Esami di Probabilità e Statistica

Fabio Ferrario
@fefabo

2021/2022

Indice

1 Esame di Settembre 2023 **3**

1.1 Domande chiuse 3

1.2 Esercizi 6

Capitolo 1

Esame di Settembre 2023

1.1 Domande chiuse

1 QUARTILI

Il terzo quartile dell'insieme di dati $\{5, -1, 4, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\}$ è:

$$= 4$$

Spiegazione: Per calcolare il quartile di un insieme lo devo ordinare (crescente) e poi usare la formula del formulario per il calcolo dei quartili.

2 COMBINAZIONI

Ho un'associazione con 50 soci. Devo scegliere 5 membri che compongano il comitato direttivo. Quante sono le possibili scelte?

$$\binom{50}{5} = \frac{50!}{45!5!}$$

Spiegazione: Questo è il perfetto esempio di **combinazione**: Una collezione *non ordinata* di k elementi distinti scelti tra n possibili. Il numero di combinazioni semplici è sul formulario.

3 P. EVENTI INDIPENDENTI

Siano A, B eventi indipendenti tali che $P(A) = \frac{1}{2}$ e $P(B) = \frac{1}{2}$. . Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

(a) $P(A|B) = \frac{1}{4}$
(b) $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$
(c) $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$
(d) $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$

d: $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$

Spiegazione: Essendo indipendenti, sappiamo che $P(A|B) = P(A) = \frac{1}{2}$ e viceversa, quindi $P(B|A) = P(B) = \frac{1}{2}$.
Dalla **Regola del Prodotto**, sappiamo che $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{1}{4}$.
Dalle proprietà della probabilità sappiamo che $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{4}$, quindi la risposta è la **d**.

4 V.A.

Sia X una v.a. uniforme continua su $(-z, z)$, dove z è un numero reale. Quanto vale $E[X]$?

$$E[X] = 0$$

Spiegazione: Essendo X una v.a. uniforme continua su $(-z, z)$, dal formulario sappiamo che $E[X] = \frac{a+b}{2} = \frac{-z+z}{2} = 0$.

5

Siano $X_1, X_2, ..., X_{100}$ v.a. i.i.d. Bernoulliane di parametro $\frac{1}{2}$. Quale delle seguenti è la migliore approssimazione di

$$P(\frac{X_1 + X_2 + ... + X_{100} - 50}{5} < 1.12)$$

(Usare il Teorema Limite Centrale e le tavole delle distribuzioni notevoli)

(a) 0.5000
(b) 0.5886
(c) 0.8686
(d) 0.9998

0.8686

Spiegazione: Da capire. dalle tavole,$\phi(1.12) = 0.8686$.

6

In un test statistico per la verifica dell'ipotesi nulla $H_0 : \mu \geq 4$ contro l'alternativa $H_1 : \mu < 3$, si rifiuta H_0 a livello di significativià 5%. Allora posso sicuramente concludere che:

(a) Rifiuto l'ipotesi H_0 a livello di significatività del 10%
(b) Il $p-$value del test è pari a 0.05
(c) Rifiuto l'ipotesi H_0 a livello di significatività del 3%
(d) L'errore di seconda specie del test è pari a 0.05.

a: Rifiuto l'ipotesi H_0 a livello di significatività del 10%

Spiegazione: Non so

7

Quanto vale l'*ampiezza* di un intervallo bilatero di confidenza al 98% per la media μ di un campione $x_1, x_2, ..., x_n$ estratto da una popolazione normale con varianza campionaria s_n pari a 1? (Si ricordi che $P(t(n) > t_{n,\beta} = \beta$, dove $t(n)$ è una v.a. t-student a n gradi di libertà.))

$$\frac{2}{\sqrt{n}} t_{n-1,0.01}$$

Spiegazione: In questo caso stiamo stimando la media di una popolazione normale con la varianza incognita, perchè quella fornita è s_n. Se l'IC è al 98%, allora $\alpha = 0.02$. Dal formulario devo prendere i due estremi dell'intervallo di confidenza e per trovarne l'ampiezza devo sottrarre uno all'altro.

8

La statistica del test chi-quadrato di indipendenza per due variabili aleatorie X (che assume r valori) e Y (che assume s valori) ha legge:

Chi-quadrato a (r-1)(s-1) gradi di libertà

Spiegazione: Guardando dal formulario il test chi-quadrato di indipendenza, la regione critica avrà una legge: $\chi^2_{(r-1)(s-1),\alpha}$.

1.2 Esercizi

1 Un'urna contiene 20 palline colorate: 17 rosse e 3 bianche. Vengono estratte a caso tre palline, *con reimmissione*. Determinare la probabilità che:

1. La prima pallina estratta sia bianca;
2. Le prime due palline estratte siano entrambe bianche;
3. Almeno una delle tre palline estratte sia bianca.

Risposta: Definisco prima gli eventi: per $i = 1, 2, 3$, $B_i = \{$ Pallina bianca all'estrazione $i\}$. quindi:

1. Visto che ci sono 20 palline in totale, di cui 3 bianche e la probabilità è Uniforme:
$$P(B_1) = \frac{3}{20} = 15\%$$
2. Vogliamo calcolare l'intersezione ("and") di B_1 e B_2 che, siccome c'è reimmissione, sono indipendenti.
Quando due eventi sono indipendenti sappiamo che la probabilità dell'intersezione è il prodotto delle loro probabilità. quindi:
$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2) = (\frac{3}{20})^2 = 2.23\%$$
3. Siccome vogliamo calcolare un "or" vogliamo calcolare l'unione degli eventi 1,2,3. che è uguale a $1-$ la probabilità dell'intersezione dei complementari. Per indipendenza, $P(B_1^c \cap B_2^c \cap B_3^c) =$ Prodotti etc.

2 Una moneta truccata restituisce testa con probabilità $\frac{1}{3}$. Si Lancia un dado equilibrato a 6 facce, se esce un numero pari si lancia la moneta 1 volta, altrimenti si lancia la moneta per 2 volte consecutive. Sia X la variabile aleatoria che indica il numero di teste osservate. (Si osservi che X può assumere i valori $0, 1, 2$.)

1. Se lanciando il dado esce un numero pari, qual'è la probabilità (condizionale) che non si osservi nessuna testa? Se invece lanciando il dado esce un numero dispari, qual'è la probabilità (condizionale) che non si osservi nessuna testa?
2. Calcolare $P(X = 0)$,
3. Determinare la densità discreta di X.