

# CheatSheet di Analisi Matematica

Fabio Ferrario

2022

## Studio di Funzione

Per lo studio di una funzione bisogna trovare:

**Dominio** della funzione, poni:

Denominatore	$\neq 0$
Logaritmo	Argomento $> 0$
Radice <sup>n</sup>	Argomento $\geq 0$ ( <i>sse n pari</i> )
$[f(x)]^{g(x)}$	$f(x) > 0$

**Limiti ai punti di frontiera del dominio** Trovato il dominio, trova i limiti ai punti di frontiera, quindi porre i limiti ad ogni punto in cui il dominio si interrompe (sia da destra che da sinistra) e eventualmente a  $\pm\infty$ .

**Asintoti** Trovati tutti i limiti, se trovi:

- $\lim_{x \rightarrow \alpha^\pm} f(x) = \pm\infty \implies$  Asintoto *Verticale*.
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l \implies$  Asintoto *Orizzontale* (di equazione  $y = l$ )

Bisogna anche controllare la presenza di **Asintoti Obliqui**:

- $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \implies$  se  $m$  esiste e non è nullo trovo  $q$ :
- $q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] \implies$  se  $q$  esiste allora  $y = mx + q$  è *asintoto obliquo*

**Monotonia** La monotonia di una funzione si calcola ponendo  $f'(x) > 0$ . Nei punti in cui la derivata è positiva, la funzione è **Crescente**, nei punti in cui è negativa la funzione è **Decrescente**

**Punti di estremo** I punti in cui la derivata cambia direzione sono punti di estremo (max/min). Se il punto di estremo è il più grande/piccolo di tutta la funzione, allora sono Assoluti.

### Convessità/Concavità

- $- \text{conc} \cap \Rightarrow f''(x) \text{ positiva}$
- $+ \text{conv} \cup \Rightarrow f''(x) \text{ negativa}$

**Retta Tangente** al grafico in  $x_0$ :

trova  $y = mx + q$  ponendo:

- $m = f'(x_0)$
- $q = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$

### Punti di Discontinuità

1. Prima specie (Salto): i limiti dx e sx di  $x_0$  esistono finiti ma sono diversi.
2. Seconda specie (Essenziale): Almeno uno dei limiti è infinito o non esiste.
3. Terza Specie (Eliminabile): il limite di  $x_0$  esiste finito ma è diverso da  $f(x_0)$  o non esiste.

## Serie

### Serie Notevoli

#### Serie Armonica Generalizzata

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{Diverge} & \alpha \leq 1 \\ \text{Converge} & \alpha > 1 \end{cases}$$

#### Serie Geometrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n \begin{cases} \text{Diverge} & q \geq 1 \\ \text{Converge} & -1 < q < 1 \\ \text{Irregolare} & q \leq -1 \end{cases}$$

## Serie Telescopica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n+k})$$

oppure

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_{n+k} - a_n)$$

## Criteri di Convergenza

**Condizione NECESSARIA NON SUFFICIENTE** di convergenza:

$a_n$  deve essere **infinitesimo**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ .

Avendo  $a_n > 0$  (positiva) *definitivamente* posso usare i seguenti criteri:

• **Rapporto:**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$

• **Radice:**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$

– In entrambi questi casi  $\sum a_n$ :

Converge  $\left| \begin{array}{l} l < 1 \end{array} \right.$

Diverge  $\left| \begin{array}{l} l > 1 \end{array} \right.$

inconclusivo  $\left| \begin{array}{l} l = 1 \end{array} \right.$

• **Confronto:**  $a_n \leq b_n$  definitivamente  $\implies$

– se  $b_n$  Converge  $\implies a_n$  Converge

– se  $a_n$  Diverge  $+\infty \implies b_n$  Diverge  $+\infty$

**Assoluta Convergenza**  $\sum a_n$  **converge assolutamente** se converge  $\sum |a_n|$ .

Se una serie converge assolutamente, allora converge.

**Serie Telescopica risoluzione** In questo caso è necessario applicare la definizione di serie, cioè la successione delle somme parziali. Devo quindi manualmente sostituire  $n=1$ ,  $n=2$ ,  $n=3$ , ... fino a quando non riconosco il pattern della serie.

**Ricordati di non semplificare Numeratore e Denominatore!**, mantenendo i numeri sostituiti sarà più facile scrivere il carattere della serie.

# Limiti

**Equivalenza asintotica tra funzioni** Se il limite  $(\rightarrow x_0)$  di  $\frac{f(x)}{g(x)} = 1$  allora  $f$  e  $g$  sono asintoticamente equivalenti

**$o$ -piccolo** Se il limite  $(\rightarrow x_0)$  del rapporto di  $f(x)$  su  $g(x)$  è uguale a 0 allora  $f(x)$  è  $o$ -piccolo di  $g(x)$ . Nota, che per  $x_0$  si intende un valore arbitrario che può essere anche 0 o  $\pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \implies f(x) = o(g(x)) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

## Limiti Notevoli

Logaritmo naturale	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
Logaritmo con base $a$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln(a)}$
$f$ Esponenziale	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
$f$ Esponenziale base $a$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$
Costante e Frazione	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - 1}{x} = \ln(a)$
Seno	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
Coseno	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$
$\ln(x)$	$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$

### Equivalenze Asintotiche

con $x \rightarrow 0$		
$\sin x$	$\sim$	$x$
$1 - \cos x$	$\sim$	$\frac{1}{2}x^2$
$\tan x$	$\sim$	$x$
$\ln(1+x)$	$\sim$	$x$
$(1+x)^\alpha - 1$	$\sim$	$\alpha x$

Ordine degli infiniti  $\infty$  In generale:

$$\log_a x \ll x^b \ll x^c \ll d^x \ll g^x \ll x^x$$

### N.B.

- $\sqrt{x} \gg \ln(x)$
- $x \ln(x) \gg \sqrt{x}$

### Forme di indecisione

$\left[\frac{0}{0}\right] \left[\frac{\infty}{\infty}\right] [1^\infty] [\infty - \infty] [\infty \cdot 0] [0^0] [\infty^0]$	
Tutte le forme possono essere risolte usando <b>Limiti Notevoli</b> e <b>Trucchi algebrici</b> per ricondursi ad essi. In particolare però, questi si risolvono usando anche:	
$\left[\frac{0}{0}\right]$	Conf. infinitesimi — Scomp/Racc/Semp — De l'Hopital
$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$	Conf. infinti — Scomp/Racc/Semp — De l'Hopital
$[1^\infty]$	Identità Logaritmo-Esponenziale
$[\infty - \infty]$	Riconduzione a $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$
$[\infty \cdot 0]$	Razionalizzazione inversa — Prodotti notevoli al contrario
$[0^0] / [\infty^0]$	Conf. infiniti/infinitesimi—Identità Logaritmo-Esponenziale

## Teoremi Limiti utili per esercizi

**Teorema del Confronto** Se ho  $x \rightarrow +\infty$  e ho sin o cos potrei dover usare il teorema del confronto dato che sin e cos (NB solo per  $x \rightarrow +\infty$ ) sono delle costanti che oscillano tra  $-1$  e  $1$ .

## Calcolo Differenziale

### Derivate "note"

Nome	Funzione	Derivata
Seno	$\sin x$	$\cos x$
Coseno	$\cos x$	$-\sin x$
Arcotangente	$\arctan$	$\frac{1}{1+x^2}$
Logaritmo	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
Radice		
Esponenziale	$e^x$	$e^x$
Esponenziale (negativo)	$e^{-x}$	$-e^{-x}$
1 su $x^2$	$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{2}{x^3}$
$x$ alla $\alpha$	$x^\alpha$	$\alpha x^{\alpha-1}$

### Derivate Composte

Composizione	$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$
Prodotto	$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$
Divisione	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}$

### Derivata dell'inversa di una funzione Dati:

$y_0$  e  $f(x)$ , avendo  $g(x) = f^{-1}(x)$  allora: Per calcolare  $g'(y_0)$

- trovo  $x_0$  ponendo  $y_0 = f(x)$
- trovo  $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

**Formula di Taylor** di grado  $k$  e centrato in  $x_0$ :

$$P_k(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

**Formula di McLaurin** di grado  $k$ :

$$P_k(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \dots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k$$

McLaurin = Taylor con  $x_0 = 0$

**Rapporto incrementale**

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

## Calcolo Integrale

**Condizione di integrabilità** Per l'integrabilità di una funzione su un intervallo la condizione che essa sia *continua* è *sufficiente ma non necessaria*

### **Primitive elementari**

Funzioni il cui integrale è immediatamente calcolabile.

Funzione	Primitiva
$k$	$kx$
$x^a, a \neq -1$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$
$\frac{1}{x}$	$\log x $
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$a^x$	$\frac{a^x}{\log a}$
$e^{-x}$	$-e^{-x}$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan(x)$

### **Proprietà degli integrali**

- Somma di integrali:  $\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
- Costante moltiplicativa  $\int k \cdot f(x) = k \int f(x)$

## I metodi di risoluzione

### Integrazione per Parti

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$



### Integrazione per Sostituzione

**Metodo Generale e Semplificato** per integrali generali  $f(x)$ :  
Trovo una funzione  $g(x)$  *Derivabile e Invertibile* da sostituire ad  $x$ .

1. decido che  $y = g(x)$
2. Inverto  $g(x)$  per isolare la  $x$ , ottenendo  $x = g^{-1}(y)$
3. Derivo entrambi i membri e aggiungo  $dx$  e  $dy$ :  $\rightarrow dx = (g^{-1})'(y)dy$
4. all'interno di  $f(x)$  sostituisco  $g(x) \rightarrow y$  e  $dx \rightarrow (g^{-1})'(y)dy$
5. Risolvo l'integrale
6. Sostituisco  $y \rightarrow g(x)$

**Metodo dalla definizione** : Abbiamo un integrale nella forma

$$\int f(g(x))g'(x)dx$$

1.  $y = g(x) \rightarrow dy = g'(x)dx$
2. Sostituiamo per ottenere  $\int f(y)dy$
3. Calcolo l'integrale nella nuova variabile
4. Sostituisco  $y \rightarrow g(x)$

**Formula Media Integrale** Considerata  $f$  limitata e integrabile su un intervallo  $[a, b]$

$$M(f, [a, b]) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

## Dimostrazioni per induzione

Le due casistiche principali sono:

- Dimostrazioni con la sommatoria  $\sum$
- Dimostrazioni con disequazioni



**Ricorda** Devi sempre dimostrare che la formula è vera per  $n + 1$ , quindi devi ricondurti a ciò che hai a destra dell'equazione.

## Dimostrazioni con la sommatoria

In questo caso devo ricordarmi di ricondurre al caso base estraendo dalla sommatoria  $(n+1)$  per ricondurre alla sommatoria  $\sum^n$  e poi sostituendo l'ipotesi induttiva (la sommatoria che supponiamo vera). Così facendo posso ottenere ciò che ho a sinistra della formula  $\sum^{n+1}$ .

## Dimostrazioni con le disequazioni

In questo caso devo ricordarmi che oltre a dover sostituire l'ipotesi induttiva nella disequazione possono aggiungere numeri che mi possono servire a patto che abbia la certezza che questi numeri non vadano in contraddizione con il segno della disequazione, quindi se ho  $a > b$ , aggiungendo numeri non deve succedere che  $b$  diventi maggiore di  $a$ .

**Ricorda** Nell'ipotesi avrai una condizione (per esempio per  $n > 1$ ), ricordati che puoi e spesso devi usarla per poter aggiungere numeri utili alla dimostrazione.