

Algebra Lineare e Geometria

Fabio Ferrario

@fefabo

Elia Ronchetti

@ulerich

2023/2024

Indice

1	Spazi vettoriali	8
1.1	Definizione di Spazi Vettoriali	8
1.1.1	Le operazioni Somma e Prodotto	8
1.2	I Sottospazi Vettoriali	9
1.2.1	Sottospazi di \mathbb{R}^2	10
1.2.2	Il piú piccolo Sottospazio Vettoriale	10
1.3	Combinazione Lineare	11
1.4	Basi	12

Introduzione

Questi appunti di Algebra Lineare e Geometria sono stati fatti con l'obiettivo di riassumere tutti (o quasi) gli argomenti utili per l'esame di Algebra Lineare e Geometria del corso di Informatica dell'Università degli Studi di Milano Bicocca.

Il Corso

Gli appunti fanno riferimento alle lezioni di GAL erogate nel secondo semestre dell'anno accademico 22/23.

Programma del corso

Il programma si sviluppa come segue:

1. Algebra Lineare

- Spazi Vettoriali
- Dipendenza Lineare
- Basi
- Prodotto scalare euclideo
- Prodotto vettoriale

2. Matrici

- Operazioni
- Rango
- Invertibilità
- Determinante
- Trasformazioni elementari e riduzione a scala

3. Sistemi di equazioni lineari

- Risultati di base
- Teoremi di Rouché-Capelli e Cramer
- Cenni alla regressione lineare semplice

4. Applicazioni lineari

- Matrice associata
- Proprietà

5. Diagonalizzabilità di Matrici

- Autovalori
- Autovettori
- Molteplicità algebrica e geometrica
- Teorema Spettrale

6. Geometria Analitica nel Piano

- Sottospazi lineari affini
- Classificazione delle coniche

7. Geometria Analitica nello spazio

- Sottospazi lineari Affini

Prerequisiti

I prerequisiti per questo corso sono: Teoria di insiemi di base. Insiemi con strutture (monoidi e gruppi). Dimostrazioni per assurdo e per induzione.

Insiemistica e Funzioni

In questo capitolo ripassiamo i concetti di insiemistica e funzioni e fissiamo le notazioni che verranno usate durante il corso.

Insiemi

Non verrà data una definizione formale di insieme perchè la definizione matematica di insieme è complessa, verrà quindi data una definizione intuitiva. Fissiamo le **Notazioni** che useremo nell'insiemistica.

Voglio considerare degli oggetti e distinguerli da altri oggetti. In genere si utilizza la notazione classica disegnando un insieme, ma questo metodo è scomodo. Quindi, per rappresentiamo un insieme usiamo le **Parentesi Graffe**

$$I = \{ x, \Delta, 3, \odot \}$$

Teniamo a mente due cose:

- L'ordine degli elementi non è sensibile.
- Se un valore viene ripetuto, allora questo non è un insieme.

Sottoinsieme

Un sottoinsieme è un insieme contenuto in un altro insieme e si indica con il simbolo \subset .

Considerando l'insieme I sopra avremo che:

$$S \subset I = \{\Delta, 3\} \text{ è un sottoinsieme di } I$$

Operazioni sugli insiemi

Esistono diverse operazioni che ci permettono di ottenere degli insiemi partendo da altri insiemi.

In questo corso useremo le seguenti:

- **Unione** $A \cup B$ Contiene gli elementi contenuti sia in A che in B (Senza ripetizioni).
 - **Unione Disgiunta** $A \sqcup U$ come l'unione, ma se ci sono degli elementi condivisi vengono entrambi rappresentati con indicato a pedice l'insieme di provenienza.
- **Intersezione** $A \cap B$ Contiene gli elementi comuni tra A e B.
- **Complemento** $B \setminus A$ (oppure $B - A$) è l'insieme contenente gli elementi di B che non sono presenti in A.
- **Prodotto Cartesiano** $A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$
 Ovvero l'insieme delle coppie di ogni elemento di A con ogni elemento di B. Nota che il prodotto cartesiano NON è commutativo.

Osservazione: Scrivere (x, y) è diverso che scrivere $\{x, y\}$.

Nel primo caso sto considerando la **coppia di elementi** x e y , mentre nel secondo caso sto considerando l'insieme contenente gli elementi x e y .

Quindi $(x, y) \neq (y, x)$, mentre $\{x, y\} = \{y, x\}$.

Insiemi Numerici

Esistono diversi insiemi numerici:

- Naturali $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} = \{0, 1, 2, \dots\}$
- Interi $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- Razionali $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}\}$
- Reali $\mathbb{R} = \{Q, \sqrt{q}, \pi, e : q > 0 \in \mathbb{Q}\}$
- Complessi \mathbb{C} , che non faremo in questo corso

Spazi Multidimensionali

Esistono spazi numerici multidimensionali, che sono semplicemente il prodotto cartesiano di più spazi:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

Funzioni

Definizione di Funzione

Definiamo ora il concetto di Funzione:

DEFINIZIONE

Dati due insiemi A e B , una funzione è una relazione che **associa** ogni elemento di A a uno e un solo elemento di B . L'insieme A viene chiamato **Dominio**, mentre B è il **Codominio**.

Osservazione: Perchè f sia una funzione deve valere:

$$\forall x \in \text{dom}(f), \exists ! f(x)$$

Ovvero, per ogni x appartenente al dominio della funzione f esiste **ed è unico** un valore di $f(x)$.

Immagine e Controimmagine

Una funzione $f : A \rightarrow B$ ha associata i seguenti insiemi:

- Sia $S \subset A$, allora con $f(S)$ indicheremo l'**Immagine** di S tramite f .

$$f(S) = \{b \in B : \text{è associato ad un elemento di } S\}$$

- Sia $R \subset B$, allora con $f^{-1}(R)$ indicheremo la **Controimmagine** di R tramite f .

$$f^{-1}(R) = \{a \in A : f(a) \in R\}$$

In parole povere, l'Immagine è l'insieme di tutti i valori che assume la funzione f valutata in ogni elemento di S , mentre la Controimmagine è l'insieme di tutti i valori del dominio che sono associati ai valori contenuti in R .

Iniettività e Suriattività

Una funzione può godere delle seguenti proprietà:

- f è detta **Iniettiva** se $a_1 \neq a_2 \in \text{dom}f \implies f(a_1) \neq f(a_2)$
- f è detta **Suriattiva** se $\forall b \in \text{codom}f, \exists a \in \text{dom}f : f(a) = b$

f è detta biettiva (o bigetta o biunivoca) se è sia iniettiva che suriattiva.

Capitolo 1

Spazi vettoriali

Gli spazi vettoriali sono degli insiemi con "sopra" delle strutture algebriche.

1.1 Definizione di Spazi Vettoriali

Sia V un insieme e K un "campo" (ad esempio \mathbb{R}). Allora:

DEFINIZIONE

Diremo che V è uno **Spazio Vettoriale** su K se esistono le operazioni di **Somma** (+) e di **Prodotto per uno scalare**(\cdot) su V .

Nota che campo e spazio vettoriali non coincidono mai! se entrambi sono \mathbb{R} , allora sono copie diverse di esso.

1.1.1 Le operazioni Somma e Prodotto

Perché un insieme sia uno spazio vettoriale deve essere dotato delle operazioni di Somma e Prodotto per uno scalare, ma queste due operazioni devono rispettivamente verificare alcune proprietà.

Somma La somma è una funzione così definita:

$$+ : V \times V \rightarrow V$$

$$\text{ovvero } (\underline{v}_1, \underline{v}_2) \rightarrow \underline{v}_1 + \underline{v}_2 \quad \forall \underline{v}_i \in V.$$

Essa deve godere delle seguenti proprietà:

1. Nullo: $\exists \underline{0} \in V : \underline{0} + \underline{v} = \underline{v} \quad \forall \underline{v} \in V$

2. Opposto: $\forall \underline{v} \in V, \exists -\underline{v} : \underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{0}$
3. Associatività: $(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) + \underline{v}_3 = \underline{v}_1 + (\underline{v}_2 + \underline{v}_3)$
4. Commutatività: $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = \underline{v}_2 + \underline{v}_1$

Prodotto per uno Scalare Il Prodotto per uno Scalare è una funzione così definita:

$$" \cdot " : K \times V \rightarrow V$$

$$\text{ovvero } (\underline{\alpha}, \underline{v}) \rightarrow "\alpha \underline{v} " .$$

Essa deve godere delle seguenti proprietà:

1. $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \underline{v} = \lambda_1 \underline{v} + \lambda_2 \underline{v}$ con $\lambda_i \in K, \underline{v} \in V$
2. $\lambda \cdot (\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = \lambda \underline{v}_1 + \lambda \underline{v}_2$ con $\lambda \in K, \underline{v}_i \in V$
3. $(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot \underline{v} = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot \underline{v})$

Osservazione: Si può dimostrare che:

- $0 \cdot \underline{v} = \underline{0} \forall \underline{v} \in V$
- $\lambda \cdot \underline{0} = \underline{0} \forall \lambda \in K$
- $-1 \cdot \underline{v} = -\underline{v}$, ovvero l'opposto di $\underline{v} \in V, \forall \underline{v} \in V$.

1.2 I Sottospazi Vettoriali

Definiamo ora i sottospazi vettoriali:

DEFINIZIONE

Sia V uno spazio vettoriale su K e $W \subset V$. Diremo che W è un sottospazio vettoriale ($W < V$) di V se:

1. $\underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in W, \forall \underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W$
2. $\lambda \underline{w} \in W, \forall \underline{w} \in W$

Osservazione: se $W < V$, ovvero W è sottospazio di V allora $\underline{0}_V \in W$

In parole povere Se abbiamo uno spazio vettoriale V e ne prendiamo un suo sottoinsieme W , quest'ultima sarà anch'esso uno spazio vettoriale (sottospazio di V in questo caso) soltanto se queste due proprietà vengono rispettate:

- Se prendiamo qualunque coppia di elementi w_1 e w_2 in W , anche la loro somma deve far parte di W .
- se prendiamo un qualunque elemento \underline{w} e un qualunque scalare λ , anche il loro prodotto deve far parte di W .

Osservazione: Lo spazio vettoriale più semplice è quello che contiene solo l'elemento identità ($\underline{0}$)

1.2.1 I sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^2

Quali sono i sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^2 ?

Innanzitutto ricordiamo che per fare sì che un certo $W < \mathbb{R}^2$ ogni elemento deve rispettare le due condizioni di somma tra vettori e prodotto per uno scalare.

Detto ciò, è dimostrabile che tutti i sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^2 in ordine di grandezza sono:

- $\{\underline{0}\}$, ovvero l'insieme identità.
- Tutte le **Rette passanti per l'origine**.
- ???
- \mathbb{R}^2 stesso.

1.2.2 Il più piccolo Sottospazio Vettoriale

Dato $S \subset V$ con V Spazio Vettoriale, esiste il più piccolo sottospazio di V contenente S ? Sì, ed è definito così:

DEFINIZIONE

$\langle S \rangle \subset V$ Indica il piú piccolo sottospazio di V contenente S . Si dimostra che:

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot z_i : \lambda_i \in \mathbb{R}, z_i \in S, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Si osserva che non esiste $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \cdot z_i$, poiché la somma deve essere tra un **numero finito** di vettori.

1.3 Combinazione Lineare

La somma utilizzata nell'ultima definizione non é a caso, ma si chiama **Combinazione Lineare**:

DEFINIZIONE

$\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot z_i$ si chiama **Combinazione Lineare** di $\{z_i\}_{i=1,\dots,n}$

Dipendenza Lineare

Da qui possiamo andare a definire se i vettori di un insieme sono linearmente dipendenti o no:

DEFINIZIONE

Sia $S \subset V$ con V spazio Lineare.

I vettori di S sono detti **Linearmente dipendenti** se:

$$\exists \underline{w} \in S \text{ e } S_{\underline{w}} = \{z_1, \dots, z_n\} \subset S \text{ (con } \underline{w} \notin S_{\underline{w}})$$

tali che

$$\underline{w} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot z_i, \lambda_i \in K$$

Altrimenti, i vettori di S sono detti **Linearmente Indipendenti**

Ovvero, si dice che i vettori di un insieme sono linearmente dipendenti se sono la combinazione lineare di altri elementi dell'insieme.

Lemma

$S \subset V$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti sse:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot z_i = \underline{0} \implies \lambda_i = 0 \forall i$$

Ciò deve valere $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall \{z_i\} \subset S$.

Dimostrazione del Lemma $S \subset V$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti. Voglio dimostrare che se $\{z_i\} \subset S$ e $\sum_{i=1}^n \lambda_i z_i = \underline{0}$ allora $\lambda_i = 0 \forall i$.

Nego la tesi: Supponiamo che $\sum_{i=1}^n \lambda_i z_i = \underline{0}$ ma $\exists h : \lambda_h \neq 0$. Allora

$$\lambda_h z_h = - \sum_{j \neq h} \lambda_j z_j \rightarrow \dots \rightarrow z_h = - \sum_{j \neq h} \lambda_h^{-1} \lambda_j z_j$$

Ovvero al combinazione lineare di vettori $\subset S$ diversi da z_h , quindi gli $\{z_i\}$ sono linearmente dipendenti e lo sono anche quelli di S .

1.4 Basi

Domanda: come comunico un sottospazio vettoriale? Sia $W < V$. Ci sono 2 modi:

1. Siccome $W \subset V$, allora $W = \{\dots\}$.
2. Sfrutiamo il fatto che $W < V$ e quindi $\langle S \rangle = W$ per qualche insieme $S \subset V$, cerchiamo di "ottimizzare" S , ovvero cerchiamo il più piccolo S che rispetti $\langle S \rangle = W$.
Ciò consiste nel determinare un S "minimale" tale che:

$$W = \langle S \rangle = \text{Spazio Vettoriale generato da } S$$

La minimalità è equivalente a:

$$W \neq \langle S/\underline{v} \rangle, \forall \underline{v} \in S$$

DEFINIZIONE

Teorema/Definizione di Base: Tutte le seguenti affermazioni sono **equivalenti**:

- (a) $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\} \subset V$ è una Base di V .

- (b) S è un sistema di generatori per V , cioè $V = \langle S \rangle$ e i vettori di S sono linearmente indipendenti.
- (c) $\langle S \rangle = V$ e $\forall \underline{v} \in V, \exists! \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{v}_i = \underline{v}$
- (d) S è un insieme minimale di generatori di V .
- (e) S è un insieme massimale di vettori linearmente dipendenti di V .

Come potrei dimostrare questo? Essendo proposizioni equivalenti, avrò che:

$$a \implies b, b \implies a, b \implies c, \dots, e \implies d$$

Però posso semplicemente dimostrarne 5.

Corollario ¹ Ogni spazio vettoriale che ammette un insieme finito di generatori ammette una base.

Esempio: (1) Abbiamo $V = \mathbb{R}^n$ e

$$S = \{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)\} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n\}$$

S è detta **Base Canonica**^a di \mathbb{R}^n .

Usiamo il teorema (c) per verificare che è una base: Sia $(x_0, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{e}_i = \dots = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ Quindi $\lambda_i = x_i$
 \implies Tale combinazione lineare è **unica**, quindi (c) è verificata e S è una Base.

^aCanonica non è ben definibile in matematica, è il suo nome di battesimo.

¹Conseguenza