CheatSheet di Analisi Matematica

Fabio Ferrario

@fefabo

2022/2023

Indice

Insiemistica

Dati un elemento m e un insieme A:

- **Massimo/Minimo**: m si dice massimo/minimo di A se esso *Appartiene ad* A ed é il piú grande/piccolo elemento di A.
- **Maggiorante/Minorante**: m si dice maggiorante/minorante di A se é *Maggiore/Minore o uguale* di ogni elemento di A.

Capitolo 1

Studio di Funzione

Nello studio di funzione bisogna fare:

- Definizione del Dominio
- Intersezione con gli Assi (Segno di $f(x)$)
- Limiti ai punti di frontiera e Asintoti
- Derivata, Monotonia e Estremanti
- Derivata Seconda, Concavià/Convessità

In particolare:

1.1 Definizione del Dominio

In una funzione il dominio ha i seguenti limiti:

Denominatore	$\neq 0$
Logaritmo	Argomento > 0
Radice^n	Argomento ≥ 0 (*sse n pari*)
$[f(x)]^{g(x)}$	$f(x) > 0$

1.2 Limiti ai punti di frontiera e Asintoti

Trovato il dominio, bisogna trovare *i limiti ai punti di frontiera*, quindi trovare i limiti in ogni punto in cui il dominio si interrompe (sia da destra che da sinistra) e eventualmente a $\pm\infty$.

1.2.1 Asintoti

Trovati tutti i limiti, se trovi:

- $\lim_{x \to \alpha^\pm} f(x) = \pm\infty \implies$ Asintoto *Verticale*.
- $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l \implies$ Asintoto *Orizzontale* (di equazione $y = l$)

Bisogna anche controllare la presenza di **Asintoti Obliqui**:

- $m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \implies$ se m *esiste e non è nullo* trovo q:
- $q = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] \implies$ se q esiste allora $y = mx + q$ è *asintoto obliquo*

1.3 Derivata, Monotonia e Estremanti

La monotonia di una funzione si calcola *ponendo* $f'(x) > 0$. Nei punti in cui la derivata è positiva, la funzione è **Crescente**, nei punti in cui è negativa la funzione è **Decrescente**

1.3.1 Punti di estremo

I punti in cui la derivata cambia direzione sono punti di estremo (max/min). Se il punto di estremo è il più grande/piccolo di tutta la funzione, allora sono Assoluti.

1.3.2 Derivabilità

Nei punti di estremo potrebbero esserci problemi di derivabilità, per questo è necessario studiare la derivabilità attraverso il calcolo del limite del rapporto incrementale.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Dove h è il punto per cui sto studiando la derivabilità. Dovrò studiare h^- e h^+ e verificare che i due limiti esistano, siano finiti e siano uguali, in quel caso la funzione sarà derivabile in quel punto.

Nota bene Non vanno bene altri metodi per verificare la derivabilità come per esempio derivare la funzione e poi calcolarne il limite per quel punto. Utilizzare sempre il limite del rapporto incrementale.
Chiaramente per risolvere il limite posso usare i metodi che voglio, anche De l'Hopital (anche se richiede la derivazione di f), chiaro che deve rispettare le condizioni di applicabilità del metodo.

1.4 Derivata Seconda, Concavià/Convessità

Derivando la derivata prima si trova la derivata seconda, il cui segno da informazioni sulla Concavià e Convessità della funzione.

- $-$ conc$\mathcal{A}$va $\cap \implies f''(x)$ positiva
- $+$ con$\mathcal{V}$essa $\cup \implies f''(x)$ negativa

1.5 Altri elmenti di studio di una funzione

1.5.1 Retta Tangente al grafico

Se viene chiesta la retta tangente al grafico in x_0:
trova $y = mx + q$ ponendo:

- $m = f'(x_0)$
- $q = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$

1.5.2 Punti di Discontinuità

I punti in cui una funzione non é continua si classificano nel seguente modo:

1. Prima specie (Salto): i limiti dx e sx di x_0 esistono finiti ma sono diversi.
2. Seconda spece (Essenziale): Almeno uno dei limiti è inifinito o non esiste.
3. Terza Spece (Eliminabile): il limite di x_0 esiste finito ma è diverso da $f(x_0)$ o non esiste.

1.5.3 Funzioni Pari/Dispari

(serve solo per le crocette)

- $-$ Dispari $\implies f(-x) = -f(x)$
- $+$ Pari $\implies f(-x) = f(x)$

Paritá e disparitá di funzioni note $\sin(x)$ è *Pari*, *Decrescente* in $[0, \pi]$ e *Crescente* in $[\pi, 2\pi]$.
$\cos(x)$ è *Pari*, *Crescente* in $[0, \pi]$ e *Decrescente* in $[\pi, 2\pi]$.

Capitolo 2

Studio dei Limiti

2.1 Limiti Notevoli

É importante ricordarsi questi limiti notevoli, visto che sono generalmente il modo piú rapido di risolvere i limiti

Logaritmo naturale	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
Logaritmo con base a	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln(a)}$
f Esponenziale	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
f Esponenziale base a	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln(a)$
Costante e Frazione	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{ax-1}{x} = \ln(a)$
Seno	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
Coseno	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$
$\ln(x)$	$\lim\limits_{x\to 0} ln(x) = -\infty$

2.2 Equivalenze Asintotiche

DEFINIZIONE

Equivalenza Asintotica tra funzioni: Se il limite del rapporto di $f(x)$ e $g(x)$ é uguale a 1 allora f e g sono asintoticamente equivalenti per $x \to x_0$.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \implies f(x) \sim g(x) \text{ per } x \to x_0$$

In particolare, alcune equivalenze note sono:

con $x \to 0$			
$\lim_{x\to 0}$	$\sin x$	$\sim$	x
$\lim_{x\to 0}$	$1 - \cos x$	$\sim$	$\frac{1}{2}x^2$
$\lim_{x\to 0}$	$\tan x$	$\sim$	x
$\lim_{x\to 0}$	$\ln(1+x)$	$\sim$	x
$\lim_{x\to 0}$	$(1+x)^\alpha - 1$	$\sim$	αx

Osservazioni

- Le equivalenze asintotiche valcono anche per le Successioni
- Se (per esempio) $f(x) \to 0$, allora $sin(f(x)) \sim f(x)$, questo vale per tutte le equivalenze.

2.2.1 O-Piccolo

Una funzione puó essere un 'o-piccolo' di un'altra.

DEFINIZIONE

o-piccolo: Se il limite del rapporto di $f(x)$ su $g(x)$ è uguale a 0 allora $f(x)$ è o-piccolo di $g(x)$ per $x \to x_0$.

$$lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \implies f(x) = og(x) \text{ per } x \to x_0$$

Questa proprietá NON é commutativa.

Nota che per x_0 si intende un valore arbitrario che può essere anche 0 o $\pm\infty$.

2.3 Gerarchie di Infiniti

In situazioni di indecisione del tipo $[\infty \pm \infty]$ 'vince' l'infinito piú forte.
In generale, la scala é la seguente:

$$\log_a x \ll x^\alpha log^\beta x \ll x^\delta \ll c^x \ll x! \ll x^x$$

Con: $\delta < \beta$, quindi se $\beta > \delta \implies x^\delta \ll x^\alpha log^\beta x$ ***N.B.***

- $\sqrt{x} \gg \ln(x)$
- $x \ln(x) \gg \sqrt{x}$

2.4 Forme di indecisione

In alcuni casi ci potremmo trovare delle Forme di indecisione che ci obbligano a usare altri metodi per risolvere i limiti.

$[\frac{0}{0}]$ $[\frac{\infty}{\infty}]$ $[1^\infty]$ $[\infty - \infty]$ $[\infty \cdot 0]$ $[0^0]$ $[\infty^0]$	
Tutte le forme possono essere risolte usando **Limiti Notevoli** e **Trucchi algebrici** per ricondursi ad essi. In particolare però, questi si risolvono usando anche:	
$[\frac{0}{0}]$	Conf. infinitesmi — Scomp/Racc/Semp — De l'Hopital
$[\frac{\infty}{\infty}]$	Conf. infinti — Scomp/Racc/Semp — De l'Hopital
$[1^\infty]$	Identità Logaritmo-Esponenziale
$[\infty - \infty]$	Riconduzione a $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$
$[\infty \cdot 0]$	Razionalizzazione inversa — Prodotti notevoli al contrario
$[0^0]$ / $[\infty^0]$	Conf. infiniti/infinitesimi—Identità Logaritmo-Esponenziale

2.5 Teoremi per i Limiti

2.5.1 Teorema di de l'Hopital

Il teorema di de l'Hopital è utile per risolvere le forme di indecisione del tipo $[\frac{0}{0}]$ e $[\frac{\infty}{\infty}]$:

DEFINIZIONE

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni definite in un intorno di x_0.
Siano anche derivabili in un intorno di x_0 (privato eventualmente di x_0), con $g'(x) \neq 0$, e sia $lim_{x \to x_0} f(x) = lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ (o $\pm\infty$).

$$\text{Se } lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \implies lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

2.5.2 Teorema del Confronto

Se ho $x \to +\infty$ e ho sin o cos potrei dover usare il teorema del confronto dato che sin e cos (NB solo per $x \to +\infty$) sono delle costanti che oscillano tra -1 e 1.

Capitolo 3

Successioni

3.1 Limiti di Successioni

3.1.1 Criterio del Rapporto per i Limiti di successioni

Se dobbiamo trovare il limite di una successione in cui sono presenti $n!$ o n^n potrebbe essere utile usare il criterio del rapporto, che ci permette di sapere se la successione *Converge a Zero o Diverge a* $+\infty$

Semplificare $(n+1)$ Quando usiamo il criterio del rapporto ci capita spesso di incontrare alcune forme con $n+1$ che non sono immediate da semplificare:

- $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$
- $(n+1)^n = (n+1)^n \cdot (n+1)$
- $(n+1)^\alpha = n^\alpha \cdot (1+\frac{1}{n})^\alpha$

Una piccola **osservazione**:
Se troviamo $(n+1)^n = (n+1)^n \cdot (n+1)$, allora abbiamo anche $(n+1)^n = n^n \cdot (1+\frac{1}{n})^n$.
Sappiamo inoltre che $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$.
Quindi $\lim_{n\to+\infty}(n+1)^n = ... = n^n \cdot e \cdot (n+1)$

3.1.2 Teorema di Permanenza del Segno

Il Teorema di Permanenza del Segno per il limite di una successione enuncia qunato segue:

DEFINIZIONE

Sia $a_n \to l$. allora:

- Se $l > 0$ o $l = +\infty$, allora $a_n > 0$ definitivamente.

- Se $a_n > 0$, allora $l \geq 0$.

Capitolo 4

Serie

4.1 Serie Note

Serie Telescopica

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - a_{n+k}) \text{ Oppure: } \sum_{n=1}^{+\infty}(a_{n+k} - a_n)$$

Come si risolve una serie telescopica É necessario applicare la definzione di serie, cioè la successione delle somme parziali. Devo quindi manualmente sostituire n=1, n=2, n=3, ... fino a quando non riconosco il pattern della serie. *Ricordati di non semplificare Numeratore e Denominatore!*, mantenendo i numeri sostituiti sarà più facile scrivere il carattere della serie.

Serie Geometrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n \begin{cases} \text{Diverge} & q \geq 1 \\ \text{Converge} & -1 < q < 1 \\ \text{Irregolare} & q \leq -1 \end{cases}$$

Se una serie geometrica converge ($-1 < q < 1$), la somma si calcola:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Serie Armonica Generalizzata

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{Diverge} & \alpha \leq 1 \\ \text{Converge} & \alpha > 1 \end{cases}$$

Serie Armonica Logaritmica

$$\sum \frac{1}{n^\alpha \log^\beta(n)} \begin{cases} \text{Converge} & \alpha > 1 \wedge \forall\beta \\ \text{Converge} & \alpha = 1 \wedge \beta > 1 \\ \text{Diverge} & \alpha = 1 \wedge \beta \leq 1 \\ \text{Diverge} & \alpha < 1 \wedge \forall\beta \end{cases}$$

4.2 Criteri di Convergenza

DEFINIZIONE

Condizione **Necessaria non Sufficiente** per la convergenza:
Il Limite della successione del termine generale a_n deve essere *Inifinitesimo*.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge} \implies \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

Serie Positive def $\underline{\text{nte}}$

Se a_n è def $\underline{\text{nte}}$ ≥ 0 uso:

Criterio del Rapporto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \begin{cases} \text{Converge} & l < 1 \\ \text{Diverge} & l > 1 \\ \text{Criterio inconclusivo} & l = 1 \end{cases}$$

Criterio della Radice

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \begin{cases} \text{Converge} & l < 1 \\ \text{Diverge} & l > 1 \\ \text{Criterio inconclusivo} & l = 1 \end{cases}$$

Criterio del Confronto $a_n \leq b_n$ definitivamente $\implies$

- se b_n Converge $\implies$ a_n Converge
- se a_n Diverge $+\infty$ $\implies$ b_n Diverge $+\infty$

Serie con Segno Alterno

Se a_n è a segno **Alterno**:

Criterio della Assoluta Convergenza .
$\sum a_n$ **converge assolutamente** se converge $\sum |a_n|$.
Se una serie converge assolutamente, allora converge.

Criterio di Leibniz Sia $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ una serie a segno variabile. Se valgono le seguenti ipotesi:

- $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (successione definitivamente positiva)
- a_n è una succesione infinitesima, ovvero esiste il $\lim_{n\to+\infty}(a_n) = 0$
- $\{a_n\}_n$ è una successione non crescente, ossia esiste un indica n_0 tale per cui ogni $n \geq n_0$ risulta che $a_{n+1} < a_n$

Allora il criterio di Leibniz stabilisce che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ converge.
Da utilizzare per lo studio di convergenza delle serie a segno alterno.

Capitolo 5

Calcolo Differenziale

5.1 Definizione di derivata e il Rapporto Incrementale

il Rapporto incrementale Di una funzione è alla base della definizone di derivata, ed è così definito:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

DEFINIZIONE

La **derivata di una funzione** in un punto è il limite del rapporto incrementale della funzione nel punto al tendere dell'incremento a zero.

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

5.2 Tecniche e Metodi di derivazione

Alcune funzioni sono facilmente derivabili:

Nome	**Funzione**	**Derivata**
Seno	$\sin x$	$\cos x$
Coseno	$\cos x$	$-\sin x$
Arcotangente	arctan	$\frac{1}{1+x^2}$
Logaritmo	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
Esponenziale	e^x	e^x
Esponenziale (negativo)	e^{-x}	$-e^{-x}$
1 su x^2	$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{2}{x^3}$
x alla α	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$

5.2.1 Derivate Composte

Funzione composta	$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$
Prodotto	$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$
Divisione	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}$

5.2.2 Derivata dell'inversa di una funzione

Dati:
y_o e $f(x)$, avendo $g(x) = f^{-1}(x)$ allora: Per calcolare $g'(y_0)$

1. trovo x_0 ponendo $y_0 = f(x)$
2. trovo $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

5.3 Sviluppi di Taylor e McLaurin

5.3.1 Tayolr

Lo sviluppo di taylor di una funzione in un punto, se esiste permette di approssimare la funzione in un polinomio. Essendo un'approssimazione, può anche essere usato per lo studio dei limiti.

Polinomio di Taylor Il polinomio di Taylor di una funzione di grado k e centrato in x_0 è così definito:

$$P_k(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + ... + \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

Lo sviluppo Se viene richiesto lo Sviluppo di Taylor di f(x), avendo $P(x)$ come Polinomio di Taylor di $f(x)$ allora:
Sviluppo di taylor di grado k: $f(x) \simeq P(x) + o(x^k)$.

5.3.2 McLaurin

Se uno sviluppo di Taylor è centrato in $x_0 = x$, allora può essere semplificato con il polinomio di Mclaurin.

Polinomio di Mclaurin di grado k:

$$P_k(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + ... + \frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k$$

Capitolo 6

Calcolo Integrale

6.1 Definizione, condizioni e proprietá

DEFINIZIONE

Condizione di integrabilità Per l'integrabilità di una funzione su un intervallo la condizione che essa sia *continua è sufficiente ma non necessaria*

6.1.1 le Proprietà degli Integrali

Gli integrali hanno le seguenti proprietá.

- Somma di integrali: $\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
- Costante moltiplicativa $\int k \cdot f(x) = k \int f(x)$

6.1.2 Media Integrale

Considerata f limitata e integrabile su un intervallo $[a, b]$

$$M(f, [a, b]) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

6.2 Primitive Elementari

Le primitive elementari sonon funzioni il cui integrale é immediatamente calcolabile. La primitiva di una funzione é l'antiderivata di essa.

Funzione	**Primitiva**
k	kx
x^a,$a \neq -1$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$
$\frac{1}{x}$	$\log \lvert x \rvert$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
a^x	$\frac{a^x}{\log a}$
e^{-x}	$-e^{-x}$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan(c)$

6.3 Metodi di Risoluzione

6.3.1 Integrali quasi Immediati

Gli integrali quasi immediati sono gli integrali piú facili da integrare, spesso é utile riformulare la funzione da integrare in modo da ricondurci a questa forma.

DEFINIZIONE

$$\int f'(x) \cdot g(f(x))dx = G(f(x)) + C$$

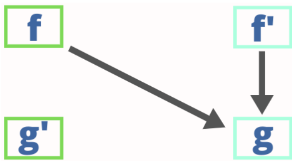
Quando dobbiamo integrare una funzione composta é sempre utile controllare la derivata della funzione interna per capire se possiamo ricondurci agli integrali quasi immediati.

6.3.2 Integrazione per Parti

L'integrazione per parti é utile quando l'integrale da risolvere é formato da due funzioni: Una facilmente Derivabile e una facilmente Integrabile.

DEFINIZIONE

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$



6.3.3 Integrazione per Sostituzione

L'integrazione per sostituzione é utile quando, all'interno della funzione da integrare, abbiamo un componente "fastidioso" che vogliamo rimuovere.

Procedimento All'interno della funzione da integrare, trovo una funzione $g(x)$ *Derivabile e Invertibile* da sostituire ad x.

1. decido che $y = g(x)$
2. Inverto $g(x)$ per isolare la x, ottenendo $x = g^{-1}(y)$
3. Derivo entrambi i membri e aggiungo dx e dy: $\to dx = (g^{-1})'(y)dy$
4. all'interno di $f(x)$ sosdtituisco $g(x) \to y$ e $dx \to (g^{-1})'(y)dy$
5. Risolvo l'integrale
6. Sostiuisco $y \to g(x)$

Capitolo 7

Dimostrazioni per induzione

Le due casistiche principali sono:

- Dimostrazioni con la sommatoria $\sum$
- Dimostrazioni con disequazioni

Ricorda Devi sempre dimostrare che la formula è vera per $n + 1$, quindi devi ricondurti a ciò che hai a destra dell'equazione.

Dimostrazioni con la sommatoria

In questo caso devo ricordarmi di ricondurmi al caso base estrando dalla sommatoria (n+1) per ricondurmi alla sommatoria $\sum^{n}$ e poi sostituendo l'ipotesi induttiva (la sommatoria che supponiamo vera). Così facendo posso ottenere ciò che ho a sinistra della formula $\sum^{n+1}$.

Dimostrazioni con le disequazioni

In questo caso devo ricordarmi che oltre a dover sostituire l'ipotesi induttiva nella disequazione possono aggiungere numeri che mi possono servire a patto che abbia la certezza che questi numeri non vadano in contraddizione con il segno della disequazione, quindi se ho $a > b$, aggiungendo numeri non deve succedere che b diventi maggiore di a.

Ricorda Nell'ipotesi avrai una condizione (per esempio per $n > 1$), ricordati che puoi e spesso devi usarla per poter aggiungere numeri utili alla dimostrazione.