Algebra Lineare e Geometria

Fabio Ferrario
@fefabo

2023/2024

Indice

Introduzione

Questi appunti di Algebra Lineare e Geometria sono stati fatti con l'obiettivo di riassumere tutti (o quasi) gli argomenti utili per l'esame di Algebra Lineare e Geometria del corso di Informatica dell'Università degli Studi di Milano Bicocca.

Il Corso

Gli appunti fanno riferimento alle lezioni di GAL erogate nel secondo semestre dell'anno accademico 22/23.

Programma del corso

Il programma si sviluppa come segue:

1. **Algebra Lineare**
    - Spazi Vettoriali
    - Dipendenza Lineare
    - Basi
    - Prodotto scalare euclideo
    - Prodotto vettoriale
2. **Matrici**
    - Operazioni
    - Rango
    - Invertibilità
    - Determinante
    - Trasformazioni elementari e riduzione a scala

Prerequisiti

I prerequisiti per questo corso sono: Teoria di insiemi di base. Insiemi con strutture (monoidi e gruppi). Dimostrazioni per assurdo e per induzione.

Insiemistica e Funzioni

In questo capitolo ripassiamo i concetti di insiemistica e funzioni e fissiamo le notazioni che verranno usate durante il corso.

Insiemi

Non verrà data una definizione formale di insieme perchè la definizione matematica di insieme è complessa, verrà quindi data una definizione intuitiva.
Fissiamo le **Notazioni** che useremo nell'insiemistica.
Voglio considerare degli oggetti e distinguerli da altri oggetti. In genere si utilizza la notazione classica disegnando un insieme, ma questo metodo è scomodo. Quindi, per rappresentiamo un insieme usiamo le **Parentesi Graffe**

$$\mathrm{I} = \{\ \mathrm{x},\ \Delta,\ 3,\ \odot\ \}$$

Teniamo a mente due cose:

- L'ordine degli elementi <u>non è sensibile</u>.
- Se un valore viene ripetuto, allora questo <u>non è un insieme</u>.

Sottoinsieme

Un sottoinsieme è un insieme contenuto in un altro insieme e si indica con il simbolo $\subset$.
Considerando l'insieme I sopra avremo che:

$$\mathrm{S} \subset \mathrm{I} = \{\Delta, 3\} \text{ è un sottoinsieme di I}$$

Operazioni sugli insiemi

Esistono diverse operazioni che ci permettono di ottenere degli insiemi partendo da altri insiemi.
In questo corso useremo le seguenti:

- **Unione** $A \cup B$ Contiene gli elementi contenuti sia in A che in B (Senza ripetizioni).
  - **Unione Disgiunta** $A \sqcup U$ come l'unione, ma se ci sono degli elementi condivisi vengono entrambi rappresentati con indicato a pedice l'insieme di provenienza.
- **Intersezione** $A \cap B$ Contiene gli elementi comuni tra A e B.
- **Complemento** $B \backslash A$ (oppure $B - A$) è l'insieme contenente gli elementi di B che non sono presenti in A.
- **Prodotto Cartesiano** $A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$
  Ovvero l'insieme delle coppie di ogni alemento di A con ogni elemento di B. Nota che il prodotto cartesiano NON è commutativo.

Osservazione: Scrivere (x, y) è diverso che scrivere $\{x, y\}$.
Nel primo caso sto considerando la **coppia di elementi** x **e** y, mentre nel secondo caso sto considerando l'insieme contenente gli elementi x e y.
Quindi $(x, y) \neq (y, x)$, mentre $\{x, y\} = \{y, x\}$.

Insiemi Numerici

Esistono diversi insiemi numerici:

- Naturali $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} = \{0, 1, 2, ...\}$
- Interi $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$
- Razionali $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}\}$
- Reali $\mathbb{R} = \{Q, \sqrt{q}, \pi, e : q > 0 \in Q\}$
- Complessi $\mathbb{C}$, che non faremo in questo corso

Spazi Multidimensionali

Esistono spazi numerici multidimensionali, che sono semplicemente il prodotto cartesiano di più spazi:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

Funzioni

Definizione di Funzione

Definiamo ora il concetto di Funzione:

DEFINIZIONE

Dati due insiemi A e B, una funzione è una relazione che **associa** ogni elemento di A a uno e un solo elemento di B. L'insieme A viene chiamato **Dominio**, mentre B è il **Codominio**.

Osservazione: Perchè f sia una funzione deve valere:

$$\forall x \in dom(f),\ \exists ! f(x)$$

Ovvero, per ogni x appartenente al dominio della funzione f esiste **ed é unico** un valore di $f(x)$.

Immagine e Controimmagine

Una funzione $f : A \to B$ ha associata i seguenti insiemi:

- Sia $S \subset A$, allora con $f(S)$ indicheremo l'**Immagine** di S tramite f.
$$f(S) = \{b \in B : \text{ è associato ad un elemento di S}\}$$
- Sia $R \subset B$, allora con $f^{-1}(R)$ indicheremo la **Controimmagine** di R tramite f.
$$f^{-1}(R) = \{a \in A : f(a) \in R\}$$

In parole povere, l'Immagine è l'insieme di tutti i valori che assume la funzione f valutata in ogni elemento di S, mentre la Controimmagine è l'insieme di tutti i valori del dominio che sono associati ai valori contenuti in R.

Iniettività e Suriettività

Una funzione può godere delle seguenti proprietà:

- f è detta **Iniettiva** se $a_1 \neq a_2 \in \text{ dom}f \implies f(a_1) \neq f(a_2)$
- f è detta **Suriettiva** se $\forall b \in \text{ codom}f,\ \exists\, a \in dom f : f(a) = b$

f è detta biettiva (o bigetta o biunivoca) se è sia iniettiva che suriettiva.

Capitolo 1

Spazi vettoriali

Gli spazi vettoriali sono degli insiemi con "sopra" delle struttre algebriche.

1.1 Definizione di Spazi Vettoriali

Sia V un insieme e K un "campo" (ad esempio $\mathbb{R}$). Allora:

DEFINIZIONE

Diremo che V è uno **Spazio Vettoriale** su K se esistono le operazioni di **Somma** $(+)$ e di **Prodotto per uno scalare**$(\cdot)$ su V.

Nota che campo e spazio vettoriali non coincidono mai! se entrambi sono $\mathbb{R}$, allora sono copie diverse di esso.

1.1.1 Le operazioni Somma e Prodotto

Perchè un insieme sia uno spazio vettoriale deve essere dotato delle operazioni di Somma e Prodotto per uno scalare, ma queste due operazioni devono rispettivamente verificare alcune proprietà.

Somma La somma è una funzione così definita:

$$"+" : V \times V \to V$$

$$\text{ovvero } (\underline{v_1}, \underline{v_2}) \to "\underline{v_1} + \underline{v_2}\ \forall \underline{v_i} \in V".$$

Essa deve godere delle seguenti proprietà:

1. Nullo: $\exists \underline{0} \in V : \underline{0} + \underline{v} = v\ \forall \underline{v} \in V$

2. Opposto: $\forall \underline{v} \in V, \exists" - \underline{v}" : \underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{0}$
3. Associatività: $(\underline{v_1} + \underline{v_2}) + \underline{v_3} = \underline{v_1} + (\underline{v_2} + \underline{v_3})$
4. Commutatività: $\underline{v_1} + \underline{v_2} = \underline{v_2} + \underline{v_1}$

Prodotto per uno Scalare Il Prodotto per uno Scalare è una funzione così definita:

$$" \cdot " : K \times V \to V$$

$$\text{ovvero } (\underline{\alpha}, \underline{v}) \to "\alpha\underline{v}".$$

Essa deve godere delle seguenti proprietà:

1. $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \underline{v} = \lambda_1\underline{v} + \lambda_2\underline{v}$ con $\lambda_i \in K, \underline{v} \in V$
2. $\lambda \cdot (\underline{v_1} + \underline{v_1}) = \lambda\underline{v_1} + \lambda\underline{v_2}$ con $\lambda \in K, \underline{v_1} \in V$
3. $(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot \underline{v} = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot \underline{v})$

Osservazione: Si può dimostrare che:

- $0 \cdot \underline{v} = \underline{0}\ \forall \underline{v} \in V$
- $\lambda \cdot \underline{0} = \underline{0}\ \forall \lambda \in K$
- $-1 \cdot \underline{v} = -\underline{v}$, ovvero l'opposto di $\underline{v} \in V$, $\forall \underline{v} \in V$.

1.2 I Sottospazi Vettoriali

Definiamo ora i sottospazi vettoriali:

DEFINIZIONE

Sia V uno spazio vettoriale su K e $W \subset V$. Diremo che W è un sottospazio vettoriale $(W < V)$ di V se:

1. $\underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in W,\ \forall \underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W$
2. $\lambda\underline{w} \in W,\ \forall \underline{w} \in W$

Osservazione: se $W < V$, ovvero W è sottospazio di V allora $\underline{0}_V \in W$

In parole povere Se abbiamo uno spazio vettoriale V e ne prendiamo un suo sottoinsieme W, quest'ultima sarà anch'esso uno spazio vettoriale (sottospazio di V in questo caso) soltanto se queste due proprietà vengono rispettate:

- Se prendiamo qualunque coppia di elementi w_1 e w_2 in W, anche la loro somma deve far parte di W.
- se prendiamo un qualunque elemento $\underline{w}$ e un qualunque scalare λ, anche il loro prodotto deve far parte di W.

Osservazione: Lo spazio vettoriale piú semplice é quello che contiene solo l'elemento identitá ($\underline{0}$)

1.2.1 I sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^2$

Quali sono i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^2$?
Innanzitutto ricordiamo che per fare si che un certo $W < \mathbb{R}^2$ ogni elemento deve rispettare le due condizioni di somma tra vettori e prodotto per uno scalare.
Detto ció, é dimostrabile che tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^2$ in ordine di grandezza sono:

- $\{\underline{0}\}$, ovvero l'insieme identitá.
- Tutte le **Rette passanti per l'origine**.
- ???
- $\mathbb{R}^2$ stesso.

1.2.2 Il piú piccolo Sottospazio Vettoriale

Dato $S \subset V$ con V Spazio Vettoriale, esiste il piú piccolo sottospazio di V contenente S? Si, ed é definito cosí:

DEFINIZIONE

$< S >< V$ Indica il piú piccolo sottospazio di V contenente S. Si dimostra che:

$$< S >= \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot z_i : \lambda_i \in \mathbb{R}, z_i \in S, n \in \mathbb{N}\}$$

Si osserva che non esiste $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \cdot z_i$, poiché la somma deve essere tra un **numero finito** di vettori.

1.3 Combinazioni Lineari

La somma utilizzata nell'ultima definizione non é a caso, ma si chiama **Combinazione Lineare**:
Una combinazione lineare altro non è che un'espressione in cui compaiono somme di vettori e moltiplicazioni di vettori per scalari.

DEFINIZIONE

Definiamo **Combinazione Lineare** di $\{\underline{v}_i\}_{i=1,...,n}$ una qualsiasi espressione del tipo

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \underline{v}_i$$

Con $\lambda_i \in \mathbb{K}$

1.3.1 Dipendenza Lineare

Dato il concetto di Combinazione Lineare possiamo andare a definire anche la **Dipendenza Lineare**, ovvero definire se se i vettori di un insieme sono linearmente dipendenti o indipendenti:

DEFINIZIONE

Sia $S \subset V$, con V spazio Lineare.
I vettori di S sono detti **Linearmente Dipendenti** se:

$$\exists \underline{w} \in S \text{ e } S_{\underline{w}} = \{z_1, ..., z_n\} \subset S \text{ (con } \underline{w} \notin S_{\underline{w}})$$

tali che

$$\underline{\mathrm{w}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot z_i, \lambda_i \in K$$

Altrimenti, i vettori si S sono detti **Linearmente Indipendenti**

Ovvero, si dice che i vettori di un insieme sono linearmente dipendenti *se sono la combinazione lineare di altri elementi dell'insieme.*

Insieme di Vettori Linearmente Indipendenti

$S \subset V$, con V spazio lineare, é un *insieme di vettori linearmente indipendenti* sse:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot z_i = \underline{0} \implies \lambda_i = 0 \forall i$$

Ció deve valere $\forall n \in N$ e $\forall \{z_i\} \subset S$.

Osservazione: In parole povere un insieme di n vettori sono **linearmente indipendenti** se e solo se per ottenere 0 dalla loro combinazione lineare è $\underline{0}$ devo porre tutti i coefficienti a 0:

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = 0 \implies \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Dimostrazione del Lemma $S \subset V$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti. Voglio dimostrare che se $\{\underline{z}_i\} < S$ e $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{z}_i = \underline{0}$ allora $\lambda_i = 0 \ \forall 0$.
Nego la tesi: Supponiamo che $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{z}_i = \underline{0}$ ma $\exists h : \lambda_h \neq 0$. Allora

$$\lambda_h z_h = -\sum_{j \neq h} \lambda_j \underline{z}_j \rightarrow ... \rightarrow z_h = -\sum_{j \neq h} \lambda_h^{-1} \lambda_j \underline{z}_j$$

Ovvero al combinazione lineare di vettori $\subset S$ diversi da z_h, quindi gli $\{\underline{z}_i\}$ sono linearmente dipendenti e lo sono anche quelli di S.

1.4 Basi di uno spazio vettoriale

Domanda: come "comunico" un sottospazio vettoriale?
Sia $W < V$, abbiamo 2 modi per "comunicarlo":

1. Siccome $W \subset V$, allora $W = \{...\}$.

2. Sfrutiamo il fatto che $W < V$ e quindi $< S >= W$ per qualche <u>insieme</u> $S \subset V$, cerchiamo di "ottimizzare" S, ovvero cerchiamo il piú piccolo S che rispetti $< S >= W$.
   Ció consiste nel determinare un S "minimale" tale che:

   $$W =< S >= \text{Spazio Vettoriale generato da S}$$

   La minimalitá é equivalente a:

   $$W \neq < S/\underline{v} >, \ \forall \underline{v} \in S$$

DEFINIZIONE

Teorema/Definizione di Base: Tutte le seguenti affermazioni sono **equivalenti**:

(a) $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n\} \subset V$ é una Base di V.

(b) S è un sistema di generatori per V, cioé $V =< S >$ e i vettori di S sono linearmente indipendenti.

(c) $< S >= V$ e $\forall \underline{v} \in V, \exists ! \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{v}_i = \underline{v}$

(d) S è un insieme minimale di generatori di V.

(e) S è un insieme massimale di vettori linearmente dipendenti di V.

Come potrei dimostrare questo? Essendo proposizioni equivalenti, avrò che:

$$a \implies b, b \implies a, b \implies c, ..., e \implies d$$

Però posso semplicemente dimostrarne 5.

Corollario [1] Ogni spazio vettoriale che ammette un insieme finito di generatori ammette una base.

Esempio: (1) Abbiamo $V = \mathbb{R}^n$ e

$$S = \{(1, 0, ..., 0), (0, 1, 0, ..., 0), ...(0, 0, ..., 1)\} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, ..., \underline{e}_n\}$$

S é detta **Base Canonica**[a] di $\mathbb{R}^n$.
Usiamo il teorema (c) per verificare che è una base: Sia $(x_0, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{e}_i = ... = (lambda_1, ..., \lambda_n)$ Quindi $\lambda_i = x_i$
$\implies$ Tale combinazione lineare é **unica**, qiundi (c) é verificata e S é una Base.

[a] Canonico non é ben definibile in matematica, è il suo nome di battesimo.

Uno dei teoremi più importanti per le basi è il teorema di *estensione di una base*:

Teorema 2: Sia $I\{\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n\}$ insieme di vettori **Linearmente indipendenti** t.c. $I \subset V$, e $G\{\underline{w}_1, ..., \underline{w}_n\}$ insieme di **generatori** di V, Allora $\exists G' \subset G : I \cup G'$ è una base di V.

Teorema 3: Con le notazioni del teorema due, avremo che $\#(I) \leq \#(G)$, ovvero il numero di elementi di I è minore o uguale al numero di elementi di G.

[1] Conseguenza

Corollario del teorema 3: Se $\exists G$ insieme finito t.c: è un sistema di generatori di V-spazio vettoriale, allora ogni base di V ha lo stesso numero di elementi. Ovvero fissato uno spazio, tutte le sue basi hanno lo stesso numero di elementi.

1.4.1 Dimensione di Uno Spazio Vettoriale

DEFINIZIONE

La dimensione di uno spazio vettoriale V che ammette un sistema di generatori finito è il **numero di elementi di una base qualsiasi** di V.

La dimensione comprende sia l'insieme che la struttura algebrica.

Corollario Come corollario di quest'ultima definizione abbiamo che, sapendo la dimensione di uno spazio vettoriale:

$$dim(V) = n \implies \begin{cases} n \text{ vettori indipendenti sono anche generatori.} \\ n \text{ generatori di } V \text{ sono linearmente indipendenti.} \end{cases}$$

1.4.2 Teorema di De Guzman

Sia V spazio vetoriale e $W, Z < V$, tutti a dimensione finita.
Allora avremo che:

- $W \cap Z < V$
- $W + Z = \{w + z : w \in W, z \in Z\}$

Osservazione: Posso sommare W e Z perchè sono entrambi sottospazi di V, ed il risultato è il sottospazio di V che contiene $W \cup Z$.

$$dim(W + Z) = dim(W) + dim(Z) - dim(W \cap Z)$$

1.4.3 Esercizi: Trovare una Base

Ci sono diversi metodi per trovare una base di un (sotto) spazio vettoriale. Uno di essi prevede il passaggio dalla forma cartesiana alla forma parametrica, vediamolo con un esempio:

Esempio: Abbiamo

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x + 3y + z = 0\}$$

V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ ed è rappresentato in forma cartesiana. Per passare alla forma parametrica dobbiamo appunto introdurre dei parametri, Ce ne serviranno $n - m$, dove n è la dimensione dello spazio e m il numero di equazioni. In questo caso abbiamo che $n = 3$ e $m = 1$, quindi ci servono 2 parametri, che chiameremo t e s.
Impostiamo quindi:

$$\begin{cases} x = t \\ y = sz = -2t - 3s \end{cases} \rightarrow V = \{(t, s, -3t - 3s) | t, s \in \mathbb{R}\}$$

Avendo ora la forma parametrica, posso trovare una base di V, scegliendo $t = 1, s = 0$ e $t = 0, s = 1$.

$$t = 1, s = 0 \implies v_1 = (1, 0, -2)$$

$$t = 0, s = 1 \implies v_2 = (0, 1, -3)$$

$\{v_1, v_2\}$ è una base di V.

1.5 Recap

1.5.1 Sottospazi Vettoriali

Se V è uno spazio vettoriale e $W \subseteq V$, allora W è un sottospazio vettoriale di V $(W < V)$ se le seguenti 3 condizioni sono rispettate:

1. $0_v \in W$ - Inclusione dell'origine.
2. $w_1 + w_2 \in W \forall w_1, w_2 \in W$ - Chiusura rispetto alla somma.
3. $\lambda w \in W \forall w \in W, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ - Chiusura rispetto al prodotto.

Se vogliamo dimostrare che W non è un sottospazio vettoriale di V, allora basta dimostrare che una delle tre condizioni non è soddisfatta.

Sottospazi di $\mathbb{R}^2$ Gli unici sototspazi non banali di $\mathbb{R}^2$, ovvero quelli diversi da $\{0, 0\}$ e $\mathbb{R}^2$ stesso, sono soltanto le **rette passanti per l'origine**. Quindi tutti e soli i sottospazi di $\mathbb{R}^2$ sono:

- Dimensione 0: $\{0,0\}$
- Dimensione 1: Rette passanti per l'origine
- Dimensione 2: $\mathbb{R}^2$

Sottospazi di $\mathbb{R}^3$ Estendendo questo ragionamento a $\mathbb{R}^3$ avremo invece queste possibilità:

- Dimensione 0: $\{0,0,0\}$
- Dimensione 1: Rette passanti per l'origine.
- Dimensione 2: Piani passanti per l'origine.
- Dimensione 3: $\mathbb{R}^3$

L'equazione cartesiana di un piano passante per l'origine ha questa forma:

$$ax + by + cz = 0 \quad (a,b,c) \neq (0,0,0)$$

L'equazione cartesiana di una retta passante per l'origine in $\mathbb{R}^3$ ha invece questa forma:

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \end{cases} \qquad (a,b,c) \neq (0,0,0), (\alpha,\beta,\gamma) \neq (0,0,0), (a,b,c) \neq \lambda(\alpha,\beta,\gamma)$$

Capitolo 2

Matrici

In questo capitolo introdurremo le Matrici. Riporterò le spiegazioni del Prof. Borghesi, e occasionalmente quelle del libro perchè più semplici.

DEFINIZIONE

Una matrice $k \times n$, k-righe e n-colonne è un elemento di $\mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n$ k volte, oppure $\mathbb{R}^k \times ... \times \mathbb{R}^k$ n volte

$$\simeq \mathbb{R}^{k \cdot n}$$

In entrambi i casi le matrici sono elementi di uno spazio vettoriale.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{k1} & ... & ... & a_{kn} \end{pmatrix}$$

Spazio Vettoriale $M(k,n)$ Denota l'insieme delle matrici a coefficienti reali con k righe e n colonne:

$$M(k,n) = \{ \text{ Matrici reali } k \times n\}$$

$M(k,n)$ è uno **spazio vettoriale** di *dimensione* $n \cdot m$. L'elemento neutro è la matrice nulla e la base canonica è $\{E_{ij}\}_{i=1,\dots,k \ \ j=1,\dots,n}$:

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \\ & \uparrow j & \end{pmatrix} \leftarrow i$$

Esempio: La base canonica di $M(2,2)$ è:

$$\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\}$$

2.1 Prodotto tra Matrici

DEFINIZIONE

Siano $A \in M(n,m)$ e $B \in M(p,q)$.
Posso fare $AcdotB$ se e solo se $m = p$, e in tal caso $A \cdot B \in M(n,q)$

Ovvero, posso moltiplicare due matrici solo se la prima ha il numero di colonne uguale al numero di righe della seconda. Nel caso questo sia possibile, la matrice risultante avrà il numero di righe della prima e di colonne della seconda.

Osservazione: $A \cdot B$ può essere definito, mentre $B \cdot A$ no.
In $M(n,n)$ cioò potrebbe accadere, ma in generale:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

DEFINIZIONE

$A \cdot B = (c_{ij})$ dove $c_{ij} = \sum_{u=1}^{n} a_{iu} \cdot b_{uj}$

Esempio: Siano $A = n\text{x}p, B = p\text{x}m$ allora $\exists A \cdot B$ e $\nexists B \cdot A$

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 3 & -1\end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix}4 & 1\\-2 & 2\\0 & 3\end{pmatrix} \to AB = \begin{pmatrix}4 & 7\\-6 & 3\end{pmatrix}$$

in cui $ab_{1,1} = (a_{1,1} \cdot b_{1,1}) + (a_{1,2} \cdot b_{2,1}) + (a_{1,3} \cdot b_{3,1})$

2.2 Rango di Matrici

Il rango è la "misura di quante informazioni contiene una matrice"

DEFINIZIONE

rg(A)= dim <Vettori colonna di A >

O, equivalentemente, il rango è il massimo numero di vettori colonna linearmente indipendenti di A.

La stessa cosa è equivalente per i vettori riga.

Osservazione: Dalla definizione si può osservare che vale sempre $0 \leq rg(A) \leq min\{$ Numero di righe di A, Numero di colonne di A$\}$

Ranghi di matrici elementari

Riportiamo qui alcuni ranghi di matrici elementari, utili per calcolare il rango di altre matrici.

Matrice Nulla

$$rg \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & ... & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Il rango di una matrice che ha tutti 0 come scalari è sempre 0. Si può osservare che se una matrice ha almeno uno scalare $\neq 0$, allora avrà almeno rango 1.

Matrice Identità

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Numero di Righe/Colonne}$$

Il rango di una matrice identità (che è per forza quadrata) è uguale al numero di righe o colonne della matrice.

Matrice Diagonale

$$rg\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = \text{Numero di } a_{ii} \neq 0$$

Il rango di una matrice diagonale è il numero di elementi sulla diagonale diversi da 0

Matrice a Scala Il rango di una matrice a scala è il numero di righe della matrice diverse da 0.
Il rango delle matrici a scala è molto importante perchè viene utilizzato spesso per trovare il rango di matrici più complesse.

2.3 Trasformazioni Elementari

Le trasformazioni elementari sono operazioni sulle matrici, che possono essere applicate su righe e/o colonne che **lasciano invariato il rango di una matrice**. Sono infatti spesso utilizzate per semplificare una matrice in modo da trovarne il rango più facilmente.

Le tre trasformazioni elementari Le trasformazioni elementari sono tre, e possono essere effettuate sia su righe che su colonne. Noi riporteremo le operazioni sulle righe, ma sono uguali anche per le colonne.

1. Scambiare due righe.
2. Moltiplicare una riga per $\lambda \neq 0 \in R$
3. Rimpiazzare una riga r_i della matrice con $r_i + \lambda r_j$, $\lambda \in R$ e r_j un'altra riga della matrice.

Corollario : Sia T una traformazione elementare, allora $rg(T(A)) = rg(A)$.

Proposizione : $T(B) = T(Id) \cdot B$

Esempio: vogliamo trovare il rango della matrice:

$$rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Utilizzo le trasformazioni elementari per ridurre questa matrice a Scala, ovvero devo annullare il primo elemento di r_2 e i primi due elementi di r_3, sostituendo una riga $r_i con r_i + \lambda r_j$:

1. $r_2 := r_2 - 2r_1$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
2. $r_3 := r_3 + r_1$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$
3. $r_3 := r_3 - \frac{1}{3}r_2$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 6 \end{pmatrix}$$

Avendo ridotto la matrice a scala, possiamo contare le righe non nulle e trovare che il rango di questa matrice è 3.

Osservazione: Siccome nell'esempio precedente abbiamo operato sulle righe, i rapporti di linearità sulle colonne vengono mantenuti.
Più precisamente, siano A_i le colonne di una matrice A. Allora:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i = \underline{0} \longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(A_i) = \underline{0}$$

Dove $T(A)$ è la trasformata di A per T <u>sulle righe</u>.

2.3.1 Matrici a Scala

Le matrici a scala sono un tipo di matrice molto utile perchè è facile trovarne il rango.

DEFINIZIONE

Una matrice A è **a scala** se il numero di zeri a sinistra della $i-$esima riga $\underline{r_i}$ è strettamente maggiore al numero di zeri di r_{i-1}.

Sia B una matrice qualunque, allora $\exists T_1, T_2, ..., T_h$[1] tali che $T_h(T_{h-1}(...(T(B))))$ è a scala. Ovvero, da qualunque matrice è possibile eseguire delle trasformazioni in modo da trasformarla in una matrice a scala.

2.4 Sistemi di Equazioni Lineari

DEFINIZIONE

Un'equazione lineare è un insieme di simboli:

$$a_1x_1, ..., a_nx_n = b$$

Dove $b \in \mathbb{R}$ e $a_i \in \mathbb{R}$ sono valori fissati, e x_i sono variabili.

Un sistema di Equazioni lineari quindi ha questa forma:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 ... a_{1,n}x_n \\ a_{2,1}x_1 + ... \end{cases}$$

Ad un sistema di equazioni lineari possiamo associare due matrici:

- Matrice Incompleta: $A = (a_{ij})$
- Matrice Completa: $A|\underline{b}$, ovvero A con aggiunta la colonna $\underline{b}$

Possiamo quindi riscrivere il sitema in forma matriciale $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$, dove

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

In un sistema di equazioni lineari $A\underline{x} = \underline{b}$ la soluzione $\underline{c}$ è tale che $A\underline{c} = \underline{b}$.

Proposizione

Se A è **invertibile**, il sistema ha una **unica soluzione**.

[1] Una serie di trasformazioni

Dato $A\underline{x} = \underline{b}$, tale soluzione è:

$$A^{-1}A\underline{x} = A^{-1}\underline{b} \implies \underline{x} = A^{-1}\underline{b}$$

Nota che $A^{-1}A = Id_n$. Se $\underline{b} = 0$, diremo che il sistema è omogeneo.

2.4.1 Teorema di Rouche-Capelli

Introduciamo ora uno dei teoremi più importanti per i sistemi di equazioni lineari.
Questo teorema è diviso in due parti:

1. Il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ ha soluzione *sse*:

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A|\underline{b})$$

   Ovvero se il rango della matrice Incompleta A è uguale a quello della matrice Completa $A|\underline{b}$.

2. Nel caso in cui ci sia soluzione, l'insieme V di tutte le soluzioni è scrivibile come:

$$\underline{c} + W = \{\underline{c} + \underline{w} : \underline{w} \in W\}$$

   Dove $\underline{c}$ è una soluzione qualsiasi del sistema, e $W = \{$ soluzione di $A\underline{x} = \underline{0}\}$. W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

Soluzione di Sistemi Lineari Il teorema di Rouche Capelli ci permette quindi di stabilire se il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ ammette soluzioni facendo delle valutazioni sui ranghi di A e di $A|b$:

$$A\underline{x} = \underline{b} \text{ ammette soluzioni sse } rg(A) = rg(A|b).$$

Osservazione: Se il rango di A e di $A|b$ è uguale, significa che $\underline{b}$ è combinazione lineare delle colonne di A e di conseguenza il sistema è risovibile.

Numero di soluzioni Consideriamo un sistema lineare di m equazioni in n incognite. Il teorema di Rouché-Capelli stabilisce che *Il sistema ammette soluzioni sse* $rk(A) = rk(A|b)$. In particolare, se $rk(A) = rk(A|b) = n$, ovvero se il rango di A è uguale al numero di incognite, allora abbiamo una e una sola soluzione. Se invece $rk(A) = rk(A|b) < n$ allora il sistema ammette $\infty^{n-rk(a)}$, quindi ammette infinite soluzioni che dipendono da $n - rk(A)$ parametri.

Negli Esercizi Dobbiamo usare quindi le Trasformazioni Elementari per stabilire se $\underline{b}$ è combinazione lineare delle colonne di A. Opero quindi sulle righe di $A|b$ per per ridurla a scala.

Perchè opero direttamente su $A|b$? Perchè sia $S(A|b)$ una riduzione a scala di $A|b$ avendo operato sulle righe. Abbiamo che $S(A|b) = (S(A)|S(b))$, con $S = T_h \circ T_{h-1} \circ ... \circ T_1$, e $S(b)$ è combinazione lineare di $S(A)$ sse b è combinazione lineare delle colonne di A.

Esempio: Prendiamo il sistema lineare:

$$\begin{cases} x - z + w = 1 \\ y + z - w = 0 \\ x - y + w = -1 \end{cases}$$

Vogliamo stabilire se esistono edlle soluzioni ed eventualmente trovarle.

1. Stabilisco se esistono delle soluzioni usando il teorema di Rouche-Capelli, verificando se: $rg(A) = rg(A|b)$. costruisco quindi la matrice completa e la riduco a scala:

$$A|b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$r_3 := r_3 - r_1 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$r_3 := r_3 + r_2 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ora che la matrice $A|b$ è a scala conto le righe non nulle (sia di A che di $A|b$) e trovo il rango di entrambe:

$$rg(A|b) = rg(A) = 3$$

Di conseguenza **Il sitema ha soluzione**.

2. Ora devo trovare la soluzione del sistema. Avendo operato solo sulel righe so che la soluzione della matrice trasformata a scala è

la stessa della matrice originale, opero quindi su quella in modo da semplificare i conti.

$$\begin{cases} x - z + w = 1 \\ y + z - w = 0 \\ 2z - w = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ z = y - 2 \\ w = 2y - 2 \end{cases}$$

Siccome il sistema ha 3 equazioni in 4 variabili, allora ha infinite soluzioni che variano con y. La solzione S del sistema può essere scritta in 3 modi diversi:

- $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 1-y, z = y-2, w = 2y-2, y \in \mathbb{R}\}$ Forma Standard.
- $S = \{(1 - y, y, y - 2, 2y - 2) : y \in \mathbb{R}\}$ Forma Parametrica.
- $S = \{(1, 0, -2-2)+ < -1, 1, 1, 2 >\}$ Forma dal teorema $\underline{c}+W$.

2.5 Determinante

Il Determinante é un oggetto matematico definito solo per matrici quadrate. Come oggetto, esso é una funzione:

$$det_n : \{ \text{ Matrici quadrate di ordine } n \ \} \rightarrow \mathbb{R}$$

Il determinante é legato al rango ma contiene "meno informazioni".

Come dicitura utilizzeremo anche il rango per i vettori colonna di una matrice $n \times n$:

$$(c_1, c_2, ..., c_n) \rightarrow det_n(c_1, c_2, ..., c_n)$$

In alcuni casi il determinante puó dirci se il rango é massimo, quindi se tutte le righe/colonne sono linearmente indipendenti.

Proprietá caratterizzanti del Determinante Per definire il determinante useremo le 4 proprietá che lo caratterizzano come una funzione unica:

1. $det(c_1, ..., \underline{a} + \underline{b}, ..., c_n) = det(c_1, ..., \underline{a}, ..., c_n) + det(c_1, ..., \underline{b}, ..., c_n)$
2. $det(c_1, ..., \lambda\underline{c}, ..., c_n) = \lambda \cdot det(c_1, ..., \underline{c}, ..., c_n)$
3. $det(c_1, ..., \underline{c}, \underline{c}, ..., c_n) = 0$
   Ovvero se due vettori colonna sono uguali il determinante é 0, anche se non sono adiacenti.

4. $det(\underline{e}_1, \underline{e}_2, ..., \underline{e}_n) = 1$, dove $\{e_j\}$ é la base canonica di $\mathbb{R}^n$.

Le proprietá 1 e 2 sono dette di Multilinearitá, mentre la 3 é detta di Alternanza.

Teorema

Esiste un'unica funzione che soddisfi le proprietá da 1 a 4, ed essa é il determinante.

Altre proprietà del determinante Altre proprietà importanti del determinante sono:

- In generale, $det(A+B)$ non è esprimibile in funzione di $det(A)$ e $det(B)$.
- Teorema di Binet: $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$.

2.5.1 Determinante di matrici semplici

Il calcolo del determinante di una matrice quadrata dipende dalla dimensione della matrice.

Determinante di Matrici 1×1

Una matrice quadrata di ordine 1, quindi una matrice formata da un solo scalare, ha come determinante lo scalare stesso:

$$det \begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix} = a_{11}$$

Determinante di Matrici 2×2

Il determinante di una matrice quadra di ordine 2 è dato dal prodotto degli elementi della diagonale principale meno il prodotto degli elementi dell'antidiagonale.

$$det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a \cdot d) - (b \cdot c)$$

Determinante di Matrici Diagonali

In una matrice diagonale, il determinante diventa il prodotto degli elementi lungo la diagonale. Ne segue che la matrice identità avrà sempre determinante 1, a prescindere dalla sua dimensione.

2.5.2 Formula di Laplace

La formula di Laplace ci permette di calcolare il determinante di matrici quadrate di ordine superiore a 2.

Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $n \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Denotiamo con A_{ij} la sottomatric ottenuta eliminando la $i-$esima riga e la $j-$esima colonna di A.

Il teorema Il teorema ci permette di sviluppare sia per riga che per colonna, nel seguente modo, riportato prima per riga:

$$det_n(A) = \sum_{j=1}^{n} (1)^{i+j} \cdot det_{n-1}(A_{ij})$$

oppure, sviluppando lungo la j-esima colonna:

$$det_n(A) = \sum_{i=1}^{n} (1)^{i+j} \cdot det_{n-1}(A_{ij})$$

In parole povere Scelgo una riga o una colonna su cui lavorare, possibilmente una con tanti 0 per ridurre il numero di calcoli, poi scorrendo per ogni elemento della riga/colonna calcolo il suo complemento algebrico e li sommo.

Corollario Sia ${}^tA$ la matrice trasposta di A, ovvero la matrice avente come righe le colonne di A e come colonne le righe di A. allora:

$$det({}^tA) = det(A)$$

2.5.3 Determinante e Trasformazioni Elementari

Quando effettuiamo delle trasformazioni elementari queste possono alterare il determinante, ma lo fanno in maniera prevedibile:

1. Permutazione di due righe $\Longrightarrow$ Il determinante cambia di segno.

2. Moltiplicazione di una riga per $\lambda \neq 0 \implies$ il determinante viene moltiplicato per λ
3. Rimpiazzare $r_i := r_i + \alpha r_j \implies$ il determinante non cambia.

L'uso delle trasformazioni elementari può quindi semplificare il calcolo del determinante di una matrice a patto di tracciare tutte le trasformazioni elementari effettuate.

Corollario del Teorema di Binet Sia A invertibile, allora:

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$$

In particolare, $det(A) \neq 0$ se A è invertibile.

2.5.4 Teorema di Cramer

Il teorema di Cramer definisce una relazione tra il Determinante e i Sistemi di Equazioni Lineari.

Teorema di Cramer

Sia A una matrice $n \times n$.

1. Il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ ammette un'unica soluzione sse $det(A) \neq 0$.
2. In tal caso, la soluzione ${}^t(c_1, c_2, ..., c_n)$ è data da:

$$c_i = \frac{det(A_1|...|A_{i-1}|B|A_{i+1}|...|A_n)}{det(A)}$$

Dove $\underline{A}_j$ è la $j-$esima colonna di A.

Osservazione: $\underline{b}$ è un vettore di n scalari dello spazio $\mathbb{R}^{n\times 1}$, quindi la soluzione $A\underline{x}$ deve essere la stessa cosa.

2.5.5 Criterio dei Minori

Come sappiamo, il determinante di matrici non quadrate non esiste, ma esiste il determinante di sottomatrici quadrate che possiamo considerare. Definiamo quindi cos'è una sottomatrice e il concetto di Minore:

DEFINIZIONE

Una **sottomatrice** di A è una matrice ottenuta rimuovendo delle righe e/o colonne di A.
Un **Minore** di A è il *determinante di una sottomatrice quadrata di* A.
L'ordine di un minore è l'ordine della sua sottomatrice.

Da qui, possiamo enunciare il teorema che definisce la relazione tra determinante e rango:

Teorema

Sia A una matrice non necessariamente quadrata, allora il **Rango** di A è uguale al **massimo ordine dei minori** non nulli di A.

Esempio: Sia A una matrice 3×5:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il rango di questa matrice può essere al massimo 3, proviamo a trovarlo tramite il determinante delle sottomatrici:

1. Il rango non può essere 0, perchè $\exists$ minore di ordine 1 non nullo:
$$det(1) = 1$$
2. Il rango non può essere 1, perchè $\exists$ minore di ordine 2 non nullo:
$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$
3. Dal teorema precedente se esibisco una sottomatrice di ordine 3 con $det \neq 0$ ho dimostrato che $rg(A) = 3$.
Se però trovo $B =$ sottomatrice di A di ordine 3×3 e $det(B) = 0$ non posso concludere nulla sul determinante di A, perchè potrebbe essereci un'altra sottomatrice 3×3 con determinante non nullo. Questo significa che dovrei calcolare il determinante di ogni sottomatrice 3×3 finchè non ne trovo uno non nullo, il che richiederebbe molti calcoli.

D'altro canto posso usare le seguenti **considerazioni per risparmiarmi i calcoli**:

- $det(B) \neq 0 \iff$ Colonne di B linearmente indipendenti $\iff$ $rg(B)$ massimo.
- Se due colonne sono indipendenti, allora anche "allungandole" rimangono linearmente indipendenti.

Da queste due considerazioni posso prendere la matrice 2×2 che ho preso in precedenza, ed essendo le due colonne linearmente indipendneti lo sono anche le colonne complete di lunghezza 3.
Da qui mi basta prendere una **terza colonna linearmente indipendente** ad esse (per esempio c_4) per avere una sottomatrice $3x3$ con le colonne linearmente indipendenti, quindi determinante diverso da 0.

Quindi, prendendo la sottomatrice 3×3 fatta dalle colonne c_1, c_2, c_4 noto che ha determinante diverso da zero, quindi $rg(A) = 3$.

2.6 Matrici Inverse

DEFINIZIONE

Sia A una matrice quadrata. Essa è **Invertibile** *se e solo se*:

$$\exists B : A \cdot B = B \cdot A = Id$$

In tal caso B è detta **Matrice Inversa** di A e si indica con:

$$B = A^{-1}$$

Come facciamo a sapere se una matrice è invertibile?

Teorema

Una matrice è invertibile *se e solo se* il suo **determinante è non nullo**.
In tal caso, l'elemento della matrice inversa $A^{-1}(x_{ij})$ è dato da:

$$x_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \frac{det(A_{ji})}{edt(A)}$$

In cui A_{ji} è la sottomatrice ottenuta rimuovendo la j-esima riga e la i-esima colonna da A.

Procedura Standard per il Calcolo dell'inversa

Prendiamo la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinare la matrice A^{-1}.

Innanzitutto verifichiamo se essa è invertibile: $det(A) = 2 \neq 0$, quindi è invertibile.
Procediamo ora al calcolo della matrice inversa:

1. Trasponiamo la matrice

$$A \rightarrow^t A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Calcoliamo la Matrice dei complementi algebrici, ovvero la matrice che contiene $det(A_{ji})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Aggiustiamo i segni tramite $-1^{(i+j)}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Dividiamo ogni elemento per $det(A) = 2$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

2.6.1 L'Algorimto di Gauss-Jordan

Ricordiamo che se T è una trasformazione elementare sulle righe, allora:

$$T(A) = T(Id) \cdot A$$

Usiamo la seguente proposizione:

Proposizione Sia A una matrice quadrata, allora A è invertibile sse $\exists$ successione di trasformazioni elementari sulle righe $T_1, ..., T_k$ tale che:

$$T_k(T_{k-1}(...(T(A)))) = Id$$

Da ciò segue che ponendo $c_i := T_i(Id)$,

$$c_k \cdot ... \cdot c_2 \cdot c_1 \cdot A = Id$$

In cui la sequenza di ci c rappresenta la matrice inversa.

2.7 Recap: Determinante, Invertibilità e Rango

Facciamo un piccolo recap sulle relazioni tra Determinante, Invertibilità e Rango di una matrice:

Matrici Non Quadrate Sia A una matrice qualunque, quindi non (necessariamente) quadrata: Ne è definito solo il Rango, Ovvero:

$$\text{Rango(A)} = \begin{cases} \text{Massimo numero di Righe linearmente indipendenti} \\ \text{Massimo numero di Colonne linearmente indipendenti} \\ \text{Massimo ordine di minori non nulli di } A \end{cases}$$

Matrici Quadrate Sia A una matrice quadrata $n \times n$, allora:

$$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ è Invertibile} \Leftrightarrow \text{rg}(A) = n$$

Capitolo 3

Applicazioni Lineari

3.1 Introduzione

Le funzioni insiemistiche normali non sono adatte a studiare gli spazi vettoriali, quindi per studiare gli spazi vettoriali tramite funzioni è meglio imporre condizioni a tali funzioni.

DEFINIZIONE

Siano V e W due spazi vettoriali.
Un'applicazione $f : V \to W$ è **Lineare**, o un **Omomorfismo** se:

1. $f(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = f(\underline{v}_1) + f(\underline{v}_2)$
2. $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$.

$\forall \underline{v}, \underline{v_1}, \underline{v_2} \in V, \lambda \in \mathbb{R}$

Equivalentemente l'immagine di una combinazione lineare è la combinazione lineare delle immagini: $f(\lambda \underline{v}_1 + \beta \underline{v}_2) = \lambda f(\underline{v}_1) + \beta f(\underline{v}_2)$

Se $V = W$, allora l'applicazione lineare si chiama **Endomorfismo** (di V).

Corollari Prendiamo sempre f, V e W dalla definizione:

- **Zero**: $f(\underline{0}_v) = \underline{0}_w$
- **Opposto**: $f(-\underline{v}) = -f\underline{v}$.
- **Sottospazi**: Se $U < V$, $f(U) < W$

Osservazione: Se $\{\underline{v_i}\}$ è una base di V, ogni scelta di $f(\underline{v_i})$ è compatibile con le condizioni di linearità.
Cioè, per ogni scetla di $\{\underline{w_i}\} \subset W \exists! f : V \to W$ Lineare t.c. $f(\{\underline{v_i}\}) = \underline{w}_i$

Corollario Sia $f : V \to W$ lineare, allora dim $f(v) \geq$ dim V.

3.1.1 Isomorfismi

DEFINIZIONE

1. Due spazi vettoriali V e W sono detti isomorfi se esistono:

$$f : V \to W \text{ e } g : W \to V$$

   diverse e entrambe lineari t.c:

$$g \circ f = id_V \text{ e } f \circ g = id_W$$

   Due spazi sono isomorfi sse $dim(V) = dim(W)$.

2. $f : V \to W$ è detta **isomorfismo** se è lineare e iniettiva.

3.1.2 Nucleo

Definiamo ora il concetto di Nucleo, o Kernel di un'applicazione lineare:

DEFINIZIONE

Il **Kernel** (o Nucleo) di un'applicazione lineare é un sottoinsieme del suo dominio formato da *tutti e soli i vettori che hanno come immagine lo zero del codominio.*

$$Ker(F) := \{\underline{v} \in V : F(\underline{v}) = \underline{0}_W\}$$

Il concetto di Nucleo di un'applicazione lineare è importante perchè fornisce un informazione fondamentale sulle trasformazioni lineari: ci dice, infatti, quali elementi dello spazio di partenza hanno come immagine lo zero dello spazio di arrivo. Inoltre, lo studio del nucleo fornisce un condizione necessaria e sufficiente relativa all'iniettività delle applicazioni lineari.

Dimensione del Nucleo

Siccome il Nucleo è un sottospazio vettoriale ha una dimensione, anche detta indice di nullità.
Sia $f : V \to W$, essendo il nucleo un sottospazio di V dovrà valere che:

$$0 \leq dim(Ker(f)) \leq dim(V)$$

Nei due casi limite avremo:

1. $dim(Ker(f)) = 0$ si dice nucleo banale, in cui l'unico elemento nel nucleo è $\underline{v} = 0$.
2. $dim(Ker(f)) = dim(V)$ allora il nucleo deve conicidere con V, quindi f è l'applicazione che associa a ogni elemento di V lo zero di W.

3.1.3 Iniettività e Suriettività

Dati due spazi vettoriali V, W e un'applicazione $f : V \to W$ possiamo definire se quest'ultima è iniettiva o suriettiva:

Iniettivitá

DEFINIZIONE

Un'applicazione lineare f è iniettiva se e solo se la dimensione del suo nucleo é 0:

$$dim(Ker(f)) = 0 \implies f \text{ è iniettiva}$$

Si può anche affermare che:

- Se $dim(V) > dim(W)$ l'applicazione lineare non è iniettiva
- Se $dim(V) = dim(W)$ l'applicazione lineare è iniettiva se e solo se è suriettiva.

Suriettività

DEFINIZIONE

L'applicazione lineare f è suriettiva se e solo se la dimensione dell'immagine è uguale alla dimensione dello spazio vettoriale di destinazione W.

$$dim(Im(f)) = dim(W) \implies f \text{ è suriettiva}$$

Si può anche affermare che:

- Se $dim(V) < dim(W)$ l'applicazione lineare non è suriettiva

3.1.4 Teorema di Grasman

Teorema di Grasman

$f : V \to W$ lineare. Allora $dim(V) = dim(f(V)) = dim(N(f))$

corollario sia $V_1, V_2 < V$, allora $dim(V_1 + V_2) = dim(V_1) + dim(V_2) - dim(V_1 \cap V_2)$

Corollario sia $dim(W) = dim(V), f : V \to W$, allora:

$$f \text{ iniettiva} \leftrightarrow f \text{ è suriettiva} \leftrightarrow f \text{ è Biiettiva}$$

3.2 Matrice Associata

Una matrice assocaita a un'applicazione lineare *rappresenta la trasformazione lineare cui è riferita rispetto a due fissate basi degli spazi vettoriali* di partenza e d'arrivo.
Tale matrice fornisce tutte le informazioni relative alla trasformazione cui è associata, dunque riveste un ruolo da protagonista nell'ambito delle applicazioni lineari.

3.2.1 Costruzione di una Matrice Associata

Consideriamo due spazi vettoriali V, W definiti sullo stesso campo e di dimensioni rispettivamente pari a n, m. e consideriamo un'applicazione lineare $f : V \to W$.
Siano:

$$B_V = \{v_1, ..., v_n\} \text{ e } B_W = \{w_1, ..., w_m\} \text{ due basi, di } V \text{ e } W$$

Per **costruire** la matrice associata all'applicazione f rispetto alle basi B_V e B_W occorre procdere nel modo seguente:

1. Determinare l'immagine rispetto ad f di ogni vettore $v_i \in B_V$:

$$f(v_1), ..., f(v_n)$$

2. I vettori ottenuti sono elementi di W, e possono essere espressi come combinazione linerae dei vettori di B_W:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= a_{11}w_1 + ... + a_{m1}w_m \\ f(v_2) &= a_{12}w_1 + ... + a_{m2}w_m \\ &\vdots \\ f(v_n) &= a_{11n}w_1 + ... + a_{mn}w_m \end{aligned}$$

3. La matrice che ha per $j-$esima colonna il vettore delle coordinate dell'immagine $f(v_j)$ rispetto alla abse di W si dice matrice associata all'applicazione lineare f rispetto alle basi B_V e B_W:

$$M_{B_V}^{B_W} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

3.3 Prodotti Interni

I prodotti interni sono una struttura supplementare agli spazi vettoriali.

DEFINIZIONE

Un prodotto interno in uno spazio vettoriale V è una funzione $V \times V \to K$:

$$(v_1, v_2) \to < \underline{v_1}, \underline{v_2} >$$

Tale che:

1. $< \underline{v}, \underline{w} >=< \underline{w}, \underline{v} >$
2. $< \alpha\underline{v_1} + \beta\underline{v_2}, \underline{w} >= \alpha < \underline{v_1}, \underline{w} > +\beta < \underline{v_2}, \underline{w} >$
3. $< \underline{v}, \underline{v} >> 0$ se $\underline{0} \neq \underline{v}$

Capitolo 4

Diagonalizzabilità di Matrici

4.1 Definizione

DEFINIZIONE

Sia A una matrice quadrata di ordine N a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$. Si dice che A è una matrice diagonalizzabile se è simile ad una matrice diagonale D di ordine n, ovvero è diagonalizzabile se e solo se esiste una matrice invertibile P talche $D = P^{-1}AP$.

4.1.1 Teorema di Diagonalizzabilità

Il teorema di diagonalizzabilità fornisce delle condizioni **necessarie e sufficienti** affinchè una matrice quadrata sia diagonalizzabile:

Una matrice A **è diagonalizzabile se e solo se** valgono le seguenti condizioni:

1. Il numero degli autovalori di A è uguale all'ordine della matrice.
2. La molteplicità algebrica di ogni autovalore è uguale alla relativa molteplicità geometrica.

4.1.2 Casi Particolari

Esistono alcuni casi particolari:

- Se A è una matrice simmetrica, ovvero $a_{ij} = a_{ji} \forall i \neq j$ allora A è sempre diagonalizzabile.
- Se A è una matrice quadrata di ordine n che ammette esattamente n autovalori distinti in $\mathbb{K}$, allora A è diagonalizzabile nel campo K.

4.2 Autovalori e Autovettori

La nozione di Autovalore si riferisce solamente alle matrici quadrate.

DEFINIZIONE

Si dice che lo scalare $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ è un autovalore della matrice quadrata A se esiste un vettore colonna non nullo $\underline{v} \in \mathbb{K}^n$ tale che:

$$A\underline{v} = \lambda_0 \underline{v}$$

Il vettore $\underline{v}$ è detto autovettore relativo all'autovalore λ_0

Osservazione: Se $\underline{v}$ è un autovettore di λ_0 allora lo è anche $\alpha \underline{v}$ con $\alpha \in \mathbb{K}$.