GAL - Domande d'Esame

Fabio Ferrario
@fefabo

2023/2024

Indice

Capitolo 1

Domande Aperte

1 SOTTOSPAZI VETTORIALI

1. Determinare la dimensione e trovare una base del sottospazio:
   $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y - x = 2z\}$
2. Completare la base del punto precedente ad una base di $\mathbb{R}^3$ con un vettore v ortogonale a T.

Risposta:

1. Prendiamo l'equazione che ci da: $y - x = 2z$. è chiaramente l'equazione di un piano (quindi con dimensione =2). In ogni caso, la parametrizziamo:

Capitolo 2

Domande Chiuse

2.1 Algebra Lineare

1

Se devo verificare che n vettori $v_i \in \mathbb{R}^m$ siano linearmente indipendenti, cosa posso fare?

(a) Creo una matrice con v_i come vettori riga che abbia determinante non nullo
(b) Creo una matrice con v_i come vettori riga e cerco una sottomatrice quadrata di ordine n Invertibile
(c) Cerco una combinazione lineare dei vettori v_i che mi dia il vettore nullo
(d) Creo una matrice con v_i come vettori colonna e verifico che il rango di questa matrice sia m

Risposta: b, perchè se ho una sottomatrice di ordine n invertibile allora il suo determinante è zero. Per il teorema dei minimi, significa che il rango della matrice è *almeno* n, quindi è massimo e tutti i suoi vettori sono linearmente indipendenti.

2

Sia $Ax = b$ un sistema di equazioni lineari con più incognite che equazioni. Allora:

(a) Agendo con operazioni elementari su righe e colonne della matrice completa $A|b$ ottengo una matrice compoleta il cui sistema associato possiede le stesse soluzioni di quello di partenza

(b) Scegliendo b opportunamente, il sistema ha un'unica soluzione

(c) Dato un b qualsiasi, mi posso scegliere A in modo che il sistema abbia soluzioni e eche la somma di due di esse sia ancora una soluzione

(d) Se il rango di A è massimo, allora il sistema ha soluzione

Risposta: d, Abbiamo che $n > m$, di conseguenza il rango di A è al massimo m. Aggiungendo la colonna b, il rango massimo di $(A|b)$ è ancora m. Quindi se il rango di A è m, ovvero è massimo, allora il sistema ammette soluzioni (per R-C).

inoltre per il teorema di Rouchè-Capelli, sappiamo che se il numero delle incognite > rango(A), allora il sistema ammette $\infty^{m-rank(A)}$ soluzioni.

3

Sia $Ax = b$ un sistema che non ammette soluzione. Scegliendo un vettore c è possibile ottenere che $Ax = b + c$ abbia infinite soluzioni?

(a) Si, ma solo se A non è di rango massimo

(b) Si, per un qualsiasi A

(c) No, mai

(d) Si, ma solo se A è quadrata e di determinante non nullo.

Risposta: a (da capire). Se $Ax = b$ non ammette soluzioni, allora $rg(A) \neq rg(A|b)$. Per ottenere un sistema con infinite soluzioni, dobbiamo avere $rg(A) = rg(A|b) < n$ con n numero di incognite.

4

Se la somma di tre numeri positivi è 120, qual'è il massimo valore possibile tra il loro prodotto?

(a) $30^2 \cdot 80$

(b) $240^2 \cdot 30$

(c) 30^4

(d) $1600 \cdot 40$

Risposta: La somma dei tre numeri positivi è 120, e supponiamo che i tre numeri siano x, y, e z. L'equazione della somma è espressa come:

$$x + y + z = 120$$

Per massimizzare il prodotto, distribuiremo i numeri in modo che siano il più possibile vicini, il che si verifica quando sono tutti uguali. Quindi, possiamo assegnare a ciascun numero il valore di $\frac{120}{3} = 40$. Il prodotto massimo sarà quindi:

$$P = x \cdot y \cdot z = 40 \cdot 40 \cdot 40 = 64000$$

Pertanto, il massimo valore possibile del prodotto è 64000, ovvero la risposta d.

5

Sia A una matrice quadrata e v, w due suoi vettori colonna. Se b è la matrice ottenuta da A rimpiazzando il vettore v con il vettore $v + \alpha \cdot w$ per un numero reale α, che informazione abbiamo sul determinante di B?

(a) $Det(B) = -Det(A)$
(b) $Det(B) = Det(A)$
(c) $Det(B) = \alpha \cdot Det(A)$
(d) $Det(B) = 0$

Risposta: **b**. Nelle trasfomazioni elementari, rimpiazzare una riga/colonna r_i con $r_i + \alpha r_j$ non cambia il determinante.

6

Sia $Ax = b$ un sistema di equazioni lineari con pi'u equazioni che incognite. Allora (si scelga l'affermazione corretta):

(a) Se ha soluzione, il rango della matrice completa A—b non pu'o essere massimo
(b) La soluzione, se esiste, necessariamente non 'e unic
(c) Se possiede soluzione, e non 'e unica, allora la somma di due soluzioni (PROSEGUE)
(d) Non ha soluzione

Risposta: Se $Ax = b$ ha più equazioni m che incognite n, allora il massimo $rg(A) = n > m$. Supponendo di aggiungere una colonna b, adesso il massimo $rg(A|b) = n + 1$, ma se $rg(A|b) = n + 1$ il sistema non ammette soluzioni perchè è il rango di A è minore. Quindi, sicuramente se esiste soluzione il rango di $(A|b)$ non può essere massimo.

7 -

Sia A una matrice $n \times m$ di rango $r > 0$. Quali delle seguenti affermazioni è CORRETTA:

(a) r può essere strettamente maggiore di m

(b) Non esistono $r - 1$ vettori riga di A linearmente indipendenti.

(c) il determinante di A è uguale a r

(d) Esiste una sottomatrice quadrata B di A di ordine $r - 1$ con determinante non nullo (se $r \geq 2$)

Risposta: Andando per esclusione:

a No, perchè il rango non può essere maggiore del numero di righe o del numero di colonne.

b No, perchè il rango è il massimo numero di vettori riga/colonna linearmente indipendenti.

c No, Il rango non da informazioni sul valore del determinante.

d Dal criterio dei minori sappiamo che il determinante di A è il massimo ordine dei minori *non nulli* di essa, quindi se il rango è r sicuramente $\exists$ sottomatrice B di ordine r (e quindi $r-1$) con determinante non nullo.

8 -

Sia A una matrice quadrata e v, w due suoi vettori colonna diversi. Se B è la matrice ottenuta da A rimpiazzando il vettore v con il vettore $\alpha \cdot v + \beta \cdot w$ per $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, che informazioni abbiamo sul determinante di B?

Risposta: Possiamo considerare questa operazione come due trasformazioni elementari: Prima moltiplichiamo la colonna v per α, quindi anche il determinante viene moltiplicato per α, poi sostituiamo v con $v + \beta w$, lasciando il determinante invariato. Quindi la risposta è $c : det(B) = \alpha \cdot det(A)$.