

Ricerca Operativa e Pianificazione delle Risorse

Fabio Ferrario

@fefabo

Sara Angeretti

@Sara1798

2022/2023

Indice

Introduzione

0.1 Il corso

Il corso di ROPR verrà svolto da:

- Fabio Antonio Stella
- Guglielmo Lulli

Il testo di riferimento è *Frederick S. Hiller and Gerald J. Lieberman, Ricerca Operativa, McGraw-Hill, nona edizione, 2010.*

Il programma

Il Syllabus indica:

- Introduzione: storia-motivazione-esempi
- Ottimizzazione non lineare.
 1. Ottimizzazione di funzioni non lineari ad una variabile: ricerca dicotomia-metodo Bisezione- metodo Newton.
 2. Ottimizzazione di funzioni non lineari multivariate: metodo Gradiente - metodo Newton
 3. Ottimizzazione non lineare vincolate: Condizioni di Karush-Kuhn-Tucker.
- Ottimizzazione lineare e intera.
 1. Introduzione alla programmazione lineare (PL): Proprietà dei problemi di PL, strategie di modellizzazione.
- Soft Computing per l'ottimizzazione.
 1. Algoritmi evolutivi
 2. Reti neurali ed SVM

Gli argomenti in specifico

- Modelli nella Ricerca Operativa
- Introduzione alla Programmazione Lineare
- Metodo del Simplexso
- Teoria del Simplexso
- Teoria della Dualità e Analisi di Sensitività
- Programmazione Lineare intera
 - Introduzione alla PLI.
 - Branch and Bound Binario
 - Branch and Bound PLI
- Programmazione Non Lineare

0.2 Modalità d'esame

Due Modalità:

- Modalità con Parziali
- Modalità con Scritto unico

Parziali

Primo parziale sarà durante la settimana di sospensione didattica, il secondo a fine del corso a ridosso del primo appello completo. Entrambe le prove hanno voto massimo 14 e soglia di superamento 6.

É possibile *recuperare solo una delle due prove parziali*, a ridosso degli appelli completi.

Primo Parziale Il primo parziale del 17 novembre prevede:

- 1 Esercizio Numerico su *Simplexso* (6 Punti)
- 1 esercizio Numerico su *Dualità* e/o *Sensitività* (4 Punti)
- 1 Domanda a risposta *Aperta* (3 Punti)
- 1 Domanda a risposta *Chiusa* (1 Punto)

La prova avrà una durata di 90 minuti.

Assignments Durante l'insegnamento verranno assegnati 4 Assignments da risolvere a casa e consegnare entro date stabilite, Ad ogni assignment può andare un voto minimo di 0 a un massimo di 1.

Orale non obbligatorio, consiste in 3 domande (aperte/esercizi) su tutto il programma. Si accede all'orale se si hanno già raggiunti i 18 punti. L'orale ha un voto di ± 3 .

Scritto unico

Scritto (voto max 28) con domande/esercizi su tutto il programma. Orale faoltativo si accede con un voto minimo di 15.

0.3 Prerequisiti

Per il corso di ROPR sono necessari alcuni prerequisiti, che verranno ripassati a lezione ma è bene conoscere già.

I prerequisiti indicati a lezione sono:

- Familiarità con le **Funzioni**.
 - Definizione di Funzione, dominio, codominio
 - Definizione di F Suriettiva, iniettiva e biiettiva
 - Definizione di F lineare/non lineare
 - Definizione di F concava/convessa
- Familiarità con gli **Spazi Vettoriali**.
 - Definizione di Vettore, Spazio Vettoriale, Base di uno S. Vettoriale
 - Definizione di vettori linearmente dipendenti/indipendenti
- Familiarità con le **Matrici e Sistemi Lineari**.
 - Definizione di matrice, rango e determinante
 - Calcolo di una matrice inversa
 - Definizione e risoluzione di un sistema lineare
- Basi di **Topologia**.
- Basi di **Teoria dei Grafi**.
- Familiarità con il **Calcolo Differenziale**.

Un ripasso sui principali requisiti può essere trovato su E-Learning

Capitolo 1

Ripasso di Algebra

1.1 Operazioni tra matrici

DEFINIZIONE

Somma di Matrici

Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ due matrici *Dello stesso ordine* 2×3 allora

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

DEFINIZIONE

Prodotto di Matrici

Siano $A = n \times p$, $B = p \times m$ allora $\exists A \cdot B$ e $\nexists B \cdot A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow AB = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{in cui } ab_{1,1} = (a_{1,1} \cdot b_{1,1}) + (a_{1,2} \cdot b_{2,1}) + (a_{1,3} \cdot b_{3,1})$$

1.2 Determinante di una matrice

Il determinante di una radice quadrata si calcola come di seguito:

Determinante 2x2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies \det(A) = |A| = a \cdot d - b \cdot c$$

Determinante 3x3

1. Scelgo un elemento a_{ij} della matrice.
2. Prendo la sua riga (o colonna)
3. Sommo, per ogni elemento a_{ij} della riga (colonna)

$$(-1)^{1+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(B)$$

in cui B é la matrice quadrata che ottengo rimuovendo da A sia la riga che la colonna di a_{ij}

1.3 Autovalori di una Matrice

L'Autovalore di una matrice quadrata A é un valore scalare λ t.c.:

$$\exists v \neq 0 \text{ t.c. } Av = \lambda v$$

v é un vettore colonna non nullo, ed é l'autovettore per la matrice A relativo a λ t.c.

$$Av - \lambda v = (A - \lambda I) \cdot v$$

Con I Matrice Identità di A .

1.3.1 Calcolare gli Autovalori

Data una matrice quadrata 2x2:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Essa avrà 2 autovalori λ_1 e λ_2 , calcolati come segue:

1. Sottraggo λ dalla diagonale di A :

$$A_\lambda = A - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix}$$

2. Fisso il determinante di A_λ a 0:

$$\det(A_\lambda) = 0 \rightarrow (a_{11} - \lambda) \cdot (a_{22} - \lambda) - a_{12} \cdot a_{21} = 0$$

3. Risolvo per λ trovando tutti gli autovalori λ_1 e λ_2 .

Capitolo 2

Modelli nella Ricerca Operativa

2.1 Problemi di Ottimizzazione

La Ricerca Operativa si occupa di Problemi di Ottimizzazione:

DEFINIZIONE

Data la funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, un **problema di ottimizzazione** è formulabile come segue:

$$\text{opt } f(x) \text{ s.a. } x \in X, X \subseteq \mathbb{R}^n$$

Dove $\text{opt} \in \{\min, \max\}$ e $\text{s.a.} = \text{"soggetto a"}$.

I problemi di ottimizzazione possono essere:

- Minimizzazione $\min f(x)$
- Massimizzazione $\max f(x)$

DEFINIZIONE

In un problema di ottimizzazione la *funzione* $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è detta **funzione obiettivo**, X è la **regione ammissibile** e $x \in X$ sono le **variabili decisionali**.

Quindi un problema di ottimizzazione consiste nel determinare (se esistono) uno o più punti di \min/\max x^* (x^* è una particolare assegnazione che gode di una certa proprietà).

Ottimizzazione Vincolata/non Vincolata Esistono due tipi principali di Ottimizzazione, determinate dall'esistenza o meno di delle *regioni di vincolo*:

- **Non Vincolata** $X = \mathbb{R}^n$: la ricerca dell'ottimo viene effettuata in tutto \mathbb{R}^n .
- **Vincolata** $X \subset \mathbb{R}^n$: La ricerca dell'ottimo è soggetta al muoversi all'interno di una certa regione ($x \in [a, +\infty)$ per esempio).

Nel caso dell'ottimizzazione vincolata semplicemente si considera la regione dello spazio definita da un determinato intervallo, quindi le soluzioni valide di solito cambiano.

Altri tipi di Ottimizzazione Non esiste solo l'ottimizzazione in cui le variabili assumono valori nello spazio reale, ma esistono anche ottimizzazioni con delle caratteristiche particolari. Esiste per esempio il vincolo $X \in \mathbb{Z}^n$, che richiede che le mie soluzioni *siano valori interi*, quindi **ottimizzazione intera**. Un altro vincolo molto "reale" è $x \in \{0, 1\}^n$, in questo caso si chiama **ottimizzazione binaria** (vero falso, spento acceso,...). Entrambe queste ottimizzazioni formano le ottimizzazioni a numeri interi. Esiste anche l'**ottimizzazione mista**, in cui alcune variabili sono intere e altre binarie.

2.2 Programmazione Matematica

DEFINIZIONE

Quando l'insieme delle soluzioni ammissibili di un problema di ottimizzazione viene espresso attraverso un sistema di equazioni e disequazioni, esso prende il nome di *Programmazione Matematica*.

Ovvero, se i vincoli di un problema di ottimizzazione vengono espressi tramite delle equazioni/disequazioni, allora questo problema diventa un problema di programmazione matematica.

Come si definiscono i vincoli

I vincoli vengono espressi con delle espressioni del tipo $g_i(x) \{ \geq / = / \leq \} 0$ in cui $g_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione generica che lega tra loro le variabili decisionali. Nota che i vincoli dipendono dalle *stesse variabili da cui dipende la funzione obiettivo*.

L'insieme (somma) di tutti i vincoli definisce la *regione ammissibile*, se $x \in X$ allora è una soluzione ammissibile.

In un problema di ottimizzazione abbiamo quindi m vincoli e n variabili.

Le possibilità Quando risolviamo un problema di PM abbiamo quindi le seguenti possibilità:

- Problema non ammissibile, $X = \emptyset$ (problema mal posto con regione ammissibile vuota)
- Problema illimitato, ovvero per ogni soluzione che trovo ne posso trovare un'altra che è MIGLIORE di quella che ho trovato, (può essere illimitata superiormente o inferiormente)
- Problema con soluzione ottima unica
- Problema con più soluzioni ottime (anche infinite), tutte le ottime hanno lo stesso valore della funzione obiettivo.

Ottimi Globali e Locali I punti di ottimo possono essere Locali o Globali (se la funzione è convessa Locale = Globale). Nota che un minimo globale è anche locale, un minimo locale non necessariamente è globale e i punti di ottimo globali possono essere multipli.

Ad oggi *non* sappiamo dire se una soluzione sia Globale, sappiamo solo con certezza che sia locale (a meno di usare brute force).

La risoluzione di un problema di programmazione matematica consiste nel trovare una soluzione ammissibile che sia ottimo globale. Alla fine della fiera la definizione di globale e locale corrisponde a quella di Analisi Matematica.

Capitolo 3

Metodo del Simplexso

Il metodo del simplexso è una procedura algebrica per la risoluzione di problemi di Programmazione Lineare che si basa su dei *concetti geometrici*.

Terminologie Questo metodo si basa su alcune terminologie che ci servono per capire come funziona. Definiamo quindi:

- Frontiera del vincolo: è la "linea" di demarcazione di un vincolo.
- Vertice: un vertice è un punto di intersezione di coppie di frontiere di vincoli.
- Vertici Adiacenti: Due vertici si dicono adiacenti se condividono $n - 1$ frontiere di vincoli.
- Spigolo: segmento che collega due vertici adiacenti
- Vertice Ammissibile: Un vertice è detto ammissibile se *fa parte* della regione ammissibile
- Vertice non ammissibile: Un vertice è detto *non* ammissibile se *non* fa parte della regione ammissibile.

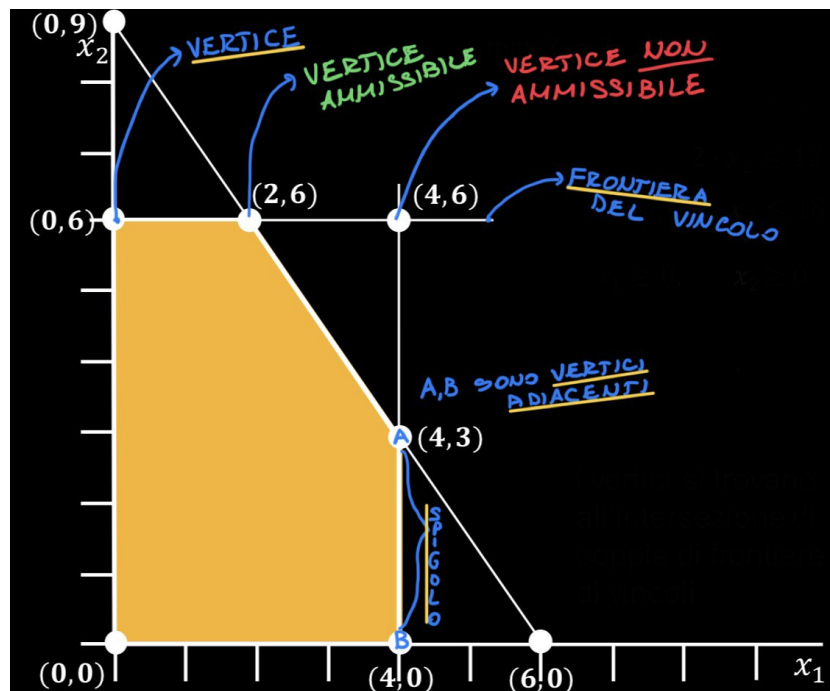
3.0.1 Il Test di Ottimalità

Come mai ci interessa definire i Vertici Adiacenti? Ci interessa perché godono di una proprietà particolare su cui si basa tutto il metodo del simplesso:

DEFINIZIONE

Si consideri ogni problema di PL tale da ammettere almeno una soluzione ottimale:

Se una soluzione vertice non ammette soluzioni vertice a egli adiacenti con valore della funzione obiettivo migliore, allora la **soluzione** in questione è **ottimale**.



Il Test di Ottimalità del metodo del Simplexso si basa su questa proprietà, quindi se un vertice non ha soluzioni adiacenti migliori (cioè con una soluzione della funzione obiettivo migliore), esso sarà la soluzione ottima del problema in questione.

3.1 Il Funzionamento Geometrico

Il funzionamento geometrico del Metodo del Simplexso é il seguente:

Inizializzazione Scelgo un vertice (generalmente $(0,0)$) come soluzione iniziale

Test di Ottimalità Valuto lo spostamento nei vertici adiacenti, ovvero verifico se esiste un vertice adiacente a quello in esame che ha un valore della funzione obiettivo migliore al mio. Se un vertice migliore esiste, allora mi sposto sul quel vertice e ri eseguo il Test di Ottimalità, altrimenti il vertice in esame è la soluzione ottimale del problema.

3.2 La Procedura Algebrica

Come abbiamo visto, la forma geometrica del metodo del simplesso è estremamente semplice, però non è utilizzabile dai calcolatori. Si può quindi tradurre questa procedura geometrica in una procedura algebrica, che si basa sulla risoluzione di un sistema di equazioni lineari. Quando si risolve un problema tramite il metodo del simplesso in forma algebrica, bisogna tradurre i vincoli funzionali di disequaglianza in vincoli funzionali di eguaglianza, generando così una **forma aumentata** del problema.

3.2.1 Le variabili di Slack/Surplus

Quando si traduce un vincolo di disequaglianza in un vincolo di eguaglianza bisogna introdurre una variabile di Slack per i vincoli di \leq o di Surplus per i vincoli di \geq . Le variabili di Slack/Surplus sono uniche per ogni vincolo e rappresentano la quantità che manca al termine sinistro della disequaglianza affinché questa sia verificata con il segno di uguaglianza.

Proprietà Data *una qualunque soluzione*, tramite il valore delle variabili di Slack o Surplus otteniamo delle informazioni utili su di essa: Quindi per ogni vincolo avremo che:

- Se $\text{Slack/Surplus} = 0 \implies$ La soluzione rispetta il vincolo e giace sulla frontiera del vincolo della forma originale.
- Se $\text{Slack} > 0$ oppure $\text{Surplus} < 0 \implies$ La soluzione rispetta il vincolo e giace sul lato ammissibile della frontiera del vincolo (della forma originale).
- Se $\text{Slack} < 0$ oppure $\text{Surplus} > 0 \implies$ La soluzione non rispetta il vincolo e giace sul lato non ammissibile della frontiera del vincolo.

3.2.2 La Forma Aumentata

Quindi, per usare il metodo del simplesso in forma algebrica bisogna trasformare il problema di base in forma Aumentata.

Uguaglianza e Slack Trasformo tutti i vincoli (tranne quelli di non negatività) in vincoli di *eguaglianza* e aggiungo/sottraggo una variabile di **Slack/Surplus** per ogni vincolo. se il vincolo é di \leq avrà una variabile di slack, se é di \geq avrà una variabile di surplus.

quindi se abbiamo:

$$\begin{cases} x_1 \leq 3 \\ x_2 \geq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 3 \\ x_2 - y_1 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 5 \end{cases}$$

x_3, x_4 sono variabili di Slack, y_1 é variabile di Surplus.

Assumendo che $x_1 = 0$, la variabile di slack x_3 è la quantità che manca al termine sinistro della diseguaglianza, affinché questa sia verificata con il segno di uguaglianza.

Chiaramente anche il modello in forma aumentata avrà una sua soluzione, e si definisce **Soluzione Aumentata** una soluzione del modello in forma originale che viene *aumentata* tramite i corrispondenti valori delle variabili di slack, ovvero una soluzione della forma aumentata.

3.2.3 Variabili e Soluzioni di Base

DEFINIZIONE

Si definisce **Soluzione di Base** un vertice del modello in forma aumentata.

Se prendiamo un modello in forma aumentata, noteremo che consiste di d variabili decisionali, ovvero le variabili del problema originale, e di s variabili di slack. Abbiamo quindi a disposizione d gradi di libertà per risolvere il sistema lineare, ovvero possiamo decidere il valore di d variabili per trovare (tramite un sistema lineare) il valore delle altre s variabili. Il metodo del simplesso opera proprio così: azzera il valore di d variabili, che vengono dette **Variabili Non di Base**, e tramite la soluzione del sistema lineare (formato da i vincoli del problema) trova il valore delle restanti s variabili, dette **Variabili di Base**. La soluzione formata dalle d variabili Non di Base e dalle s variabili di Base si chiama Soluzione di Base.

Proprietá delle Soluzioni di Base

La soluzione di base é un vertice del modello in forma aumentata, e gode delle seguenti proprietá:

1. Una variabile della soluzione di base può essere *Di base* o *NON di base*
2. Il numero delle variabili di base é sempre uguale al numero dei vincoli funzionali.
Quindi il numero delle variabili non di base é il numero totale delle variabili, meno il numero dei vincoli funzionali.
3. Il valore delle variabili non di base é sempre zero.
4. I valori delle variabili di base sono ottenuti come risoluzione del sistema di equazioni lineari dati dai vincoli in forma aumentata.
5. Se le variabili di base ottenute soddisfano i vincoli di non negatività, la soluzione di base è una soluzione ammissibile di base.

Soluzione di base Ammissibile Una soluzione di base é **ammissibile** se il valore delle sue variabili di base sono *Non negative*

Soluzioni di Base Adiacenti Due soluzioni di Base Ammissibili sono Adiacenti se condividono le stesse variabili non di base eccetto una. Quindi muoversi da una soluzione di base ammissibile ad una soluzione ad essa adiacente implica che una variabile non di base diventa di base e che una variabile di base diventa non di base. Il che richiede di aggiustare i valori delle variabili di base per garantire che il sistema di equazioni sia ancora soddisfatto.

In pratica il metodo del simplesso nello spostarsi da un vertice ad un adiacente fa uscire dalla base una variabile in base e ne fa entrare in base una non di base, per poi ricalcolare il valore delle variabili di base usando il sistema di equazioni lineari.

3.3 Risoluzione con i Tableau

Nella sezione precedente abbiamo visto il funzionamento del metodo del simplesso in forma algebrica a livello teorico, non abbiamo visto però i passaggi dell'algoritmo del simplesso perché perché la forma algebrica non é la piú adeguata a fare le computazioni richieste. In questo caso utilizziamo la Forma Tabellare, che registra soltanto l'informazione essenziale:

- Coefficienti delle variabili.
- Termini noti delle equazioni.
- Variabili di base per ogni equazione.

La forma tabellare di un problema di PL in forma aumentata con m vincoli e n variabili é presentata come segue:

V. BASE	Eq	Z	x_1	x_2	...	x_n	T. Noto
Z	R_0	1	c_1	c_2	...	c_n	0
x_1	R_1	0	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
x_m	R_n	0	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m

3.4 I passaggi del Metodo del Simpleso in forma Tabellare

1. Porto il problema in **Forma Aumentata**:

- Vincoli:
 - \leq diventa $= \wedge + \text{Slack}$
 - \geq diventa $= \wedge - \text{Surplus}$
 - $=$ Resta Invariato
- Le variabili non positive $x_i \leq 0$ devono diventare Non Negative, quindi

$$x_i = -x'_i \text{ con } x'_i \geq 0$$

E ogni apparizione di x_i viene sostituita con $-x'_i$

- La Funzione Obiettivo viene riformulata:

$$Z = \Sigma x_i \rightarrow Z - \Sigma x_i = 0$$

Quindi il segno dei coefficienti in Funzione Obiettivo é invertito

2. Porto il problema in Forma Tabellare

V. BASE	Eq	Z	x_1	x_2	...	x_n	T. Noto
Z	R_0	1	c_1	c_2	...	c_n	0
x_1	R_1	0	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
x_m	R_n	0	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m

3. Eseguo il Test di Ottimalità

per i Problemi di Max la soluzione é ottima se i coefficienti della riga (0) sono tutti ≥ 0 , nei problemi di Min devono essere tutti ≤ 0
 Se la soluzione non é Ottima allora calcolo il nuovo tableau.

- **Variabile Entrante:** Entra la variabile non in base che nella riga (0) ha il coefficiente:
 - Più Piccolo (Piú Negativo) per i problemi di Max.
 - Più Grande (Piú Positivo) per i problemi di Min.

La rispettiva colonna diventa Colonna Pivot.

- **Variabile Uscente:** Eseguo il Test del rapporto minimo: Prendo i coefficienti strettamente positivi della colonna Pivot e divido i rispettivi Termini Noti per essi.. La variabile con il rapporto minimo esce dalla base e la rispettiva riga diventa Riga Pivot.
- **Numero Pivot:** Il coefficiente all'intersezione tra Riga e Colonna Pivot diventa Numero Pivot.

4. Determino la Nuova soluzione di Base tramite l'eliminazione Gaussiana:

- Nuova Riga Pivot:
 - La variabile entrante diventa Variabile di Base della Nuova Riga Pivot.
 - Divido Tutti i Coefficienti e il Termine Noto della riga per il Numero Pivot.

Cosí ottenendo la Nuova Riga Pivot.

- Altre Righe: Per calcolare le altre righe prima definisco:
 - P_i come l'i-esimo coefficiente della nuova riga pivot (ovvero la riga pivot appena calcolata)
 - X_p come il coefficiente della colonna pivot nella riga in esame.

Allora il coefficiente i-esimo x_i della riga in esame X diventa:

- $x_i := x_i - |X_p| \cdot P_i$ Se X_p é Positivo.
- $x_i := x_i + |X_p| \cdot P_i$ Se X_p é Negativo.

- Rieseguo il test di ottimalità, e se non ho trovato una soluzione ottima ricalcolo un nuovo Tableau.

3.5 Il Metodo delle Due Fasi

In generale nella fase di Inizializzazione il metodo del simplesso sceglie il vertice $(0, 0)$, che però in alcuni problemi di PL non è una soluzione ammissibile, che quindi non può essere usata come soluzione ammissibile di base.

In questo caso quindi bisogna trovare un'altra soluzione di base ammissibile come soluzione iniziale. Ovviamente però non possiamo scegliere arbitrariamente, abbiamo quindi due possibili metodi:

- Metodo Big M (che non vedremo)
- Metodo delle Due Fasi

Come funziona il metodo delle due Fasi?

Come suggerisce il nome, questo metodo si divide in due fasi:

1. Prima Fase, in cui si trova una soluzione di Base Ammissibile
2. Seconda Fase, in cui si risolve il problema partendo dalla soluzione di base trovata.

Fase I Nella prima fase bisogna trovare una soluzione di partenza per il problema. Per fare ciò, bisogna introdurre:

- Delle variabili artificiali y_i , una per ogni vincolo che viene violato dal vertice Origine (a cui andranno sommate).
- Una nuova funzione obiettivo di minimizzazione che minimizza la somma delle variabili artificiali.

Quindi risolviamo questo nuovo problema di PL e teniamo il Tableau Finale.

Fase 2 Nella Seconda fase, prendiamo il Tableau Finale della Fase 1, eliminiamo le colonne delle variabili artificiali e sostituiamo la funzione Obiettivo con la Funzione Obiettivo originale. Così facendo avremo il Tableau Iniziale della Fase 2, che una volta risolto ci darà la soluzione del problema originale.

3.6 Il Prezzo Ombra

Il PREZZO OMBRA per la risorsa i -ma (y_i^*) misura il valore marginale della risorsa, cioè, il tasso al quale la funzione obiettivo Z potrebbe essere incrementata aumentando (leggermente) la quantità di risorsa b_i disponibile. Il metodo del simplesso identifica il prezzo ombra y_i^* come segue:

y_i^* = Coefficiente della i -ma variabile slack nella riga 0 del tableau finale.

Capitolo 4

Dualità e Analisi di Sensitività

Ad ogni problema di programmazione lineare, che d'ora in poi chiameremo problema **Primale**, è associato un problema chiamato **Duale**. La soluzione ottimale del problema Duale fornisce i **prezzi ombra** del problema Primale.

Il Prezzo Ombra Il *prezzo ombra* per la risorsa i -esima (y_i^*) misura il valore marginale della risorsa, cioè, il tasso al quale la funzione obiettivo z potrebbe essere incrementata aumentando (leggermente) la quantità di risorsa b_i disponibile. Il metodo del simplesso identifica il prezzo ombra y_i^* come segue:

y_i^* = coefficiente della i -esima variabile slack nella riga 0 del tableau finale.

Analisi di Sensitività La teoria della Dualità permette l'implementazione e l'interpretazione dell'analisi di sensitività.

L'Analisi di Sensitività è una tecnica che permette di decidere i valori di alcuni parametri di un problema di PL.

4.1 Da Primale a Duale

Un problema duale è strettamente legato al suo primale, infatti per passare da un problema al suo duale:

Primale	Duale
$\max c^T x$	$\min b^T \lambda$
$Ax \leq b$	$A^T \lambda \geq c$
$x \geq 0$	$\lambda \geq 0$

Più in specifico, le regole per Primale→Duale sono:

Funzione Obiettivo:	$\max c_i^T x$	$\min b^T \lambda$
Vincoli \leq (primale)	$a_i^T x \leq b_i$	$\lambda_i \geq 0$
Vincoli $=$ (primale)	$a_i^T x = b_i$	λ_i Libera
Vincoli \geq (primale)	$a_i^T x \geq b_i$	$\lambda_i \leq 0$
Vincoli Non negatività	$x_j \geq 0$	$A_j^T \geq c_j$
Variabile Libera	x_j Libera	$A_j^T = c_j$
Vincoli Non positività	$x_j \leq 0$	$A_j^T \leq c_j$

Quindi dato un qualunque problema di PL:

- un problema di MAX diventa un problema di MIN.
- i coefficienti del primale diventano i termini noti del duale
- i termini noti del primale diventano coefficienti del duale.
- i coefficienti di variabile rimangono invariati

Si può notare che il Duale di un Duale è il suo Primale, quindi un problema di minimizzazione diventa un problema di massimizzazione.

4.2 Relazioni Primale-Duale

4.2.1 Proprietà di Dualità Debole e Forte

I valori delle funzioni obiettivo di un problema Primale e il suo Duale godono delle seguenti proprietà:

DEFINIZIONE

Proprietà di Dualità Debole: Se x è una soluzione ammissibile per il problema primale, e y è una soluzione ammissibile per il corrispondente problema duale, allora vale la seguente disuguaglianza:

$$cx \leq by$$

DEFINIZIONE

Proprietà di Dualità Forte: Se x^* è una soluzione ottimale per il problema primale, e y^* è una soluzione ottimale per il corrispondente problema duale, allora vale la seguente disuguaglianza:

$$cx^* = by^*$$

Queste proprietà, se considerate insieme, implicano che la disuguaglianza vale per soluzioni ammissibili se una o entrambe non sono ottimali per i corrispondenti problemi, l'uguaglianza vale solo se entrambe le soluzioni sono ottimali.

La Proprietà di dualità debole descrive la relazione esistente tra ogni coppia di soluzioni, una del primale e una del duale, nel caso in cui entrambe siano ammissibili per i rispettivi problemi.

4.2.2 Proprietà di soluzioni (ottimali) complementari

Ad ogni iterazione, il metodo del simplesso trova una specifica coppia di soluzioni per i due problemi, dove la soluzione del primale è ammissibile mentre quella del duale non è ammissibile, fatta eccezione per l'ultima iterazione, quella che vede l'arresto del metodo del simplesso.

Proprietà delle soluzioni complementari Ad ogni iterazione, il metodo del simplesso identifica simultaneamente una soluzione vertice ammissibile x per il primale e una soluzione complementare y per il duale (reperibile nella riga (0), i coefficienti delle variabili di slack) dove:

$$cx = by$$

Se x non è ottimale per il problema primale, allora y non è ammissibile per il problema duale.

Propriet  delle soluzioni ottimali complementari All'iterazione finale, il metodo del simplesso identifica simultaneamente una soluzione ottimale x^* per il problema primale e una soluzione ottimale complementare y^* per il problema duale, dove:

$$cx^* = by^*$$

Le componenti y_i^* sono i prezzi ombra del problema Primale

4.2.3 Le Condizioni degli Scarti Complementari

Le condizioni degli scarti complementari sono cos  definiti:

$$(c^T - \lambda^T A) \cdot x = 0$$

$$\lambda^T (Ax - b) = 0$$

Ovvero:

- Se la variabile x_i del primale   $\neq 0$, allora il vincolo del duale a essa associato deve essere attivo, ovvero verificarsi all'uguaglianza.
- Viceversa, se l' i -esimo vincolo del Duale *non*   attivo, allora $x_i = 0$

Un utilizzo pratico Se ho una soluzione del problema primale e voglio controllare se essa   **ottima**, posso farlo senza risolvere il problema usando le *Condizioni degli Scarti Complementari*.

Le condizioni degli scarti complementari mi permettono, oltre che a controllare se la soluzione del primale in esame sia ottima, anche a **trovare la soluzione del duale** senza dover usare il metodo del simplesso su di esso.

Come funziona Se ho una soluzione del primale, controllo che sia ottima e trovo la corrispondente soluzione ottima del duale:

1. Controllo che la soluzione in esame sia **ammissibile per il primale**
2. applico le **condizioni degli scarti complementari**:
 - Se una variabile della soluzione   *diversa da 0*, allora il corrispondente vincolo del duale attivo.
 - Se un vincolo del primale NON   attivo, allora la corrispondente variabile del duale   uguale a zero.
3. Pongo a sistema le equazioni che ho trovato, se il risultato   **ammissibile per il duale**, allora esso   l'ottimo del duale e il risultato in esame   l'ottimo del primale.

I vincoli attivi Un vincolo è attivo per una soluzione se applicando i valori delle variabili esso risulta *rispettato all'uguaglianza*.

Per esempio, se ho una soluzione $(3, 0, 2)$, i vincoli:

- $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 9$ è attivo: $9 \leq 9$
- $x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 7$ NON è attivo: $7 \leq 9$

4.2.4 Teorema della dualità

Un ultima proprietà che riassume le relazioni primale-duale in tutti i casi possibili:

1. Se il Primale **ha soluzioni ammissibili** e **funzione obiettivo Limitata**, quindi ha soluzione ottimale, allora vale anche per il Duale, per cui le proprietà di dualità Debole e Forte sono applicabili
2. Se il Primale **ha soluzioni ammissibili** e **funzione obiettivo Illimitata**, quindi non ha ottimo, allora il **Duale non ha soluzioni ammissibili**.
3. Se il Primale **non ha soluzioni ammissibili**, allora il Duale o non ha soluzioni ammissibili o ha una funzione obiettivo Illimitata.

In prole povere il teorema della dualità è riassunto in questa tabella:

Primale		Duale	
Soluzioni Ammissibili	Funzione Obiettivo	Soluzioni Ammissibili	Funzione Obiettivo
Si	Limitata	Si	Limitata
Si	Illimitata	No	-
No	-	No sol. amm. \vee F.Obb. Illimitata	

4.3 Analisi di Sensitività

È importante condurre una analisi di sensitività per investigare l'effetto sulla soluzione ottimale fornita dal metodo del simplesso quando i parametri del modello assumono valori differenti da quelli attuali:

- Per alcuni parametri, la variazione in valore non influenza la soluzione ottimale
- Per altri parametri la variazione in valore porta ad una nuova soluzione ottimale. In questo caso la situazione è particolarmente seria nel caso in cui la variazione porti la soluzione ottimale ad ottenere un valore

4.3.1 Parametri sensibili

Uno degli obiettivi principali dell'analisi di sensitività è l'identificazione dei PARAMETRI SENSIBILI:

DEFINIZIONE

Un parametro è Sensibile se modificandone il valore avrò una nuova soluzione ottimale.

c_j I coefficienti della funzione obiettivo (c_j) sono valutati Parametri Non Sensibili, e per loro è utile determinare l'intervallo di variazione del coefficiente all'interno del quale la soluzione ottimale rimarrà invariata ovvero **L'intervallo di ammissibilità del coefficiente**.

b_i Per il Termine noto destro di un vincolo funzionale (b_i) invece avremo alcuni casi in cui il suo variare può influenzare l'ammissibilità di una soluzione di base ammissibile. Per un tale tipo di parametro, è utile determinare l'intervallo di variazione all'interno del quale la soluzione ammissibile di base ottimale (per la quali sono stati opportunamente modificati i valori delle variabili di base) rimarrà ammissibile (**Intervallo di ammissibilità del termine noto destro**). Questo intervallo è anche l'intervallo all'interno del quale il **prezzo ombra** corrente del vincolo corrispondente rimane valido

Capitolo 5

Modelli PLI

5.1 Introduzione

Fino ad ora abbiamo visto esempi di programmazione lineare che utilizzavano variabili di decisione nel dominio **reale**.

Esistono però molti problemi che richiedono che le variabili di decisione siano *interi o binarie*. In questi casi parliamo di **Programmazione Lineare Intera** o PLI.

I tipi di PLI Esistono 3 tipi di PLI:

- **Intera** $\rightarrow x \in \mathbb{Z}^n$ (PLI)
- **Binaria** $\rightarrow x \in \{0, 1\}$ (PB)
- **Mista** $\rightarrow x \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{Z}^q$, con $p + q = n$ e $p > 0, q > 0$ (MIP)

5.2 Le Condizioni Logiche

Come abbiamo detto, nella PLI possiamo introdurre anche delle **Variabili Binarie**. In generale, le variabili binarie sono utilizzate nella RO per modellare decisioni del tipo *Si/No*, e possono essere usate per introdurre delle *Condizioni Logiche*.

Vincoli "either-or"

Se consideriamo il caso in cui dati due vincoli almeno uno di questi deve essere soddisfatto (per esempio perché potrebbe esserci una scelta su risorse

alternative da utilizzare per un determinato scopo, in modo che sia necessario solo uno dei vincoli). Prendiamo come esempio:

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18 \vee x_1 + 4x_2 \leq 16$$

Questa diventa equivalente a:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 18 + My \\ x_1 + 4x_2 \leq 16 + M(1 - y) \end{cases}$$

in cui M è un *numero molto grande* e $y \in \{0, 1\}$ quindi se:

- $y = 0 \implies$ il secondo vincolo è sempre soddisfatto, quindi si può eliminare.
- $y = 1 \implies$ il secondo vincolo è sempre soddisfatto, quindi si può eliminare.

M molto grande Questo elemento si trova molto spesso nelle condizioni logiche, e di solito è moltiplicato a y e $(y - 1)$, e significa:

- $y = 0 \implies My = 0 \wedge M(1 - y) = M$
- $y = 1 \implies My = M \wedge M(1 - y) = 0$

Quindi, al variare di y uno dei due vincoli dovrà essere $\leq M$, ed essendo "M molto grande" questo è sempre verificato, di fatto disattivando il vincolo.

N Vincoli, K devono essere soddisfatti

Consideriamo il caso in cui in un modello includa N vincoli tali che solo K di essi devono essere soddisfatti ($K < N$).

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_n) &\leq d_1 \\ f_2(x_1, x_2, x_n) &\leq d_2 \\ &\dots \\ f_N(x_1, x_2, x_n) &\leq d_N \end{aligned}$$

Con N variabili binarie $y_i \in \{0, 1\}$ per $i = 1, \dots, N$ ed un numero M positivo molto grande. Abbiamo la seguente formulazione equivalente al requisito che solo k di questi N vincoli devono essere soddisfatti:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_n) \leq d_1 + My_1 \\ f_2(x_1, x_2, x_n) \leq d_2 + My_2 \\ \dots \\ f_N(x_1, x_2, x_n) \leq d_N + My_N \\ \sum_{i=1}^N y_i = N - K \end{cases}$$

In questo caso solo $N - K$ delle nostre y può essere uguale a 1, quindi $N - K$ vincoli (quelli con $y = 1$) saranno disattivati (rilasciati).

La funzione assume solo N possibili valori

Si consideri la situazione in cui una data funzione assuma uno fra N possibili valori:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = d_1 \vee d_2, \dots, \vee d_n$$

consideriamo N variabili binarie $y_i \in \{0, 1\}$ per $i = 1, \dots, N$ abbiamo la seguente formulaizione equivalente al requisito che una data funzione assuma uno fra N possibili valori:

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^N d_i y_i \\ \sum_{i=1}^N y_i = 1 \end{cases}$$

Per cui uno solo dei termini noti sarà attivo.

5.3 Risoluzione dei PLI

Nonostante lo spazio delle variabili sia "solo" \mathbb{N} , anche in questo caso una risoluzione con forza bruta non è considerabile.

5.3.1 Il Rilassamento Lineare

Per un qualsiasi problema PLI è possibile formulare il corrispettivo problema PL, ovvero lo stesso problema senza i vincoli di interezza. Tale problema prende il nome di **rilassamento lineare**.

In sostanza il rilassamento lineare consiste nel togliere i vincoli di Interezza ($x \in \mathbb{Z}$) e sostituirli con dei vincoli di non negatività ($x \geq 0$)

Questo può in molti casi essere utile, perché il rilassamento lineare può essere risolto con il metodo del simplesso.

Risolvere un rilassamento lineare, per esempio tramite il metodo del simplesso, ci dà due possibilità:

- Soluzione **Intera** \implies è anche la soluzione del PLI.
- Soluzione **Frazionaria** \implies ho trovato un **Upper (Lower) Bound** per il PLI di **Max (Min)**.

Upper/Lower Bound Quando risolvo il rilassamento lineare di un PLI di Max, se la soluzione che ho trovato NON è intera allora significa che ho trovato un Upper Bound, ovvero un valore che l'ottimo del PLI sicuramente non supererà. Viceversa vale per i problemi di minimo e il rispettivo Lower Bound.

I Bound (Upper e Lower) sono utili ad alcuni algoritmi di risoluzione dei PLI.

Attenzione però, in generale la soluzione ottima di un PLI può non corrispondere a una delle sue soluzioni intere ottenute arrotondando le variabili non intere, quindi non posso risolvere un PLI arrotondando il risultato di un rilassamento.

Capitolo 6

Branch and Bound

Il Branch and Bound è una tecnica per la risoluzione di problemi di ottimizzazione intera.

Questa è una tecnica di *enumerazione implicita*, ovvero:

- "Valuta" le soluzioni possibili fino a trovare quella ottima.
- Scarta alcune di queste soluzioni a priori dimostrando la loro non ottimalità.
- Si basa sul concetto di Dividi et Impera.

6.1 Come funziona

Supponiamo di avere un problema di PLI che chiamiamo *problema completo*. Un problema di PLI rappresenta un **sotto-problema** del problema completo se presenta la medesima funzione obiettivo, ma ha un sottoinsieme proprio di X come regione ammissibile.

DEFINIZIONE

Sia $z^* = f(x^*)$ la soluzione del problema completo e $\tilde{z} = f(\tilde{x})$ la soluzione ottima di un sotto-problema. Allora si ha che $f(\tilde{x}) \leq f(x^*)$.

Basta solo notare che tra le soluzioni ammissibili del problema completo vi è anche \tilde{x} e che per definizione di ottimo $f(\tilde{x}) \leq f(x^*)$.

6.2 Le tecniche di risoluzione

Il Branch and Bound fa uso delle tre seguenti tecniche per risolvere un generico problema di PLI:

- **Branching:** La partizione rispetto al valore delle variabili.
- **Bounding:** La determinazione di un limite superiore.
- **Fathoming:** L'eliminazione di sottoproblemi.

La procedura del B&B per i problemi di PB e quelli di PI è molto simile, la differenza principale sta nella fase di Branching.

6.2.1 Branching

Il Branching è la fase di selezione del sotto-problema da analizzare e la divisione di questo in sotto-problemi più piccoli.

Abbiamo due regole principali di selezione e divisione:

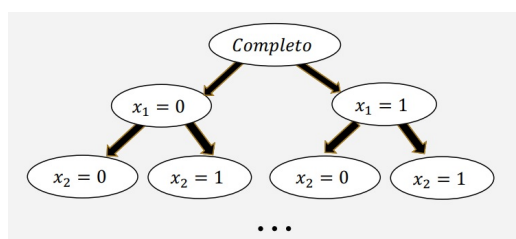
- **Depth First:** Si sceglie il sotto-problema creato più di recente, ovvero il nodo di livello maggiore (più profondo).
 - **Pros:** è semplice da implementare, permette di ottenere presto delle soluzioni ammissibili (ci si avvicina più rapidamente alle foglie) e limita la memoria necessaria per memorizzare l'albero delle soluzioni, visto che si tendono a chiudere molti nodi per inammissibilità e rimangono pochi nodi contemporaneamente aperti.
 - **Cons:** presenta il rischio di esplorare completamente sotto-alberi con soluzioni scadenti.
- **Best Bound:** Si sceglie il sotto-problema con il miglior bound, ovvero il "più promettente". (**lower bound** più **basso**, per problemi di *minimo*, o **upper bound** più **alto**, per problemi di *massimo*). in genere conduce a soluzioni incombenti più velocemente e quindi permette di effettuare un *fathoming* più efficiente.
 - **Pros:** permette di limitare il numero di nodi visitati esplicitamente e tende pertanto a essere più efficiente.
 - **Cons:** l'esplorazione tende a rimanere a livelli poco profondi, dove i problemi sono meno vincolati e i bound sono più promettenti ma

difficilmente si ottengono presto soluzioni ammissibili che migliorino la soluzione incombente corrente. Questo impedisce di applicare efficacemente le regole di *fathoming*, pertanto è maggiore la richiesta di memoria per i nodi aperti contemporaneamente.

- Si può anche usare una combinazione delle due regole: i nodi vengono scelti cioè alternando i diversi criteri, per evitare gli svantaggi di uno o dell'altro.

Branching per problemi di PB (variabili binarie)

Nel caso di problemi a variabili binarie (PB), il modo più semplice per dividere l'insieme delle soluzioni ammissibili in sotto-insiemi è fissare il valore di una delle variabili, per esempio $x_1 = 0$, per un sottoinsieme e a $x_1 = 1$ per l'altro sottoinsieme.



La variabile utilizzata ad ogni iterazione per eseguire questa suddivisione è chiamata **variabile di branching**. Nel diagramma qua sopra, al primo livello la variabile di branching sarà x_1 , a quello successivo x_2 etc... Questo perché per selezionare ad ogni iterazione la variabile di branching si può utilizzare l'ordinamento naturale delle variabili (x_1, x_2, \dots).

N.B.: nel caso binario, ad ogni branching generiamo due nuovi sotto-problemi, creando un albero binario.

Branching per problemi di PI

Differisce dal Branching per problemi di PB per poche cose.

La variabile di Branching La prima differenza riguarda la scelta della variabile di *Branching*: Nel B&B Binario si sceglievano le variabili in base all'indice, qui invece si sceglie una variabile che nella soluzione attuale è Non intera.

I valori delle variabili di Branching La seconda differenza riguarda i valori assegnati alla variabile per generare i sotto-problemi: Se nel caso PB alla variabile di branching veniva assegnato il valore 0 e 1 rispettivamente per generare i due nuovi sotto-problemi, nella PLI non è possibile. Nel caso generale vengono quindi generati due sotto-problemi specificando per la variabile due insiemi di valori:

$$x_j \leq \lfloor x_j^* \rfloor \quad e \quad x_j \geq \lfloor x_j^* \rfloor + 1$$

dove $\lfloor x_j^* \rfloor$ è il massimo intero per cui $\lfloor x_j^* \rfloor \leq x_j^*$.

N.B.: può verificarsi che una stessa variabile venga selezionata più volte durante la procedura.

6.2.2 Bounding

Per ognuno dei sotto-problemi dobbiamo ricavare un limite, superiore per problemi di massimo e inferiore per problemi di minimo. Per ottenere questo limite devo risolvere il problema rilassato, ovvero il problema senza considerare i vincoli di interezza ma limitando le variabili tra 0 e 1.

Quindi risolvo i miei sotto-problemi sostituendo l'ultima riga con i vincoli $x_j \geq 0 \wedge x_j \leq 1$ (ovvero $0 \leq x_j \leq 1$).

Come prima cosa risolvo il rilassamento lineare (problema rilassato) del problema e ottengo un valore per la funzione Obiettivo. Essendo un problema binario o intero, se i coefficienti della funzione obiettivo sono tutti interi allora sicuramente il valore di Z per il problema completo sarà intero. Quindi posso arrotondare (per difetto per i problemi di max, per eccesso per i problemi di min) il valore di Z del problema rilassato e rendere quel valore il mio Upper/Lower Bound.

6.2.3 Fathoming

Un sotto-problema può essere "eliminato" dalla lista dei problemi da considerare per tre possibili ragioni:

1. La soluzione ottenuta soddisfa i vincoli di interezza. La soluzione incombente cambierà ogni volta che un sotto-problema otterrà una soluzione intera migliore della soluzione incombente corrente.
2. Se il bound di un sotto-problema è peggiore della soluzione incombente allora non vale la pena continuare a considerare il sotto-problema che quindi può essere chiuso.
3. Il sotto-problema non ammette soluzioni ammissibili.

Quindi verranno ulteriormente risolti ed analizzati solo quei problemi che non hanno una soluzione intera ma il loro bound è migliore della soluzione incombente.

6.3 Criteri d'arresto

Il metodo del Branch-and-Bound si arresta quando tutti i nodi sono dichiarati *fathomed*. In questo caso, la soluzione ammissibile corrente corrisponde ad una soluzione ottima.

Si possono anche usare soluzioni quasi-ottime e fermarci non appena troviamo una soluzione quasi ottima.

Oppure ancora possono anche essere adottati criteri relativi a limiti computazionali, come ad esempio raggiunti limiti di tempo di calcolo o di memoria, ma non è garantito che l'eventuale soluzione ammissibile corrente sia ottima (posso comunque calcolare quanto distante è dal *Bound*).

6.4 Considerazioni finali sul B&B

Valutazione di soluzioni ammissibili

Per applicare efficacemente le regole di *Fathoming*, è necessario disporre di soluzioni ammissibili di buona qualità. Bisogna quindi stabilire come e quando calcolare soluzioni ammissibili.

Abbiamo varie possibilità:

- Aspettare che l'enumerazione generi un nodo foglia ammissibile;
- Implementare un algoritmo che valuti una buona soluzione prima dell'esplorazione;
- Sfruttare, con frequenza da valutare, l'informazione raccolta durante l'esplorazione dell'albero per costruire soluzioni ammissibili sempre migliori;
- In ogni caso, bisogna **sempre** valutare il compromesso tra la qualità della soluzione ammissibile corrente e lo sforzo computazionale per ottenerla.

Capitolo 7

Introduzione alla Programmazione non Lineare

Un **problema di programmazione non lineare (PNL)** può essere formulato come:

$$\text{opt } f(\mathbf{x})$$

soggetto ai seguenti vincoli:

$$g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \text{con } j = 1, \dots, m$$

$$x_i \geq 0 \quad \text{con } i = 1, \dots, n$$

$$\text{dove opt} = \begin{cases} \min \\ \max \end{cases}$$

in cui $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $g_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni note di $x \in \mathbb{R}^n$.

Tipologie di Programmazione non-lineare

A seconda delle caratteristiche del problema abbiamo diversi tipi di programmazione non lineare.

Ottimizzazione non vincolata

I problemi di ottimizzazione non vincolata non hanno vincoli sulla regione ammissibile. Quindi l'obiettivo è semplicemente

$$\max f(\mathbf{x}) \quad \text{o} \quad \min f(\mathbf{x}) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

.

Ottimizzazione con vincoli lineari

I problemi di ottimizzazione con vincoli lineari sono caratterizzati da tutte le funzioni $g_i(\mathbf{x})$ lineari, ma dalla funzione obiettivo non-lineare. Sono problemi che vanno a dare origine ad una *regione ammissibile convessa*. Un caso particolare è la *programmazione quadratica*, in cui la funzione obiettivo è una funzione quadratica.

Ottimizzazione convessa

Problemi in cui $f(\mathbf{x})$ è una funzione **concava** o **convessa** e ogni funzione $g_i(\mathbf{x})$ è **convessa**.

Ottimizzazione non convessa

I problemi di programmazione non convessa comprendono tutti i problemi che non soddisfano le ipotesi di convessità. Sono più difficili da risolvere perché possono presentare diversi punti di minimo/massimo.

Capitolo 8

PNL Monovariata

8.1 Risoluzione Analitica

Consideriamo un problema di massimizzazione con una funzione obiettivo $f(x)$ concava da massimizzare. Essendo questa funzione **concava**, sappiamo che una condizione sufficiente affinché x^* sia **punto di massimo** è che:

$$\frac{d}{dx}f(x^*) = 0, \text{ ovvero il punto di massimo è dove la derivata è stazionaria}$$

Capiamo quindi che se *un'equazione può essere risolta analiticamente* allora il procedimento per trovare l'ottimo termina.

Un discorso equivalente si può fare per problemi di minimizzazione di funzioni convesse.

8.2 Algoritmi Generici per la Risoluzione Numerica

E se non posso risolverla analiticamente?

In mancanza di una risoluzione analitica (per esempio per una funzione troppo complicata) esistono degli **algoritmi per la risoluzione numerica** che si basano sul concetto di sequenza.

Gli algoritmi della sequenza Si costruisce una sequenza di punti $\{x_k\}$ t.c.: (nei casi di minimizzazione)

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x^* \text{ e } f(x_{k+1}) \leq f(x_k)$$

Ad ogni iterazione k , partendo da x_k si esegue una ricerca sistematica per identificare un punto migliore x_k .

I criteri di Arresto A differenza dell'algoritmo del semplice, in questo caso la sequenza di punti $\{x_k\}$ non è detto che converga alla soluzione ottima del problema in un numero finito di iterazioni.

Quindi quando fermo la sequenza di punti? Mi fermo se:

- La soluzione è sufficientemente accurata, ovvero $\frac{df(x_k)}{dx} \simeq 0$
- Quando si è raggiunto un numero massimo di iterazioni N o un tempo computazionale massimo.
- I progressi sono lenti, ovvero $|x_{k+1} - x_k| < \epsilon_x$ o $|f(x_{k+1}) - f(x_k)| < \epsilon_f$.
- La soluzione diverge.
- Si verificano cicli.

Gli algoritmi

Esistono due tipi di algoritmi che si basano su questo funzionamento:

Dicotomici: Algoritmi di ricerca per individuare un determinato valore (per il quale la funzione derivata si annulla) all'interno di un intervallo che ad ogni iterazione viene ridotto.

Di Approssimazione: Algoritmi che utilizzando approssimazioni locali della funzione.

Per l'ottimizzazione di funzioni in una variabile tratteremo il *Metodo di Bisezione*, che è di tipo Dicotomico, e il *Metodo di Newton*, che è un algoritmo di Approssimazione.

8.3 Metodo di Bisezione

Il metodo di Bisezione è una procedura intuitiva e semplice che può essere applicata ad un problema PNL non vincolato quando $f(x)$ è concava/convessa, continua e derivabile.

L'idea di questo algoritmo è la seguente:

Se $f(x)$ è *continua e concava* in un intervallo chiuso $[a, b]$ allora, considerando un generico punto x_k , se:

- $\frac{d}{dx}f(x_k) < 0 \implies$ l'ottimo x^* si trova a **sinistra** di x_k .
- $\frac{d}{dx}f(x_k) > 0 \implies$ l'ottimo x^* si trova a **destra** di x_k .
- $\frac{d}{dx}f(x_k) \simeq 0 \implies x_k \simeq x^*$, ovvero è circa l'ottimo.

8.3.1 Funzionamento

Il metodo di bisezione è una procedura abbastanza intuitiva.

Guardando la *pendenza della derivata* per un punto x_k in una funzione *concava e derivabile*:

- Se $f'(x_k) > 0$:
 - Il nuovo punto x_{k+1} lo ottengo spostandomi verso Destra
 - x_k rappresenta un *Estremo Inferiore* \underline{x} per il punto x^*
- Se $f'(x_k) < 0$:
 - Il nuovo punto x_{k+1} lo ottengo spostandomi verso Sinistra
 - x_k rappresenta un *Estremo Superiore* \bar{x} per il punto x^*

Ad ogni iterazione k posso identificare un sotto-intervallo di ricerca $[a_k, b_k] \subset [a, b]$ per ridurre lo spazio di ricerca in modo da identificare un'iterazione k per cui $|b_k - a_k| < 2\epsilon$ con $|a_k - x^*| < \epsilon$ e $|x^* - b_k| < \epsilon$

8.3.2 Algoritmo

Inizializzazione $k = 0$ e ϵ piccolo a piacere.

Si determinano i valori \underline{x} e \bar{x} per cui la derivata sia rispettivamente positiva e negativa.

Si seleziona il punto iniziale $x_0 = \frac{\underline{x} + \bar{x}}{2}$

Iterazione del metodo di bisezione bisogna:

1. Calcolare $f'(x_k)$
2. if $f'(x_k) = 0$
 then $x_k = x^*$
 else
 if $f'(x_k) < 0$
 $\bar{x} = x_k$
 else
 $\underline{x} = x_k$

3. Pongo $x_{k+1} = \frac{\underline{x} + \bar{x}}{2}$ e $k = k + 1$

Criterio di arresto: se $\underline{x} - \bar{x} \leq 2\epsilon$ allora il punto di ottimo x^* avrà una distanza minore di ϵ da uno dei due.

8.4 Metodo di Newton

Il metodo di newton è molto simile a quello di bisezione ma considera anche la derivata seconda e non solo l'informazione relativa alla derivata prima.

8.4.1 Funzionamento

il Metodo di newton ottiene un'approssimazione quadratica (in x^2) tramite la formula di Taylor centrata in x_k

$$f(x_k) \sim f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) + \frac{1}{2}f''(x_k)(x_{k+1} - x_k)^2$$

L'approssimazione quadratica è in funzione solo di x_{k+1} ! Calcoliamo la derivata dell'approssimazione quadratica

$$f'(x_k) + f''(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0 \rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

Quindi, l'idea dell'algoritmo di Newton è quella di usare l'ottimo dell'approssimazione quadratica di $f(x)$ dato da:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

Questa formula viene usata ad ogni generica iterazione k per calcolare il punto successivo x_{k+1}

Osservazione Se $f(x)$ è concava allora x_k converge verso un punto di massimo, perchè?

- x_k è a Sinistra del punto di massimo
 $\implies f'(x_k) > 0 \implies -\frac{f'(x_k)}{f''(x_k)} > 0 \implies x_{k+1} > x_k$
- x_k è a Destra del punto di massimo
 $\implies f'(x_k) < 0 \implies -\frac{f'(x_k)}{f''(x_k)} < 0 \implies x_{k+1} < x_k$

Ovvero L'algoritmo di Newton "decide" matematicamente se spostarsi a sinistra o destra.

8.4.2 Algoritmo

- Inizializzazione
 - si fissa ϵ e $k = 0$

- Iterazione del metodo di newton
 - Calcola $f'(x_k)$ e $f''(x)$
 - Si pone $x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$

Criterio di arresto: se $|x_{k+1} - x_k| \leq \epsilon$ allora $x_{k+1} = x^*$ è la soluzione ottima, altrimenti eseguo una nuova iterazione del metodo di Newton e pongo $k = k + 1$

Capitolo 9

PNL Multivariata

Nella PNL Monovariata utilizziamo le informazioni di Derivata Prima e Seconda per trovare l'ottimo. Anche nel caso della PNL Multivariata usiamo gli stessi concetti, bisogna però estenderli agli spazi multidimensionali.

Vogliamo estendere i concetti di derivata (prima e seconda) visti per funzioni in una variabile, al caso di funzioni in più variabili.

In particolare, consideriamo uno spazio \mathbb{R}^n , ovvero uno spazio vettoriale a n dimensioni. Se nel caso \mathbb{R}^1 avevamo Derivata I e II, nel caso n -dimensionale:

- $f'(x) \rightarrow$ Gradiente.
- $f''(x) \rightarrow$ Hessiana.

9.1 Derivate Parziali

Per conoscere Gradiente ed Hessiana dobbiamo introdurre il concetto di Derivata Parziale.

DEFINIZIONE

Le **Derivate Parziali** (anche dette derivate direzionali) sono le derivate in un iperspazio per una determinata direzione v .

Quindi se ho $f(x, y, z)$ posso ottenere

$$\frac{df(x, y, z)}{dx}, \frac{df(x, y, z)}{dy}, \frac{df(x, y, z)}{dz}$$

Ovvero le derivate parziali di $f(x, y, z)$ in ognuna delle sue variabili.

DEFINIZIONE

N.B. Se derivo $f(x, y, z)$ in x , allora y e z vengono trattate come costanti nel processo di derivazione.

9.2 Gradiente ed Hessiana

Ora possiamo quindi introdurre Gradiente ed Hessiana:

9.2.1 Gradiente

Il gradiente di $f(x, y)$ è per definizione il vettore Df le cui componenti sono le **derivate parziali** di f , ovvero

$$\nabla f(x, y) = \left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right]^T$$

Esistono varie notazioni per indicare il gradiente:

$$\nabla f, \quad Df(x, y), \quad \nabla f(x, y), \quad \text{grad} f$$

9.2.2 Hessiana

L'insieme delle derivate seconde costituisce una matrice quadrata chiamata matrice Hessiana, e si denota con il simbolo D^2f o H_f .

$$H_f f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial y} \end{bmatrix}$$

In cui ogni riga della matrice Hessiana "corrisponde" ad un elemento del Gradiente, mentre ogni colonna corrisponde alla derivata parziale in ognuna delle variabili di f .

Derivate Pure Gli elementi sulla diagonale principale vengono chiamati **derivate pure**, per distinguerli dagli altri elementi chiamati **derivate miste**.

9.3 Metodo Analitico per l'Ottimo

Il gradiente riassume le informazioni di crescita della funzione lungo tutte le direzioni. I punti per cui il gradiente si annulla ($\nabla f = 0$), prendono il nome di **punti stazionari**.

9.3.1 Punti stazionari n-dimensionali

DEFINIZIONE

Se abbiamo un punto (x_0, y_0) t.c.

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right]^T = [0, 0]^T$$

Allora questo è un **punto stazionario**, e potrebbe essere un punto di massimo, minimo o di sella.

Punto di Sella Se nel caso 1D ogni punto in cui la derivata si annulla è un punto di Max o Min, nel caso n-dimensionale può anche essere un *punto di sella*, ovvero un punto che è massimo in una direzione (variabile) e minimo nell'altra.

9.3.2 Trovare Massimo e Minimo

Una volta trovato un punto stazionario (x, y) , voglio capire se si tratta di un punto di Massimo o di Minimo:

DEFINIZIONE

Condizione **sufficiente** affinché (x, y) sia un punto di **Minimo** per f è che:

- $\nabla f(x, y) = 0$ (derivate parziali tutte nulle)
- $H_f(x, y)$ sia **definita positiva**

Condizione **sufficiente** affinché (x, y) sia un punto di **Massimo** per f è che:

- $\nabla f(x, y) = 0$ (derivate parziali tutte nulle)
- $H_f(x, y)$ sia **definita negativa**

9.3.3 Matrice Definita Positiva/Negativa

Il Concetto di Matrice Definita Positiva/Negativa ci serve per distinguere i punti di Massimo, Minimo e di Sella.

DEFINIZIONE

Una Matrice Quadrata si Dice:

- Definita Positiva se tutti gli Autovalori sono > 0
- Semi Definita Positiva se tutti gli Autovalori sono ≥ 0
- Definita Negativa se tutti gli Autovalori sono < 0
- Semi Definita Negativa se tutti gli Autovalori sono ≤ 0

Osservazione Sia $f(x, y)$ una funzione derivabile due volte, allora:

- f è convessa nell'insieme A se e solo se $H_f(x, y)$ è semi definita positiva.
- f è concava nell'insieme A se e solo se $H_f(x, y)$ è semi definita negativa.

9.4 Algoritmi Numerici per i PNL Multivariati

Come per la PNL Monovariata, anche per la Multivariata esistono degli algoritmi numerici per trovare l'ottimo qualora non fosse possibile trovarlo analiticamente.

Gli algoritmi che affronteremo sono:

- Metodo del Gradiente (Steepest Descent)
- Metodo di Newton

Entrambi gli algoritmi utilizzano strategie di tipo **Line Search**.

9.4.1 Gli algoritmi Line Search

Questo tipo di algoritmo genera una successione di punti $x_k \in \mathbb{R}^n$ in modo che il punto x_{k+1} sia ottenuto a partire dal punto x_k muovendosi lungo una **Direzione di Salita (Massimo) o di Discesa (Minimo)**.

DEFINIZIONE

Dati $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ con f Derivabile in x .
Definiamo:

- Direzione di Discesa un generico vettore $v \in \mathbb{R}^n$ tale che $\langle v, f(x) \rangle < 0$

0

- Direzione di Salita un generico vettore $v \in \mathbb{R}^n$ tale che $\langle v, f(x) \rangle > 0$

Dove $\langle \rangle$ indica il Prodotto scalare tra vettori.

9.4.2 Schema generico per il Line Search

Dati $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ con f Derivabile in x .

Se vogliamo cercare un generico punto di minimo di una funzione, possiamo usare la seguente strategia:

1. Poniamo $k = 0$ e consideriamo un generico punto x^k
2. Determiniamo una Direzione di Discesa d^k
3. Cerchiamo un nuovo punto x^{k+1} lungo la direzione d^k :

$$x^{k+1} = x^k \pm \alpha^k \cdot d^k$$

dove

- k è la generica iterazione
- α^k è una quantità scalare > 0 chiamata step-size.

Step-Size Lo Step-Size è il valore che determina di quanto ci andremo a spostare nella direzione d_k . Esso è inversamente proporzionale al numero di iterazioni.

Lo step-size α^k corrisponde a:

$$\max/\min f(x^k \pm \alpha^k \cdot d^k)$$

e uso un metodo di Max/Min per trovare α^k ottimale, per esempio con una soluzione analitica:

$$\frac{\delta g(\alpha^k)}{\delta \alpha} = 0 \text{ dove } g(\alpha) = f(x^k \pm \alpha^k \cdot d^k)$$

Ovvero Trovato un x^{k+1} che ha α come incognita, lo uso per trovare lo step-size ponendo $g(\alpha) = f(x^{k+1})$ e $\alpha^* = \max g(\alpha)$.
 $\max g(\alpha)$ lo posso spesso risolvere analiticamente, ponendo $g'(\alpha) = 0$.

9.5 Metodo del Gradiente

Il metodo del gradiente è un algoritmo Line Search e come direzione di crescita d^k usa:

- $d^k = \nabla f(x^k)$ per i problemi di Massimo
- $d^k = -\nabla f(x^k)$ per i problemi di Minimo

E come formula generale per il punto x^{k+1} :

$$x^{k+1} = x^k \pm \alpha^k \cdot \nabla f(x^k)$$

N.B. $\pm \nabla f(x^k)$ è la direzione di crescita, quindi il \pm diventa $+$ se è un problema di Massimo, e $-$ se è un problema di minimo

9.5.1 L'algoritmo

1. Pongo $k = 0$ e considero un generico x^k
2. Calcolo $\nabla f(x^k)$ e pongo la direzione di crescita $d^k = \pm \nabla f(x^k)$
3. Cerco un nuovo punto x^{k+1} lungo la direzione d^k :

$$x^{k+1} = x^k \pm \alpha^k \cdot d^k$$

4. Calcolo α^k come la soluzione di $\frac{df(x^k \pm \alpha^k \cdot d^k)}{d\alpha^k} = 0$

Criteri di Arresto

- $|f(x^{k+1}) - f(x^k)| < \epsilon_1$ mi fermo.
- $\|f(x^{k+1})\| < \epsilon_2$ mi fermo, dove $\|f\|$ è la norma di f .

Osservazioni Noto che l'algoritmo del gradiente si differenzia da un generico Line Search solo dalla determinazione della direzione di Crescita. Inoltre noto che se $\nabla f(x^k) > 0 \implies \nabla f(x^k)$ una direzione di Salita.

9.6 Metodo di Newton

A differenza del metodo del Gradiente, il metodo di Newton (n -dimensionale) utilizza un'approssimazione quadratica di $f(x)$ per ottenere un nuovo punto.

Sviluppo di Taylor per funzioni a più variabili:

$$f(x^k + \Delta x) = f(x^k) + \nabla f(x^k) \cdot \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x \cdot H f(x^k) \Delta x$$

In questo caso $x^k + \Delta x = x^{k+1}$

Direzione di Miglioramento Essendo un algoritmo Line Search, Newton segue una direzione di miglioramento per il nuovo punto $(x^k + \Delta x)$ così definita:

$$\frac{\delta f(x^k + \Delta x)}{\delta \Delta x} = 0 \rightarrow H(x^k) \Delta x = -\nabla f(x^k)$$

Δx è il vettore spostamento, e in questo caso è l'incognita.

Osservazione Newton si muove ad un punto stazionario del II ordine dello sviluppo in serie di Taylor della funzione.

9.6.1 l'Algoritmo

Tenendo peresente che $\Delta x = x^{k+1} - x^k$

1. Pongo $k = 0$ e considero un generico x^k
2. Calcolo $\nabla f(x^k)$ e $H(x^k)^{-1}$
3. Cerco un nuovo punto x^{k+1} :

$$x^{k+1} = x^k - H(x^k)^{-1} \cdot \nabla f(x^k)$$

Criteri di Arresto Sono gli stessi del metodo del gradiente.

- $|f(x^{k+1}) - f(x^k)| < \epsilon_1$ mi fermo.
- $\|f(x^{k+1})\| < \epsilon_2$ mi fermo, dove $\|f\|$ è la norma di f .

9.6.2 Evitare il calcolo della Matrice Inversa

Osservando la formula per il calcolo del nuovo punto:

$$x^{k+1} = x^k - H(x^k)^{-1} \cdot \nabla f(x^k)$$

Notiamo che ci richiede di calcolare $-H_f(x_k, y_k)^{-1}$, ovvero la *Matrice inversa dell'hessiana* nel punto (x_k, y_k) .

Calcolare una matrice inversa è **molto oneroso dal punto di vista computazionale**, esiste però un modo per evitare di calcolarlo.

Considerazione Nel calcolo del nuovo punto, $[-H(x^k)^{-1} \cdot \nabla f(x^k)]$ equivale al *vettore spostamento* Δx (scritto anche come $(v_1, v_2)^T$), di conseguenza:

$$-H(x^k)^{-1} \cdot \nabla f(x^k) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \implies H_f(x_k, y_k) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = -\nabla f(x_k, y_k)$$

In questo modo per poter trovare Δx dobbiamo soltanto risolvere un sistema di equazioni invece di calcolare una matrice inversa, il che è molto meno oneroso computazionalmente.

9.6.3 Newton VS Gradiente

- Newton utilizza sia Gradiente che Hessiana ad ogni iterazione.
- Newton se converge, converge molto più rapidamente del metodo del gradiente ma richiede uno sforzo computazionale molto maggiore.
- Se la funzione è quadratica, Newton converge ad una sola iterazione.
- Nel caso di funzioni più complesse, la matrice Hessiana risulta più complessa da calcolare.

Capitolo 10

Ottimizzazione Non Lineare Vincolata

Consideriamo un generico problema di Ottimizzazione Non Lineare Vincolata:

$$\begin{array}{ll} \text{opt } f(x) \\ \text{s.a. } g_i(x) \{= / \leq / \geq\} l \text{ con } i=1, \dots, m \end{array}$$

In questo caso *Non esistono algoritmi di risoluzione*, ma ci sono diversi approcci per semplificare e risolvere il problema.

Gli approcci che affronteremo noi sono:

- Dimensionality Reduction
- Moltiplicatori di Lagrange
- Condizioni di Karush-Kuhn-Tucker

10.1 Dimensionality Reduction

L'approccio del Dimensionality Reduction (o riduzione del numero delle variabili libere) consiste nell'utilizzare i vincoli di uguaglianza del problema per ridurre il problema a un PNL Monovariato non vincolato.

10.1.1 Facciamo un Esempio

Dato il problema:

$$\begin{array}{ll} \min & (x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 1)^2 \\ \text{s.a.} & x_1 + 4x_2 = 3 \end{array}$$

Possiamo Esplicitare x_1 nel vincolo:

$$x_1 + 4x_2 = 3 \rightarrow x_1 = 3 - 4x_2$$

Per poi sostituirlo nella funzione obiettivo:

$$\min (x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 1)^2 \rightarrow \min (3 - 4x_2 - 2)^2 + 2(x_2 - 1)^2$$

In modo da ottenere un problema di ottimizzazione in una variabile, che possiamo risolvere analiticamente:

$$\min (3 - 4x_2 - 2)^2 + 2(x_2 - 1)^2 \implies x_2 = \frac{1}{3}$$

Da cui, con la funzione obiettivo originale troviamo $x_1 = \frac{5}{3}$. In questo modo otteniamo la soluzione $(\frac{5}{3}, \frac{1}{3})$.

10.1.2 È un metodo generalizzabile?

Non sempre il metodo del Dimensionality Reduction è generalizzabile. Quando è possibile?

Supponiamo di avere un problema di *opt* soggetto a l vincoli di *Uguaglianza*. **SE** è possibile esplicitare l variabili in funzione delle restanti $n - l$ variabili utilizzando i vincoli di uguaglianza del problema, allora possiamo trasformare tale problema in un problema di *opt non vincolata* con $n - l$ variabili.

$$\begin{array}{ll} \text{opt} & f(x_1, \dots, x_n) \\ \text{s.a.} & g_j(x_1, \dots, x_n) = b_j \text{ con } j = 1, \dots, l \\ & \Downarrow \\ & \text{opt } f(x_1, \dots, x_{n-l}) \\ & x_{n-l+1} = g_1(x_1, \dots, x_{n-l}) \\ & \vdots \\ & x_n = g_l(x_1, \dots, x_{n-l}) \end{array}$$

Questa condizione però molto spesso NON è rispettata, quindi il Dimensionality Reduction non è sempre utilizzabile.

10.2 Il metodo dei Moltiplicatori di Lagrange

Il metodo dei Moltiplicatori di Lagrange è un metodo per trovare l'ottimo di problemi di PNL Vincolata. Si basa sul concetto di Funzione Lagrangiana e sulle sue proprietà.

10.2.1 La Funzione Lagrangiana

Per capire il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, bisogna prima introdurre il concetto di *Funzione Lagrangiana*:

DEFINIZIONE

Consideriamo un generico problema di PNL Vincolata con *solo vincoli di uguaglianza*:

$$\begin{array}{ll} \text{opt} & f(x_1, \dots, x_n) \\ \text{s.a.} & g_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ con } i = 1, \dots, m \end{array}$$

La seguente funzione in $n + m$ variabili prende il nome di **Funzione Lagrangiana** del problema:

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot g_i(x_1, \dots, x_n)$$

Le variabili λ_j , di cui ce ne sono tante quante i vincoli, prendono il nome di **Moltiplicatori di Lagrange**.

Come mai ci interessa la funzione Lagrangiana? I punti stazionari della funzione Lagrangiana (Ovvero i punti in cui il gradiente della lagrangiana si azzerava) sono *Fortemente legati ai punti di massimo e minimo della funzione*.

10.2.2 Condizioni di Ottimalità del Primo Ordine

Consideriamo un generico problema di ottimizzazione non lineare del tipo:

$$\begin{aligned} & \text{opt } f(x_1, \dots, x_n) \\ & \text{s.a. } g_j(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ con } j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

E sia $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ il punto stazionario di f . Allora:

Esistono m moltiplicatori di Lagrange $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$ tali che (x^*, λ^*) è un punto stazionario della Lagrangiana Associata, ovvero nel punto (x^*, λ^*) *Il gradiente della funzione Lagrangiana è nullo*. Quindi il valore della Lagrangiana sarà:

$$L(x^*, \lambda^*) = f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \cdot g_i(x^*)$$

E avremo che:

$$\begin{aligned} \frac{\delta L(x^*, \lambda^*)}{\delta x_j} &= 0 \text{ con } j = 1, \dots, n \\ \frac{\delta L(x^*, \lambda^*)}{\delta \lambda_i} &= 0 \text{ con } i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Osservazioni

- I punti x^* e (x^*, λ^*) possono essere punti stazionari *di tipo diverso*.
- Tale condizione fornisce una **Condizione Necessaria ma Non Sufficiente** per l'ottimizzazione del problema vincolato.
- Come nel caso dell'ottimizzazione non vincolata, i punti che annullano il gradiente rappresentano i punti candidati ad essere punto di massimo/minimo della funzione. Se f è convessa, allora i punti stazionari sono punti di Minimo, se invece è concava i punti stazionari sono di Massimo.

Considerazioni Se prendiamo le due condizioni presentate notiamo che:

- $\frac{\delta L(x^*, \lambda^*)}{\delta \lambda_i} = 0$ con $i = 1, \dots, m$ è di fatto un modo "elegante" di riscrivere i vincoli $g_i(x_1, \dots, x_n)$.
- $\frac{\delta L(x^*, \lambda^*)}{\delta x_j} = 0$ con $j = 1, \dots, n$ può essere riscritto come

$$\frac{\delta L(x^*, \lambda^*)}{\delta x_j} = \frac{\delta f(x^*)}{\delta x_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \cdot \frac{\delta g_i(x^*)}{\delta x_j} = 0$$

Inoltre, di fatto vogliamo trovare il *Punto* (x^*, λ^*) in cui il gradiente di L si azzera:

$$\nabla L(x^*, \lambda^*) = \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \cdot \nabla g_i(x^*) = 0$$

L'insieme dei vincoli di fatto restringe lo spazio delle soluzioni ammissibili del problema al sottospazio dato dall'intersezione dei vari vincoli. Il gradiente della funzione nel punto di ottimo x^* ($\nabla f(x^*)$) deve risultare ortogonale¹ a tale sottospazio.

Siccome il vettore ortogonale a tale sottospazio è dato da $\sum_{i=1}^m \lambda_i^* \cdot \nabla g_i(x^*)$, dobbiamo quindi avere che

$$\nabla f(x^*) = - \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \cdot \nabla g_i(x^*)$$

Quest'ultima condizione significa che nel punto di ottimo il gradiente della funzione f può essere riscritto come combinazione lineare dei gradienti dei vincoli.

10.2.3 Condizioni di Ottimalità del Secondo Ordine

Come nel caso dell'ottimizzazione non vincolata, abbiamo anche in questo caso delle condizioni sufficienti per garantire che i punti stazionari della Lagrangiana siano punti di massimo/minimo della funzione f .

Sia J la matrice dei gradienti nei vincoli (Matrice Jacobiana). Consideriamo l'insieme dei vettori $y \in \mathbb{R}^n$ tali che:

$$J(x^*) \cdot y = 0$$

Dove J è una matrice $m \times n$:

$$J(x^*) = \begin{bmatrix} \frac{\delta g_1}{\delta x_1} & \cdots & \frac{\delta g_1}{\delta x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta g_m}{\delta x_1} & \cdots & \frac{\delta g_m}{\delta x_n} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \nabla g_1(x^*) \cdot y_1 = 0 \\ \cdots \\ \nabla g_m(x^*) \cdot y_m = 0 \end{cases}$$

Tale sottospazio rappresenta l'insieme dei vettori perpendicolari ai gradienti dei vari vincoli.

¹In geometria elementare, di due enti che formano un angolo retto

Minimo/Massimo Consideriamo la matrice Hessiana della funzione Lagrangiana ristretta alle variabili iniziali x_1, \dots, x_n :

$$H_L(x^*, \lambda^*) = \begin{bmatrix} \frac{\delta^2 L}{\delta x_1^2} & \cdots & \frac{\delta^2 L}{\delta x_1 \delta x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta^2 L}{\delta x_1 \delta x_n} & \cdots & \frac{\delta^2 L}{\delta x_n^2} \end{bmatrix}$$

- Condizione sufficiente affinché x^* sia un punto di:
 - Minimo: $y^T \cdot H_L(x^*, \lambda^*) \cdot y > 0$.
 - Massimo: $y^T \cdot H_L(x^*, \lambda^*) \cdot y < 0$.
- Condizione Necessaria affinché x^* sia un punto di:
 - Minimo: $y^T \cdot H_L(x^*, \lambda^*) \cdot y \geq 0$.
 - Massimo: $y^T \cdot H_L(x^*, \lambda^*) \cdot y \leq 0$.

10.2.4 Procedura generale

- Si cercano i punti stazionari della Lagrangiana per ottenere i punti candidati ad essere punti di massimo/minimo:

$$\frac{\delta L(x^*, \lambda^*)}{\delta x_j} = 0 \text{ con } j = 1, \dots, n$$

$$\frac{\delta L(x^*, \lambda^*)}{\delta \lambda_i} = 0 \text{ con } i = 1, \dots, m$$

- Utilizzo le condizioni del secondo ordine per eliminare i punti stazionari che di sicuro non sono né di minimo né massimo, ovvero i punti di sella:
 - Cerco y t.c. $J(x^*) \cdot y = 0$
 - Se esistono y_1 e y_2 t.c. $y_1^T \cdot H_L(x^*, \lambda^*) \cdot y_1 > 0$ o $y_2^T \cdot H_L(x^*, \lambda^*) \cdot y_2 < 0$ allora possiamo classificarlo come punto di sella.
- Per i rimanenti punti:
 - Se $y^T \cdot H_L(x^*, \lambda^*) \cdot y > 0$ o $y^T \cdot H_L(x^*, \lambda^*) \cdot y < 0$ allora possiamo classificarlo come punto di minimo o massimo.
 - se $y^T \cdot H_L(x^*, \lambda^*) \cdot y \geq 0$ o $y^T \cdot H_L(x^*, \lambda^*) \cdot y \leq 0$ allora non possiamo essere certi che tale punto sia di Minimo o Massimo.

10.2.5 I vincoli di Disuguaglianza

Cosa succede con il metodo dei Moltiplicatori di Lagrange se abbiamo anche dei vincoli di Disuguaglianza nel problema?

Se al generico problema di Programmazione non lineare vincolata *aggiungiamo* dei vincoli di disuguaglianza:

$$h_j(x_1, \dots, x_n) \leq 0 \text{ con } j = 1, \dots, p$$

E consideriamo un punto di ottimo x^* avremo che:

- Se $h_j(x^*) = 0$ allora si dice che il vincolo é attivo
- Se $h_j(x^*) < 0$ allora si dice che il vincolo non é attivo, e quindi un piccolo cambiamento non violerá il vincolo.

Quindi in questo caso la **Lagrangiana Generalizzata** sará definita come una funzione in $n + m + p$ variabili:

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_p) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot g_i(x_1, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^p \mu_j \cdot h_j(x_1, \dots, x_n)$$

10.3 Condizioni di Karush-Kuhn-Tucker

Le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker rappresentano una generalizzazione del metodo dei moltiplicatori di lagrange, applicato ai problemi in cui siano presenti anche dei vincoli di disuguaglianza.

Consideriamo un generico problema di PNL Vincolata:

$$\begin{aligned} & \text{opt } f(x_1, \dots, x_n) \\ & \text{s.a.} \\ & g_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ con } i = 1, \dots, m \text{ Vincoli di Uguaglianza.} \\ & h_j(x_1, \dots, x_n) \leq 0 \text{ con } j = 1, \dots, p \text{ Vincoli di Disuguaglianza.} \end{aligned}$$

Sia $x^*(x_1, \dots, x_n)$ punto di ottimo di f , allora avremo che $h_j(x^*)$ può essere attivo ($h_j(x^*) = 0$) o inattivo ($h_j(x^*) < 0$), e indichiamo con $I(x^*)$ l'insieme dei vincoli attivi. Inoltre esistono m moltiplicatori $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$ e p moltiplicatori $\mu^* = (\mu_1^*, \dots, \mu_p^*)$ Tali che valgono le seguenti condizioni:

- **Condizione di Stazionarietá:** Il gradiente della Lagrangiana deve essere uguale a zero, ovvero il punto deve essere stazionario.

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \cdot \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j^* \cdot \nabla h_j(x^*) = 0 \text{ Problemi di MIN}$$

$$\nabla f(x^*) - \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \cdot \nabla g_i(x^*) - \sum_{j=1}^p \mu_j^* \cdot \nabla h_j(x^*) = 0 \text{ Problemi di MAX}$$

- **Ammissibilità Primale:** Ogni vincolo, sia di uguaglianza che di disuguaglianza, deve essere rispettato

$$g_i(x^*) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$$

$$h_j(x^*) \leq 0 \quad \forall j = 1, \dots, p$$

- **Ammissibilità Duale:** Tutti i Moltiplicatori Lagrangiani devono essere Non Negativi.

$$\mu_j^* \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, p$$

- **Condizioni di Complementarietà:** Il prodotto di un vincolo di disuguaglianza per il rispettivo moltiplicatore deve essere sempre zero.

$$\mu_j^* \cdot h_j(x^*) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, p$$

Osserviamo in particolare che le condizioni di Ammissibilità Duale e di Complementarietà implicano che nel caso di vincoli di disuguaglianza abbiamo che:

- se $h_j(x^*) < 0$ (vincolo non attivo) allora $\mu_j^* = 0$
- se $h_j(x^*) = 0$ (vincolo attivo) allora $\mu_j^* \geq 0$

A cosa ci serve? Le condizioni KKT rappresentano le **condizioni Necessarie ma Non Sufficienti** per caratterizzare i punti di ottimo in un Problema di Programmazione Non Lineare Multivariata Vincolata che ha Vincoli di Disuguaglianza (PPNLMVVDTM), quindi ogni punto di ottimo *deve* rispettare le condizioni KKT, ma un punto che rispetta queste condizioni non é necessariamente punto di ottimo.

Queste condizioni quindi mi permettono di *limitare la ricerca dei punti di ottimo* tra i soli punti che le soddisfano.

Si può inoltre notare che le condizioni KKT non sono un algoritmo, bensí una serie di condizioni da verificare su un potenziale punto di ottimo.