CheatSheet di Ricerca Operativa e Pianificazione delle Risorse

Fabio Ferrario

@fefabo

2022/2023

Indice

Capitolo 1

Programmazione Lineare

1.1 Il metodo del Simplesso

La forma Tabellare

V. BASE	Eq	Z	x_1	x_2	...	x_n	T. Noto
Z	R_0	1	c_1	c_2	...	c_n	0
x_1	R_1	0	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	R_n	0	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m

Forma Aumentata Per portare il problema in forma aumentata:

<table>
<tr><td rowspan="3">Vincoli</td><td>Minoreuguale $\leq$</td><td>=</td><td>+ Slack</td></tr>
<tr><td>Maggioreuguale $\geq$</td><td>=</td><td>- Surplus</td></tr>
<tr><td>Uguale =</td><td colspan="2">Invariato</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2">Variabili non positive</td><td>$x_i \leq 0$</td><td>$x_i = -x_i^{'}$ con $x_i^{'} \geq 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ogni apparizione di x_i viene sostituita con $-x_i^{'}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Funzione Obiettivo</td><td>$Z = \Sigma x_i \quad \rightarrow \quad Z - \Sigma x_i = 0$</td></tr>
</table>

Test di Ottimalità Una volta portato il problema in forma tabellare, eseguo il test di ottimalitá:

Tipo di Problema	**Massimo**	**Minimo**
Soluzione Ottima sse	Coefficienti riga (0) ≥ 0	Coefficienti riga (0) ≤ 0

Nuova Soluzione di Base Una volta verificato che la soluzione non é ottima, bisogna calcolare una nuova soluzione di base:
Definisco:

Tipo di Problema	**Massimo**	**Minimo**
Variabile Entrante (Colonna Pivot)	Coefficiente riga (0) più Piccolo (Più Negativo)	Coefficiente riga (0) più Grande (Più Positivo)
Variabile Uscente (Riga Pivot)	Test del Rapporto Minimo	
Numero Pivot	Intersezione Riga/Colonna Pivot	

Per la nuova **Riga Pivot**		
Variabile di Base	$\rightarrow$	Variabile Entrante.
Coefficienti e Termine Noto	$\rightarrow$	Divisi per Numero Pivot.

per ogni **altra Riga**	
Definisco	P_i i-esimo coefficiente della nuova riga pivot
	X_p coefficiente della colonna pivot nella riga in esame.
il coefficiente i-esimo x_i della riga in esame X diventa:	
$X_p > 0$	$x_i := x_i - \|X_p\| \cdot P_i$
$X_p < 0$	$x_i := x_i + \|X_p\| \cdot P_i$
$X_p = 0$	La riga in esame resta Invariata

1.2 Due Fasi

Fase I Nella prima fase bisogna trovare una soluzione di partenza per il problema. Per fare ció, bisogna introdurre:

- Delle variabili artificiali y_i, una per ogni vincolo che viene violato dal vertice Origine (a cui andranno sommate).
- Una nuova funzione obiettivo di minimizzazione che minimizza la somma delle variabili artificiali.

Quindi risolviamo questo nuovo problema di PL e teniamo il Tableau Finale.

Capitolo 2

Ottimizzazione Non Lineare

2.1 Algoritmo del Gradiente

Data una funzione a piú variabili $f(X)$ e un punto x^0, ogni passo del metodo del gradiente si effettua in questo modo:

1. Calcolo $\nabla f(x^k)$, con la direzione di crescita $d^k = \pm\nabla f(x^k)$ (+ max e - min)

2. Calcolo $x^{k+1} = x^k \pm \alpha^k \cdot d^k$

3. In cui α^k é il max di $f(x^k \pm \alpha^k \cdot d^k)$. ovvero Valuto f nel nuovo punto e massimizzo la funzione risultante $g(\alpha)$, generalmente in modo analitico $(g'(\alpha) = 0)$.

4. Sostituisco α trovato in x^{k+1}.

5. Valuto i criteri di arresto (Con epsilon o con un numero predefinito di iterazioni, e nel caso ripeto)

Per verificare che il punto trovato sia un punto di ottimo, semplicemente controllo che $\nabla f(x^*) = 0$.

2.2 Algoritmo di Newton

Data una funzione a piú variabili $f(X)$ e un punto x^0, una iterazione del metodo di Newton si effettua in questo modo:

1. Calcolo $\nabla f(x^k)$ e $H(x^k)$.
2. Calcolo il vettore spostamento, ponendo: $H_f(x^0)V = -\nabla f(x^0)$ e risolvendo il sistema di equazioni.
3. trovo $x^{k+1} = x^k + V$, in cui V é il vettore spostamento.

Capitolo 3

Ottimizzazione Non Lineare Vincolata

3.1 Funzione Lagrangiana

In un problema di ottimizzazione vincolata definito come:

$$\begin{gathered}\text{opt } f(x_1, ..., x_n),\\ g_m(x_1, ..., x_n) = 0 \text{ Vincoli di Uguaglianza,}\\ h_l(x_1, ..., x_n) \leq 0 \text{ Vincoli di Disguaglianza,}\end{gathered}$$

Generiamo la Lagrangiana cosí definita:

$$L(V) = f(X) \pm \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \cdot g_i(X) \pm \sum_{j=0}^{l} \mu_j \cdot h_j(X)$$

in cui $\pm$ diventa $+$ per i problemi di MIN e $-$ per i problemi di MAX, Abbiamo che λ sono i moltiplicatori lagrangiani associati ai vincoli di Uguaglianza, e μ quelli associati ai vincoli di Disuguaglianza.
con $V = \{x_1, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_m, \mu_1, ..., \mu_l\}$, ovvero tutte le variabili e $X = \{x_1, ..., x_n\}$, ovvero tutte le variabili origniali.

3.2 Condizioni KKT

Tabella Bisogna quindi generare un sistema che avrá $n + m + l$ incognite utilizzando le KKT, riportate qui in modo semplificato:

Stazionarietá Problemi di MIN (-) $\nabla f = -\sum \lambda_i \cdot \nabla g_i - \sum \mu_j \cdot \nabla h_j$
Stazionarietá Problemi di MAX (+) $\nabla f = +\sum \lambda_i \cdot \nabla g_i + \sum \mu_j \cdot \nabla h_j$

Ammissibilitá Vincoli Uguaglianza	$\forall$	$g_i = 0$
Ammissibilitá Vincoli Disuguaglianza	$\forall$	$h_j \leq 0$
Condizione di Complementarietá	$\forall$	$\mu_j \cdot h_j = 0$
Non Negativitá di μ	$\forall$	$\mu_j \geq 0$

Dove con $\forall$ si intende chiaramente tutti quelli presenti.

3.2.1 Differenziare tra Max e Min

Quando si usano le KKT bisogna differenziare tra problemi di Max e Problemi di Min. Ogni problema ha le seguenti possibili combinazioni:

<table>
<tr><td rowspan="2">Problema di Massimo</td><td>$\mu_i \geq 0$</td><td>$\nabla f = +\sum \lambda_i \cdot \nabla g_i + \sum \mu_j \cdot \nabla h_j$</td></tr>
<tr><td>$\mu_i \leq 0$</td><td rowspan="2">$\nabla f = -\sum \lambda_i \cdot \nabla g_i - \sum \mu_j \cdot \nabla h_j$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Problema di Minimo</td><td>$\mu_i \geq 0$</td></tr>
<tr><td>$\mu_i \leq 0$</td><td>$\nabla f = +\sum \lambda_i \cdot \nabla g_i + \sum \mu_j \cdot \nabla h_j$</td></tr>
</table>

é utile sapere che se scegliessimo di avere la funzione obiettivo **Sempre come somma di elementi negativi**, sia per i problemi di massimo che di minimo, allora potremmo, in base ai valori di μ, sapere in un solo calcolo se il punto é candidato a massimo o minimo.

3.2.2 Risolvere il Sistema

Per risolvere il sistema, o lo si risolve con il metodo classico, oppure tramite questo metodo: Con la condizione di **Complementarietá** sappiamo che:

$$\mu_j \cdot h_j = 0 \implies \mu_j = 0 \vee h_j = 0$$

Quindi, con l variabili mu_j abbiamo 2^l combinazioni di sistemi, in cui $mu_j = 0 \vee \mu_j \neq 0$. Cosí possiamo risolvere le 2^l combinazioni per trovare tutti i punti candidati.

3.2.3 Trovare i punti di Minimo e Massimo

I punti trovati dalle condizioni KKT sono solo candidati a essere punti di max/min, perché le KKT sono condizioni Necessarie ma non Sufficienti.

Le condizioni KKT diventano Sufficienti se:

- Per i Punti di Massimo:
  - f é concava.
  - I vincoli $h_i(X)$ sono tutti Convessi.
- Per i Punti di Minimo:
  - f é convessa.
  - I vincoli $h_i(X)$ sono tutti Convessi.