CheatSheet di Ricerca Operativa e Pianificazione delle Risorse

Fabio Ferrario

@fefabo

2022/2023

Indice

Capitolo 1

Programmazione Lineare

1.1 Il metodo del Simplesso

La forma Tabellare

V. BASE	Eq	Z	x_1	x_2	...	x_n	T. Noto
Z	R_0	1	c_1	c_2	...	c_n	0
x_1	R_1	0	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	R_n	0	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m

Forma Aumentata Per portare il problema in forma aumentata:

Vincoli	Minoreuguale	$\leq$	=	+ Slack
	Maggioreuguale	$\geq$	=	- Surplus
	Uguale	=	Invariato	

Variabili non positive	$x_i \leq 0$	$x_i = -x_i^{'}$ con $x_i^{'} \geq 0$
	Ogni apparizione di x_i viene sostituita con $-x_i^{'}$	

Funzione Obiettivo	$Z = \Sigma x_i \quad \rightarrow \quad Z - \Sigma x_i = 0$

Test di Ottimalità Una volta portato il problema in forma tabellare, eseguo il test di ottimalitá:

Tipo di Problema	**Massimo**	**Minimo**
Soluzione Ottima sse	Coefficienti riga (0) ≥ 0	Coefficienti riga (0) ≤ 0

Nuova Soluzione di Base Una volta verificato che la soluzione non é ottima, bisogna calcolare una nuova soluzione di base:
Definisco:

Tipo di Problema	**Massimo**	**Minimo**
Variabile Entrante (Colonna Pivot)	Coefficiente riga (0) più Piccolo (Più Negativo)	Coefficiente riga (0) più Grande (Più Positivo)
Variabile Uscente (Riga Pivot)	Test del Rapporto Minimo	
Numero Pivot	Intersezione Riga/Colonna Pivot	

Per la nuova **Riga Pivot**		
Variabile di Base	$\rightarrow$	Variabile Entrante.
Coefficienti e Termine Noto	$\rightarrow$	Divisi per Numero Pivot.

per ogni **altra Riga**	
Definisco	P_i i-esimo coefficiente della nuova riga pivot
	X_p coefficiente della colonna pivot nella riga in esame.
il coefficiente i-esimo x_i della riga in esame X diventa:	
$X_p > 0$	$x_i := x_i - \ |X_p\| \cdot P_i$
$X_p < 0$	$x_i := x_i + \|X_p\| \cdot P_i$
$X_p = 0$	La riga in esame resta Invariata

1.1.1 Due Fasi

Funzione Obiettivo: Somma di tutte le variabili artificiali introdotte. (min $z = \Sigma y_i \implies$ max $z = -\Sigma y_i \implies$ max $z + \Sigma y_i = 0$) Vincoli: Per ogni vincolo che viene violato dalla soluzione Origine, sommo una variabile artificiale (unica) con coefficiente 1.

Tableau iniziale: Le variabili artificiali devono essere in base, quindi devo azzerarle in R(0) sottraendogli il vincolo a cui sono associate.

Una volta fatte entrare in base tutte le variabili artificiali, posso iterare normalmente.

Finito di iterare, avró tutte le variabili artificiali =1 in (0), rimuovo quindi le colonne artificiali e ripristino la funzione obiettivo.

Adesso faccio entrare in base (nello stesso modo di prima) le variabili che devono essere in base. poi itero normalmente.

1.2 Dualitá

1.2.1 Passare da Primale a Duale

	Primale	**Duale**	**Ritorno**
Funzione Obiettivo	max $c^T x$	min $b^T \lambda$	max $c^T x$
Vincoli $\Longrightarrow$ Non Negativitá	$x_i^T a \leq c$	$\lambda_i \geq 0$	$x_i^T a \leq c$
	$x_i^T a \geq c$	$\lambda_i \leq 0$	$x_i^T a \geq c$
	$x_i^T a = c$	λ_i Free	$x_i^T a = c$
Non Negatività $\Longrightarrow$ Vincoli	$x_j \geq 0$	$\lambda_j^T a \geq c$	$x_j \geq 0$
	$x_j \leq 0$	$\lambda_j^T a \leq c$	$x_j \leq 0$
	x_j Free	$\lambda_j^T a = c$	x_j Free

Metodo con le matrici Un trucco per generare rapidamente il duale é utlizzare le matrici:
Avendo il seguente problema di PL:

Primale

$$
\begin{cases}
\max \quad c_1 x_1 + c_2 x_2 \\
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leqslant b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \leqslant b_2 \\
x_1 \geqslant 0, \; x_2 \geqslant 0
\end{cases}
$$

si riconoscono opportunamente gli elementi che compongono il duale:

Primale

Primo vincolo — Secondo vincolo — Funzione Obb.

$$
\begin{cases}
\max \quad \boxed{c_1} x_1 + \boxed{c_2} x_2 \\
\boxed{\lambda_1 a_{11}} x_1 + \boxed{\lambda_1 a_{12}} x_2 \leq \boxed{b_1 \lambda_1} \\
\boxed{\lambda_2 a_{21}} x_1 + \boxed{\lambda_2 a_{22}} x_2 \leq \boxed{b_2 \lambda_2} \\
x_1 \geq 0 \, , \; x_2 \geq 0
\end{cases}
$$

Che come problema duale generano:

Duale

$$
\begin{cases}
\min \quad b_1 \lambda_1 + b_2 \lambda_2 \\
a_{11} \lambda_1 + a_{21} \lambda_1 \geq c_1 \\
a_{12} \lambda_2 + a_{22} \lambda_2 \geq c_2 \\
\lambda_1 \geq 0 \quad \lambda_2 \geq 0
\end{cases}
$$

1.3 Gli Scarti Complementari

Se abbiamo una soluzione ammissibile per il primale possiamo verificarne l'ottimalità tramite le condizioni degli scarti complementari: Quindi, data x^*:

$x_i^* \neq 0$	i-esimo (corrispondente) vincolo del duale attivo.
i-esimo vincolo del primale NON attivo	$\lambda_i = 0$

Pongo quindi a sistema le equazioni trovate per trovare la soluzione corrispondente del Duale. Se i valori delle funzioni obiettivo sono uguali, allora le due soluzioni sono entrambe ottime.

Capitolo 2

Ottimizzazione Non Lineare

2.1 Algoritmo del Gradiente

Data una funzione a piú variabili $f(X)$ e un punto x^0, ogni passo del metodo del gradiente si effettua in questo modo:

1. Calcolo $d^k = \pm\nabla f(x^k)$ (+ max e - min)
2. Calcolo $x^{k+1} = x^k \pm \alpha^k \cdot d^k$
3. Calcolo α^k come $Max\ f(x^k \pm \alpha^k \cdot d^k)$.
   ovvero valuto f nel nuovo punto e massimizzo la funzione risultante $g(\alpha)$, generalmente in modo analitico ($g'(\alpha) = 0$)
4. Sostituisco α trovato in x^{k+1}.
5. Valuto i criteri di arresto

Per verificare che il punto trovato sia un punto di ottimo, semplicemente controllo che $\nabla f(x^*) = 0$.

Nuovo punto	x^{k+1}	$x^k \pm \alpha^k \cdot d^k$
Direzione di Crescita	d^k	$\pm\nabla f(x^k)$ (+ max e $-$ min)
Step Size	α^k	$\max\ f(x^k \pm \alpha^k \cdot d^k)$

2.2 Algoritmo di Newton (Multivariato)

Data una funzione a piú variabili $f(X)$ e un punto x^0, una iterazione del metodo di Newton si effettua in questo modo:

1. Calcolo $\nabla f(x^k)$ e $H(x^k)$.
2. Calcolo V Vettore Spostamento: $H_f(x^k)V = -\nabla f(x^k)$
   è un sistema di equazioni, risolvo per $v_1, ..., v_n$
3. trovo $x^{k+1} = x^k + V$, in cui V é il vettore spostamento.

Vettore Spostamento	V	$H_f(x^k)V = -\nabla f(x^k)$
Nuovo punto	x^{k+1}	$x^k + V$

Capitolo 3

Ottimizzazione Non Lineare Vincolata

3.1 Funzione Lagrangiana

In un problema di ottimizzazione vincolata definito come:

$$\begin{gathered} \text{opt } f(x_1, ..., x_n), \\ g_m(x_1, ..., x_n) = 0 \text{ Vincoli di Uguaglianza}, \\ h_l(x_1, ..., x_n) \leq 0 \text{ Vincoli di Disguaglianza}, \end{gathered}$$

Generiamo la Lagrangiana cosí definita:

$$L(V) = f(X) \pm \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \cdot g_i(X) \pm \sum_{j=0}^{l} \mu_j \cdot h_j(X)$$

in cui $\pm$ diventa $+$ per i problemi di MIN e $-$ per i problemi di MAX, Abbiamo che λ sono i moltiplicatori lagrangiani associati ai vincoli di Uguaglianza, e μ quelli associati ai vincoli di Disuguaglianza.
con $V = \{x_1, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_m, \mu_1, ..., \mu_l\}$, ovvero tutte le variabili e $X = \{x_1, ..., x_n\}$, ovvero tutte le variabili origniali.

3.2 Condizioni KKT

Tabella Bisogna quindi generare un sistema che avrá $n + m + l$ incognite utilizzando le KKT, riportate qui in modo semplificato:

Stazionarietá Problemi di MIN (-)
$\nabla f = -\sum \lambda_i \cdot \nabla g_i - \sum \mu_j \cdot \nabla h_j$

Stazionarietá Problemi di MAX (+)
$\nabla f = +\sum \lambda_i \cdot \nabla g_i + \sum \mu_j \cdot \nabla h_j$

Ammissibilitá Vincoli Uguaglianza	$\forall$	$g_i = 0$
Ammissibilitá Vincoli Disuguaglianza	$\forall$	$h_j \leq 0$
Condizione di Complementarietá	$\forall$	$\mu_j \cdot h_j = 0$
Non Negativitá di μ	$\forall$	$\mu_j \geq 0$

Dove con $\forall$ si intende chiaramente tutti quelli presenti.

3.2.1 Differenziare tra Max e Min

Quando si usano le KKT bisogna differenziare tra problemi di Max e Problemi di Min. Ogni problema ha le seguenti possibili combinazioni:

Problema di Massimo	$\mu_i \geq 0$	$\nabla f = +\sum \lambda_i \cdot \nabla g_i + \sum \mu_j \cdot \nabla h_j$
	$\mu_i \leq 0$	$\nabla f = -\sum \lambda_i \cdot \nabla g_i - \sum \mu_j \cdot \nabla h_j$
Problema di Minimo	$\mu_i \geq 0$	
	$\mu_i \leq 0$	$\nabla f = +\sum \lambda_i \cdot \nabla g_i + \sum \mu_j \cdot \nabla h_j$

é utile sapere che se scegliessimo di avere la funzione obiettivo **Sempre come somma di elementi negativi**, sia per i problemi di massimo che di minimo, allora potremmo, in base ai valori di μ, sapere in un solo calcolo se il punto é candidato a massimo o minimo.

3.2.2 Risolvere il Sistema

Per risolvere il sistema, o lo si risolve con il metodo classico, oppure tramite questo metodo: Con la condizione di **Complementarietá** sappiamo che:

$$\mu_j \cdot h_j = 0 \implies \mu_j = 0 \vee h_j = 0$$

Quindi, con l variabili mu_j abbiamo 2^l combinazioni di sistemi, in cui $mu_j = 0 \vee \mu_j \neq 0$. Cosí possiamo risolvere le 2^l combinazioni per trovare tutti i punti candidati.

3.2.3 Trovare i punti di Minimo e Massimo

I punti trovati dalle condizioni KKT sono solo candidati a essere punti di max/min, perché le KKT sono condizioni Necessarie ma non Sufficienti.

Le condizioni KKT diventano Sufficienti se:

- Per i Punti di Massimo:
  - f é concava.
  - I vincoli $h_i(X)$ sono tutti Convessi.
- Per i Punti di Minimo:
  - f é convessa.
  - I vincoli $h_i(X)$ sono tutti Convessi.