

GAL - Domande d'Esame

Fabio Ferrario

@fefabo

2023/2024

Indice

1	Domande Aperte	3
2	Domande Chiuse	4
2.1	Algebra Lineare	4
2.1.1	Diagonalizzabilità di Matrici	10

Capitolo 1

Domande Aperte

1

SOTTOSPAZI VETTORIALI

1. Determinare la dimensione e trovare una base del sottospazio:
 $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y - x = 2z\}$
2. Completare la base del punto precedente ad una base di \mathbb{R}^3 con un vettore v ortogonale a T .

Risposta:

1. Prendiamo l'equazione che ci da: $y - x = 2z$. è chiaramente l'equazione di un piano (quindi con dimensione =2). In ogni caso, la parametrizziamo:

Capitolo 2

Domande Chiuse

2.1 Algebra Lineare

1

INDIPENDENZA DI VETTORI

Se devo verificare che n vettori $v_i \in \mathbb{R}^m$ siano linearmente indipendenti, cosa posso fare?

(a) Creo una matrice con v_i come vettori riga che abbia determinante non nullo

(b) Creo una matrice con v_i come vettori riga e cerco una sottomatrice quadrata di ordine n Invertibile

(c) Cerco una combinazione lineare dei vettori v_i che mi dia il vettore nullo

(d) Creo una matrice con v_i come vettori colonna e verifico che il rango di questa matrice sia m

Risposta: b, perchè se ho una sottomatrice di ordine n invertibile allora il suo determinante è zero. Per il teorema dei minimi, significa che il rango della matrice è *almeno* n , quindi è massimo e tutti i suoi vettori sono linearmente indipendenti.

2

ROUCHÉ-CAPELLI

Sia $Ax = b$ un sistema di equazioni lineari con più incognite che equazioni. Allora:

- | | |
|---|---|
| <p>(a) Agendo con operazioni elementari su righe e colonne della matrice completa $A b$ ottengo una matrice completa il cui sistema associato possiede le stesse soluzioni di quello di partenza</p> <p>(b) Scegliendo b opportunamente, il sistema ha un'unica soluzione</p> | <p>(c) Dato un b qualsiasi, mi posso scegliere A in modo che il sistema abbia soluzioni e che la somma di due di esse sia ancora una soluzione</p> <p>(d) Se il rango di A è massimo, allora il sistema ha soluzione</p> |
|---|---|

Risposta: **d**, Abbiamo che $n > m$, di conseguenza il rango di A è al massimo m . Aggiungendo la colonna b , il rango massimo di $(A|b)$ è ancora m . Quindi se il rango di A è m , ovvero è massimo, allora il sistema ammette soluzioni (per R-C).

inoltre per il teorema di Rouchè-Capelli, sappiamo che se il numero delle incognite $> \text{rango}(A)$, allora il sistema ammette $\infty^{m-\text{rank}(A)}$ soluzioni.

3ROUCHÈ-CAPELLI

Sia $Ax = b$ un sistema che non ammette soluzione. Scegliendo un vettore c è possibile ottenere che $Ax = b + c$ abbia infinite soluzioni?

- | | |
|--|---|
| <p>(a) Sì, ma solo se A non è di rango massimo</p> <p>(b) Sì, per un qualsiasi A</p> | <p>(c) No, mai</p> <p>(d) Sì, ma solo se A è quadrata e di determinante non nullo.</p> |
|--|---|

Risposta: **a (da capire)**. Se $Ax = b$ non ammette soluzioni, allora $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A|b)$. Per ottenere un sistema con infinite soluzioni, dobbiamo avere $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) < n$ con n numero di incognite.

4

Se la somma di tre numeri positivi è 120, qual'è il massimo valore possibile tra il loro prodotto?

- | | |
|--|--|
| <p>(a) $30^2 \cdot 80$</p> <p>(b) $240^2 \cdot 30$</p> | <p>(c) 30^4</p> <p>(d) $1600 \cdot 40$</p> |
|--|--|

Risposta: La somma dei tre numeri positivi è 120, e supponiamo che i tre numeri siano x , y , e z . L'equazione della somma è espressa come:

$$x + y + z = 120$$

Per massimizzare il prodotto, distribuiremo i numeri in modo che siano il più possibile vicini, il che si verifica quando sono tutti uguali. Quindi, possiamo assegnare a ciascun numero il valore di $\frac{120}{3} = 40$. Il prodotto massimo sarà quindi:

$$P = x \cdot y \cdot z = 40 \cdot 40 \cdot 40 = 64000$$

Pertanto, il massimo valore possibile del prodotto è 64000, ovvero la risposta *d*.

5

DETERMINANTE

Sia A una matrice quadrata e v, w due suoi vettori colonna. Se b è la matrice ottenuta da A rimpiazzando il vettore v con il vettore $v + \alpha \cdot w$ per un numero reale α , che informazione abbiamo sul determinante di B ?

- | | |
|--------------------------------------|--|
| (a) $\text{Det}(B) = -\text{Det}(A)$ | (c) $\text{Det}(B) = \alpha \cdot \text{Det}(A)$ |
| (b) $\text{Det}(B) = \text{Det}(A)$ | (d) $\text{Det}(B) = 0$ |

Risposta: b. Nelle trasformazioni elementari, rimpiazzare una riga/colonna r_i con $r_i + \alpha r_j$ non cambia il determinante.

6

RANGO

Sia $Ax = b$ un sistema di equazioni lineari con più equazioni che incognite. Allora (si scelga l'affermazione corretta):

- | | |
|---|---|
| (a) Se ha soluzione, il rango della matrice completa $A b$ non può essere massimo | (c) Se possiede soluzione, e non è unica, allora la somma di due soluzioni (PROSEGUE) |
| (b) La soluzione, se esiste, necessariamente non è unica | (d) Non ha soluzione |

Risposta: Se $Ax = b$ ha più equazioni m che incognite n , allora il massimo $rg(A) = n > m$. Supponendo di aggiungere una colonna b , adesso il massimo $rg(A|b) = n + 1$, ma se $rg(A|b) = n + 1$ il sistema non ammette soluzioni perchè è il rango di A è minore. Quindi, sicuramente se esiste soluzione il rango di $(A|b)$ non può essere massimo.

7RANGO

Sia A una matrice $n \times m$ di rango $r > 0$. Quali delle seguenti affermazioni è CORRETTA:

- | | |
|--|--|
| <p>(a) r può essere strettamente maggiore di m</p> <p>(b) Non esistono $r - 1$ vettori riga di A linearmente indipendenti.</p> | <p>(c) il determinante di A è uguale a r</p> <p>(d) Esiste una sottomatrice quadrata B di A di ordine $r - 1$ con determinante non nullo (se $r \geq 2$)</p> |
|--|--|

Risposta: Andando per esclusione:

- a No, perchè il rango non può essere maggiore del numero di righe o del numero di colonne.
- b No, perchè il rango è il massimo numero di vettori riga/colonna linearmente indipendenti.
- c No, Il rango non da informazioni sul valore del determinante.
- d Dal criterio dei minori sappiamo che il determinante di A è il massimo ordine dei minori *non nulli* di essa, quindi se il rango è r sicuramente \exists sottomatrice B di ordine r (e quindi $r-1$) con determinante non nullo.

8DETERMINANTE

Sia A una matrice quadrata e v, w due suoi vettori colonna diversi. Se B è la matrice ottenuta da A rimpiazzando il vettore v con il vettore $\alpha \cdot v + \beta \cdot w$ per $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, che informazioni abbiamo sul determinante di B ?

Risposta: Possiamo considerare questa operazione come due trasformazioni elementari: Prima moltiplichiamo la colonna v per α , quindi anche il determinante viene moltiplicato per α , poi sostituiamo v con $v + \beta w$, lasciando il determinante invariato. Quindi la risposta è $c : \det(B) = \alpha \cdot \det(A)$.

9

Sia $A(t)$ una famiglia di matrici quadrate dipendenti da un parametro $t \in \mathbb{R}$. Supponiamo che $\det(A(1)) = 5$ e $\det(A(-1)) = -5$. Quali delle seguenti affermazioni è possibile concludere?

- | | |
|--|--|
| <p>(a) Tutti i vettori riga $A(1)$ sono indipendenti e il rango di $A(1)$ è massimo.</p> <p>(b) $\text{rg}(A(1)) = 5$</p> | <p>(c) $\det(A(0)) = 0$</p> <p>(d) Il rango di $A(1)$ è massimo, e $\det(A(1) + A(-1)) = 0$</p> |
|--|--|

Risposta: a

In generale, sappiamo che $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \text{rg}(A) = n$, quindi il rango è massimo. Se il rango è massimo, tutti i vettori riga (e colonna, essendo quadrata) sono linearmente indipendenti.

Inoltre escludiamo la risposta d perchè in generale non possiamo determinare $\det(A + B)$ partendo dai determinanti di A e B .

10

Sia A una matrice quadrata $n \times n$ tale che la somma delle righe è uguale ad una colonna c di A . Cosa posso concludere su A ?

- | | |
|--|---|
| <p>(a) $\text{rg}(A) < n$</p> <p>(b) $\det(A) \neq 0$</p> | <p>(c) Esiste un minore di A di ordine $n = 1$ invertibile se $c \neq 0$</p> <p>(d) Se la colonna c è uguale ad una riga di A non è invertibile.</p> |
|--|---|

Risposta: a, da capire

11MINORI - RANGO

Supponiamo che una matrice A di dimensioni 4×6 (cioè 4 righe) abbia i determinanti di tutti i minori di ordine 3. Quale delle seguenti affermazioni è falsa?

- | | |
|--|---|
| <p>(a) Non esistono 4 colonne linearmente indipendenti in A</p> <p>(b) Il rango massimo che potrebbe avere A è 4</p> | <p>(c) Potrebbe esistere una sottomatrice 2×2 di A invertibile.</p> <p>(d) Le righe di A sono linearmente indipendenti.</p> |
|--|---|

Risposta: Dal teorema dei minori sappiamo che, avendo i determinanti di almeno un minore di ordine 3 diverso da 0 (almeno così pare dal testo), sicuramente il Rango di A è ≥ 3 .

Quindi non possiamo dire che tutte le righe di A sono linearmente indipendenti, ma che almeno 3 lo sono.

12CRAMER

Sia $Ax = b$ un sistema di equazioni lineari con un numero di equazioni uguale al numero di incognite. Allora (si scelga l'affermazione corretta):

- | | |
|--|---|
| <p>(a) Se ha soluzione, il rango è massimo</p> <p>(b) Se $Ax = 0$ ha più di una soluzione, $Ax = b$ potrebbe avere una soluzione</p> | <p>(c) Se non ha soluzione, A non è invertibile</p> <p>(d) Se $A b$ ha rango massimo, allora il sistema ha un'unica soluzione</p> |
|--|---|

Risposta: c

Se non ha soluzione, per il teorema di Cramer $\det(A) = 0$, una matrice è invertibile sse il suo determinante è non nullo. Quindi se il sistema non ha soluzione $\implies \det(A) = 0 \implies A$ non è invertibile.

13

Siano A, B due matrici 5×5 tali che $\text{rank}(A) = 3$ e $\text{rank}(B) = 2$. Allora

=

Risposta: In questa domanda ci sono j punti, riporto qui quelle vere:
Da capire

1. Non sono invertibili perchè non hanno rango massimo, quindi $\det = 0$.
2. Il rango indica il massimo numero di vettori riga/colonna linearmente indipendenti.
3. Esistono due minori di ordine 2, A' in A e B' in B tali che $A' \cdot B'$ è una matrice invertibile.

14

Calcolare il rango di una matrice 3×4 al variare di un parametro a

15

Nel sistema composto dalle equazioni $3x - 2y + z = 0$, $\alpha x + y + z = 0$ e $x + \alpha y - z = 0$, per quali valori di α posso avere soluzioni non banali¹?

2.1.1 Diagonalizzabilità di Matrici

38

DIAGONALIZZABILITÀ

Sia k reale. Si consideri la matrice

$$A_k : \begin{pmatrix} 3 & 0 & -7 \\ k & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- | | |
|--|---|
| <p>(a) A_k è diagonalizzabile per ogni scelta di $k \neq 0$</p> <p>(b) A_k è diagonalizzabile se e solo se $k = 0$</p> | <p>(c) A_k è diagonalizzabile se e solo se k è intero non negativo</p> <p>(d) Per qualunque scelta di k, A_k non è diagonalizzabile</p> |
|--|---|

Risposta: B Ricordiamo le condizioni di diagonalizzabilità:

¹La soluzione banale è $(0, 0, 0)$