

# GAL - Domande d'Esame

Fabio Ferrario

@fefabo

2023/2024

# Indice

<b>1</b>	<b>Intro</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Domande Chiuse</b>	<b>4</b>
2.1	Algebra Lineare . . . . .	4
2.1.1	Diagonalizzabilità di Matrici . . . . .	10

# Capitolo 1

## Intro

All'esame ci sono 10 domande, di cui una aperta. Per ogni domanda i punti sono:

- +3 Domanda Giusta.
- -1 Domanda Sbagliata.
- $\pm 0$  Non Risposto.

Quindi se rispondi a tutte puoi fare solo 3 errori

Argomenti degli Esami sono stati:

- Matrici Inverse
- Geometria Analitica
- Applicazioni Lineari
- Prodotto Scalare e Vettoriale
- Sottospazi Combinazioni Lineari
- Basi, Rango, Determinante
- Coniche
- Diagonalizzabilità
- Sistemi di Equazioni Lineari

# Capitolo 2

## Domande Chiuse

### 2.1 Algebra Lineare

1

INDIPENDENZA DI VETTORI

Se devo verificare che  $n$  vettori  $v_i \in \mathbb{R}^m$  siano linearmente indipendenti, cosa posso fare?

(a) Creo una matrice con  $v_i$  come vettori riga che abbia determinante non nullo

(b) Creo una matrice con  $v_i$  come vettori riga e cerco una sottomatrice quadrata di ordine  $n$  Invertibile

(c) Cerco una combinazione lineare dei vettori  $v_i$  che mi dia il vettore nullo

(d) Creo una matrice con  $v_i$  come vettori colonna e verifico che il rango di questa matrice sia  $m$

**Risposta:** b, perchè se ho una sottomatrice di ordine  $n$  invertibile allora il suo determinante è zero. Per il teorema dei minimi, significa che il rango della matrice è *almeno*  $n$ , quindi è massimo e tutti i suoi vettori sono linearmente indipendenti.

2

ROUCHÉ-CAPELLI

Sia  $Ax = b$  un sistema di equazioni lineari con più incognite che equazioni. Allora:

- |   |   |
|---|---|
| <p>(a) Agendo con operazioni elementari su righe e colonne della matrice completa <math>A b</math> ottengo una matrice completa il cui sistema associato possiede le stesse soluzioni di quello di partenza</p> <p>(b) Scegliendo <math>b</math> opportunamente, il sistema ha un'unica soluzione</p> | <p>(c) Dato un <math>b</math> qualsiasi, mi posso scegliere <math>A</math> in modo che il sistema abbia soluzioni e che la somma di due di esse sia ancora una soluzione</p> <p>(d) Se il rango di <math>A</math> è massimo, allora il sistema ha soluzione</p> |
|---|---|

**Risposta:** d, Abbiamo che  $n > m$ , di conseguenza il rango di  $A$  è al massimo  $m$ . Aggiungendo la colonna  $b$ , il rango massimo di  $(A|b)$  è ancora  $m$ . Quindi se il rango di  $A$  è  $m$ , ovvero è massimo, allora il sistema ammette soluzioni (per R-C).

inoltre per il teorema di Rouchè-Capelli, sappiamo che se il numero delle incognite  $> \text{rango}(A)$ , allora il sistema ammette  $\infty^{m-\text{rank}(A)}$  soluzioni.

**3**ROUCHÈ-CAPELLI

Sia  $Ax = b$  un sistema che non ammette soluzione. Scegliendo un vettore  $c$  è possibile ottenere che  $Ax = b + c$  abbia infinite soluzioni?

- |  |   |
|--|---|
| <p>(a) Sì, ma solo se <math>A</math> non è di rango massimo</p> <p>(b) Sì, per un qualsiasi <math>A</math></p> | <p>(c) No, mai</p> <p>(d) Sì, ma solo se <math>A</math> è quadrata e di determinante non nullo.</p> |
|--|---|

**Risposta:** a (da capire). Se  $Ax = b$  non ammette soluzioni, allora  $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A|b)$ . Per ottenere un sistema con infinite soluzioni, dobbiamo avere  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) < n$  con  $n$  numero di incognite.

**4**

Se la somma di tre numeri positivi è 120, qual'è il massimo valore possibile tra il loro prodotto?

- |  |  |
|--|--|
| <p>(a) <math>30^2 \cdot 80</math></p> <p>(b) <math>240^2 \cdot 30</math></p> | <p>(c) <math>30^4</math></p> <p>(d) <math>1600 \cdot 40</math></p> |
|--|--|

**Risposta:** La somma dei tre numeri positivi è 120, e supponiamo che i tre numeri siano  $x$ ,  $y$ , e  $z$ . L'equazione della somma è espressa come:

$$x + y + z = 120$$

Per massimizzare il prodotto, distribuiremo i numeri in modo che siano il più possibile vicini, il che si verifica quando sono tutti uguali. Quindi, possiamo assegnare a ciascun numero il valore di  $\frac{120}{3} = 40$ . Il prodotto massimo sarà quindi:

$$P = x \cdot y \cdot z = 40 \cdot 40 \cdot 40 = 64000$$

Pertanto, il massimo valore possibile del prodotto è 64000, ovvero la risposta  $d$ .

## 5

## DETERMINANTE

Sia  $A$  una matrice quadrata e  $v, w$  due suoi vettori colonna. Se  $b$  è la matrice ottenuta da  $A$  rimpiazzando il vettore  $v$  con il vettore  $v + \alpha \cdot w$  per un numero reale  $\alpha$ , che informazione abbiamo sul determinante di  $B$ ?

- |                                      |  |
|--------------------------------------|--|
| (a) $\text{Det}(B) = -\text{Det}(A)$ | (c) $\text{Det}(B) = \alpha \cdot \text{Det}(A)$ |
| (b) $\text{Det}(B) = \text{Det}(A)$  | (d) $\text{Det}(B) = 0$                          |

**Risposta: b.** Nelle trasformazioni elementari, rimpiazzare una riga/colonna  $r_i$  con  $r_i + \alpha r_j$  non cambia il determinante.

## 6

## RANGO

Sia  $Ax = b$  un sistema di equazioni lineari con più equazioni che incognite. Allora (si scelga l'affermazione corretta):

- |   |   |
|---|---|
| (a) Se ha soluzione, il rango della matrice completa $A b$ non può essere massimo | (c) Se possiede soluzione, e non è unica, allora la somma di due soluzioni (PROSEGUE) |
| (b) La soluzione, se esiste, necessariamente non è unica                          | (d) Non ha soluzione  |

**Risposta:** Se  $Ax = b$  ha più equazioni  $m$  che incognite  $n$ , allora il massimo  $rg(A) = n > m$ . Supponendo di aggiungere una colonna  $b$ , adesso il massimo  $rg(A|b) = n + 1$ , ma se  $rg(A|b) = n + 1$  il sistema non ammette soluzioni perchè è il rango di  $A$  è minore. Quindi, sicuramente se esiste soluzione il rango di  $(A|b)$  non può essere massimo.

7RANGO

Sia  $A$  una matrice  $n \times m$  di rango  $r > 0$ . Quali delle seguenti affermazioni è CORRETTA:

- |  |  |
|--|--|
| <p>(a) <math>r</math> può essere strettamente maggiore di <math>m</math></p> <p>(b) Non esistono <math>r - 1</math> vettori riga di <math>A</math> linearmente indipendenti.</p> | <p>(c) il determinante di <math>A</math> è uguale a <math>r</math></p> <p>(d) Esiste una sottomatrice quadrata <math>B</math> di <math>A</math> di ordine <math>r - 1</math> con determinante non nullo (se <math>r \geq 2</math>)</p> |
|--|--|

**Risposta:** Andando per esclusione:

- a No, perchè il rango non può essere maggiore del numero di righe o del numero di colonne.
- b No, perchè il rango è il massimo numero di vettori riga/colonna linearmente indipendenti.
- c No, Il rango non da informazioni sul valore del determinante.
- d Dal criterio dei minori sappiamo che il determinante di  $A$  è il massimo ordine dei minori *non nulli* di essa, quindi se il rango è  $r$  sicuramente  $\exists$  sottomatrice  $B$  di ordine  $r$  (e quindi  $r-1$ ) con determinante non nullo.

8DETERMINANTE

Sia  $A$  una matrice quadrata e  $v, w$  due suoi vettori colonna diversi. Se  $B$  è la matrice ottenuta da  $A$  rimpiazzando il vettore  $v$  con il vettore  $\alpha \cdot v + \beta \cdot w$  per  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , che informazioni abbiamo sul determinante di  $B$ ?

**Risposta:** Possiamo considerare questa operazione come due trasformazioni elementari: Prima moltiplichiamo la colonna  $v$  per  $\alpha$ , quindi anche il determinante viene moltiplicato per  $\alpha$ , poi sostituiamo  $v$  con  $v + \beta w$ , lasciando il determinante invariato. Quindi la risposta è  $c : \det(B) = \alpha \cdot \det(A)$ .

**9**

Sia  $A(t)$  una famiglia di matrici quadrate dipendenti da un parametro  $t \in \mathbb{R}$ . Supponiamo che  $\det(A(1)) = 5$  e  $\det(A(-1)) = -5$ . Quali delle seguenti affermazioni è possibile concludere?

- |  |  |
|--|--|
| <p>(a) Tutti i vettori riga <math>A(1)</math> sono indipendenti e il rango di <math>A(1)</math> è massimo.</p> <p>(b) <math>\text{rg}(A(1)) = 5</math></p> | <p>(c) <math>\det(A(0)) = 0</math></p> <p>(d) Il rango di <math>A(1)</math> è massimo, e <math>\det(A(1) + A(-1)) = 0</math></p> |
|--|--|

**Risposta: a**

In generale, sappiamo che  $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \text{rg}(A) = n$ , quindi il rango è massimo. Se il rango è massimo, tutti i vettori riga (e colonna, essendo quadrata) sono linearmente indipendenti.

Inoltre escludiamo la risposta  $d$  perchè in generale non possiamo determinare  $\det(A + B)$  partendo dai determinanti di  $A$  e  $B$ .

**10**

Sia  $A$  una matrice quadrata  $n \times n$  tale che la somma delle righe è uguale ad una colonna  $c$  di  $A$ . Cosa posso concludere su  $A$ ?

- |  |   |
|--|---|
| <p>(a) <math>\text{rg}(A) &lt; n</math></p> <p>(b) <math>\det(A) \neq 0</math></p> | <p>(c) Esiste un minore di <math>A</math> di ordine <math>n = 1</math> invertibile se <math>c \neq 0</math></p> <p>(d) Se la colonna <math>c</math> è uguale ad una riga di <math>A</math> non è invertibile.</p> |
|--|---|

**Risposta: c** Si può ragionare con una matrice  $1 \times 1$ , se l'unica colonna è diversa da 0 allora anche il determinante lo è e quindi è invertibile.



tibile. In ogni caso, anche se non lo fosse un minore di ordine 1 è sempre invertibile se è diverso da 0.

**11**MINORI - RANGO

Supponiamo che una matrice  $A$  di dimensioni  $4 \times 6$  (cioè 4 righe) abbia i determinanti di tutti i minori di ordine 3. Quale delle seguenti affermazioni è falsa?

- |  |   |
|--|---|
| <p>(a) Non esistono 4 colonne linearmente indipendenti in <math>A</math></p> <p>(b) Il rango massimo che potrebbe avere <math>A</math> è 4</p> | <p>(c) Potrebbe esistere una sottomatrice <math>2 \times 2</math> di <math>A</math> invertibile.</p> <p>(d) Le righe di <math>A</math> sono linearmente indipendenti.</p> |
|--|---|

**Risposta:** Dal teorema dei minori sappiamo che, avendo i determinanti di almeno un minore di ordine 3 diverso da 0 (almeno così pare dal testo), sicuramente il Rango di  $A$  è  $\geq 3$ .

Quindi non possiamo dire che tutte le righe di  $A$  sono linearmente indipendenti, ma che almeno 3 lo sono.

**12**CRAMER

Sia  $Ax = b$  un sistema di equazioni lineari con un numero di equazioni uguale al numero di incognite. Allora (si scelga l'affermazione corretta):

- |  |   |
|--|---|
| <p>(a) Se ha soluzione, il rango è massimo</p> <p>(b) Se <math>Ax = 0</math> ha più di una soluzione, <math>Ax = b</math> potrebbe avere una soluzione</p> | <p>(c) Se non ha soluzione, <math>A</math> non è invertibile</p> <p>(d) Se <math>A b</math> ha rango massimo, allora il sistema ha un'unica soluzione</p> |
|--|---|

**Risposta: c**

Se non ha soluzione, per il teorema di Cramer  $\det(A) = 0$ , una matrice è invertibile sse il suo determinante è non nullo. Quindi se il sistema non ha soluzione  $\implies \det(A) = 0 \implies A$  non è invertibile.

**13**

Siano  $A, B$  due matrici  $5 \times 5$  tali che  $\text{rank}(A) = 3$  e  $\text{rank}(B) = 2$ . Allora

=

**Risposta:** In questa domanda ci sono  $j$  punti, riporto qui quelle vere:  
**Da capire**

1. Non sono invertibili perchè non hanno rango massimo, quindi  $\det = 0$ .
2. Il rango indica il massimo numero di vettori riga/colonna linearmente indipendenti.
3. Esistono due minori di ordine 2,  $A'$  in  $A$  e  $B'$  in  $B$  tali che  $A' \cdot B'$  è una matrice invertibile.

14

Calcolare il rango di una matrice  $3 \times 4$  al variare di un parametro  $a$

15

Nel sistema composto dalle equazioni  $3x - 2y + z = 0$ ,  $\alpha x + y + z = 0$  e  $x + \alpha y - z = 0$ , per quali valori di  $\alpha$  posso avere soluzioni non banali<sup>1</sup>?

### 2.1.1 Diagonalizzabilità di Matrici

38

#### DIAGONALIZZABILITÀ

Sia  $k$  reale. Si consideri la matrice

$$A_k : \begin{pmatrix} 3 & 0 & -7 \\ k & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- |  |   |
|--|---|
| <p>(a) <math>A_k</math> è diagonalizzabile per ogni scelta di <math>k \neq 0</math></p> <p>(b) <math>A_k</math> è diagonalizzabile se e solo se <math>k = 0</math></p> | <p>(c) <math>A_k</math> è diagonalizzabile se e solo se <math>k</math> è intero non negativo</p> <p>(d) Per qualunque scelta di <math>k</math>, <math>A_k</math> non è diagonalizzabile</p> |
|--|---|

**Risposta: B** Ricordiamo le condizioni di diagonalizzabilità:

---

<sup>1</sup>La soluzione banale è  $(0, 0, 0)$