GAL - Domande d'Esame

Fabio Ferrario
@fefabo

2023/2024

Indice

Capitolo 1

Intro

All'esame ci sono 10 domande, di cui una aperta. Per ogni domanda i punti sono:

- +3 Domanda Giusta.
- -1 Domanda Sbagliata.
- ± 0 Non Risposto.

Quindi se rispondi a tutte puoi fare solo 3 errori

Argomenti degli Esami sono stati:

- Matrici Inverse
- Geometria Analitica
- Applicazioni Lineari
- Prodotto Scalare e Vettoriale
- Sottospazi Combinazioni Lineari
- Basi, Rango, Determinante
- Coniche
- Diagonalizzabilità
- Sistemi di Equazioni Lineari

Flashcards Link alle Flashcards:

Study Smarter

Credits: Alessia Mazzeo

Capitolo 2

Domande Chiuse

2.1 Algebra Lineare

1 INDIPENDENZA DI VETTORI

Se devo verificare che n vettori $v_i \in \mathbb{R}^m$ siano linearmente indipendenti, cosa posso fare?

(a) Creo una matrice con v_i come vettori riga che abbia determinante non nullo

(b) Creo una matrice con v_i come vettori riga e cerco una sottomatrice quadrata di ordine n Invertibile

(c) Cerco una combinazione lineare dei vettori v_i che mi dia il vettore nullo

(d) Creo una matrice con v_i come vettori colonna e verifico che il rango di questa matrice sia m

Risposta: b, perchè se ho una sottomatrice di ordine n invertibile allora il suo determinante è zero. Per il teorema dei minimi, significa che il rango della matrice è *almeno* n, quindi è massimo e tutti i suoi vettori sono linearmente indipendenti.

2 ROUCHÈ-CAPELLI

Sia $Ax = b$ un sistema di equazioni lineari con più incognite che equazioni. Allora:

(a) Agendo con operazioni elementari su righe e colonne della matrice completa $A|b$ ottengo una matrice compoleta il cui sistema associato possiede le stesse soluzioni di quello di partenza

(b) Scegliendo b opportunamente, il sistema ha un'unica soluzione

(c) Dato un b qualsiasi, mi posso scegliere A in modo che il sistema abbia soluzioni e eche la somma di due di esse sia ancora una soluzione

(d) Se il rango di A è massimo, allora il sistema ha soluzione

Risposta: d, Abbiamo che $n > m$, di conseguenza il rango di A è al massimo m. Aggiungendo la colonna b, il rango massimo di $(A|b)$ è ancora m. Quindi se il rango di A è m, ovvero è massimo, allora il sistema ammette soluzioni (per R-C).

inoltre per il teorema di Rouchè-Capelli, sappiamo che se il numero delle incognite > rango(A), allora il sistema ammette $\infty^{m-rank(A)}$ soluzioni.

3 ROUCHÈ-CAPELLI

Sia $Ax = b$ un sistema che non ammette soluzione. Scegliendo un vettore c è possibile ottenere che $Ax = b + c$ abbia infinite soluzioni?

(a) Si, ma solo se A non è di rango massimo

(b) Si, per un qualsiasi A

(c) No, mai

(d) Si, ma solo se A è quadrata e di determinante non nullo.

Risposta: a (da capire). Se $Ax = b$ non ammette soluzioni, allora $rg(A) \neq rg(A|b)$. Per ottenere un sistema con infinite soluzioni, dobbiamo avere $rg(A) = rg(A|b) < n$ con n numero di incognite.

4 -

Se la somma di tre numeri positivi è 120, qual'è il massimo valore possibile tra il loro prodotto?

(a) $30^2 \cdot 80$

(b) $240^2 \cdot 30$

(c) 30^4

(d) $1600 \cdot 40$

Risposta: La somma dei tre numeri positivi è 120, e supponiamo che i tre numeri siano x, y, e z. L'equazione della somma è espressa come:

$$x + y + z = 120$$

Per massimizzare il prodotto, distribuiremo i numeri in modo che siano il più possibile vicini, il che si verifica quando sono tutti uguali. Quindi, possiamo assegnare a ciascun numero il valore di $\frac{120}{3} = 40$. Il prodotto massimo sarà quindi:

$$P = x \cdot y \cdot z = 40 \cdot 40 \cdot 40 = 64000$$

Pertanto, il massimo valore possibile del prodotto è 64000, ovvero la risposta d.

5 DETERMINANTE

Sia A una matrice quadrata e v, w due suoi vettori colonna. Se b è la matrice ottenuta da A rimpiazzando il vettore v con il vettore $v + \alpha \cdot w$ per un numero reale α, che informazione abbiamo sul determinante di B?

(a) $Det(B) = -Det(A)$
(b) $Det(B) = Det(A)$
(c) $Det(B) = \alpha \cdot Det(A)$
(d) $Det(B) = 0$

Risposta: b. Nelle trasfomazioni elementari, rimpiazzare una riga/colonna r_i con $r_i + \alpha r_j$ non cambia il determinante.

6 RANGO

Sia $Ax = b$ un sistema di equazioni lineari con pi'u equazioni che incognite. Allora (si scelga l'affermazione corretta):

(a) Se ha soluzione, il rango della matrice completa A—b non pu'o essere massimo
(b) La soluzione, se esiste, necessariamente non 'e unic
(c) Se possiede soluzione, e non 'e unica, allora la somma di due soluzioni (PROSEGUE)
(d) Non ha soluzione

Risposta: Se $Ax = b$ ha più equazioni m che incognite n, allora il massimo $rg(A) = n > m$. Supponendo di aggiungere una colonna b, adesso il massimo $rg(A|b) = n+1$, ma se $rg(A|b) = n+1$ il sistema non ammette soluzioni perchè è il rango di A è minore. Quindi, sicuramente se esiste soluzione il rango di $(A|b)$ non può essere massimo.

7 RANGO

Sia A una matrice $n \times m$ di rango $r > 0$. Quali delle seguenti affermazioni è CORRETTA:

(a) r può essere strettamente maggiore di m

(b) Non esistono $r-1$ vettori riga di A linearmente indipendenti.

(c) il determinante di A è uguale a r

(d) Esiste una sottomatrice quadrata B di A di ordine $r-1$ con determinante non nullo (se $r \geq 2$)

Risposta: Andando per esclusione:

a No, perchè il rango non può essere maggiore del numero di righe o del numero di colonne.

b No, perchè il rango è il massimo numero di vettori riga/colonna linearmente indipendenti.

c No, Il rango non da informazioni sul valore del determinante.

d Dal criterio dei minori sappiamo che il determinante di A è il massimo ordine dei minori *non nulli* di essa, quindi se il rango è r sicuramente $\exists$ sottomatrice B di ordine r (e quindi $r-1$) con determinante non nullo.

8 DETERMINANTE

Sia A una matrice quadrata e v, w due suoi vettori colonna diversi. Se B è la matrice ottenuta da A rimpiazzando il vettore v con il vettore $\alpha \cdot v + \beta \cdot w$ per $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, che informazioni abbiamo sul determinante di B?

Risposta: Possiamo considerare questa operazione come due trasformazioni elementari: Prima moltiplichiamo la colonna v per α, quindi anche il determinante viene moltiplicato per α, poi sostituiamo v con $v + \beta w$, lasciando il determinante invariato. Quindi la risposta è $c : det(B) = \alpha \cdot det(A)$.

9

Sia $A(t)$ una famiglia di matrici quadrate dipendenti da un parametro $t \in \mathbb{R}$. Supponiamo che $Det(A(1)) = 5$ e $Det(A(-1)) = -5$. Quali delle seguenti affermazioni è possibile concludere?

(a) Tutti i vettori riga $A(1)$ sono indipendenti e il rango di $A(1)$ è massimo.

(b) $rg(A(1)) = 5$

(c) $det(A(0)) = 0$

(d) Il rango di $A(1)$ è massimo, e $det(A(1) + A(-1)) = 0$

Risposta: a
In generale, sappiamo che $det(A) \neq 0 \Leftrightarrow rg(A) = n$, quindi il rango è massimo. Se il rango è massimo, tutti i vettori riga (e colonna, essendo quadrata) sono linearmente indipendenti.
Inoltre escludiamo la risposta d perchè in generale non possiamo determinare $det(A + B)$ partendo dai determinanti di A e B.

10

Sia A una matrice quadrata $n \times n$ tale che la somma delle righe è uguale ad una colonna c di A. Cosa posso concludere su A?

(a) $rg(A) < n$

(b) $det(A) \neq 0$

(c) Esiste un minore di A di ordine $n = 1$ invertibile se $c \neq 0$

(d) Se la colonna c è uguale ad una riga di A non è invertibile.

Risposta: **c** Si può ragionare con una matrice $1 times 1$, se l'unica colonna è diversa da 0 allora anche il determinante lo è e quindi è invertibile. In ogni caso, anche se non lo fosse un minore di ordine 1 è sempre invertibile se è diverso da 0.

11 MINORI - RANGO

Supponiamo che una matrice A di dimensioni 4×6 (cioè 4 righe) abbia i determinanti di tutti i minori di ordine 3. Quale delle seguenti affermazioni è falsa?

(a) Non esistono 4 colonne linearmente indipendenti in A
(b) Il rango massimo che potrebbe avere A è 4
(c) Potrebbe esistere una sottomatrice 2×2 di A invertibile.
(d) Le righe di A sono linermente indipendenti.

Risposta: Dal teorema dei minori sappiamo che, avendo i determinanti di almeno un minore di ordine 3 diverso da 0 (almeno così pare dal testo), sicuramente il Rango di A è ≥ 3.
Quindi non possiamo dire che tutte le righe di A sono linearmente indipendenti, ma che almeno 3 lo sono.

12 CRAMER

Sia Ax = b un sistema di equazioni lineari con un numero di equazioni uguale al numero di incognite. Allora(si scelga l'affermazione corretta):

(a) Se ha soluzione, il rango è massimo
(b) Se $Ax = 0$ ha più di una soluzione, $Ax = b$ potrebbe avere una soluzione
(c) Se non ha soluzione, A non è invertibile
(d) Se $A|b$ ha rango massimo, allora il sistema ha un'unica soluzione

Risposta: c
Se non ha soluzione, per il teorema di Cramer $det(A) = 0$, una matrie è invertibile *sse* il suo determinante è non nullo. Quindi se il sistema non ha soluzione $\implies det(A) = 0 \implies A$ non è invertibile.

13 -

Siano A, B due matrici 5×5 tali che rank(A) = 3 e rank(B) = 2. Allora

Risposta: In questa domanda ci sono j punti, riporto qui quelle vere: **Da capire**

1. Non sono invertibili perchè non hanno rango massimo, quindi $det = 0$.
2. Il rango indica il massimo numero di vettori riga/colonna linearmente indipendenti.
3. Esistono due minori di ordine 2, A' in A e B' in B tali che $A' \cdot B'$ è una matrice invertibile.

14

Calcolare il rango di una matrice 3×4 al variare di un parametro a

15

Nel sistema composto dalle equazioni $3x - 2y + z = 0$, $\alpha x + y + z = 0$ e $x + \alpha y - z = 0$, per quali valori di α posso avere soluzioni non banali[1]?

49

Siano A e B due matrici $n \times m$ diverse. E' possibile che esista una matrice quadrata C tale che $C \cdot A = C \cdot B$?

(a) Se la dimensione dello spazio vettoriale generato dai vettori riga di A è minore di n

(b) Sse $det(C) \neq 0$

(c) sse $det(C) = 0$

(d) no

e *Non ho capito la spiegazione del prof*

2.1.1 Omomorfismi

25

Sia $f_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un omomorfismo che manda il piano di equazioni $2x+y-z = 2$ nel piano di equazioni $y - tx - 2z = 0$, per $t \in \mathbb{R}$. è possibile che f_t sia iniettiva?

(a) è sempre iniettiva

(b) Può essere iniettiva solo per un numero finito di t

(c) Può essere iniettiva, tranne per unn numero finito di t

(d) Non è mai iniettiva

[1] La soluzione banale è $(0, 0, 0)$

Risposta: d
Un omomorfismo si definisce iniettivo se $dim(ker(f)) = 0$.
In questo caso avremo che $dim(im(f)) = 2$ e $dim(dom(f)) = 3$, quindi per il teorema nullità più rango:

$$dim(dom(f)) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) \implies dim(ker(f)) = 1$$

Di conseguenza non può essere iniettiva.

Osservazione: La dimensione di un piano in cui passa l'origine è 2, mentre la dimensione di un piano in cui non passa l'origine è 3.

2.1.2 Diagonalizzabilità di Matrici

38 DIAGONALIZZABILITÀ

Sia k reale. Si consideri la matrice

$$A_k : \begin{pmatrix} 3 & 0 & -7 \\ k & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

(a) A_k è diagonalizzabile per ogni scelta di $k \neq 0$
(b) A_k è diagonalizzabile se e solo se $k = 0$
(c) A_k è diagonalizzabile se e solo se k è intero non negativo
(d) Per qualunque scelta di k, A_k non è diagonalizzabile

Risposta: B Ricordiamo le condizioni di diagonalizzabilità:

Capitolo 3

CORREZIONI

Segnalo che la domanda 52 di GAL ha la risposta sbagliata: Domanda: Sia M = (mij) una matrice quadrata di ordine 7. Nelle seguenti situazioni, quando M potrebbe non essere invertibile? la risposta giusta è: Quando M ha un minore di ordine 6 con determinante non nullo e mij $\neq 0$ (d)

Nella domanda 80 la risposta giusta è: c) S non è un sottospazio di X

Capitolo 4

Domande aggiuntive

Domande risposte da me

Quali dei seguenti omomorfismi $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ **manda il quadrato di vertici** $(0,0),(0,3),(3,0),(3$

OMOMORFISMI

Capitolo 5

Domande rispote da Ulerich

5.1 Domanda - Spazi vettoriali

Sia $V =< (1, 0, -1), (2, 2, 0) >$ il sottospazio vettoriale generato da due vettori tra parentesi. Esistono valori di $\lambda \in R$ che rendono $V_\lambda = V \cup \{(\lambda, 1-\lambda, 0)\}$ un sottospazio vettoriale di R^3?.

Risposta (generata da ChatGPT 4o, sembra avere senso e la risposta è effetticamente contenuta in una crocetta) Per determinare se esistono valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che $V_\lambda = V \cup \{(\lambda, 1 - \lambda, 0)\}$ sia un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, dobbiamo verificare se l'insieme V_λ è chiuso rispetto all'addizione vettoriale e alla moltiplicazione per uno scalare.

5.1.1 Passi per la Soluzione

1. Definire il sottospazio V:

Il sottospazio V è generato dai vettori $(1, 0, -1)$ e $(2, 2, 0)$. Scriviamo V come combinazione lineare di questi due vettori:

$$V = \{a(1, 0, -1) + b(2, 2, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

2. Condizione per essere un sottospazio vettoriale:

V_λ sarà un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ se è chiuso sotto l'addizione e la moltiplicazione per uno scalare. Questo significa che per qualsiasi $u, v \in V_\lambda$ e $c \in \mathbb{R}$, $u + v \in V_\lambda$ e $cu \in V_\lambda$.

3. Esaminare l'elemento aggiuntivo $(\lambda, 1 - \lambda, 0)$:

Per V_λ essere un sottospazio, $(\lambda, 1 - \lambda, 0)$ deve appartenere a V. Quindi, dobbiamo verificare se esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che:

$$(\lambda, 1-\lambda, 0) = a(1, 0, -1) + b(2, 2, 0).$$

Riscriviamo le componenti per ottenere un sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \lambda = a + 2b, \\ 1 - \lambda = 2b, \\ 0 = -a. \end{cases}$$

4. Risoluzione del sistema di equazioni:
Dalla terza equazione, otteniamo:

$$a = 0.$$

Sostituendo $a = 0$ nelle prime due equazioni:

$$\begin{cases} \lambda = 2b, \\ 1 - \lambda = 2b. \end{cases}$$

Poiché $\lambda = 2b$, sostituiamo nella seconda equazione:

$$1 - 2b = 2b \implies 1 = 4b \implies b = \frac{1}{4}.$$

Dunque,

$$\lambda = 2b = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

5. Conclusione:
Esiste un valore di λ che rende V_λ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. Questo valore è:

$$\lambda = \frac{1}{2}.$$

Per $\lambda = \frac{1}{2}$, il vettore $(\lambda, 1-\lambda, 0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ è una combinazione lineare dei vettori $(1, 0, -1)$ e $(2, 2, 0)$, quindi $V_\lambda = V$ e quindi è un sottospazio vettoriale.