Algebra Lineare e Geometria

Fabio Ferrario
@fefabo

Elia Ronchetti
@ulerich

2023/2024

Indice

Introduzione

Questi appunti di Algebra Lineare e Geometria sono stati fatti con l'obiettivo di riassumere tutti (o quasi) gli argomenti utili per l'esame di Algebra Lineare e Geometria del corso di Informatica dell'Università degli Studi di Milano Bicocca.

Il Corso

Gli appunti fanno riferimento alle lezioni di GAL erogate nel secondo semestre dell'anno accademico 22/23.

Programma del corso

Il programma si sviluppa come segue:

1. **Algebra Lineare**
    - Spazi Vettoriali
    - Dipendenza Lineare
    - Basi
    - Prodotto scalare euclideo
    - Prodotto vettoriale
2. **Matrici**
    - Operazioni
    - Rango
    - Invertibilità
    - Determinante
    - Trasformazioni elementari e riduzione a scala

Prerequisiti

I prerequisiti per questo corso sono: Teoria di insiemi di base. Insiemi con strutture (monoidi e gruppi). Dimostrazioni per assurdo e per induzione.

Insiemistica e Funzioni

In questo capitolo ripassiamo i concetti di insiemistica e funzioni e fissiamo le notazioni che verranno usate durante il corso.

Insiemi

Non verrà data una definizione formale di insieme perchè la definizione matematica di insieme è complessa, verrà quindi data una definizione intuitiva. Fissiamo le **Notazioni** che useremo nell'insiemistica.
Voglio considerare degli oggetti e distinguerli da altri oggetti. In genere si utilizza la notazione classica disegnando un insieme, ma questo metodo è scomodo. Quindi, per rappresentiamo un insieme usiamo le **Parentesi Graffe**

$$\mathrm{I} = \{\ \mathrm{x},\ \Delta,\ 3,\ \odot\ \}$$

Teniamo a mente due cose:

- L'ordine degli elementi <u>non è sensibile</u>.
- Se un valore viene ripetuto, allora questo <u>non è un insieme</u>.

Sottoinsieme

Un sottoinsieme è un insieme contenuto in un altro insieme e si indica con il simbolo $\subset$.
Considerando l'insieme I sopra avremo che:

$$\mathrm{S} \subset \mathrm{I} = \{\Delta,3\} \text{ è un sottoinsieme di I}$$

Operazioni sugli insiemi

Esistono diverse operazioni che ci permettono di ottenere degli insiemi partendo da altri insiemi.
In questo corso useremo le seguenti:

- **Unione** $A \cup B$ Contiene gli elementi contenuti sia in A che in B (Senza ripetizioni).
  - **Unione Disgiunta** $A \sqcup U$ come l'unione, ma se ci sono degli elementi condivisi vengono entrambi rappresentati con indicato a pedice l'insieme di provenienza.
- **Intersezione** $A \cap B$ Contiene gli elementi comuni tra A e B.
- **Complemento** $B \backslash A$ (oppure $B - A$) è l'insieme contenente gli elementi di B che non sono presenti in A.
- **Prodotto Cartesiano** $A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$
  Ovvero l'insieme delle coppie di ogni alemento di A con ogni elemento di B. Nota che il prodotto cartesiano NON è commutativo.

Osservazione: Scrivere (x, y) è diverso che scrivere $\{x, y\}$.
Nel primo caso sto considerando la **coppia di elementi** x **e** y, mentre nel secondo caso sto considerando l'insieme contenente gli elementi x e y.
Quindi $(x, y) \neq (y, x)$, mentre $\{x, y\} = \{y, x\}$.

Insiemi Numerici

Esistono diversi insiemi numerici:

- Naturali $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} = \{0, 1, 2, ...\}$
- Interi $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$
- Razionali $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}\}$
- Reali $\mathbb{R} = \{Q, \sqrt{q}, \pi, e : q > 0 \in Q\}$
- Complessi $\mathbb{C}$, che non faremo in questo corso

Spazi Multidimensionali

Esistono spazi numerici multidimensionali, che sono semplicemente il prodotto cartesiano di più spazi:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

Funzioni

Definizione di Funzione

Definiamo ora il concetto di Funzione:

DEFINIZIONE

Dati due insiemi A e B, una funzione è una relazione che **associa** ogni elemento di A a uno e un solo elemento di B. L'insieme A viene chiamato **Dominio**, mentre B è il **Codominio**.

Osservazione: Perchè f sia una funzione deve valere:

$$\forall x \in dom(f),\ \exists ! f(x)$$

Ovvero, per ogni x appartenente al dominio della funzione f esiste **ed é unico** un valore di $f(x)$.

Immagine e Controimmagine

Una funzione $f : A \to B$ ha associata i seguenti insiemi:

- Sia $S \subset A$, allora con $f(S)$ indicheremo l'**Immagine** di S tramite f.

$$f(S) = \{b \in B : \text{ è associato ad un elemento di S}\}$$

- Sia $R \subset B$, allora con $f^{-1}(R)$ indicheremo la **Controimmagine** di R tramite f.

$$f^{-1}(R) = \{a \in A : f(a) \in R\}$$

In parole povere, l'Immagine è l'insieme di tutti i valori che assume la funzione f valutata in ogni elemento di S, mentre la Controimmagine è l'insieme di tutti i valori del dominio che sono associati ai valori contenuti in R.

Iniettività e Suriettività

Una funzione può godere delle seguenti proprietà:

- f è detta **Iniettiva** se $a_1 \neq a_2 \in \text{ dom} f \implies f(a_1) \neq f(a_2)$
- f è detta **Suriettiva** se $\forall b \in \text{ codom} f,\ \exists\, a \in dom f : f(a) = b$

f è detta biettiva (o bigetta o biunivoca) se è sia iniettiva che suriettiva.

Capitolo 1

Spazi vettoriali

Gli spazi vettoriali sono degli insiemi con "sopra" delle struttre algebriche.

1.1 Definizione di Spazi Vettoriali

Sia V un insieme e K un "campo" (ad esempio $\mathbb{R}$). Allora:

DEFINIZIONE

Diremo che V è uno **Spazio Vettoriale** su K se esistono le operazioni di **Somma** $(+)$ e di **Prodotto per uno scalare**$(\cdot)$ su V.

Nota che campo e spazio vettoriali non coincidono mai! se entrambi sono $\mathbb{R}$, allora sono copie diverse di esso.

1.1.1 Le operazioni Somma e Prodotto

Perchè un insieme sia uno spazio vettoriale deve essere dotato delle operazioni di Somma e Prodotto per uno scalare, ma queste due operazioni devono rispettivamente verificare alcune proprietà.

Somma La somma è una funzione così definita:

$$"+" : V \times V \to V$$

$$\text{ovvero } (\underline{v_1}, \underline{v_2}) \to "\underline{v_1} + \underline{v_2}\ \forall \underline{v_i} \in V".$$

Essa deve godere delle seguenti proprietà:

1. Nullo: $\exists \underline{0} \in V : \underline{0} + \underline{v} = v\ \forall \underline{v} \in V$

2. Opposto: $\forall \underline{v} \in V, \exists" - \underline{v}" : \underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{0}$
3. Associatività: $(\underline{v_1} + \underline{v_2}) + \underline{v_3} = \underline{v_1} + (\underline{v_2} + \underline{v_3})$
4. Commutatività: $\underline{v_1} + \underline{v_2} = \underline{v_2} + \underline{v_1}$

Prodotto per uno Scalare Il Prodotto per uno Scalare è una funzione così definita:

$$" \cdot " : K \times V \to V$$

$$\text{ovvero } (\underline{\alpha}, \underline{v}) \to "\alpha \underline{v}\,".$$

Essa deve godere delle seguenti proprietà:

1. $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \underline{v} = \lambda_1 \underline{v} + \lambda_2 \underline{v}$ con $\lambda_i \in K, \underline{v} \in V$
2. $\lambda \cdot (\underline{v_1} + \underline{v_1}) = \lambda \underline{v_1} + \lambda \underline{v_2}$ con $\lambda \in K, \underline{v_1} \in V$
3. $(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot \underline{v} = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot \underline{v})$

Osservazione: Si può dimostrare che:

- $0 \cdot \underline{v} = \underline{0} \ \forall \underline{v} \in V$
- $\lambda \cdot \underline{0} = \underline{0} \ \forall \lambda \in K$
- $-1 \cdot \underline{v} = -\underline{v}$, ovvero l'opposto di $\underline{v} \in V$, $\forall \underline{v} \in V$.

1.2 I Sottospazi Vettoriali

Definiamo ora i sottospazi vettoriali:

DEFINIZIONE

Sia V uno spazio vettoriale su K e $W \subset V$. Diremo che W è un sottospazio vettoriale ($W < V$) di V se:

1. $\underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in W$, $\forall \underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W$
2. $\lambda \underline{w} \in W$, $\forall \underline{w} \in W$

Osservazione: se $W < V$, ovvero W è sottospazio di V allora $\underline{0}_V \in W$

In parole povere Se abbiamo uno spazio vettoriale V e ne prendiamo un suo sottoinsieme W, quest'ultima sarà anch'esso uno spazio vettoriale (sottospazio di V in questo caso) soltanto se queste due proprietà vengono rispettate:

- Se prendiamo qualunque coppia di elementi w_1 e w_2 in W, anche la loro somma deve far parte di W.
- se prendiamo un qualunque elemento $\underline{w}$ e un qualunque scalare λ, anche il loro prodotto deve far parte di W.

Osservazione: Lo spazio vettoriale piú semplice é quello che contiene solo l'elemento identitá ($\underline{0}$)

1.2.1 I sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^2$

Quali sono i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^2$?
Innanzitutto ricordiamo che per fare si che un certo $W < \mathbb{R}^2$ ogni elemento deve rispettare le due condizioni di somma tra vettori e prodotto per uno scalare.
Detto ció, é dimostrabile che tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^2$ in ordine di grandezza sono:

- $\{\underline{0}\}$, ovvero l'insieme identitá.
- Tutte le **Rette passanti per l'origine**.
- ???
- $\mathbb{R}^2$ stesso.

1.2.2 Il piú piccolo Sottospazio Vettoriale

Dato $S \subset V$ con V Spazio Vettoriale, esiste il piú piccolo sottospazio di V contenente S? Si, ed é definito cosí:

DEFINIZIONE

$< S >< V$ Indica il piú piccolo sottospazio di V contenente S. Si dimostra che:

$$< S >= \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot z_i : \lambda_i \in \mathbb{R}, z_i \in S, n \in \mathbb{N}\}$$

Si osserva che non esiste $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \cdot z_i$, poiché la somma deve essere tra un **numero finito** di vettori.

1.3 Combinazione Lineare

La somma utilizzata nell'ultima definizione non é a caso, ma si chiama Combinazione Lineare:

DEFINIZIONE

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot z_i$ si chiama **Combinazione Lineare** di $\{z_i\}_{i=1,...,n}$

Dipendenza Lineare

Da qui possiamo andare a definire se i vettori di un insieme sono linearmente dipendenti o no:

DEFINIZIONE

Sia $S \subset V$ con V spazio Lineare.
I vettori di S sono detti **Linearmente dipendenti** se:

$$\exists \underline{w} \in S \text{ e } S_{\underline{w}} = \{z_1, ..., z_n\} \subset S \text{ (con } \underline{w} \notin S_{\underline{w}})$$

tali che

$$\underline{\mathrm{w}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot z_i, \lambda_i \in K$$

Altrimenti, i vettori si S sono detti **Linearmente Indipendenti**

Ovvero, si dice che i vettori di un insieme sono linearmente dipendenti se sono la combinazione lineare di altri elementi dell'insieme.

Lemma

$S \subset V$ é un insieme di vettori linearmente indipendenti sse:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot z_i = \underline{0} \implies \lambda_i = 0 \forall i$$

Ció deve valere $\forall n \in N$ e $\forall \{z_i\} \subset S$.

Dimostrazione del Lemma $S \subset V$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti. Voglio dimostrare che se $\{\underline{z}_i\} < S$ e $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{z}_i = \underline{0}$ allora $\lambda_i = 0 \forall 0$.
Nego la tesi: Supponiamo che $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{z}_i = \underline{0}$ ma $\exists h : \lambda_h \neq 0$. Allora

$$\lambda_h z_h = -\sum_{j \neq h} \lambda_j \underline{z}_j \to ... \to z_h = -\sum_{j \neq h} \lambda_h^{-1} \lambda_j \underline{z}_j$$

Ovvero al combinazione lineare di vettori $\subset S$ diversi da z_h, quindi gli $\{\underline{z}_i\}$ sono linearmente dipendenti e lo sono anche quelli di S.

1.4 Basi

Domanda: come "comunico" un sottospazio vettoriale?
Sia $W < V$, abbiamo 2 modi per "comunicarlo":

1. Siccome $W \subset V$, allora $W = \{...\}$.
2. Sfrutiamo il fatto che $W < V$ e quindi $< S >= W$ per qualche <u>insieme</u> $S \subset V$, cerchiamo di "ottimizzare" S, ovvero cerchiamo il piú piccolo S che rispetti $< S >= W$.
   Ció consiste nel determinare un S "minimale" tale che:
   $$W =< S >= \text{Spazio Vettoriale generato da S}$$
   La minimalitá é equivalente a:
   $$W \neq < S/\underline{v} >, \ \forall \underline{v} \in S$$

DEFINIZIONE

Teorema/Definizione di Base: Tutte le seguenti affermazioni sono **equivalenti**:

(a) $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n\} \subset V$ é una Base di V.

(b) S è un sistema di generatori per V, cioé $V =< S >$ e i vettori di S sono linearmente indipendenti.

(c) $< S >= V$ e $\forall \underline{v} \in V, \exists! \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{v}_i = \underline{v}$

(d) S è un insieme minimale di generatori di V.

(e) S è un insieme massimale di vettori linearmente dipendenti di V.

Come potrei dimostrare questo? Essendo proposizioni equivalenti, avrò che:

$$a \implies b, b \implies a, b \implies c, ..., e \implies d$$

Però posso semplicemente dimostrarne 5.

Corollario [1] Ogni spazio vettoriale che ammette un insieme finito di generatori ammette una base.

Esempio: (1) Abbiamo $V = \mathbb{R}^n$ e

$$S = \{(1, 0, ..., 0), (0, 1, 0, ..., 0), ...(0, 0, ..., 1)\} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, ..., \underline{e}_n\}$$

S é detta **Base Canonica**[a] di $\mathbb{R}^n$.
Usiamo il teorema (c) per verificare che è una base: Sia $(x_0, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{e}_i = ... = (lambda_1, ..., \lambda_n)$ Quindi $\lambda_i = x_i$
$\implies$ Tale combinazione lineare é **unica**, qiundi (c) é verificata e S é una Base.

[a]Canonico non é ben definibile in matematica, è il suo nome di battesimo.

Uno dei teoremi più importanti per le basi è il teorema di *estensione di una base*:

Teorema 2: Sia $I\{\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n\}$ insieme di vettori **Linearmente indipendenti** t.c. $I \subset V$, e $G\{\underline{w}_1, ..., \underline{w}_n\}$ insieme di **generatori** di V, Allora $\exists G' \subset G : I \cup G'$ è una base di V.

Teorema 3: Con le notazioni del teorema due, avremo che $\#(I) \leq \#(G)$, ovvero il numero di elementi di I è minore o uguale al numero di elementi di G.

[1]Conseguenza

Corollario del teorema 3: Se $\exists G$ insieme finito t.c: è un sistema di generatori di V-spazio vettoriale, allora ogni base di V ha lo stesso numero di elementi. Ovvero fissato uno spazio, tutte le sue basi hanno lo stesso numero di elementi.

DEFINIZIONE

La dimensione di uno spazio vettoriale V che ammette un sistema di generatori finito è il numero di elementi di una base qualsiasi di V.

La dimensione comprende sia l'insieme che la struttura algebrica.

Corollario $dim(V) = n \implies n$ vettori indipendenti sono anche generatori. Implica anche che n generatori di V sono linearmente indipendenti.