CheatSheet di Ricerca Operativa e Pianificazione delle Risorse

Fabio Ferrario

@fefabo

2022/2023

Indice

Capitolo 1

Gli esercizi d'esame

Gli esercizi possibile all'esame sono:

- Metodo del Simplesso e Due Fasi
- Scarti Complementari
- Analisi di Sensitività
- Branch and Bound per PLI o PLB
- Risoluzione Analitica di PNL Multivariato
- Metodo del Gradiente
- Algoritmo di Newton
- Condizioni KKT

Oltre a varie possibili domande di teoria.

Capitolo 2

Programmazione Lineare

2.1 Metodo del Simplesso

Forma Aumentata

Per portare il problema in forma aumentata:

Vincoli			
Minoreuguale	$\leq$	$=$	+ Slack
Maggioreuguale	$\geq$	$=$	- Surplus
Uguale	$=$	Invariato	

Variabili non positive	
$x_i \leq 0$	$x_i = -x_i^{'}$ con $x_i^{'} \geq 0$
Ogni apparizione di x_i viene sostituita con $-x_i^{'}$	

Funzione Obiettivo		
$Z = \Sigma x_i$	$\rightarrow$	$Z - \Sigma x_i = 0$

Test di Ottimalità

Una volta portato il problema in forma tabellare, eseguo il test di ottimalitá:

Tipo di Problema	**Massimo**	**Minimo**
Soluzione Ottima sse	Coefficienti riga (0) ≥ 0	Coefficienti riga (0) ≤ 0

Nuova Soluzione di Base Una volta verificato che la soluzione non é ottima, bisogna calcolare una nuova soluzione di base:
Definisco:

Tipo di Problema	**Massimo**	**Minimo**
Variabile Entrante (Colonna Pivot)	Coefficiente riga (0) più Piccolo (Più Negativo)	Coefficiente riga (0) più Grande (Più Positivo)
Variabile Uscente (Riga Pivot)	Test del Rapporto Minimo (T.noto/Pivot)	
Numero Pivot	Intersezione Riga/Colonna Pivot	

Per la nuova **Riga Pivot**		
Variabile di Base	$\rightarrow$	Variabile Entrante.
Coefficienti e Termine Noto	$\rightarrow$	Divisi per Numero Pivot.

<table>
<tr><td colspan="2">per ogni altra Riga</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Definisco</td><td>P_i i-esimo coefficiente della nuova riga pivot</td></tr>
<tr><td>X_p coefficiente della colonna pivot nella riga in esame.</td></tr>
<tr><td colspan="2">il coefficiente i-esimo x_i della riga in esame X diventa:</td></tr>
<tr><td>$X_p > 0$</td><td>$x_i := x_i - |X_p| \cdot P_i$</td></tr>
<tr><td>$X_p < 0$</td><td>$x_i := x_i + |X_p| \cdot P_i$</td></tr>
<tr><td>$X_p = 0$</td><td>La riga in esame resta Invariata</td></tr>
</table>

2.1.1 Due Fasi

Funzione Obiettivo: Somma di tutte le variabili artificiali introdotte.

$$(\min Z = \Sigma y_i \implies \max Z = -\Sigma y_i \implies \max Z + \Sigma y_i = 0)$$

Vincoli: Per ogni vincolo che viene violato dalla soluzione Origine, sommo una variabile artificiale (unica) con coefficiente 1.
Tableau iniziale: Le variabili artificiali devono essere in base, quindi devo azzerarle in R(0) sottraendogli il vincolo a cui sono associate.
Una volta fatte entrare in base tutte le variabili artificiali, posso iterare normalmente.
Finito di iterare, avró tutte le variabili artificiali =1 in (0), rimuovo quindi le colonne artificiali e ripristino la funzione obiettivo.
Adesso faccio entrare in base (nello stesso modo di prima) le variabili che devono essere in base. poi itero normalmente.

2.2 Dualitá

2.2.1 Passare da Primale a Duale

	Primale	**Duale**	**Ritorno**
Funzione Obiettivo	max $c^T x$	min $b^T \lambda$	max $c^T x$
Vincoli $\implies$ Non Negativitá	$x_i^T a \leq c$	$\lambda_i \geq 0$	$x_i^T a \leq c$
	$x_i^T a \geq c$	$\lambda_i \leq 0$	$x_i^T a \geq c$
	$x_i^T a = c$	λ_i Free	$x_i^T a = c$
Non Negatività $\implies$ Vincoli	$x_j \geq 0$	$\lambda_j^T a \geq c$	$x_j \geq 0$
	$x_j \leq 0$	$\lambda_j^T a \leq c$	$x_j \leq 0$
	x_j Free	$\lambda_j^T a = c$	x_j Free

Duale con le matrici Un trucco per generare rapidamente il duale é utlizzare le matrici:
Avendo il seguente problema di PL:

Primale

$$\begin{array}{lcccl} \max & c_1 x_1 & + & c_2 x_2 & \\ & a_{11} x_1 & + & a_{12} x_2 & \leqslant b_1 \\ & a_{21} x_1 & + & a_{22} x_2 & \leqslant b_2 \\ & x_1 \geqslant 0, & & x_2 \geqslant 0 & \end{array}$$

si riconoscono opportunamente gli elementi che compongono il duale e se lo si genera:

Primale

Primo vincolo, Secondo vincolo, Funzione Obb.

$$\begin{array}{lcccl} \max & c_1 x_1 & + & c_2 x_2 & \\ & \lambda_1 a_{11} x_1 & + & \lambda_1 a_{12} x_2 & \leqslant b_1 \lambda_1 \\ & \lambda_2 a_{21} x_1 & + & \lambda_2 a_{22} x_2 & \leqslant b_2 \lambda_2 \\ & x_1 \geqslant 0, & & x_2 \geqslant 0 & \end{array}$$

Duale

$$\begin{array}{lcccl} \min & b_1 \lambda_1 & + & b_2 \lambda_2 & \\ & a_{11} \lambda_1 & + & a_{21} \lambda_1 & \geqslant c_1 \\ & a_{12} \lambda_2 & + & a_{22} \lambda_2 & \geqslant c_2 \\ & \lambda_1 \geqslant 0 & & \lambda_2 \geqslant 0 & \end{array}$$

2.3 Gli Scarti Complementari

Se abbiamo una soluzione ammissibile per il primale possiamo verificarne l'ottimalità tramite le condizioni degli scarti complementari: Quindi, dato x^*:

$x_i^* \neq 0$	i-esimo (corrispondente) vincolo del duale attivo.
i-esimo vincolo del primale NON attivo	$\lambda_i = 0$

Pongo quindi a sistema le equazioni trovate per trovare la soluzione corrispondente del Duale.
Se i valori delle funzioni obiettivo sono uguali, e la soluzione trovata é ammissibile per il duale, allora le due soluzioni sono entrambe ottime.

2.4 Esercizi su Analisi di Sensitività

Analisi su Termini Noti Analisi di sensitività di un termine noto (b_i) relativo alla i-esima equazione di vincolo, dato il tableu dell'ultima iterazione:

- Identifico la variabile di Slack della i-esima equazione di vincolo.
- $\forall$ Riga del tableau (tranne R_0) in cui il coefficiente della Slack in esame è $\neq 0$ faccio:
$$\text{T.Noto} + (\text{Coefficiente della Slack} \cdot \Delta) \geq 0$$
- Metto a sistema le disequazioni trovate e risolvo per Delta.

Analisi su Coefficienti Funzione Obiettivo Analisi di sensitivitá sui coefficienti c_i:

- Se c_i é un base nell'equazione R_i: metto a sistema $R_0 + \Delta R_i \geq 0$ e trovo Δ.
- Se non é in base sottraggo Δ dal suo coefficiente in R_0, che deve peró rimanere ≥ 0

Capitolo 3

BranchAndBound

I problemi di Branch and Bound si risolvono in questo modo:

- Apro il nodo k e risolvo il rilassamento lineare:
  - Aggiorno $Z*$ se la soluzione è intera (binaria)
  - Fisso il mio Upper(Lower) Bound come l'arrotondamento (se necessario) della soluzione.
- Prendo la variabile frazionaria (o il primo indice se binario) e ne "vincolo" le soluzioni
- Elaboro tutti i nodi fino a che non si chiudono.

Capitolo 4

Ottimizzazione Non Lineare

4.1 Metodo di Bisezione

- Calcolo $f'(x_k)$
- Se f è **concava**:
  - $f'(x_k) < 0 \implies \bar{x} = x_k$
  - $f'(x_k) > 0 \implies \underline{x} = x_k$
- Cerco il nuovo punto: $x_{k+1} = \frac{\underline{x}+\bar{x}}{2}$
- Se $f'(x_k) = 0$ sono al punto di ottimo

Criterio di arresto: $\underline{x} - \bar{x} \leq 2\epsilon$

4.2 Algoritmo di Newton 1D

Nuovo punto: $x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$

4.3 Risoluzione analitica per PNL Multivariati

Per risolvere analiticamente un problema di PNL multivariato:

- Controllo tutti i punti in cui $\nabla f = 0$
- Per ognuno di questi punti, se:

- Hf nel punto è definita positiva allora è minimo.
- Hf nel punto è definita negativa allora è massimo.
- Hf non è né l'uno né l'altro allora è punto di sella.

4.3.1 Matrice definita positiva/negativa

Per verificare se una matrice è positva o negativa, trovo gli autovalori sottraendo λ dalla diagonale di H valutata nel punto, e poi ponendo $det(H_\lambda) = 0$. per una matrice 2x2 il calcolo è: $(a_{11} - \lambda) \cdot (a_{22} - \lambda) - (a_{12} \cdot a_{21})$ Se tutti gli autovalori sono ≥ 0 allora H nel punto è (semi) definita positiva, mentre è (semi) definita negativa se gli autovalori sono ≤ 0.

4.4 Algoritmo del Gradiente

Data una funzione a piú variabili $f(X)$ e un punto x^0, ogni passo del metodo del gradiente si effettua in questo modo:

1. Calcolo $d^k = \pm\nabla f(x^k)$ (+ max e - min)
2. Calcolo $x^{k+1} = x^k \pm \alpha^k \cdot d^k$
3. Calcolo α^k come $Max\ f(x^k \pm \alpha^k \cdot d^k)$.
   ovvero valuto f nel nuovo punto e massimizzo (minimizzo per i problemi di minimo) la funzione risultante $g(\alpha)$, generalmente in modo analitico ($g'(\alpha) = 0$)
4. Sostituisco α trovato in x^{k+1}.
5. Valuto i criteri di arresto

Per verificare che il punto trovato sia un punto di ottimo, semplicemente controllo che $\nabla f(x^*) = 0$.

Nuovo punto	x^{k+1}	$x^k \pm \alpha^k \cdot d^k$
Direzione di Crescita	d^k	$\pm\nabla f(x^k)$ (+ max e $-$ min)
Step Size	α^k	max/min $f(x^k \pm \alpha^k \cdot d^k)$

4.5 Algoritmo di Newton (Multivariato)

Data una funzione a piú variabili $f(X)$ e un punto x^0, una iterazione del metodo di Newton si effettua in questo modo:

1. Calcolo $\nabla f(x^k)$ e $H(x^k)$.
2. Calcolo V Vettore Spostamento: $H_f(x^k)V = -\nabla f(x^k)$
   è un sistema di equazioni, risolvo per $v_1, ..., v_n$
3. trovo $x^{k+1} = x^k + V$, in cui V é il vettore spostamento.

Vettore Spostamento	V	$H_f(x^k)V = -\nabla f(x^k)$
Nuovo punto	x^{k+1}	$x^k + V$

Capitolo 5

Ottimizzazione Non Lineare Vincolata

5.1 Funzione Lagrangiana

In un problema di ottimizzazione vincolata definito come:

$$\begin{gathered}\text{opt } f(x_1, ..., x_n),\\ g_m(x_1, ..., x_n) = 0 \text{ Vincoli di Uguaglianza},\\ h_l(x_1, ..., x_n) \leq 0 \text{ Vincoli di Disguaglianza},\end{gathered}$$

Generiamo la Lagrangiana cosí definita:

$$L(V) = f(X) \pm \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \cdot g_i(X) \pm \sum_{j=0}^{l} \mu_j \cdot h_j(X)$$

in cui $\pm$ diventa $+$ per i problemi di MIN e $-$ per i problemi di MAX, Abbiamo che λ sono i moltiplicatori lagrangiani associati ai vincoli di Uguaglianza, e μ quelli associati ai vincoli di Disuguaglianza.
con $V = \{x_1, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_m, \mu_1, ..., \mu_l\}$, ovvero tutte le variabili e $X = \{x_1, ..., x_n\}$, ovvero tutte le variabili origniali.

5.2 Condizioni KKT

Tabella Bisogna quindi generare un sistema che avrá $n + m + l$ incognite utilizzando le KKT, riportate qui in modo semplificato:

Stazionarietá Problemi di MIN (-)
$\nabla f = -\sum \lambda_i \cdot \nabla g_i - \sum \mu_j \cdot \nabla h_j$

Stazionarietá Problemi di MAX (+)
$\nabla f = +\sum \lambda_i \cdot \nabla g_i + \sum \mu_j \cdot \nabla h_j$

Ammissibilitá Vincoli Uguaglianza	$\forall$	$g_i = 0$
Ammissibilitá Vincoli Disuguaglianza	$\forall$	$h_j \leq 0$
Condizione di Complementarietá	$\forall$	$\mu_j \cdot h_j = 0$
Non Negativitá di μ	$\forall$	$\mu_j \geq 0$

Dove con $\forall$ si intende chiaramente tutti quelli presenti.

5.2.1 Differenziare tra Max e Min

Quando si usano le KKT bisogna differenziare tra problemi di Max e Problemi di Min. Ogni problema ha le seguenti possibili combinazioni:

<table>
<tr><td rowspan="2">Problema di Massimo</td><td>$\mu_i \geq 0$</td><td>$\nabla f = +\sum \lambda_i \cdot \nabla g_i + \sum \mu_j \cdot \nabla h_j$</td></tr>
<tr><td>$\mu_i \leq 0$</td><td rowspan="2">$\nabla f = -\sum \lambda_i \cdot \nabla g_i - \sum \mu_j \cdot \nabla h_j$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Problema di Minimo</td><td>$\mu_i \geq 0$</td></tr>
<tr><td>$\mu_i \leq 0$</td><td>$\nabla f = +\sum \lambda_i \cdot \nabla g_i + \sum \mu_j \cdot \nabla h_j$</td></tr>
</table>

é utile sapere che se scegliessimo di avere la funzione obiettivo **Sempre come somma di elementi negativi**, sia per i problemi di massimo che di minimo, allora potremmo, in base ai valori di μ, sapere in un solo calcolo se il punto é candidato a massimo o minimo.

5.2.2 Risolvere il Sistema

Per risolvere il sistema, o lo si risolve con il metodo classico, oppure tramite questo metodo: Con la condizione di **Complementarietá** sappiamo che:

$$\mu_j \cdot h_j = 0 \implies \mu_j = 0 \vee h_j = 0$$

Quindi, con l variabili μ_j abbiamo 2^l combinazioni di sistemi, in cui $\mu_j = 0 \vee \mu_j \neq 0$. Cosí possiamo risolvere le 2^l combinazioni per trovare tutti i punti candidati.

5.2.3 Trovare i punti di Minimo e Massimo

I punti trovati dalle condizioni KKT sono solo candidati a essere punti di max/min, perché le KKT sono condizioni Necessarie ma non Sufficienti.

Le condizioni KKT diventano Sufficienti se:

- Per i Punti di Massimo:
  - f é concava.
  - I vincoli $h_i(X)$ sono tutti Convessi.
- Per i Punti di Minimo:
  - f é convessa.
  - I vincoli $h_i(X)$ sono tutti Convessi.