

Algebra Lineare e Geometria

Fabio Ferrario

@fefabo

Elia Ronchetti

@ulerich

2023/2024

Indice

1	Spazi vettoriali	8
1.1	Definizione di Spazi Vettoriali	8
1.1.1	Le operazioni Somma e Prodotto	8
1.2	I Sottospazi Vettoriali	9
1.2.1	Sottospazi di \mathbb{R}^2	10
1.2.2	Il piú piccolo Sottospazio Vettoriale	10
1.3	Combinazione Lineare	11
1.4	Basi	12
1.4.1	Dimensione di Uno Spazio Vettoriale	14
1.5	Recap	14
1.5.1	Sottospazi Vettoriali	14
1.5.2	Basi	15

Introduzione

Questi appunti di Algebra Lineare e Geometria sono stati fatti con l'obiettivo di riassumere tutti (o quasi) gli argomenti utili per l'esame di Algebra Lineare e Geometria del corso di Informatica dell'Università degli Studi di Milano Bicocca.

Il Corso

Gli appunti fanno riferimento alle lezioni di GAL erogate nel secondo semestre dell'anno accademico 22/23.

Programma del corso

Il programma si sviluppa come segue:

1. Algebra Lineare

- Spazi Vettoriali
- Dipendenza Lineare
- Basi
- Prodotto scalare euclideo
- Prodotto vettoriale

2. Matrici

- Operazioni
- Rango
- Invertibilità
- Determinante
- Trasformazioni elementari e riduzione a scala

3. Sistemi di equazioni lineari

- Risultati di base
- Teoremi di Rouché-Capelli e Cramer
- Cenni alla regressione lineare semplice

4. Applicazioni lineari

- Matrice associata
- Proprietà

5. Diagonalizzabilità di Matrici

- Autovalori
- Autovettori
- Molteplicità algebrica e geometrica
- Teorema Spettrale

6. Geometria Analitica nel Piano

- Sottospazi lineari affini
- Classificazione delle coniche

7. Geometria Analitica nello spazio

- Sottospazi lineari Affini

Prerequisiti

I prerequisiti per questo corso sono: Teoria di insiemi di base. Insiemi con strutture (monoidi e gruppi). Dimostrazioni per assurdo e per induzione.

Insiemistica e Funzioni

In questo capitolo ripassiamo i concetti di insiemistica e funzioni e fissiamo le notazioni che verranno usate durante il corso.

Insiemi

Non verrà data una definizione formale di insieme perchè la definizione matematica di insieme è complessa, verrà quindi data una definizione intuitiva. Fissiamo le **Notazioni** che useremo nell'insiemistica.

Voglio considerare degli oggetti e distinguerli da altri oggetti. In genere si utilizza la notazione classica disegnando un insieme, ma questo metodo è scomodo. Quindi, per rappresentiamo un insieme usiamo le **Parentesi Graffe**

$$I = \{ x, \Delta, 3, \odot \}$$

Teniamo a mente due cose:

- L'ordine degli elementi non è sensibile.
- Se un valore viene ripetuto, allora questo non è un insieme.

Sottoinsieme

Un sottoinsieme è un insieme contenuto in un altro insieme e si indica con il simbolo \subset .

Considerando l'insieme I sopra avremo che:

$$S \subset I = \{\Delta, 3\} \text{ è un sottoinsieme di } I$$

Operazioni sugli insiemi

Esistono diverse operazioni che ci permettono di ottenere degli insiemi partendo da altri insiemi.

In questo corso useremo le seguenti:

- **Unione** $A \cup B$ Contiene gli elementi contenuti sia in A che in B (Senza ripetizioni).
 - **Unione Disgiunta** $A \sqcup U$ come l'unione, ma se ci sono degli elementi condivisi vengono entrambi rappresentati con indicato a pedice l'insieme di provenienza.
- **Intersezione** $A \cap B$ Contiene gli elementi comuni tra A e B.
- **Complemento** $B \setminus A$ (oppure $B - A$) è l'insieme contenente gli elementi di B che non sono presenti in A.
- **Prodotto Cartesiano** $A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$
Ovvero l'insieme delle coppie di ogni elemento di A con ogni elemento di B. Nota che il prodotto cartesiano NON è commutativo.

Osservazione: Scrivere (x, y) è diverso che scrivere $\{x, y\}$.

Nel primo caso sto considerando la **coppia di elementi** x e y , mentre nel secondo caso sto considerando l'insieme contenente gli elementi x e y .

Quindi $(x, y) \neq (y, x)$, mentre $\{x, y\} = \{y, x\}$.

Insiemi Numerici

Esistono diversi insiemi numerici:

- Naturali $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} = \{0, 1, 2, \dots\}$
- Interi $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- Razionali $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}\}$
- Reali $\mathbb{R} = \{Q, \sqrt{q}, \pi, e : q > 0 \in \mathbb{Q}\}$
- Complessi \mathbb{C} , che non faremo in questo corso

Spazi Multidimensionali

Esistono spazi numerici multidimensionali, che sono semplicemente il prodotto cartesiano di più spazi:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

Funzioni

Definizione di Funzione

Definiamo ora il concetto di Funzione:

DEFINIZIONE

Dati due insiemi A e B , una funzione è una relazione che **associa** ogni elemento di A a uno e un solo elemento di B . L'insieme A viene chiamato **Dominio**, mentre B è il **Codominio**.

Osservazione: Perchè f sia una funzione deve valere:

$$\forall x \in \text{dom}(f), \exists ! f(x)$$

Ovvero, per ogni x appartenente al dominio della funzione f esiste **ed è unico** un valore di $f(x)$.

Immagine e Controimmagine

Una funzione $f : A \rightarrow B$ ha associata i seguenti insiemi:

- Sia $S \subset A$, allora con $f(S)$ indicheremo l'**Immagine** di S tramite f .

$$f(S) = \{b \in B : \text{è associato ad un elemento di } S\}$$

- Sia $R \subset B$, allora con $f^{-1}(R)$ indicheremo la **Controimmagine** di R tramite f .

$$f^{-1}(R) = \{a \in A : f(a) \in R\}$$

In parole povere, l'Immagine è l'insieme di tutti i valori che assume la funzione f valutata in ogni elemento di S , mentre la Controimmagine è l'insieme di tutti i valori del dominio che sono associati ai valori contenuti in R .

Iniettività e Suriattività

Una funzione può godere delle seguenti proprietà:

- f è detta **Iniettiva** se $a_1 \neq a_2 \in \text{dom}f \implies f(a_1) \neq f(a_2)$
- f è detta **Suriattiva** se $\forall b \in \text{codom}f, \exists a \in \text{dom}f : f(a) = b$

f è detta biettiva (o bigetta o biunivoca) se è sia iniettiva che suriattiva.

Capitolo 1

Spazi vettoriali

Gli spazi vettoriali sono degli insiemi con "sopra" delle strutture algebriche.

1.1 Definizione di Spazi Vettoriali

Sia V un insieme e K un "campo" (ad esempio \mathbb{R}). Allora:

DEFINIZIONE

Diremo che V è uno **Spazio Vettoriale** su K se esistono le operazioni di **Somma** (+) e di **Prodotto per uno scalare**(\cdot) su V .

Nota che campo e spazio vettoriali non coincidono mai! se entrambi sono \mathbb{R} , allora sono copie diverse di esso.

1.1.1 Le operazioni Somma e Prodotto

Perché un insieme sia uno spazio vettoriale deve essere dotato delle operazioni di Somma e Prodotto per uno scalare, ma queste due operazioni devono rispettivamente verificare alcune proprietà.

Somma La somma è una funzione così definita:

$$+ : V \times V \rightarrow V$$

$$\text{ovvero } (\underline{v}_1, \underline{v}_2) \rightarrow \underline{v}_1 + \underline{v}_2 \quad \forall \underline{v}_i \in V.$$

Essa deve godere delle seguenti proprietà:

1. Nullo: $\exists \underline{0} \in V : \underline{0} + \underline{v} = \underline{v} \quad \forall \underline{v} \in V$

2. Opposto: $\forall \underline{v} \in V, \exists -\underline{v} : \underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{0}$
3. Associatività: $(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) + \underline{v}_3 = \underline{v}_1 + (\underline{v}_2 + \underline{v}_3)$
4. Commutatività: $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = \underline{v}_2 + \underline{v}_1$

Prodotto per uno Scalare Il Prodotto per uno Scalare è una funzione così definita:

$$" \cdot " : K \times V \rightarrow V$$

$$\text{ovvero } (\underline{\alpha}, \underline{v}) \rightarrow "\alpha \underline{v} " .$$

Essa deve godere delle seguenti proprietà:

1. $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \underline{v} = \lambda_1 \underline{v} + \lambda_2 \underline{v}$ con $\lambda_i \in K, \underline{v} \in V$
2. $\lambda \cdot (\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = \lambda \underline{v}_1 + \lambda \underline{v}_2$ con $\lambda \in K, \underline{v}_i \in V$
3. $(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot \underline{v} = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot \underline{v})$

Osservazione: Si può dimostrare che:

- $0 \cdot \underline{v} = \underline{0} \forall \underline{v} \in V$
- $\lambda \cdot \underline{0} = \underline{0} \forall \lambda \in K$
- $-1 \cdot \underline{v} = -\underline{v}$, ovvero l'opposto di $\underline{v} \in V, \forall \underline{v} \in V$.

1.2 I Sottospazi Vettoriali

Definiamo ora i sottospazi vettoriali:

DEFINIZIONE

Sia V uno spazio vettoriale su K e $W \subset V$. Diremo che W è un sottospazio vettoriale ($W < V$) di V se:

1. $\underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in W, \forall \underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W$
2. $\lambda \underline{w} \in W, \forall \underline{w} \in W$

Osservazione: se $W < V$, ovvero W è sottospazio di V allora $\underline{0}_V \in W$

In parole povere Se abbiamo uno spazio vettoriale V e ne prendiamo un suo sottoinsieme W , quest'ultima sarà anch'esso uno spazio vettoriale (sottospazio di V in questo caso) soltanto se queste due proprietà vengono rispettate:

- Se prendiamo qualunque coppia di elementi w_1 e w_2 in W , anche la loro somma deve far parte di W .
- se prendiamo un qualunque elemento \underline{w} e un qualunque scalare λ , anche il loro prodotto deve far parte di W .

Osservazione: Lo spazio vettoriale più semplice è quello che contiene solo l'elemento identità ($\underline{0}$)

1.2.1 I sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^2

Quali sono i sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^2 ?

Innanzitutto ricordiamo che per fare sì che un certo $W < \mathbb{R}^2$ ogni elemento deve rispettare le due condizioni di somma tra vettori e prodotto per uno scalare.

Detto ciò, è dimostrabile che tutti i sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^2 in ordine di grandezza sono:

- $\{\underline{0}\}$, ovvero l'insieme identità.
- Tutte le **Rette passanti per l'origine**.
- ???
- \mathbb{R}^2 stesso.

1.2.2 Il più piccolo Sottospazio Vettoriale

Dato $S \subset V$ con V Spazio Vettoriale, esiste il più piccolo sottospazio di V contenente S ? Sì, ed è definito così:

DEFINIZIONE

$\langle S \rangle \subset V$ Indica il piú piccolo sottospazio di V contenente S . Si dimostra che:

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot z_i : \lambda_i \in \mathbb{R}, z_i \in S, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Si osserva che non esiste $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \cdot z_i$, poiché la somma deve essere tra un **numero finito** di vettori.

1.3 Combinazione Lineare

La somma utilizzata nell'ultima definizione non é a caso, ma si chiama **Combinazione Lineare**:

DEFINIZIONE

$\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot z_i$ si chiama **Combinazione Lineare** di $\{z_i\}_{i=1,\dots,n}$

Dipendenza Lineare

Da qui possiamo andare a definire se i vettori di un insieme sono linearmente dipendenti o no:

DEFINIZIONE

Sia $S \subset V$ con V spazio Lineare.

I vettori di S sono detti **Linearmente dipendenti** se:

$$\exists \underline{w} \in S \text{ e } S_{\underline{w}} = \{z_1, \dots, z_n\} \subset S \text{ (con } \underline{w} \notin S_{\underline{w}})$$

tali che

$$\underline{w} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot z_i, \lambda_i \in K$$

Altrimenti, i vettori di S sono detti **Linearmente Indipendenti**

Ovvero, si dice che i vettori di un insieme sono linearmente dipendenti se sono la combinazione lineare di altri elementi dell'insieme.

Lemma

$S \subset V$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti sse:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot z_i = \underline{0} \implies \lambda_i = 0 \forall i$$

Ciò deve valere $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall \{z_i\} \subset S$.

Dimostrazione del Lemma $S \subset V$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti. Voglio dimostrare che se $\{z_i\} \subset S$ e $\sum_{i=1}^n \lambda_i z_i = \underline{0}$ allora $\lambda_i = 0 \forall i$.

Nego la tesi: Supponiamo che $\sum_{i=1}^n \lambda_i z_i = \underline{0}$ ma $\exists h : \lambda_h \neq 0$. Allora

$$\lambda_h z_h = - \sum_{j \neq h} \lambda_j z_j \rightarrow \dots \rightarrow z_h = - \sum_{j \neq h} \lambda_h^{-1} \lambda_j z_j$$

Ovvero al combinazione lineare di vettori $\subset S$ diversi da z_h , quindi gli $\{z_i\}$ sono linearmente dipendenti e lo sono anche quelli di S .

1.4 Basi

Domanda: come "comunico" un sottospazio vettoriale?

Sia $W \subset V$, abbiamo 2 modi per "comunicarlo":

1. Siccome $W \subset V$, allora $W = \{\dots\}$.
2. Sfruttiamo il fatto che $W \subset V$ e quindi $\langle S \rangle = W$ per qualche insieme $S \subset V$, cerchiamo di "ottimizzare" S , ovvero cerchiamo il più piccolo S che rispetti $\langle S \rangle = W$.
Ciò consiste nel determinare un S "minimale" tale che:

$$W = \langle S \rangle = \text{Spazio Vettoriale generato da } S$$

La minimalità è equivalente a:

$$W \neq \langle S/\underline{v} \rangle, \forall \underline{v} \in S$$

DEFINIZIONE

Teorema/Definizione di Base: Tutte le seguenti affermazioni sono **equivalenti**:

- (a) $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\} \subset V$ è una Base di V .

- (b) S è un sistema di generatori per V , cioè $V = \langle S \rangle$ e i vettori di S sono linearmente indipendenti.
- (c) $\langle S \rangle = V$ e $\forall \underline{v} \in V, \exists! \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{v}_i = \underline{v}$
- (d) S è un insieme minimale di generatori di V .
- (e) S è un insieme massimale di vettori linearmente dipendenti di V .

Come potrei dimostrare questo? Essendo proposizioni equivalenti, avrò che:

$$a \implies b, b \implies a, b \implies c, \dots, e \implies d$$

Però posso semplicemente dimostrarne 5.

Corollario ¹ Ogni spazio vettoriale che ammette un insieme finito di generatori ammette una base.

Esempio: (1) Abbiamo $V = \mathbb{R}^n$ e

$$S = \{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)\} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n\}$$

S è detta **Base Canonica**^a di \mathbb{R}^n .

Usiamo il teorema (c) per verificare che è una base: Sia $(x_0, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{e}_i = \dots = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ Quindi $\lambda_i = x_i$
 \implies Tale combinazione lineare è **unica**, quindi (c) è verificata e S è una Base.

^aCanonicità non è ben definibile in matematica, è il suo nome di battesimo.

Uno dei teoremi più importanti per le basi è il teorema di *estensione di una base*:

Teorema 2: Sia $I\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ insieme di vettori **Linearmente indipendenti** t.c. $I \subset V$, e $G\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n\}$ insieme di **generatori** di V , Allora $\exists G' \subset G : I \cup G'$ è una base di V .

Teorema 3: Con le notazioni del teorema due, avremo che $\#(I) \leq \#(G)$, ovvero il numero di elementi di I è minore o uguale al numero di elementi di G .

¹Conseguenza

Corollario del teorema 3: Se $\exists G$ insieme finito t.c: è un sistema di generatori di V -spazio vettoriale, allora ogni base di V ha lo stesso numero di elementi. Ovvero fissato uno spazio, tutte le sue basi hanno lo stesso numero di elementi.

1.4.1 Dimensione di Uno Spazio Vettoriale

DEFINIZIONE

La dimensione di uno spazio vettoriale V che ammette un sistema di generatori finito è il **numero di elementi di una base qualsiasi** di V .

La dimensione comprende sia l'insieme che la struttura algebrica.

Corollario Come corollario di quest'ultima definizione abbiamo che, sapendo la dimensione di uno spazio vettoriale:

$$\dim(V) = n \implies \begin{cases} n \text{ vettori indipendenti sono anche generatori.} \\ n \text{ generatori di } V \text{ sono linearmente indipendenti.} \end{cases}$$

1.5 Recap

1.5.1 Sottospazi Vettoriali

Se V è uno spazio vettoriale e $W \subseteq V$, allora W è un sottospazio vettoriale di V ($W < V$) se le seguenti 3 condizioni sono rispettate:

1. $0_v \in W$ - Inclusione dell'origine.
2. $w_1 + w_2 \in W \forall w_1, w_2 \in W$ - Chiusura rispetto alla somma.
3. $\lambda w \in W \forall w \in W, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ - Chiusura rispetto al prodotto.

Se vogliamo dimostrare che W non è un sottospazio vettoriale di V , allora basta dimostrare che una delle tre condizioni non è soddisfatta.

Sottospazi di \mathbb{R}^2 Gli unici sottospazi non banali di \mathbb{R}^2 , ovvero quelli diversi da $\{0, 0\}$ e \mathbb{R}^2 stesso, sono soltanto le **rette passanti per l'origine**. Quindi tutti e soli i sottospazi di \mathbb{R}^2 sono:

- Dimensione 0: $\{0, 0\}$

- Dimensione 1: Rette passanti per l'origine
- Dimensione 2: \mathbb{R}^2

Sottospazi di \mathbb{R}^3 Estendendo questo ragionamento a \mathbb{R}^3 avremo invece queste possibilità:

- Dimensione 0: $\{0, 0, 0\}$
- Dimensione 1: Rette passanti per l'origine.
- Dimensione 2: Piani passanti per l'origine.
- Dimensione 3: \mathbb{R}^3

L'equazione cartesiana di un piano passante per l'origine ha questa forma:

$$ax + by + cz = 0 \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

L'equazione cartesiana di una retta passante per l'origine in \mathbb{R}^3 ha invece questa forma:

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \end{cases} \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0), (\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0), (a, b, c) \neq \lambda(\alpha, \beta, \gamma)$$

1.5.2 Basi

Ci sono diversi metodi per trovare una base di un (sotto) spazio vettoriale. Uno di essi prevede il passaggio dalla forma cartesiana alla forma parametrica, vediamo con un esempio:

Esempio: Abbiamo

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y + z = 0\}$$

V è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^3 ed è rappresentato in forma cartesiana. Per passare alla forma parametrica dobbiamo appunto introdurre dei parametri. Ce ne serviranno $n - m$, dove n è la dimensione dello spazio e m il numero di equazioni. In questo caso abbiamo che $n = 3$ e $m = 1$, quindi ci servono 2 parametri, che chiameremo t e s .

Impostiamo quindi:

$$\begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = -2t - 3s \end{cases} \rightarrow V = \{(t, s, -2t - 3s) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$$

Avendo ora la forma parametrica, posso trovare una base di V , scegliendo $t = 1, s = 0$ e $t = 0, s = 1$.

$$t = 1, s = 0 \implies v_1 = (1, 0, -2)$$

$$t = 0, s = 1 \implies v_2 = (0, 1, -3)$$

$\{v_1, v_2\}$ è una base di V .