CheatSheet di Analisi Matematica

Fabio Ferrario

2022

Studio di Funzione

Per lo studio di una funzione bisogna trovare:

Dominio della funzione, poni:

Denominatore	≤ 0
Logaritmo	Argomento > 0
Radice^n	Argomento ≥ 0 (*sse n pari*)
$[f(x)]^{g(x)}$	$f(x) > 0$

Limiti ai punti di frontiera del dominio Trovato il dominio, trova *i limiti ai punti di frontiera*, quindi porre i limiti ad ogni punto in cui il dominio si interrompe (sia da destra che da sinistra) e eventualmente a $\pm\infty$.

Asintoti Trovati tutti i limiti, se trovi:
- $\lim\limits_{x \to \alpha^{\pm}} f(x) = \pm\infty \implies$ Asintoto *Verticale.*
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = l \implies$ Asintoto *Orizzontale* (di equazione $y = l$)

Bisogna anche controllare la presenza di **Asintoti Obliqui**:
- $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \implies$ se m *esiste e non è nullo* trovo q:
- $q = \lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] \implies$ se q esiste allora $y = mx + q$ è *asintoto obliquo*

Monotonia La monotina di una funzione si calcola *ponendo* $f'(x) > 0$. Nei punti in cui la derivata è positiva, la funzione è **Crescente**, nei punti in cui è negativa la funzione è **Decrescente**

Punti di estremo I punti in cui la derivata cambia direzione sono punti di estremo (max/min). Se il punto di estremo è il più grande/piccolo di tutta la funzione, allora sono Assoluti.

Convessità/Concavità
- $-$ conc$\mathcal{A}$va $\cap \implies f''(x)$ positiva
- $+$ con$\mathcal{V}$essa $\cup \implies f''(x)$ negativa

Retta Tangente al grafico in x_0:
trova $y = mx + q$ ponendo:
- $m = f'(x_0)$
- $q = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$

Punti di Discontinuità
1. Prima specie (Salto): i limiti dx e sx di x_0 esistono finiti ma sono diversi.
2. Seconda spece (Essenziale): Almeno uno dei limiti è inifinito o non esiste.
3. Terza Spece (Eliminabile): il limite di x_0 esiste finito ma è diverso da $f(x_0)$ o non esiste.

Serie

Serie Notevoli

Serie Armonica Generalizzata

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{Diverge} & \alpha \leq 1 \\ \text{Converge} & \alpha > 1 \end{cases}$$

Serie Geometrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n \begin{cases} \text{Diverge} & q \geq 1 \\ \text{Converge} & -1 < q < 1 \\ \text{Irregolare} & q \leq 1 \end{cases}$$

Criteri di Convergenza

Condizione necessaria ma non sufficiente di convergenza è che il termene generale a_n sia infinitesimo $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Avendo $a_n > 0$ (positiva) *definitivamente* posso usare i seguenti criteri:
- **Rapporto**: $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n+1}{a_n} = l$
- **Radice**: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$

In entrambi questi casi $\sum a_n$:
Converge se $l < 1$, *Diverge* se $l > 1$ e il criterio è *inconclusivo* se $l = 1$
- **Confronto**: $a_n \leq b_n$ definitivamente $\implies$
  - se b_n converge, allora a_n converge.
  - se a_n diverge positivamente, allora anche b_n

Criterio dell'Assoluta Convergenza $\sum a_n$ Converge assolutamente se converge $\sum |a_n|$. Se una serie converge assolutamente, allora converge.

Limiti

Equivalenza asintotica tra funzioni Se il limite ($\to x_0$) di $\frac{f(x)}{g(x)} = 1$ allora f e g sono asintoticamente equivalenti

o-piccolo Se il limite ($\to x_0$) del rapporto di $f(x)$ su $g(x)$ è uguale a 0 allora $f(x)$ è o-piccolo di $g(x)$. Nota, che per x_0 si intende un valore arbitrario che può essere anche 0 o $\pm\infty$

$$lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \implies f(x) = og(x) \text{ per } x \to x_0$$

Limiti Notevoli

Logaritmo naturale	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
Logaritmo con base a	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln(a)}$
f Esponenziale	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
f Esponenziale base a	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln(a)$
Costante e Frazione	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{ax-1}{x} = \ln(a)$
Seno	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
Coseno	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$
$\ln(x)$	$\lim\limits_{x\to 0} ln(x) = -\infty$

Equivalenze Asintotiche

con $x \to 0$		
$\sin x$	$\sim$	x
$1-\cos x$	$\sim$	$\frac{1}{2}x^2$
$\tan x$	$\sim$	x
$\ln(1+x)$	$\sim$	x
$(1+x)^\alpha - 1$	$\sim$	αx

Ordine degli infiniti ∞ $\quad \log_a x \ll x^b \ll x^c \ll d^x \ll g^x \ll x^x$

NB: la radice è "più grande" del logaritmo

<u>Forme di indecisione</u> .

$[\frac{0}{0}]$ $[\frac{\infty}{\infty}]$ $[1^\infty]$ $[\infty - \infty]$ $[\infty \cdot 0]$ $[0^0]$ $[\infty^0]$	
Tutte le forme possono essere risolte usando **Limiti Notevoli** e **Trucchi algebrici** per ricondursi ad essi. In particolare però, questi si risolvono usando anche:	
$[\frac{0}{0}]$	Conf. infinitesmi — Scomp/Racc/Semp — De l'Hopital
$[\frac{\infty}{\infty}]$	Conf. infinti — Scomp/Racc/Semp — De l'Hopital
$[1^\infty]$	Identità Logaritmo-Esponenziale
$[\infty - \infty]$	Riconduzione a $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$
$[\infty \cdot 0]$	Razionalizzazione inversa — Prodotti notevoli al contrario
$[0^0]$ / $[\infty^0]$	Conf. infiniti/infinitesimi—Identità Logaritmo-Esponenziale

Calcolo Differenziale

Derivate "note"

Nome	**Funzione**	**Derivata**
Seno	$\sin x$	$\cos x$
Coseno	$\cos x$	$-\sin x$
Arcotangente	arctan	$\frac{1}{1+x^2}$
Logaritmo	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
Radice		
Esponenziale	e^x	e^x
Esponenziale (negativo)	e^{-x}	$-e^{-x}$
1 su x^2	$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{2}{x^3}$
x alla α	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$

Derivate Composte .

Composizione	$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$
Prodotto	$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$
Divisione	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}$

Derivata dell'inversa di una funzione Dati:
y_o e $f(x)$, avendo $g(x) = f^{-1}(x)$ allora: Per calcolare $g'(y_0)$
1. trovo x_0 ponendo $y_0 = f(x)$
2. trovo $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

Formula di Taylor di grado k e centrato in x_0:

$$P_k(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + ... + \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

Formula di Mclaurin di grado k:

$$P_k(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + ... + \frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k$$

Mclaurin = Taylor con $x_0 = 0$

Rapporto incrementale

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Calcolo Integrale

Condizione di integrabilità Per l'integrabilità di una funzione su un intervallo la condizione che essa sia *continua è sufficiente ma non necessaria*

Primitive elementari Funzioni il cui integrale è immediatamente calcolabile.

Funzione	**Primitiva**
k	kx
x^a,$a \neq -1$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$
$\frac{1}{x}$	$\log\|x\|$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
a^x	$\frac{a^x}{\log a}$
e^{-x}	$-e^{-x}$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan(c)$

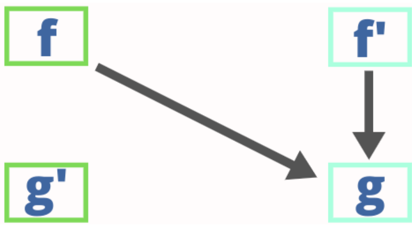
Proprietà degli integrali

- Somma di integrali: $\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
- Costante moltiplicativa $\int k \cdot f(x) = k \int f(x)$

I metodi di risoluzione

Integrazione per Parti

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$



Integrazione per Sostituzione

Metodo Generale e Semplificato per itnegrali generali $f(x)$:
Trovo una funzione $g(x)$ *Derivabile e Invertibile* da sostituire ad x.
1. decido che $y = g(x)$
2. Inverto $g(x)$ per isolare la x, ottenendo $x = g^{-1}(y)$
3. Derivo entrambi i membri e aggiungo dx e dy: $\rightarrow dx = (g^{-1})'(y)dy$
4. all'interno di $f(x)$ sosdtituisco $g(x) \rightarrow y$ e $dx \rightarrow (g^{-1})'(y)dy$
5. Risolvo l'integrale
6. Sostiuisco $y \rightarrow g(x)$

Metodo dalla definizione : Abbiamo un integrale nella forma

$$\int f(g(x))g'(x)dx$$

1. $y = g(x) \rightarrow dy = g'(y)dx$
2. Sostituiamo per ottenere $\int f(y)dy$
3. Calcolo l'integrale nella nuova variabile
4. Sostituisco $y \rightarrow g(x)$

Dimostrazioni per induzione

Le due casistiche principali sono:
- Dimostrazioni con la sommatoria $\sum$
- Dimostrazioni con disequazioni

Ricorda Devi sempre dimostrare che la formula è vera per $n + 1$, quindi devi ricondurti a ciò che hai a destra dell'equazione.

Dimostrazioni con la sommatoria

In questo caso devo ricordarmi di ricondurmi al caso base estrando dalla sommatoria (n+1) per riconduram alla sommatoria $\sum^n$ e poi sostituendo l'ipotesi induttiva (la sommatoria che supponiamo vera). Così facendo posso ottenere ciò che ho a sinistra della formula $\sum^{n+1}$.

Dimostrazioni con le disequazioni

In questo caso devo ricordarmi che oltre a dover sostituire l'ipotesi induttiva nella disequazione possono aggiungere numeri che mi possono servire a patto che abbia la certezza che questi numeri non vadano in contraddizione con il segno della disequazione, quindi se ho a¿b, aggiungendo numeri non deve succedere che b diventi maggiore di a.

Ricorda Nell'ipotesi avrai una condizione (per esempio per n¿1), ricordati che puoi e spesso devi usarla per poter aggiungere numeri utili alla dimostrazione.