

Formulario di Fisica

Gianluca Parpanesi

2022/2023

Prefazione

Questo formulario ha l'intenzione di fornire tutte le nozioni teoriche base ai fini di comprendere al meglio le formule qui riportate. Ogni argomento e ogni formula trattata sono precedute da una breve spiegazione teorica. Per chi desiderasse avere un riassunto conciso con le sole formule, può trovarlo in fondo al formulario.

Argomenti trattati

Gli argomenti trattati in questo formulario si basano sul corso di Fisica frequentato a settembre 2022 della facoltà di Informatica. Gli argomenti trattati sono i seguenti:

- Meccanica Classica
 - Cinematica
 - Dinamica
 - Energia e Lavoro
 - Moto Armonico e Oscillazioni
- Gravitazione
- Fluidodinamica
- Termodinamica
- Magnetismo
- Elettrostatica
- Elettromagnetismo
- Circuiti

Materiale di riferimento

Il libro adottato come riferimento per questo formulario è l'Halliday-Resnick Fondamenti di Fisica (Jearl Walker), Edizione 7, Casa Editrice Ambrosiana (Volume 1 e 2)

Indice

1	Cinematica	6
1.1	Moto rettilineo uniforme	6
1.2	Moto uniformemente accelerato	6
1.3	Moto di un proiettile	7
1.4	Moto circolare uniforme	8
1.4.1	Moto Armonico	9
1.5	Moto circolare uniformemente accelerato	10
1.5.1	Tabelle di riepilogo	10
2	Dinamica	12
2.1	Principi della Dinamica - Leggi di Newton	12
2.1.1	Prima Legge di Newton	12
2.1.2	Seconda Legge di Newton	12
2.1.3	Terza Legge di Newton	12
2.2	Forza Elastica	13
2.3	Carrucola	13
2.4	Attrito Statico e Dinamico	13
2.5	Resistenza di un corpo	14
2.6	Lavoro	14
2.6.1	Lavoro compiuto dalla Forza Gravitazionale	14
2.6.2	Lavoro compiuto dalla Forza Elastica	14
2.7	Energia Cinetica	15
2.7.1	Teorema dell'Energia Cinetica	15
2.7.2	Energia Cinetica del Moto Armonico Semplice	16
2.8	Potenza	16
2.8.1	Un altro sguardo alla Potenza	16
2.9	Energia Potenziale	16
2.9.1	Energia Potenziale Gravitazionale	17
2.9.2	Energia Potenziale Elastica	17
2.9.3	Energia Potenziale del Moto Armonico Semplice	17
2.10	Energia Meccanica	17

2.10.1	Principio di conservazione dell'Energia Meccanica . . .	18
2.11	Moto Armonico e Pendolo	18
2.12	Momento Lineare	19
2.13	Impulso	19
2.14	Urti	20
2.14.1	Urti Anaelastici	20
3	Gravitazione	22
4	Fluidostatica	24
4.1	Pressione	24
4.2	Densità	24
4.3	Legge di Stevino	24
4.4	Forza di Bouyant	25
4.4.1	Oggetto totalmente sommerso	25
4.4.2	Oggetto galleggiante	25
4.5	Peso appartenente di un oggetto	26
5	Fluidodinamica	27
5.1	Equazione di Continuità	27
5.2	Equazione di Bernoulli	27
5.2.1	Sviluppo dell'Equazione	28
5.2.2	Applicazione Teorema del Lavoro	28

Nozioni Generiche

- La velocità di un corpo è identificata come lo spostamento sul tempo :

$$v = \frac{dx}{dt}$$

- L'accelerazione di un corpo è identificata come la velocità sul tempo :

-

$$a = \frac{dv}{dt}$$

- La massa non influisce sul tempo di caduta dovuto da un campo gravitazionale. Due oggetti con masse completamente diverse subiscono la stessa identica accelerazione.
- Una forza è conservativa se il Lavoro netto che una particella compie in un percorso chiuso è 0. In modo equivalente, una forza è conservativa se il Lavoro netto che compie una particella in movimento non dipende dal percorso che essa compie. La forza gravitazionale e la forza elastica sono forze conservative, l'attrito dinamico non è una forza conservativa.

Prodotto tra vettori Il prodotto tra due vettori può essere eseguito in due modi differenti: il primo tipo di prodotto dà origine ad uno scalare (prodotto scalare) mentre l'altro darà origine ad un vettore (prodotto vettoriale).

- **Prodotto scalare:** il prodotto scalare dei vettori a e b si scrive $a \cdot b$ ed è definito dall'espressione

$$a \cdot b = ab \cos \Theta$$

dove a è il modulo del vettore \mathbf{a} , b il modulo del vettore \mathbf{b} e Θ è l'angolo formato dalle semirette equiverse su cui giacciono i due vettori.

- **Prodotto vettoriale:** il prodotto vettoriale dei vettori a e b si scrive $a \times b$ ed è definito dall'espressione

$$a \times b = ab \sin \Theta$$

dove a è il modulo del vettore \mathbf{a} , b il modulo del vettore \mathbf{b} e Θ è il minore dei due angoli formati dalle semirette equiverse su cui giacciono i due vettori. La direzione del vettore risultante è **perpendicolare** al piano individuato da a e b .

Capitolo 1

Cinematica

1.1 Moto rettilineo uniforme

Velocità La velocità viene rappresentata da uno scalare:

$$v_x = k \text{ [m/s]} \quad (1.1)$$

Velocità media La velocità media viene rappresentata come un intervallo di uno spostamento su un intervallo di tempo:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} \quad (1.2)$$

Velocità istantanea detta anche semplicemente velocità di una particella, è definita come:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad (1.3)$$

Spostamento

$$x(t) = x_i + v_x t \text{ [m]} \quad (1.4)$$

1.2 Moto uniformemente accelerato

Accelerazione media è il rapporto fra la variazione della velocità Δv che avviene in un intervallo di tempo Δt , definita come:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} \text{ [m/s}^2\text{]} \quad (1.5)$$

Accelerazione istantanea o semplicemente accelerazione, è la rapidità di variazione della velocità. Matematicamente si tratta della derivata seconda della posizione $x(t)$ rispetto al tempo:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (1.6)$$

Spostamento

$$x(t) = x_i + v_i t + \frac{1}{2} a t^2 \text{ [m]} \quad (1.7)$$

Velocità finale

$$v_f(t) = v_i + at \quad (1.8)$$

Caso particolare Per determinare il tempo possiamo effettuare la formula inversa dello spostamento. È possibile notare come il tempo non dipende dalla massa degli oggetti, ma dall'altezza e dalla forza di gravità. In assenza d'aria di conseguenza due oggetti con masse completamente diverse arrivano a terra allo stesso tempo!

$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} \text{ [s]} \quad (1.9)$$

1.3 Moto di un proiettile

Il moto di un proiettile è scomponibile lungo gli assi cartesiani in due moti ben distinti, agenti su un unico corpo:

- **Asse X:** moto rettilineo uniforme.
- **Asse Y:** moto rettilineo uniformemente accelerato.

Soffermandoci su questo ragionamento possiamo notare come la forza di gravità (accelerazione) agisca in modo costante lungo l'asse y effettuando un'accelerazione negativa (decelerazione) lungo questa componente del moto. Il moto dell'asse x invece non viene intaccato da nessun'altra forza (trascurando ovviamente l'attrito dell'aria).

Equazioni del moto (Per assi cartesiani)

$$\text{Moto : } \begin{cases} x(t) &= x_0 + v_{0x}t \\ y(t) &= y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2 \end{cases} \quad (1.10)$$

$$\text{Velocità : } v_f = v_0 + at \quad (1.11)$$

1.4 Moto circolare uniforme

Nel moto circolare uniforme agiscono 3 forze:

- Velocità tangenziale
- Accelerazione centripeta
- Accelerazione centrifuga

Le prime due sono forze fisiche reali, mentre la terza è chiamata forza apparente. Difatti la forza che ci fa sentire spinti verso l'esterno è data dalla nostra inerzia nel tendere a proseguire il nostro moto dritti, mentre l'accelerazione centripeta (sempre rivolta verso il centro della curva) ci tiene in traiettoria circolare. Questo accade perché ci troviamo in un sistema non inerziale: difatto se lanciassimo una pallina mentre ci troviamo all'interno di un moto circolare essa ci sembrerà allontanarsi da noi con una sua traiettoria, spinta da una forza (apparente) verso l'esterno. Vista da un osservatore posto al di fuori del moto (in un sistema inerziale) semplicemente la pallina proseguirà dritta nella sua traiettoria.

Analizziamo ora le formule del moto circolare uniforme:

Velocità tangenziale La velocità tangenziale è lo spazio percorso dal punto materiale in un intervallo di tempo:

$$v = \frac{2\pi r}{T} [m/s] \quad (1.12)$$

Accelerazione centripeta L'accelerazione centripeta è quella forza che mantiene un corpo in un moto circolare uniforme. Essa è sempre diretta verso il centro della circonferenza!.

$$a_c = \frac{v^2}{r} [m/s^2] \quad (1.13)$$

Come vedremo più avanti in questo formulario l'accelerazione è impressa da una forza agente sul corpo, descrivibile (tramite la Seconda Legge di Newton) come:

$$F_{accelerazione} = ma = m \frac{v^2}{r} \left[N = \frac{Kg \cdot m}{s^2} \right] \quad (1.14)$$

Periodo Il tempo richiesto perché una particella completi una circonferenza è:

$$T = \frac{2\pi r}{v} \left[N = \frac{Kg \cdot m}{s^2} \right] \quad (1.15)$$

1.4.1 Moto Armonico

Il moto circolare uniforme può essere scomposto in due moti sinusoidali sin e cos. Il moto circolare uniforme e quello uniformemente accelerato possono essere perfettamente paragonati al moto rettilineo uniforme e quello uniformemente accelerato. In questo caso Θ è la nostra x mentre la velocità v diventa ω .

Nel caso uniformemente accelerato l'accelerazione a diventa α .

Legge oraria (equazione del moto) Essa descrive il moto del moto circolare uniforme, espresso come angolo in funzione del tempo:

$$\Theta = \Theta_0 + \omega t = \begin{cases} x(t) = R \cos \Theta(t) \\ y(t) = R \sin \Theta(t) \end{cases} = \begin{cases} x(t) = R \cos (\Theta_o + \omega t) \\ y(t) = R \sin (\Theta_o + \omega t) \end{cases} \quad (1.16)$$

Velocità angolare La velocità angolare è l'angolo percorso dal punto materiale in un intervallo di tempo:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \left[\frac{rad}{s} \right] \quad (1.17)$$

Espressa in radianti al secondo.

Velocità tangenziale La velocità tangenziale è lo spazio percorso dal punto materiale in un intervallo di tempo:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \begin{cases} v_x = -R\omega \sin (\Theta_o + \omega t) \\ v_y = R\omega \cos (\Theta_o + \omega t) \end{cases} \quad (1.18)$$

Da notare come (per definizione) le equazioni della velocità non sono altro che la derivata ' dell'equazione del moto (Legge oraria)!

Accelerazione centripeta L'accelerazione centripeta è quella forza che mantiene un corpo in un moto circolare uniforme. Essa è sempre diretta verso il centro della circonferenza!.

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \begin{cases} a_x = -R\omega^2 \cos(\Theta_o + \omega t) \\ a_y = -R\omega^2 \sin(\Theta_o + \omega t) \end{cases} \quad (1.19)$$

Da notare come (per definizione) le equazioni dell'accelerazione non sono altro che la derivata " dell'equazione del moto (Legge oraria)!

1.5 Moto circolare uniformemente accelerato

Nel moto circolare uniformemente accelerato entra in gioco l'accelerazione totale come somma vettoriale dell'accelerazione centripeta e dell'accelerazione tangenziale. Di conseguenza l'equazione del moto sarà il sistema:

Legge oraria (equazione del moto)

$$\begin{cases} \Theta = \Theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega = \omega_0 + \alpha t \end{cases} \quad (1.20)$$

1.5.1 Tabelle di riepilogo

Di seguito sono riportate due tabelle contenenti un riepilogo delle formule (comprese le formule inverse) sia del Moto circolare uniforme 1.1 che del Moto circolare uniformemente accelerato 1.2.

Velocità tangenziale	Velocità angolare	Frequenza e periodo	Accelerazione centripeta
$v = \frac{s}{t}$	$\omega = \frac{2\pi}{T}$	$f = \frac{1}{T}$	$a_c = \frac{v^2}{r}$
$v = \frac{2\pi r}{T}$	$\omega = 2\pi f$	$T = \frac{1}{f}$	$a_c = \omega^2 r$
$r = \frac{vT}{2\pi}$	$T = \frac{2\pi}{\omega}$		$v = \sqrt{a_c r}$
$T = \frac{2\pi r}{v}$	$v = \omega r$		$r = \frac{v^2}{a_c}$
	$\omega = \frac{v}{r}$		$\omega = \sqrt{\frac{a_c}{r}}$
	$r = \frac{v}{\omega}$		$r = \frac{a_c}{\omega^2}$

Figura 1.1: Formule del Moto circolare uniforme

Tipo di formula	Formula per il MCUA
Accelerazione totale	$\vec{a}_{tot} = \vec{a}_T + \vec{a}_C$
Modulo accelerazione totale	$a_{tot} = \sqrt{a_T^2 + a_C^2}$
Modulo accelerazione tangenziale	$a_T = \alpha r$
Accelerazione angolare	$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i}$
Legge oraria con $t_0 = 0$	$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0$
Velocità angolare	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
Equazione senza il tempo	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$

Figura 1.2: Formule del Moto circolare uniformemente accelerato

Capitolo 2

Dinamica

2.1 Principi della Dinamica - Leggi di Newton

2.1.1 Prima Legge di Newton

Se la somma delle forze che agiscono su un corpo è nulla, allora il corpo in quiete rimarrà in quiete, mentre se è in moto, continuerà a muoversi di moto rettilineo uniforme.

2.1.2 Seconda Legge di Newton

La forza agente su un corpo è direttamente proporzionale all'accelerazione e ne condivide la direzione e il verso, ed è direttamente proporzionale alla massa. Di contro l'accelerazione cui è soggetto il corpo è direttamente proporzionale alla forza e inversamente proporzionale rispetto alla massa.

$$\vec{F}_{net} = m\vec{a} \left[N = \frac{Kg \cdot m}{s^2} \right] \quad (2.1)$$

2.1.3 Terza Legge di Newton

Se un corpo A esercita una forza su un corpo B, allora il corpo B esercita su A una forza uguale e contraria.

$$F_{ab} = -F_{ba} \quad (2.2)$$

Attenzione! Le forze hanno modulo uguale ma con segno vettoriale opposto!

2.2 Forza Elastica

La forza elastica di un corpo (o di una molla) è descritta dalla Legge di Hook nel seguente modo:

$$F = -kx \quad (2.3)$$

Dove $-k$ è chiamata **costante elastica** ed è una misura della rigidità della molla. Maggiore è k , più rigida è la molla: cioè maggiore è k , maggiore sarà la forza per uno stesso valore di spostamento.

2.3 Carrucola

Le forze agenti su due corpi collegati in un sistema a carrucola (se aventi masse diverse) sono sempre una l'opposta dell'altra.

$$\begin{cases} F_{y1} = T - m_1g \\ F_{y2} = m_2g - T \end{cases} \quad (2.4)$$

In questo caso si considera $m_2 > m_1$ e con un sistema di riferimento verticale. Si considera infatti un sistema a carrucola con forze agenti solo sull'asse y e con forze nulle sull'asse x . Nel caso in cui la carrucola non sia orientata unicamente lungo l'asse y basterà scomporre la forza lungo gli assi di riferimento!

2.4 Attrito Statico e Dinamico

La forza di attrito è una forza che agisce in direzione opposta allo spostamento (opponendosi al movimento). La forza di attrito può agire in due modi differenti:

- **Attrito statico:** agente quando il corpo è fermo, impedendo lo spostamento iniziale.
- **Attrito dinamico:** agente da quando il corpo ha appena compiuto lo spostamento iniziale ed è in movimento.

Le formule sono per l'attrito statico:

$$f_{s,max} = \mu_s F_N \left[N = \frac{Kg \cdot m}{s^2} \right] \quad (2.5)$$

Mentre per quello dinamico:

$$f_k = \mu_k F_N \left[N = \frac{Kg \cdot m}{s^2} \right] \quad (2.6)$$

2.5 Resistenza di un corpo

Quando un corpo solido si muove all'interno di un fluido, ad esso si oppone una forza contraria chiamata resistenza D la quale farà raggiungere al corpo una velocità massima:

$$D = \frac{1}{2} C A \rho v^2 \quad (2.7)$$

Con:

- C : Coefficiente di resistenza aerodinamica.
- A : Area efficace della sezione trasversale del corpo.
- ρ : densità dell'aria
- v : velocità.

2.6 Lavoro

Si applichi una forza F ad un oggetto per spostarlo. La Forza sarà tanto efficace ad ottenere uno spostamento **tanto più è applicata nella stessa direzione dello spostamento.**

$$W = Fd = Fd \cos \Theta \left[J = N \cdot m = \frac{Kg \cdot m^2}{s^2} \right] \quad (2.8)$$

2.6.1 Lavoro compiuto dalla Forza Gravitazionale

Il Lavoro svolto dalla Forza Gravitazionale ovviamente è descritto come Fd , per un corpo che sale la F_g è diretta in senso opposto allo spostamento formando un angolo Θ di 180° .

$$F = mgd \cos \Theta = mgd \cos 180 = -mgd \quad (2.9)$$

Mentre nel momento in cui un corpo cade, la F_g avrà stessa direzione dello spostamento (verso il basso), conferendo un segno positivo al Lavoro.

2.6.2 Lavoro compiuto dalla Forza Elastica

La Forza Elastica non è una forza costante e di conseguenza non possiamo utilizzare la classica equazione del Lavoro (per una forza costante). Possiamo però suddividere lo spostamento della molla in parti infinitesime in modo da

avere forze infinitesime per ogni spostamento infinitesimo, facendo risultare così la forza infinitesima costante su uno spostamento infinitesimo. Integrando questa operazione otterremo così la formula del lavoro per la Forza Elastica (e in generale per una forza non costante!).

$$\begin{aligned}
 W_{molla} &= \int_{x_f}^{x_i} -F dx \\
 W &= \int_{x_f}^{x_i} -kx dx \\
 W &= -k \int_{x_f}^{x_i} x dx \\
 &= \left(-\frac{1}{2}k\right) \left[x^2\right]_{x_f}^{x_i} \\
 &= \left(-\frac{1}{2}k\right)(x_f^2 - x_i^2) \\
 W_m &= \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2 [J]
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Il Lavoro W_m è positivo quando il blocco si avvicina alla posizione di riposo $x = 0$ ed è negativo quando se ne allontana. Il Lavoro è nullo se la distanza finale da $x = 0$ non è mutata.

2.7 Energia Cinetica

Rappresenta la quantità di energia associata al moto di una particella (corpo puntiforme) che si muove alla velocità v .

$$K = \frac{1}{2}mv^2 [J] \tag{2.11}$$

Il lavoro fatto su una particella è uguale a ΔK . L'energia cinetica (e la velocità) aumentano se il lavoro svolto è positivo, mentre diminuiscono se il lavoro svolto è negativo.

2.7.1 Teorema dell'Energia Cinetica

Chiamiamo ΔK la variazione di Energia Cinetica del corpo e L il Lavoro totale compiuto su di esso. Allora possiamo scrivere:

$$\Delta K = K_f - K_i = W \tag{2.12}$$

2.7.2 Energia Cinetica del Moto Armonico Semplice

Si consideri un sistema molla-blocco, nel caso senza attriti, possiamo visualizzare il suo andamento come un'oscillazione armonica e descrivere la sua Energia Cinetica come:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\Theta + \omega t) \quad (2.13)$$

2.8 Potenza

Se una forza esterna è applicata ad un oggetto e se il Lavoro è fatto in un intervallo di tempo, definiamo **potenza**:

$$P = \frac{W}{\Delta t} \left[W \text{ Watt} = \frac{J}{s} = \frac{Kg \cdot m^2}{s^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{Kg \cdot m^2}{s^3} \right] \quad (2.14)$$

2.8.1 Un altro sguardo alla Potenza

La Potenza Istantanea può essere espressa derivando la formula della Potenza (ovviamente!). Di conseguenza possiamo scrivere la potenza come:

$$P = \frac{dL}{dt} = \frac{F \cos \Theta dx}{dv} = F \cos \Theta \left(\frac{dx}{dt} \right)$$

Ma sappiamo benissimo che $\frac{dx}{dv}$ non è altro che la definizione di velocità. Possiamo quindi riscriverla in modo più semplice:

$$P = Fv \cos \Theta$$

Ovvero il **prodotto scalare** tra F e v (dove v è la velocità della particella). Possiamo quindi scrivere che la Potenza Istantanea di una paricella a velocità v non è altro che:

$$P = F \cdot v \quad (2.15)$$

2.9 Energia Potenziale

Se la configurazione di un sistema cambia, allora cambierà anche la sua Energia potenziale. Quando un oggetto si trova ad una certa distanza dal suolo, il sistema terra-oggetto ha un'energia potenziale che si trasforma in lavoro. L'Energia Potenziale è associata con la configurazione del sistema nel quale

le forze conservative agiscono. Quando una forza conservativa compie lavoro W su una particella (corpo) del sistema, il cambiamento ΔU dell'energia potenziale del sistema è definito come:

$$\Delta U = -W [J] \quad (2.16)$$

2.9.1 Energia Potenziale Gravitazionale

L'energia potenziale in un sistema composto dalla terra e dalla particella (corpo) è chiamata Energia Potenziale Gravitazionale. Se la particella si muove da un'altezza iniziale y_i ad una finale y_f , il cambiamento dell'Energia Potenziale Gravitazionale è definito come:

$$\Delta U = mg(y_f - y_i) = mg\Delta y \quad (2.17)$$

Se considerassimo come punto di arrivo un'altezza $h = 0$, allora l'Energia Potenziale gravitazionale può essere riscritta come:

$$\Delta U = mgh \quad (2.18)$$

Dove h è l'altezza dalla quale il corpo cade.

2.9.2 Energia Potenziale Elastica

L'energia Potenziale Elastica è l'energia associata allo stato di compressione o estensione di un oggetto elastico (molla). Per una molla con una forza definita come $F = -kx$, l'Energia Potenziale Elastica sarà definita come:

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad (2.19)$$

2.9.3 Energia Potenziale del Moto Armonico Semplice

L'energia Potenziale Elastica di un oscillatore armonico, immagazzinata dalla molla a seguito di un allungamento x è:

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\Theta + \omega t) \quad (2.20)$$

2.10 Energia Meccanica

La somma dell'Energia Cinetica e dell'Energia Potenziale è detta Energia Meccanica, definita come:

$$E_m = K + U \quad (2.21)$$

2.10.1 Principio di conservazione dell'Energia Meccanica

Quando in un sistema isolato agiscono solo forze conservative, l'Energia Cinetica e l'Energia Potenziale prese singolarmente possono variare, ma la loro somma, l'Energia Meccanica E_m del sistema non cambia. Questo risultato è chiamato principio di conservazione dell'Energia Meccanica esprimibile nel seguente modo:

$$\Delta E_m = \Delta K + \Delta U = 0 \quad (2.22)$$

Il principio di conservazione dell'Energia Meccanica ci permette di risolvere problemi che sarebbe arduo risolvere usando solo le Leggi di Newton. Quando l'Energia Meccanica di un sistema si conserva, possiamo mettere in relazione il totale dell'Energia Cinetica e dell'Energia Potenziale in un istante con quello di un altro istante, *senza dover considerare gli stati intermedi e senza necessità di conoscere il lavoro compiuto dalle forze coinvolte!*

Principio esteso La variazione dell'Energia Meccanica è uguale al lavoro svolto dalle Forze non conservative:

$$\Delta E_m = W_{nc} \quad (2.23)$$

2.11 Moto Armonico e Pendolo

L'oscillatore armonico può essere rappresentato da un sistema molla-blocco il quale oscillando descrive un moto circolare uniforme. Le equazioni del moto sono state descritte in precedenza (1.4.1) durante il moto circolare uniforme.

$$x(t) = A \cos(\Theta_0 + \omega t) \quad (2.24)$$

ma con:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ricordando l'equazione dei un sistema molla-blocco:

$$F = -kx$$

Il pendolo Il pendolo può essere descritto tramite il Moto Circolare Uniformemente Accelerato, considerando la lunghezza del filo inestensibile come il raggio della circonferenza. In questo caso abbiamo:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

2.12 Momento Lineare

Per una singola particella definiamo una quantità vettoriale p chiamata **momento lineare** o *quantità di moto*:

$$p = mv \left[Kg \cdot \frac{m}{s} \right] \quad (2.25)$$

Connessione con la II Legge di Newton Deriviamo il Momento Lineare rispetto al tempo. La derivata della quantità di moto di un punto materiale di massa m è uguale alla risultante della forza applicata.

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = ma$$

$$\frac{dm}{dt}v + m\frac{dv}{dt} = ma$$

Ma la massa rimane costante nel tempo, quindi la derivata sarà 0.

$$m\frac{dv}{dt} = ma = \sum F$$

$$\sum F = 0 \implies p = \text{cost}$$

Legge di conservazione del momento lineare Quando due o più particelle di un sistema isolato interagiscono, il momento lineare totale del sistema resta **costante**.

2.13 Impulso

Applicando al *momento lineare* la Seconda Legge di Newton ad un corpo puntiforme che subisce un urto, si ricava il **Teorema dell'Impulso**:

$$I = \Delta p \quad (2.26)$$

Significato L'impulso della forza che agisce su una particella è uguale al Δ del momento lineare della particella determinato dalla forza. L'impulso non è una caratteristica della particella, bensì una misura della modifica del momento lineare da parte di una forza esterna. Se F è l'intensità di una forza e Δt la durata della collisione, allora l'Impulso può essere descritto nel seguente modo:

$$I = F\Delta t \quad (2.27)$$

Connessione con il Momento Lineare Sia una forza $F = F(t)$ agente su una particella. Applicando la II Legge di Newton:

$$F = \frac{dp}{dt} \implies dp = Fdt$$

$$\Delta p = p_f - p_i = \int_{t_f}^{t_i} F dt = I$$

2.14 Urti

Gli urti accadono frequentemente nella vita quotidiana e possono essere caratterizzati in due differenti tipi:

- **Urti elastici:** Se nell'urto tra due corpi l'Energia Cinetica totale del sistema non cambia ma si conserva completamente.
- **Urti anaelastici:** L'Energia Cinetica non si conserva ma parte viene dispersa in calore o suono (ad esempio).

2.14.1 Urti Anaelastici

La collisione anaelastica comporta sempre una perdita di Energia Cinetica del sistema. La massima perdita si ha quando i corpi si incollano insieme, in questo caso l'urto prenderà il nome di **urto completamente anaelastico**. Un urto anaelastico può essere descritto tramite la seguente formula:

$$p_{1,i} + p_{2,i} = p_{1,f} + p_{2,f} \quad (2.28)$$

ovvero:

$$m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i} = m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f}$$

Nel caso di un **urto completamente anaelastico** uno dei due corpi sarà inizialmente fermo (prendendo il nome di bersaglio). Dopo la collisione proseguiranno attaccati con una velocità V . Definiamo quindi l'equazione di un

urto di questa tipologia:

$$m_1 v_{1,i} = (m_1 + m_2)V \quad (2.29)$$

Abbiamo analizzato gli urti in una singola dimensione. In caso di urti in due dimensioni le considerazioni appena fatte non cambiano. L'unica cosa da aggiungere è la scomposizione lungo gli assi della velocità!

Capitolo 3

Gravitazione

Date due masse separate da una distanza r , l'ampiezza delle forze è data dalla seguente formula:

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \left[\frac{m^3}{Kg \cdot s^2} \cdot \frac{Kg^2}{m^2} = \text{da controllare} \right] \quad (3.1)$$

Dove G è la costante di gravitazione universale:

$$G = 6,673^{-11} \left[\frac{m^3}{Kg \cdot s^2} \right]$$

Energia Potenziale Gravitazionale Cerchiamo l'Energia Potenziale Gravitazionale generica determinata dalla legge di gravitazione universale. Precedentemente (2.9.1) abbiamo considerato la particella di massa m vicino alla superficie terrestre, così da rendere costante la forza di gravità. Per particelle che non si trovano sulla superficie terrestre l'energia potenziale gravitazionale decresce col diminuire della distanza tra la particella e la Terra. Qui consideriamo due particelle separate da una distanza R . Per rendere $U = 0$ ci

mettiamo nella condizione di $r = \infty$ in modo da semplificare i conti.

$$\begin{aligned}
 \Delta U_g &= U_f - U_i = -W_g \\
 &= - \int_R^\infty F(r) dr \\
 &= \int_R^\infty GMm \frac{1}{r^2} dr \\
 &= GMm \left[-\frac{1}{r} \right]_R^\infty \\
 &= GMm \left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{R} \right) \\
 &= GMm \left(0 - \frac{1}{R} \right) \\
 \Delta U_g &= \frac{-GMm}{R} \tag{3.2}
 \end{aligned}$$

Questa è la formula per l'energia potenziale gravitazionale del sistema Terra-Particella per $r \geq R_t$. Non vale per un raggio inferiore a quello terrestre. L'espressione può essere applicata a qualunque delle masse separate da una distanza r . L'Energia Potenziale è sempre negativa, perché abbiamo posto che sarà $= 0$ a distanza infinita.

Velocità di Fuga Un oggetto sfuggirà all'attrazione gravitazionale di un corpo astronomico di massa M e raggio r se la sua velocità in vicinanza della superficie del corpo sarà non inferiore alla velocità di fuga data dalla seguente formula:

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \tag{3.3}$$

Capitolo 4

Fluidostatica

4.1 Pressione

Le forze esercitate da un fluido su un'oggetto sono sempre **perpendicolari** alla superficie. Se F è il modulo della forza esercitata e A la superficie sulla quale essa agisce, definiamo *pressione* P il seguente rapporto:

$$p = \frac{F}{A} \left[Pa \text{ Pascal} = \frac{Kg}{m \cdot s^2} \right] \quad (4.1)$$

È uno scalare, proporzionale al modulo della forza.

4.2 Densità

La densità di una sostanza è uno scalare definito come rapporto tra massa e volume:

$$\rho = \frac{m}{V} \left[\frac{Kg}{m^3} \right] \quad (4.2)$$

Se ρ è costante, il liquido preso in considerazione è incompressibile.

4.3 Legge di Stevino

La pressione di un fluido a riposo in un campo gravitazionale uniforme varia con la quota verticale y . Assegnando valori positivi all'orientamento verso l'alto, si ha:

$$p_2 = p_1 + \rho g(y_1 - y_2)$$

Chiamiamo h la profondità di un campione in un fluido misurata a partire da un livello di riferimento a cui la pressione assume un valore p_0 , la precedente equazione diventa:

$$p = p_0 + \rho gh \quad (4.3)$$

In cui p è la pressione alla profondità h . La pressione è la stessa per tutti i punti allo stesso livello.

4.4 Forza di Bouyant

Un oggetto immerso in un fluido è soggetto ad una forza esercitata dal liquido, diretta dal basso verso l'alto, tale forza è detta di Bouyant o di galleggiamento. Il *Principio di Archimede* ci indica l'intensità di questa forza: essa è uguale al peso del liquido spostato.

$$F_{archimede} = m_{liquido}g \quad (4.4)$$

$$F_a = (\rho V)g \quad (4.5)$$

4.4.1 Oggetto totalmente sommerso

Se l'oggetto ha massa M , e densità ρ_0 , il suo peso è:

$$F_g = M_g = (\rho_0 V_0)g \quad (4.6)$$

Se la densità dell'oggetto è $<$ di quella del fluido, la forza gravitazionale è inferiore a quella di galleggiamento, di conseguenza l'oggetto verrà accelerato verso l'alto. In caso contrario affonderà.

4.4.2 Oggetto galleggiante

Sia l'oggetto di volume V_0 , in equilibrio nel fluido e galleggiante, cioè parzialmente sommerso. Ciò significa che la forza di galleggiamento verso l'alto è **bilanciata** dalla forza di gravità agente verso il basso.

$$F_a = F_g : \begin{cases} F_a &= (\rho_f V_f)g \\ F_g &= M_g = (\rho_0 V_0)g \end{cases} \quad (4.7)$$

$F_a = F_g$ perché l'oggetto è in equilibrio.

4.5 Peso apparente di un oggetto

Si consideri un oggetto con un determinato peso (forza peso!). Ripetiamo l'operazione sott'acqua o più in generale all'interno di un fluido: il peso sarà minore a causa della spinta di galleggiamento:

$$P_{app} = P - F_a \quad (4.8)$$

Caso particolare! Per un corpo galleggiante ricordiamo che la forza di galleggiamento F_a è uguale alla forza peso F_g , di conseguenza il peso apparente dell'oggetto sarà **nullo**!

Capitolo 5

Fluidodinamica

Un fluido ideale è un fluido incompressibile; non ha viscosità e il suo flusso è laminare e irrotazionale. Una *linea di flusso* è il cammino seguito da una singola particella di fluido. Un *tubo di flusso* è un fascio di linee di flusso.

5.1 Equazione di Continuità

Il principio di conservazione della massa impone che il flusso attraverso ogni tubo di flusso obbedisca all'Equazione di Continuità.

$$R_v = Av = \text{cost} \left[\frac{m^3}{s} \right] \quad (5.1)$$

R_v prende il nome di **portata volumica**, con A la sezione del tubo in un qualsiasi punto e v la velocità del fluido. Sappiamo che la massa di un fluido è data dalla seguente equazione:

$$m = \rho V$$

Quindi moltiplicando la Portata Volumica per la densità del fluido otterremo la **portata massica**, definita come:

$$R_m = \rho R_v = \rho Av = \text{cost} \quad (5.2)$$

5.2 Equazione di Bernoulli

Essa ci permette di connettere la pressione, la velocità e l'altezza di un liquido. Supponiamo che in un intervallo di tempo Δt una certa quantità di liquido sia entrata da sinistra (in un tubo di flusso) e la stessa quantità

sia uscita a destra (ricordiamoci che il liquido è incompressibile). Sappiamo inoltre dal Principio di Pascal (pressione!) che la F esercitata dal fluido a sinistra sarà:

5.2.1 Sviluppo dell'Equazione

$$F_1 = p_1 A_1$$

Mentre a destra sarà:

$$F_2 = p_2 A_2$$

Il Lavoro W fatto quindi sarà:

$$\begin{aligned} W_1 &= F_1 \Delta x_1 = p_1 A_1 \Delta x_1 \cos 0 \\ W_2 &= F_2 \Delta x_2 = p_2 A_2 \Delta x_2 \cos 180 \end{aligned}$$

Il secondo lavoro ha segno negativo siccome la forza gravitazionale ha verso opposto alla massa del fluido in salita!

Il lavoro totale quindi sarà:

$$\begin{aligned} W &= W_1 + W_2 \\ &= p_1 A_1 \Delta x_1 - p_2 A_2 \Delta x_2 \\ &= (p_1 - p_2) V \\ W &= (p_1 - p_2) V \end{aligned}$$

5.2.2 Applicazione Teorema del Lavoro

Ricordiamo inoltre il teorema del lavoro: il lavoro di una forza esterna su un sistema è uguale a ΔE_{mecc} . Una parte del lavoro effettuato fa cambiare l'energia cinetica del liquido mentre l'altra fa cambiare l'energia potenziale.

$$\begin{aligned} W &= \Delta K + \Delta U \\ (p_1 - p_2) V &= \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 + m g y_2 - m g y_1 \\ &= \frac{1}{2} \rho V v_2^2 - \frac{1}{2} \rho V v_1^2 + \rho V g y_2 - \rho V g y_1 \\ (p_1 - p_2) &= \frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_2 - \rho g y_1 \\ &= p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2 = \text{cost} \end{aligned}$$

Quindi:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2 = \text{cost} \quad (5.3)$$

In un fluido a flusso laminare, la somma della pressione, dell'Energia Cinetica per unità di Volume e dell'Energia Potenziale gravitazionale per unità di Volume è **costante**.