

CheatSheet di Ricerca Operativa e Pianificazione delle Risorse

Fabio Ferrario

@fefabo

2022/2023

Indice

1	Programmazione Lineare	3
1.1	Il metodo del Simplexso	3
2	Ottimizzazione Non Lineare	5
2.1	Algoritmo del Gradiente	5
2.2	Algoritmo di Newton	6
3	Ottimizzazione Non Lineare Vincolata	7
3.1	Condizioni di KKT	7
3.1.1	Differenza tra max e min	8

Capitolo 1

Programmazione Lineare

1.1 Il metodo del Simplexso

La forma Tabellare

V. BASE	Eq	Z	x_1	x_2	...	x_n	T. Noto
Z	R ₀	1	c_1	c_2	...	c_n	0
x_1	R ₁	0	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
x_m	R _n	0	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m

Forma Aumentata Per portare il problema in forma aumentata:

Vincoli	Minoreuguale \leq		=	+ Slack
	Maggioreuguale \geq		=	- Surplus
	Uguale $=$		Invariato	
Variabili non positive	$x_i \leq 0$	$x_i = -x'_i$ con $x'_i \geq 0$		
	Ogni apparizione di x_i viene sostituita con $-x'_i$			
Funzione Obiettivo		$Z = \Sigma x_i \rightarrow Z - \Sigma x_i = 0$		

Test di Ottimalità .

Tipo di Problema	Massimo	Minimo
Soluzione Ottima sse	Coefficienti riga (0) ≥ 0	Coefficienti riga (0) ≤ 0
Variabile Entrante (Colonna Pivot)	Coefficiente riga (0) più Piccolo (Più Negativo)	Coefficiente riga (0) più Grande (Più Positivo)
Variabile Uscente (Riga Pivot)	Test del Rapporto Minimo	
Numero Pivot	Intersezione Riga/Colonna Pivot	

Nuova Soluzione di Base .

Nuova Riga Pivot	
Variabile Entrante	→ Variabile di Base della nuova riga pivot.
Coefficienti e Termine Noto	→ Divisi per Numero Pivot.

1. Determino la Nuova soluzione di Base tramite l'eliminazione Gaussiana:

- Altre Righe: Per calcolare le altre righe prima definisco:
 - P_i come l'i-esimo coefficiente della nuova riga pivot (ovvero la riga pivot appena calcolata)
 - X_p come il coefficiente della colonna pivot nella riga in esame.

Allora il coefficiente i-esimo x_i della riga in esame X diventa:

- $x_i := x_i - |X_p| \cdot P_i$ Se X_p é Positivo.
- $x_i := x_i + |X_p| \cdot P_i$ Se X_p é Negativo.
- Rieseguo il test di ottimalità, e se non ho trovato una soluzione ottima ricalcolo un nuovo Tableau.

Capitolo 2

Ottimizzazione Non Lineare

2.1 Algoritmo del Gradiente

Data una funzione a più variabili $f(X)$ e un punto x^0 , ogni passo del metodo del gradiente si effettua in questo modo:

1. Calcolo $\nabla f(x^k)$, con la direzione di crescita $d^k = \pm \nabla f(x^k)$ (+ max e - min)
2. Calcolo $x^{k+1} = x^k \pm \alpha^k \cdot d^k$
3. In cui α^k è il max di $f(x^k \pm \alpha^k \cdot d^k)$. ovvero Valuto f nel nuovo punto e massimizzo la funzione risultante $g(\alpha)$, generalmente in modo analitico ($g'(\alpha) = 0$).
4. Sostituisco α trovato in x^{k+1} .
5. Valuto i criteri di arresto (Con epsilon o con un numero predefinito di iterazioni, e nel caso ripeto)

Per verificare che il punto trovato sia un punto di ottimo, semplicemente controllo che $\nabla f(x^*) = 0$.

2.2 Algoritmo di Newton

Data una funzione a piú variabili $f(X)$ e un punto x^0 , una iterazione del metodo di Newton si effettua in questo modo:

1. Calcolo $\nabla f(x^k)$ e $H(x^k)$.
2. Calcolo il vettore spostamento, ponendo: $H_f(x^0)V = -\nabla f(x^0)$ e risolvendo il sistema di equazioni.
3. trovo $x^{k+1} = x^k + V$, in cui V é il vettore spostamento.

Capitolo 3

Ottimizzazione Non Lineare Vincolata

3.1 Condizioni di KKT

In un problema di ottimizzazione vincolata definito come:

$$\begin{aligned} &\text{opt } f(x_1, \dots, x_n), \\ &g_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ Vincoli di Uguaglianza,} \\ &h_l(x_1, \dots, x_n) \leq 0 \text{ Vincoli di Disuguaglianza,} \end{aligned}$$

Generiamo la Lagrangiana così definita:

$$L(V) = f(X) \pm \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot g_i(X) \pm \sum_{j=1}^l \mu_j \cdot h_j(X) \text{ Per i problemi di MIN}$$

in cui \pm diventa $+$ per i problemi di MIN e $-$ per i problemi di MAX, Abbiamo che λ sono i moltiplicatori lagrangiani associati ai vincoli di Uguaglianza, e μ quelli associati ai vincoli di Disuguaglianza.

con $V = \{x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_l\}$, ovvero tutte le variabili e $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, ovvero tutte le variabili originali.

La tabella e il sistema Avendo questo, bisogna quindi generare un sistema che avrà $n+m+l$ incognite utilizzando le KKT, riportate qui in modo semplificato:

Stazionarietà Problemi di MIN (-)		
$\nabla f = - \sum \lambda_i \cdot \nabla g_i - \sum \mu_j \cdot \nabla h_j$		
Stazionarietà Problemi di MAX (+)		
$\nabla f = + \sum \lambda_i \cdot \nabla g_i + \sum \mu_j \cdot \nabla h_j$		
Ammissibilità Vincoli Uguaglianza	\forall	$g_i = 0$
Ammissibilità Vincoli Disuguaglianza	\forall	$h_j \leq 0$
Condizione di Complementarietà	\forall	$\mu_j \cdot h_j = 0$
Non Negatività di μ	\forall	$\mu_j \geq 0$

Dove con \forall si intende chiaramente tutti quelli presenti.

3.1.1 Differenza tra max e min

Abbiamo due possibilità per differenziare i punti di max dai punti di min: Per il max, o mettiamo la prima condizione come somma di elementi negativi ($-\sum \lambda g - \sum \mu h$) con i $\mu \geq 0$, oppure mettiamo la prima condizione uguale al min (come somma di elementi positivi) e tutti i $\mu \leq 0$.

Per il min invece, la prima condizione è positiva e i μ sono maggiori o uguali a zero.