primale} \left[ \begin{array}{l}
 \max \quad c_1 x_1 + c_2 x_2 \\
 a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leq b_1 \\
 a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \leq b_2 \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

si riconoscono opportunamente gli elementi che compongono il duale e se lo si genera:

$$\begin{array}{l}
 \text{Primale} \left[ \begin{array}{l}
 \max \quad \begin{array}{l} \text{Primo vincolo} \\ c_1 x_1 + \lambda_1 a_{11} x_1 + \lambda_2 a_{21} x_1 \end{array} + \begin{array}{l} \text{Secondo vincolo} \\ c_2 x_2 + \lambda_1 a_{12} x_2 + \lambda_2 a_{22} x_2 \end{array} \leq \begin{array}{l} \text{Funzione Obb.} \\ b_1 \lambda_1 + b_2 \lambda_2 \end{array} \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{array} \right.
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{Duale} \left[ \begin{array}{l}
 \min \quad b_1 \lambda_1 + b_2 \lambda_2 \\
 a_{11} \lambda_1 + a_{21} \lambda_2 \geq c_1 \\
 a_{12} \lambda_1 + a_{22} \lambda_2 \geq c_2 \\
 \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

## 2.3 Gli Scarti Complementari

Se abbiamo una soluzione ammissibile per il primale possiamo verificarne l'ottimalità tramite le condizioni degli scarti complementari: Quindi, dato  $x^*$ :

|                                           |                                                       |
|-------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| $x_i^* \neq 0$                            | $i$ -esimo (corrispondente) vincolo del duale attivo. |
| $i$ -esimo vincolo del primale NON attivo | $\lambda_i = 0$                                       |

Pongo quindi a sistema le equazioni trovate per trovare la soluzione corrispondente del Duale.

Se i valori delle funzioni obiettivo sono uguali, e la soluzione trovata é ammissibile per il duale, allora le due soluzioni sono entrambe ottime.

## 2.4 Esercizi su Analisi di Sensitività

**Analisi su Termini Noti** Analisi di sensitività di un termine noto ( $b_i$ ) relativo alla  $i$ -esima equazione di vincolo, dato il tableau dell'ultima iterazione:

- Identifico la variabile di Slack della  $i$ -esima equazione di vincolo.
- $\forall$  Riga del tableau in cui il coefficiente della Slack in esame è  $\neq 0$  faccio:

$$\text{T.Noto} + (\text{Coefficiente della Slack} \cdot \Delta) \geq 0$$

- Metto a sistema le disequazioni trovate e risolvo per Delta.



# Capitolo 3

## BranchAndBound

I problemi di Branch and Bound si risolvono in questo modo:

- Apro il nodo  $k$  e risolvo il rilassamento lineare:
  - Aggiorno  $Z^*$  se la soluzione è intera (binaria)
  - Fisso il mio Upper(Lower) Bound come l'arrotondamento (se necessario) della soluzione.
- Prendo la variabile frazionaria (o il primo indice se binario) e ne "vincolo" le soluzioni
- Elaboro tutti i nodi fino a che non si chiudono.

# Capitolo 4

## Ottimizzazione Non Lineare

### 4.1 Metodo di Bisezione

- Calcolo  $f'(x_k)$
- Se  $f$  è **concava**:
  - $f'(x_k) < 0 \implies \bar{x} = x_k$
  - $f'(x_k) > 0 \implies \underline{x} = x_k$
- Cerco il nuovo punto:  $x_{k+1} = \frac{x + \bar{x}}{2}$
- Se  $f'(x_k) = 0$  sono al punto di ottimo

Criterio di arresto:  $\underline{x} - \bar{x} \leq 2\epsilon$

### 4.2 Algoritmo di Newton 1D

Nuovo punto:  $x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$

### 4.3 Risoluzione analitica per PNL Multivariati

Per risolvere analiticamente un problema di PNL multivariato:

- Controllo tutti i punti in cui  $\nabla f = 0$
- Per ognuno di questi punti, se:

- $Hf$  nel punto è definita positiva allora è minimo.
- $Hf$  nel punto è definita negativa allora è massimo.
- $Hf$  non è né l'uno né l'altro allora è punto di sella.

### 4.3.1 Matrice definita positiva/negativa

Per verificare se una matrice è positiva o negativa, trovo gli autovalori sottraendo  $\lambda$  dalla diagonale di  $H$  valutata nel punto, e poi ponendo  $\det(H_\lambda) = 0$ . per una matrice 2x2 il calcolo è:  $(a_{11} - \lambda) \cdot (a_{22} - \lambda) - (a_{12} \cdot a_{21})$  Se tutti gli autovalori sono  $\geq 0$  allora  $H$  nel punto è (semi) definita positiva, mentre è (semi) definita negativa se gli autovalori sono  $\leq 0$ .

## 4.4 Algoritmo del Gradiente

Data una funzione a più variabili  $f(X)$  e un punto  $x^0$ , ogni passo del metodo del gradiente si effettua in questo modo:

1. Calcolo  $d^k = \pm \nabla f(x^k)$  (+ max e - min)
2. Calcolo  $x^{k+1} = x^k \pm \alpha^k \cdot d^k$
3. Calcolo  $\alpha^k$  come  $\text{Max } f(x^k \pm \alpha^k \cdot d^k)$ .  
ovvero valuto  $f$  nel nuovo punto e massimizzo (minimizzo per i problemi di minimo) la funzione risultante  $g(\alpha)$ , generalmente in modo analitico ( $g'(\alpha) = 0$ )
4. Sostituisco  $\alpha$  trovato in  $x^{k+1}$ .
5. Valuto i criteri di arresto

Per verificare che il punto trovato sia un punto di ottimo, semplicemente controllo che  $\nabla f(x^*) = 0$ .

|                       |            |                                         |
|-----------------------|------------|-----------------------------------------|
| Nuovo punto           | $x^{k+1}$  | $x^k \pm \alpha^k \cdot d^k$            |
| Direzione di Crescita | $d^k$      | $\pm \nabla f(x^k)$ (+ max e - min)     |
| Step Size             | $\alpha^k$ | max/min $f(x^k \pm \alpha^k \cdot d^k)$ |

## 4.5 Algoritmo di Newton (Multivariato)

Data una funzione a piú variabili  $f(X)$  e un punto  $x^0$ , una iterazione del metodo di Newton si effettua in questo modo:

1. Calcolo  $\nabla f(x^k)$  e  $H(x^k)$ .
2. Calcolo  $V$  Vettore Spostamento:  $H_f(x^k)V = -\nabla f(x^k)$   
è un sistema di equazioni, risolvo per  $v_1, \dots, v_n$
3. trovo  $x^{k+1} = x^k + V$ , in cui  $V$  é il vettore spostamento.

|                     |           |                              |
|---------------------|-----------|------------------------------|
| Vettore Spostamento | $V$       | $H_f(x^k)V = -\nabla f(x^k)$ |
| Nuovo punto         | $x^{k+1}$ | $x^k + V$                    |

# Capitolo 5

## Ottimizzazione Non Lineare Vincolata

### 5.1 Funzione Lagrangiana

In un problema di ottimizzazione vincolata definito come:

$$\begin{aligned} & \text{opt } f(x_1, \dots, x_n), \\ & g_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ Vincoli di Uguaglianza,} \\ & h_l(x_1, \dots, x_n) \leq 0 \text{ Vincoli di Disuguaglianza,} \end{aligned}$$

Generiamo la Lagrangiana così definita:

$$L(V) = f(X) \pm \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot g_i(X) \pm \sum_{j=1}^l \mu_j \cdot h_j(X)$$

in cui  $\pm$  diventa  $+$  per i problemi di MIN e  $-$  per i problemi di MAX, Abbiamo che  $\lambda$  sono i moltiplicatori lagrangiani associati ai vincoli di Uguaglianza, e  $\mu$  quelli associati ai vincoli di Disuguaglianza.

con  $V = \{x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_l\}$ , ovvero tutte le variabili e  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ , ovvero tutte le variabili originali.

### 5.2 Condizioni KKT

**Tabella** Bisogna quindi generare un sistema che avrà  $n + m + l$  incognite utilizzando le KKT, riportate qui in modo semplificato:

|                                                                              |           |                       |
|------------------------------------------------------------------------------|-----------|-----------------------|
| Stazionarietà Problemi di MIN (-)                                            |           |                       |
| $\nabla f = - \sum \lambda_i \cdot \nabla g_i - \sum \mu_j \cdot \nabla h_j$ |           |                       |
| Stazionarietà Problemi di MAX (+)                                            |           |                       |
| $\nabla f = + \sum \lambda_i \cdot \nabla g_i + \sum \mu_j \cdot \nabla h_j$ |           |                       |
| Ammissibilità Vincoli Uguaglianza                                            | $\forall$ | $g_i = 0$             |
| Ammissibilità Vincoli Disuguaglianza                                         | $\forall$ | $h_j \leq 0$          |
| Condizione di Complementarietà                                               | $\forall$ | $\mu_j \cdot h_j = 0$ |
| Non Negatività di $\mu$                                                      | $\forall$ | $\mu_j \geq 0$        |

Dove con  $\forall$  si intende chiaramente tutti quelli presenti.

### 5.2.1 Differenziare tra Max e Min

Quando si usano le KKT bisogna differenziare tra problemi di Max e Problemi di Min. Ogni problema ha le seguenti possibili combinazioni:

|                            |                |                                                                              |
|----------------------------|----------------|------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Problema di Massimo</b> | $\mu_i \geq 0$ | $\nabla f = + \sum \lambda_i \cdot \nabla g_i + \sum \mu_j \cdot \nabla h_j$ |
|                            | $\mu_i \leq 0$ | $\nabla f = - \sum \lambda_i \cdot \nabla g_i - \sum \mu_j \cdot \nabla h_j$ |
| <b>Problema di Minimo</b>  | $\mu_i \geq 0$ |                                                                              |
|                            | $\mu_i \leq 0$ | $\nabla f = + \sum \lambda_i \cdot \nabla g_i + \sum \mu_j \cdot \nabla h_j$ |

é utile sapere che se scegliessimo di avere la funzione obiettivo **Sempre come somma di elementi negativi**, sia per i problemi di massimo che di minimo, allora potremmo, in base ai valori di  $\mu$ , sapere in un solo calcolo se il punto é candidato a massimo o minimo.

### 5.2.2 Risolvere il Sistema

Per risolvere il sistema, o lo si risolve con il metodo classico, oppure tramite questo metodo: Con la condizione di **Complementarietà** sappiamo che:

$$\mu_j \cdot h_j = 0 \implies \mu_j = 0 \vee h_j = 0$$

Quindi, con  $l$  variabili  $\mu_j$  abbiamo  $2^l$  combinazioni di sistemi, in cui  $\mu_j = 0 \vee \mu_j \neq 0$ . Cosí possiamo risolvere le  $2^l$  combinazioni per trovare tutti i punti candidati.

### 5.2.3 Trovare i punti di Minimo e Massimo

I punti trovati dalle condizioni KKT sono solo candidati a essere punti di max/min, perché le KKT sono condizioni Necessarie ma non Sufficienti.

Le condizioni KKT diventano Sufficienti se:

- Per i Punti di Massimo:
  - $f$  é concava.
  - I vincoli  $h_i(X)$  sono tutti Convessi.
- Per i Punti di Minimo:
  - $f$  é convessa.
  - I vincoli  $h_i(X)$  sono tutti Convessi.