

# Algebra Lineare e Geometria

Fabio Ferrario

@fefabo

Elia Ronchetti

@ulerich

2023/2024

# Indice

<b>1</b>	<b>Spazi vettoriali</b>	<b>8</b>
1.1	Definizione di Spazi Vettoriali . . . . .	8
1.1.1	Le operazioni Somma e Prodotto . . . . .	8
1.2	I Sottospazi Vettoriali . . . . .	9
1.2.1	Sottospazi di $\mathbb{R}^2$ . . . . .	10
1.2.2	Il piú piccolo Sottospazio Vettoriale . . . . .	10
1.3	Combinazione Lineare . . . . .	11
1.4	Basi . . . . .	12

# Introduzione

Questi appunti di Algebra Lineare e Geometria sono stati fatti con l'obiettivo di riassumere tutti (o quasi) gli argomenti utili per l'esame di Algebra Lineare e Geometria del corso di Informatica dell'Università degli Studi di Milano Bicocca.

## Il Corso

Gli appunti fanno riferimento alle lezioni di GAL erogate nel secondo semestre dell'anno accademico 22/23.

## Programma del corso

Il programma si sviluppa come segue:

### 1. Algebra Lineare

- Spazi Vettoriali
- Dipendenza Lineare
- Basi
- Prodotto scalare euclideo
- Prodotto vettoriale

### 2. Matrici

- Operazioni
- Rango
- Invertibilità
- Determinante
- Trasformazioni elementari e riduzione a scala

**3. Sistemi di equazioni lineari**

- Risultati di base
- Teoremi di Rouché-Capelli e Cramer
- Cenni alla regressione lineare semplice

**4. Applicazioni lineari**

- Matrice associata
- Proprietà

**5. Diagonalizzabilità di Matrici**

- Autovalori
- Autovettori
- Molteplicità algebrica e geometrica
- Teorema Spettrale

**6. Geometria Analitica nel Piano**

- Sottospazi lineari affini
- Classificazione delle coniche

**7. Geometria Analitica nello spazio**

- Sottospazi lineari Affini

**Prerequisiti**

I prerequisiti per questo corso sono: Teoria di insiemi di base. Insiemi con strutture (monoidi e gruppi). Dimostrazioni per assurdo e per induzione.

# Insiemistica e Funzioni

In questo capitolo ripassiamo i concetti di insiemistica e funzioni e fissiamo le notazioni che verranno usate durante il corso.

## Insiemi

Non verrà data una definizione formale di insieme perchè la definizione matematica di insieme è complessa, verrà quindi data una definizione intuitiva. Fissiamo le **Notazioni** che useremo nell'insiemistica.

Voglio considerare degli oggetti e distinguerli da altri oggetti. In genere si utilizza la notazione classica disegnando un insieme, ma questo metodo è scomodo. Quindi, per rappresentiamo un insieme usiamo le **Parentesi Graffe**

$$I = \{ x, \Delta, 3, \odot \}$$

Teniamo a mente due cose:

- L'ordine degli elementi non è sensibile.
- Se un valore viene ripetuto, allora questo non è un insieme.

## Sottoinsieme

Un sottoinsieme è un insieme contenuto in un altro insieme e si indica con il simbolo  $\subset$ .

Considerando l'insieme I sopra avremo che:

$$S \subset I = \{\Delta, 3\} \text{ è un sottoinsieme di } I$$

## Operazioni sugli insiemi

Esistono diverse operazioni che ci permettono di ottenere degli insiemi partendo da altri insiemi.

In questo corso useremo le seguenti:

- **Unione**  $A \cup B$  Contiene gli elementi contenuti sia in A che in B (Senza ripetizioni).
  - **Unione Disgiunta**  $A \sqcup U$  come l'unione, ma se ci sono degli elementi condivisi vengono entrambi rappresentati con indicato a pedice l'insieme di provenienza.
- **Intersezione**  $A \cap B$  Contiene gli elementi comuni tra A e B.
- **Complemento**  $B \setminus A$  (oppure  $B - A$ ) è l'insieme contenente gli elementi di B che non sono presenti in A.
- **Prodotto Cartesiano**  $A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$   
 Ovvero l'insieme delle coppie di ogni elemento di A con ogni elemento di B. Nota che il prodotto cartesiano NON è commutativo.

**Osservazione:** Scrivere  $(x, y)$  è diverso che scrivere  $\{x, y\}$ .

Nel primo caso sto considerando la **coppia di elementi**  $x$  e  $y$ , mentre nel secondo caso sto considerando l'insieme contenente gli elementi  $x$  e  $y$ .

Quindi  $(x, y) \neq (y, x)$ , mentre  $\{x, y\} = \{y, x\}$ .

## Insiemi Numerici

Esistono diversi insiemi numerici:

- Naturali  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} = \{0, 1, 2, \dots\}$
- Interi  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- Razionali  $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}\}$
- Reali  $\mathbb{R} = \{Q, \sqrt{q}, \pi, e : q > 0 \in \mathbb{Q}\}$
- Complessi  $\mathbb{C}$ , che non faremo in questo corso

## Spazi Multidimensionali

Esistono spazi numerici multidimensionali, che sono semplicemente il prodotto cartesiano di più spazi:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

## Funzioni

### Definizione di Funzione

Definiamo ora il concetto di Funzione:

#### DEFINIZIONE

Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , una funzione è una relazione che **associa** ogni elemento di  $A$  a uno e un solo elemento di  $B$ . L'insieme  $A$  viene chiamato **Dominio**, mentre  $B$  è il **Codominio**.

**Osservazione:** Perché  $f$  sia una funzione deve valere:

$$\forall x \in \text{dom}(f), \exists ! f(x)$$

Ovvero, per ogni  $x$  appartenente al dominio della funzione  $f$  esiste **ed è unico** un valore di  $f(x)$ .

### Immagine e Controimmagine

Una funzione  $f : A \rightarrow B$  ha associata i seguenti insiemi:

- Sia  $S \subset A$ , allora con  $f(S)$  indicheremo l'**Immagine** di  $S$  tramite  $f$ .

$$f(S) = \{b \in B : \text{è associato ad un elemento di } S\}$$

- Sia  $R \subset B$ , allora con  $f^{-1}(R)$  indicheremo la **Controimmagine** di  $R$  tramite  $f$ .

$$f^{-1}(R) = \{a \in A : f(a) \in R\}$$

In parole povere, l'Immagine è l'insieme di tutti i valori che assume la funzione  $f$  valutata in ogni elemento di  $S$ , mentre la Controimmagine è l'insieme di tutti i valori del dominio che sono associati ai valori contenuti in  $R$ .

### Iniettività e Suriettività

Una funzione può godere delle seguenti proprietà:

- $f$  è detta **Iniettiva** se  $a_1 \neq a_2 \in \text{dom}f \implies f(a_1) \neq f(a_2)$
- $f$  è detta **Suriettiva** se  $\forall b \in \text{codom}f, \exists a \in \text{dom}f : f(a) = b$

$f$  è detta **biettiva** (o **bigetta** o **biunivoca**) se è sia iniettiva che suriettiva.

# Capitolo 1

## Spazi vettoriali

Gli spazi vettoriali sono degli insiemi con "sopra" delle strutture algebriche.

### 1.1 Definizione di Spazi Vettoriali

Sia  $V$  un insieme e  $K$  un "campo" (ad esempio  $\mathbb{R}$ ). Allora:

#### DEFINIZIONE

Diremo che  $V$  è uno **Spazio Vettoriale** su  $K$  se esistono le operazioni di **Somma** (+) e di **Prodotto per uno scalare**( $\cdot$ ) su  $V$ .

Nota che campo e spazio vettoriali non coincidono mai! se entrambi sono  $\mathbb{R}$ , allora sono copie diverse di esso.

#### 1.1.1 Le operazioni Somma e Prodotto

Perché un insieme sia uno spazio vettoriale deve essere dotato delle operazioni di Somma e Prodotto per uno scalare, ma queste due operazioni devono rispettivamente verificare alcune proprietà.

**Somma** La somma è una funzione così definita:

$$+ : V \times V \rightarrow V$$

$$\text{ovvero } (\underline{v}_1, \underline{v}_2) \rightarrow \underline{v}_1 + \underline{v}_2 \quad \forall \underline{v}_i \in V.$$

Essa deve godere delle seguenti proprietà:

1. Nullo:  $\exists \underline{0} \in V : \underline{0} + \underline{v} = \underline{v} \quad \forall \underline{v} \in V$



2. Opposto:  $\forall \underline{v} \in V, \exists -\underline{v} : \underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{0}$
3. Associatività:  $(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) + \underline{v}_3 = \underline{v}_1 + (\underline{v}_2 + \underline{v}_3)$
4. Commutatività:  $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = \underline{v}_2 + \underline{v}_1$

**Prodotto per uno Scalare** Il Prodotto per uno Scalare è una funzione così definita:

$$" \cdot " : K \times V \rightarrow V$$

$$\text{ovvero } (\underline{\alpha}, \underline{v}) \rightarrow "\alpha \underline{v} " .$$

Essa deve godere delle seguenti proprietà:

1.  $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \underline{v} = \lambda_1 \underline{v} + \lambda_2 \underline{v}$  con  $\lambda_i \in K, \underline{v} \in V$
2.  $\lambda \cdot (\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = \lambda \underline{v}_1 + \lambda \underline{v}_2$  con  $\lambda \in K, \underline{v}_i \in V$
3.  $(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot \underline{v} = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot \underline{v})$

**Osservazione:** Si può dimostrare che:

- $0 \cdot \underline{v} = \underline{0} \forall \underline{v} \in V$
- $\lambda \cdot \underline{0} = \underline{0} \forall \lambda \in K$
- $-1 \cdot \underline{v} = -\underline{v}$ , ovvero l'opposto di  $\underline{v} \in V, \forall \underline{v} \in V$ .

## 1.2 I Sottospazi Vettoriali

Definiamo ora i sottospazi vettoriali:

### DEFINIZIONE

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $K$  e  $W \subset V$ . Diremo che  $W$  è un sottospazio vettoriale ( $W < V$ ) di  $V$  se:

1.  $\underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in W, \forall \underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W$
2.  $\lambda \underline{w} \in W, \forall \underline{w} \in W$

**Osservazione:** se  $W < V$ , ovvero  $W$  è sottospazio di  $V$  allora  $\underline{0}_V \in W$

**In parole povere** Se abbiamo uno spazio vettoriale  $V$  e ne prendiamo un suo sottoinsieme  $W$ , quest'ultima sarà anch'esso uno spazio vettoriale (sottospazio di  $V$  in questo caso) soltanto se queste due proprietà vengono rispettate:

- Se prendiamo qualunque coppia di elementi  $w_1$  e  $w_2$  in  $W$ , anche la loro somma deve far parte di  $W$ .
- se prendiamo un qualunque elemento  $\underline{w}$  e un qualunque scalare  $\lambda$ , anche il loro prodotto deve far parte di  $W$ .

**Osservazione:** Lo spazio vettoriale piú semplice é quello che contiene solo l'elemento identità ( $\underline{0}$ )

### 1.2.1 I sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^2$

Quali sono i sottospazi vettoriali di  $\mathbb{R}^2$ ?

Innanzitutto ricordiamo che per fare sì che un certo  $W < \mathbb{R}^2$  ogni elemento deve rispettare le due condizioni di somma tra vettori e prodotto per uno scalare.

Detto ciò, é dimostrabile che tutti i sottospazi vettoriali di  $\mathbb{R}^2$  in ordine di grandezza sono:

- $\{\underline{0}\}$ , ovvero l'insieme identità.
- Tutte le **Rette passanti per l'origine**.
- ???
- $\mathbb{R}^2$  stesso.

### 1.2.2 Il piú piccolo Sottospazio Vettoriale

Dato  $S \subset V$  con  $V$  Spazio Vettoriale, esiste il piú piccolo sottospazio di  $V$  contenente  $S$ ? Sì, ed é definito così:

**DEFINIZIONE**

$\langle S \rangle \subset V$  Indica il piú piccolo sottospazio di  $V$  contenente  $S$ . Si dimostra che:

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot z_i : \lambda_i \in \mathbb{R}, z_i \in S, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Si osserva che non esiste  $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \cdot z_i$ , poiché la somma deve essere tra un **numero finito** di vettori.

## 1.3 Combinazione Lineare

La somma utilizzata nell'ultima definizione non é a caso, ma si chiama **Combinazione Lineare**:

**DEFINIZIONE**

$\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot z_i$  si chiama **Combinazione Lineare** di  $\{z_i\}_{i=1,\dots,n}$

## Dipendenza Lineare

Da qui possiamo andare a definire se i vettori di un insieme sono linearmente dipendenti o no:

**DEFINIZIONE**

Sia  $S \subset V$  con  $V$  spazio Lineare.

I vettori di  $S$  sono detti **Linearmente dipendenti** se:

$$\exists \underline{w} \in S \text{ e } S_{\underline{w}} = \{z_1, \dots, z_n\} \subset S \text{ (con } \underline{w} \notin S_{\underline{w}})$$

tali che

$$\underline{w} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot z_i, \lambda_i \in K$$

Altrimenti, i vettori di  $S$  sono detti **Linearmente Indipendenti**

Ovvero, si dice che i vettori di un insieme sono linearmente dipendenti se sono la combinazione lineare di altri elementi dell'insieme.

**Lemma**

$S \subset V$  è un insieme di vettori linearmente indipendenti sse:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot z_i = \underline{0} \implies \lambda_i = 0 \forall i$$

Ciò deve valere  $\forall n \in \mathbb{N}$  e  $\forall \{z_i\} \subset S$ .

**Dimostrazione del Lemma**  $S \subset V$  è un insieme di vettori linearmente indipendenti. Voglio dimostrare che se  $\{z_i\} \subset S$  e  $\sum_{i=1}^n \lambda_i z_i = \underline{0}$  allora  $\lambda_i = 0 \forall i$ .

Nego la tesi: Supponiamo che  $\sum_{i=1}^n \lambda_i z_i = \underline{0}$  ma  $\exists h : \lambda_h \neq 0$ . Allora

$$\lambda_h z_h = - \sum_{j \neq h} \lambda_j z_j \rightarrow \dots \rightarrow z_h = - \sum_{j \neq h} \lambda_h^{-1} \lambda_j z_j$$

Ovvero al combinazione lineare di vettori  $\subset S$  diversi da  $z_h$ , quindi gli  $\{z_i\}$  sono linearmente dipendenti e lo sono anche quelli di  $S$ .

## 1.4 Basi

Domanda: come "comunico" un sottospazio vettoriale?

Sia  $W \subset V$ , abbiamo 2 modi per "comunicarlo":

1. Siccome  $W \subset V$ , allora  $W = \{\dots\}$ .
2. Sfruttiamo il fatto che  $W \subset V$  e quindi  $\langle S \rangle = W$  per qualche insieme  $S \subset V$ , cerchiamo di "ottimizzare"  $S$ , ovvero cerchiamo il più piccolo  $S$  che rispetti  $\langle S \rangle = W$ .

Ciò consiste nel determinare un  $S$  "minimale" tale che:

$$W = \langle S \rangle = \text{Spazio Vettoriale generato da } S$$

La minimalità è equivalente a:

$$W \neq \langle S/\underline{v} \rangle, \forall \underline{v} \in S$$

**DEFINIZIONE**

Teorema/Definizione di Base: Tutte le seguenti affermazioni sono **equivalenti**:

- (a)  $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\} \subset V$  è una Base di  $V$ .

- (b)  $S$  è un sistema di generatori per  $V$ , cioè  $V = \langle S \rangle$  e i vettori di  $S$  sono linearmente indipendenti.
- (c)  $\langle S \rangle = V$  e  $\forall \underline{v} \in V, \exists! \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{v}_i = \underline{v}$
- (d)  $S$  è un insieme minimale di generatori di  $V$ .
- (e)  $S$  è un insieme massimale di vettori linearmente dipendenti di  $V$ .

Come potrei dimostrare questo? Essendo proposizioni equivalenti, avrò che:

$$a \implies b, b \implies a, b \implies c, \dots, e \implies d$$

Però posso semplicemente dimostrarne 5.

**Corollario** <sup>1</sup> Ogni spazio vettoriale che ammette un insieme finito di generatori ammette una base.

**Esempio:** (1) Abbiamo  $V = \mathbb{R}^n$  e

$$S = \{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)\} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n\}$$

$S$  è detta **Base Canonica**<sup>a</sup> di  $\mathbb{R}^n$ .

Usiamo il teorema (c) per verificare che è una base: Sia  $(x_0, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{e}_i = \dots = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  Quindi  $\lambda_i = x_i$   
 $\implies$  Tale combinazione lineare è **unica**, quindi (c) è verificata e  $S$  è una Base.

---

<sup>a</sup>Canonicità non è ben definibile in matematica, è il suo nome di battesimo.

Uno dei teoremi più importanti per le basi è il teorema di *estensione di una base*:

**Teorema 2:** Sia  $I\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  insieme di vettori **Linearmente indipendenti** t.c.  $I \subset V$ , e  $G\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n\}$  insieme di **generatori** di  $V$ , Allora  $\exists G' \subset G : I \cup G'$  è una base di  $V$ .

**Teorema 3:** Con le notazioni del teorema due, avremo che  $\#(I) \leq \#(G)$ , ovvero il numero di elementi di  $I$  è minore o uguale al numero di elementi di  $G$ .

---

<sup>1</sup>Conseguenza

**Corollario** del teorema 3: Se  $\exists G$  insieme finito t.c: è un sistema di generatori di  $V$ -spazio vettoriale, allora ogni base di  $V$  ha lo stesso numero di elementi. Ovvero fissato uno spazio, tutte le sue basi hanno lo stesso numero di elementi.

**DEFINIZIONE**

La dimensione di uno spazio vettoriale  $V$  che ammette un sistema di generatori finito è il **numero di elementi di una base qualsiasi** di  $V$ .

La dimensione comprende sia l'insieme che la struttura algebrica.

**Corollario** Come corollario di quest'ultima definizione abbiamo che, sapendo la dimensione di uno spazio vettoriale:

$$\dim(V) = n \implies \begin{cases} n \text{ vettori indipendenti sono anche generatori.} \\ n \text{ generatori di } V \text{ sono linearmente indipendenti.} \end{cases}$$