Formulario di Fisica

Gianluca Parpanesi

2022/2023

Indice

Nozioni Generiche

- La velolcità di un corpo è identificata come lo spostamento sul tempo:
$$v = \frac{dx}{dv}$$
- L'accelerazione di un corpo è identificata come la velocità sul tempo:
$$a = \frac{dv}{dt}$$
- La massa non influisce sul tempo di caduta dovuto da un campo gravitazionale. Due oggetti con masse completamente diverse subiscono la stessa identica accelerazione.
- Una forza è conservativa se il Lavoro netto che una particella compie in un percoso chiuso è 0. In modo equivalente, una forza è conservativa se il Lavoro netto che compie una particella in movimento non dipende dal percorso che essa compie. La forza gravitazionale e la forza elastica sono forze conservative, l'attrito dinamico non è una forza conservativa.

Prodotto tra vettori Il prodotto tra due vettori può essere eseguito in due modi differenti: il primo tipo di prodotto dà origine ad uno scalare (prodotto scalare) mente l'altro darà origine ad un vettore (prodotto vettoriale).

- **Prodotto scalare**: il prodotto scalare dei vettori a e b si scrive $a \cdot b$ ed è definito dall'espressione
$$a \cdot b = ab \cos \Theta$$
dove a è il modulo del vettore $\boldsymbol{a}$, b il modulo del vettore $\boldsymbol{b}$ e Θ è l'angolo formato dalle semirette equiverse su cui giacciono i due vettori.
- **Prodotto vettoriale**: il prodotto vettoriale dei vettori a e b si scrive $a \times b$ ed è definito dall'espressione
$$a \times b = ab \sin \Theta$$
dove a è il modulo del vettore $\boldsymbol{a}$, b il modulo del vettore $\boldsymbol{b}$ e Θ è il minore dei due angoli formati dalle semirette equiverse su cui giacciono i due vettori. La direzione del vettore risultante è **perpendicolare** al piano individuato da a e b.

Capitolo 1

Cinematica

1.1 Moto rettilineo uniforme

Velocità La velocità viene rappresentata da uno scalare:

$$v_x = k \tag{1.1}$$

Velocità media La velocità media viene rappresentata come un intervallo di uno spostamento su un intervallo di tempo:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{1.2}$$

Spostamento

$$x(t) = x_i + v_x t \tag{1.3}$$

1.2 Moto uniformemente accelerato

Spostamento finale

$$x(t) = x_i + v_i t + \frac{1}{2} a t^2 \tag{1.4}$$

Velocità finale

$$v_f(t) = v_{ix} + a_x t \tag{1.5}$$

Eqazione del moto

$$\begin{cases} x(t) = x_i + v_i t + \frac{1}{2} a_x t^2 \\ v_f(t) = v_{ix} + a_x t \end{cases} \tag{1.6}$$

Caso particolare Per determinare il tempo possiamo effettuare la fomrula inversa dello spostamento. È possivile notare come il tempo non dipende dalla massa degli oggetti, ma dall'altezza e dalla forza di gravità. In assenza d'aria di conseguenza due oggetti con masse completamente diverse arrivano a terra allo stesso tempo!

$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{1.7}$$

1.3 Moto di un proiettile

Il moto di un proiettile è scomponibi le lungo gli assi cartesiani in due moti ben distinti, agenti su un unico corpo:

- Asse X: moto rettilineo uniforme.
- Asse Y: moto rettilineo uniformemente accelerato.

Soffermandoci su questo ragionamento possiamo notare come la forza di gravità (accelerazione) agisca in modo costante lungo l'asse y effettuando un'accelerazione negativa (decelerazione) lungo questa componente del moto. Il moto dell'asse x invece non viene intaccato da nessun'altra forza (trascurando ovviamente l'attrito dell'aria).

Equazioni del moto (Per assi cartesiani)

$$x : x_f = x_0 + v_{0x}t \tag{1.8}$$

$$y : \begin{cases} y_f = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2 \\ v_{fy} = v_{0y} + at \end{cases} \tag{1.9}$$

1.4 Moto circolare uniforme

Nel moto circolare uniforme agiscono 3 forze:

- Velocità tangenziale
- Accelerazione centripeta
- Accelerazione centrifuga

Le prime due sono forze fisiche reali, mentre la terza è chiamata forza apparente. Difatti la forza che ci fa sentire spinti verso l'esterno è data dalla nostra inerzia nel tendere a proseguire il nostro moto diritti, mentre l'accelerazione centripeta (sempre rivolta verso il centro della curva) ci tiene in traiettoria circolare. Questo accade perché ci troviamo in un sistema non inerziale: difatto se lanciassimo una pallina mentre ci troviamo all'interno di un moto circolare essa ci sembrerà allontanarsi da noi con una sua traiettoria, spinta da una forza (apparente) verso l'esterno. Vista da un osservatore posto al di fuori del moto (in un sistema inerziale) semplicemente la pallina proseguirà diritta nella sua traiettoria.

Il moto circolare uniforme si può scomporre in duo moti sinusoidali seguenti l'andamento di sin e cos.

Il moto circolare uniforme e quello uniformemente accelerato possono essere perfettamente paragonati al moto rettilineo uniforme e quello uniformemente accelerato. In questo caso Θ è la nostra x mentre la velocità v diventa ω.

Nel caso uniformemente accelerato l'accelerazione a diventa α.

Legge oraria (equazione del moto) Essa descrive il moto del moto circolare uniforme, espresso come angolo in funzione del tempo:

$$\Theta = \Theta_0 + \omega t = \begin{cases} x(t) = R\cos\Theta(t) \\ y(t) = R\sin\Theta(t) \end{cases} = \begin{cases} x(t) = R\cos(\Theta_o + \omega t) \\ y(t) = R\sin(\Theta_o + \omega t) \end{cases} \tag{1.10}$$

Velocità angolare La velocità angolare è l'angolo percorso dal punto materiale in un intervallo di tempo:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{1.11}$$

Espressa in radianti al secondo.

Velocità tangenziale La velocità tangenziale è lo spazio percorso dal punto materiale in un intervallo di tempo:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \begin{cases} v_x = -R\omega\sin(\Theta_o + \omega t) \\ v_y = R\omega\cos(\Theta_o + \omega t) \end{cases} \tag{1.12}$$

Da notare come (per definizione) le equazioni della velocità non sono altro che la derivata ' dell'equazione del moto (Legge oraria)!

Accelerazione centripeta L'accelerazione centripeta è quella forza che mantiene un corpo in un moto circolare uniforme. Essa è sempre diretta verso il centro della circonferenza!.

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \begin{cases} a_x = -R\omega^2 \cos(\Theta_o + \omega t) \\ a_Y = -R\omega^2 \sin(\Theta_o + \omega t) \end{cases} \tag{1.13}$$

Da notare come (per definizione) le equazioni dell'accelerazione non sono altro che la derivata " dell'equazione del moto (Legge oraria)!

1.5 Moto circolare uniformemente accelerato

Nel moto circolare uniformemente accelerato entra in gioco l'accelerazione totale come somma vettoriale dell'accelerazione centripeta e dell'accelerazione tangeziale. Di conseguenza l'equazione del moto sarà il sistema:

Legge oraria (equazione del moto)

$$\begin{cases} \Theta = \Theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega = \omega_0 + \alpha t \end{cases} \tag{1.14}$$

Tabelle di riepilogo Di seguito sono riportate due tabelle contententi un riepilogo delle formule (comprese le formule inverse) sia del Moto circolare uniforme 1.1 che del Moto circolare uniformemente accelerato 1.2.

Velocità tangenziale	Velocità angolare	Frequenza e periodo	Accelerazione centripeta
$v = \frac{s}{t}$	$\omega = \frac{2\pi}{T}$	$f = \frac{1}{T}$	$a_c = \frac{v^2}{r}$
$v = \frac{2\pi r}{T}$	$\omega = 2\pi f$	$T = \frac{1}{f}$	$a_c = \omega^2 r$
$r = \frac{vT}{2\pi}$	$T = \frac{2\pi}{\omega}$		$v = \sqrt{a_c r}$
$T = \frac{2\pi r}{v}$	$v = \omega r$		$r = \frac{v^2}{a_c}$
	$\omega = \frac{v}{r}$		$\omega = \sqrt{\frac{a_c}{r}}$
	$r = \frac{v}{\omega}$		$r = \frac{a_c}{\omega^2}$

Figura 1.1: Formule del Moto circolare uniforme

Tipo di formula	Formula per il MCUA
Accelerazione totale	$\vec{a}_{tot} = \vec{a}_T + \vec{a}_C$
Modulo accelerazione totale	$a_{tot} = \sqrt{a_T^2 + a_C^2}$
Modulo accelerazione tangenziale	$a_T = \alpha r$
Accelerazione angolare	$\alpha = \dfrac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i}$
Legge oraria con $t_0 = 0$	$\theta = \dfrac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0$
Velocità angolare	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
Equazione senza il tempo	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$

Figura 1.2: Formule del Moto circolare uniformemente accelerato

Capitolo 2

Dinamica

2.1 Principi della Dinamica - Leggi di Newton

Prima Legge di Newton Se la somma delle forze che agiscono su un corpo è nulla, allora il corpo in quiete rimarrà in quiete, mentre se è in moto, continuerà a muoversi di moto rettilineo uniforme.

Seconda Legge di Newton La forza agente su un corpo è direttamente proporzionale all'accelerazione e ne condivide la direzione e il verso, ed è direttamente proporzionale alla massa. Di contro l'accelerazione cui è soggetto il corpo è direttamente proporzionale alla forza e inversamente proporzionale rispetto alla massa.

$$\vec{F} = m\vec{a} \; [N] \tag{2.1}$$

Terza Legge di Newton Se un corpo A esercita una forza su un corpo B, allora il corpo B esercita su A una forza uguale e contraria.

$$F_{ab} = -F_{ba} \tag{2.2}$$

> Attenzione! Le forze hanno modulo uguale ma con segno vettoriale opposto!

2.2 Forza Elastica

La forza elastica di un corpo (o di una molla) è descritta dalla Legge di Hook nel seguente modo:

$$F = -kx \tag{2.3}$$

Dove $-k$ è chiamata **costante elastica** ed è una misura della rigidità della molla. Maggiore è k, più rigida è la molla: cioè maggiore è k, maggiore sarà la forza per uno stesso valore di spostamento.

2.3 Carrucola

Le forze agenti su due corpi collegati in un sistemma a carrucola (se aventi masse diverse) sono sempre una l'opposta dell'altra.

$$\begin{cases} F_{y1} = T - m_1 g \\ F_{y2} = m_2 g - T \end{cases} \tag{2.4}$$

In questo caso si considera $m_2 > m_1$ e con un sistema di riferimento verticale. Si considera infatti un sistema a carrucola con forze agenti solo sull'asse y e con forze nulle sull'asse x.

2.4 Attrito Statico e Dinamico

La forza di attrito è una forza che agisce in direzione opposta allo spostamento (opponendosi al movimento). La forza di attrito può agire in due modi differenti:

- **Attrito statico**: agente quando il corpo è fermo, impedendo lo spostamento iniziale.
- **Attrito dinamico**: agente da quando il corpo ha appena compiuto lo spostamento iniziale ed è in movimento.

Le formule sono per l'attrito statico:

$$f_{s,max} = \mu_s F_N \tag{2.5}$$

Mentre per quello dinamico:

$$f_k = \mu_k F_N \tag{2.6}$$

2.5 Resistenza di un corpo

Quando un corpo solido si muove all'interno di un fludio, ad esso si oppone una forza contraria chiamata resistenza D la quale farà raggiungere al corpo una velocità massima:

$$D = \frac{1}{2} C A \rho v^2 \tag{2.7}$$

Con:

- C : Coefficiente di resistenza aerodinamica.
- A : Area efficace della sezione trasversale del corpo.
- ρ : densità dell'aria
- v : velocità.

2.6 Lavoro

Si applichi una forza F ad un oggetto per spostarlo. La Forza sarà tanto efficace ad ottenere uno spostamento **tanto più è applicata nella stessa direzione dello spostamento.**

$$W = Fd = Fd \cos\Theta \; [J] \tag{2.8}$$

Lavoro compiuto dalla Forza Gravitazionale Il Lavoro svolto dalla Forza Gravitazionale ovviamente è descritto come Fd, per un corpo che sale la F_g è diretta in senso opposto allo spostamento formando un angolo Θ di 180°.

$$F = mgd \cos\Theta = mgd \cos 180 = -mgd \tag{2.9}$$

Mentre nel momento in cui un corpo cade, la F_g avrà stessa direzione dello spostamento (verso il basso), conferendo un segno positivo al Lavoro.

Lavoro compiuto dalla Forza Elastica La Forza Elastica non è una forza costante e di conseguenza non possiamo utilizzare la classica equazione del Lavoro (per una forza costante). Possiamo però suddividere lo spostamento della molla in parti infinitesime in modo da avere forze infinitesime per ogni spostamento infinitesimo, facendo risultare cosi la forza infinitesima costante su uno spostamento infinitesimo. Integrando questa operazione otterremo così la formula del lavoro per la Forza Elastica (e in generale per una forza non costante!).

$$L_m = \int_{x_f}^{x_i} -F\,dx$$

$$L = \int_{x_f}^{x_i} -kx\,dx = L = -k\int_{x_f}^{x_i} x\,dx$$

$$= (-\frac{1}{2}k)\Big[x^2\Big]_{x_f}^{x_i} = (-\frac{1}{2}k)(x_f^2 - x_i^2)$$

$$L_m = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2 \tag{2.10}$$

Il Lavoro L_m è positivo quando il blocco si avvicina alla posizione di riposo $x =$ ed è negativo quando se ne allontana. Il Lavoro è nullo se la distanza finale da $x = 0$ non è mutata.

2.7 Energia Cinetica

Rappresenta la quantità di energia associata al moto di una particella (corpo puntiforme) che si muove alla velocità v.

$$K = \frac{1}{2}mv^2\ [J] \tag{2.11}$$

> Il lavoro fatto su una particella è uguale a ΔK. L'energia cinetica (e la velocità) aumentano se il lavoro svolto è positivo, mentre diminuiscono se il lavoro svolto è negativo.

Teorema dell'Energia Cinetica Chiamiamo ΔK la variazione di Energia Cinetica del corpo e L il Lavoro totale compiuto su di esso. Allora possiamo scrivere:

$$\Delta K = K_f - K_i = w \tag{2.12}$$

2.8 Potenza

Se una forza esterna è applicata ad un oggetto e se il Lavoro è fatto in un intervallo di tempo, definiamo **potenza**:

$$P = \frac{W}{\Delta t}\ [W\ \mathsf{Watt}] \tag{2.13}$$

Un altro sguardo alla Potenza La Potenza Istantanea può essere espressa derivando la formula della Potenza (ovviamente!). Di conseguenza possiamo scrivere la potenza come:

$$P = \frac{dL}{dt} = \frac{F \cos \Theta dx}{dv} = F \cos \Theta (\frac{dx}{dt})$$

Ma sappiamo benissimo che $\frac{dx}{dv}$ non è altro che la definzione di velocità. Possiamo quindi riscriverla in modo più semplice:

$$P = Fv \cos \Theta$$

Ovvero il **prodotto scalare** tra F e v (dove v è la velocità della particella). Possiamo quindi scrivere che la Potenza Istantanea di una paricella a velocità v non è altro che:

$$P = F \cdot v \tag{2.14}$$

2.9 Energia Potenziale

Se la configurazione di un sistema cambia, allora cambierà anche la sua Energia potenziale. Quando un oggetto si trova ad una certa distanza dal suolo, il sistema terra-oggetto ha un'energia potenziale che si trasforma in lavoro.
L'Energia Potenziale è associata con la configurazione del sistema nel quale le forze conservative agiscono. Quando una forza conservativa compie lavoro W su una particella (corpo) del sistema, il cambiamento ΔU dell'energia potenziale del sistema è definito come:

$$\Delta U = -W \tag{2.15}$$

Energia Potenziale Gravitazionale L'energia potenziale in un sistema composto dalla terra e dalla particella (corpo) è chiamata Energia Potenziale Gravitazionale. Se la particella si muove da un'altezza iniziale y_i ad una finale y_f, il cambiamento dell'Energia Potenziale Gravitazionale è definito come:

$$\Delta U = mg(y_f - y_i) = mg\Delta y \tag{2.16}$$

Se considerassimo come punto di arrivo un altezza = 0, allora l'Energia Potenziale gravitazionale piò essere riscritta come:

$$\Delta U(h) = mgh \tag{2.17}$$

Dove h è l'altezza dalla quale il corpo cade.

Energia Potenziale Elastica L'energia Potenziale Elastica è l'energia associata allo stato di compressione o estensione di un oggetto elastico (molla). Per una molla con una forza definita come $F = -kx$, l'Energia Potenziale Elastica sarà definita come:

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \tag{2.18}$$

2.10 Energia Meccanica

La somma dell'Energia Cinetica e dell'Energia Potenziale è detta Energia Meccanica, definita come:

$$E_m = K + U \tag{2.19}$$

Principio di conservazione dell'Energia Meccanica Quando in un sistema isolato agiscono solo forze conservative, l'Energia Cinetica e l'Energia Potenziale prese singolarmente possono variare, ma la loro somma, l'Energia Meccanica E_m del sistema non cambia. Questo risultato è chiamato principio di conservazione dell'Energia Meccanica espirmibile nel seguente modo:

$$\Delta E_m = \Delta K + \Delta U = 0 \tag{2.20}$$

Il principio di conservazione dell'Energia Meccanica ci permette di risolvere problemi che sarebbe arduo risolvere usando solo le Leggi di Newton. Quando l'Energia Meccanica di un sistema si conserva, possiamo mettere in relazione il totale dell'Energia Cinetica e dell'Energia Potenziale in un istante con quello di un altro istante, *senza dover considerare gli stati intermedi e senza necessità di conoscere il lavoro compiuto dalle forze coinvolte!*

2.11 Momento Lineare

$$p = mv \tag{2.21}$$

Connessione con la II Legge di Newton Deriviamo il Momento Lineare rispetto al tempo. La derivata della quantità di moto di un punto materiale di massa m è uguale alla risultante della forza applicata.

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = ma$$

$$\frac{dm}{dt}v + m\frac{dv}{dt} = ma$$

Ma la massa rimane costante nel tempo, quindi la derivata sarà 0.

$$m\frac{dv}{dt} = ma = \sum F$$

$$\sum F = 0 \implies p = \mathsf{cost}$$

Legge di conservazione del momento lineare Quando due o più particelle di un sistema isolato interagiscono, il momento lineare totale del sistema resta **costante**.

2.12 Impulso

$$I = F\Delta t \tag{2.22}$$

Significato L'impulso della forza che agisce su una particella è aguale al Δ del momento lineare della particella determinato dalla forza. L'impulso non è una caratteristica della particella, bensì una misura della modifica del momento lineare da parte di una forza esterna.

Connessione con il Momento Lineare Sia una forza $F = F(t)$ agente su una particella. Applicando la II Legge di Newton:

$$F = \frac{dp}{dt} \implies dp = Fdt$$

$$\Delta p = p_f - p_i = \int_{t_f}^{t_i} F\,dt = I$$