

# CheatSheet di Ricerca Operativa e Pianificazione delle Risorse

Fabio Ferrario

@fefabo

2022/2023

# Indice

<b>1</b>	<b>Programmazione Lineare</b>	<b>3</b>
1.1	Il metodo del Simplexso . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Ottimizzazione Non Lineare</b>	<b>5</b>
2.1	Algoritmo del Gradiente . . . . .	5
2.2	Algoritmo di Newton . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Ottimizzazione Non Lineare Vincolata</b>	<b>7</b>
3.1	Funzione Lagrangiana . . . . .	7
3.2	Condizioni KKT . . . . .	7
3.2.1	Differenziare tra Max e Min . . . . .	8
3.2.2	Risolvere il Sistema . . . . .	8
3.2.3	Trovare i punti di Minimo e Massimo . . . . .	9

# Capitolo 1

## Programmazione Lineare

### 1.1 Il metodo del Simplexso

La forma Tabellare

V. BASE	Eq	Z	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$	T. Noto
Z	R <sub>0</sub>	1	$c_1$	$c_2$	...	$c_n$	0
$x_1$	R <sub>1</sub>	0	$a_{11}$	$a_{12}$	...	$a_{1n}$	$b_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_m$	R <sub>n</sub>	0	$a_{m1}$	$a_{m2}$	...	$a_{mn}$	$b_m$

**Forma Aumentata** Per portare il problema in forma aumentata:

Vincoli	Minoreuguale $\leq$		=	+ Slack
	Maggioreuguale $\geq$		=	- Surplus
	Uguale $=$		Invariato	
Variabili non positive	$x_i \leq 0$	$x_i = -x'_i$ con $x'_i \geq 0$		
	Ogni apparizione di $x_i$ viene sostituita con $-x'_i$			
Funzione Obiettivo		$Z = \Sigma x_i \rightarrow Z - \Sigma x_i = 0$		

**Test di Ottimalità** Una volta portato il problema in forma tabellare, eseguo il test di ottimalità:

Tipo di Problema	Massimo	Minimo
<b>Soluzione Ottima sse</b>	Coefficienti riga (0) $\geq 0$	Coefficienti riga (0) $\leq 0$

**Nuova Soluzione di Base** Una volta verificato che la soluzione non é ottima, bisogna calcolare una nuova soluzione di base:

Definisco:

Tipo di Problema	Massimo	Minimo
<b>Variabile Entrante</b> (Colonna Pivot)	Coefficiente riga (0) più Piccolo (Più Negativo)	Coefficiente riga (0) più Grande (Più Positivo)
<b>Variabile Uscente</b> (Riga Pivot)	Test del Rapporto Minimo	
<b>Numero Pivot</b>	Intersezione Riga/Colonna Pivot	

Per la nuova <b>Riga Pivot</b>	
Variabile di Base	→ Variabile Entrante.
Coefficienti e Termine Noto	→ Divisi per Numero Pivot.

per ogni <b>altra Riga</b>	
Definisco	$P_i$ $i$ -esimo coefficiente della nuova riga pivot
	$X_p$ coefficiente della colonna pivot nella riga in esame.
il coefficiente $i$ -esimo $x_i$ della riga in esame $X$ diventa:	
se $X_p$ é Positivo	$x_i := x_i -  X_p  \cdot P_i$
se $X_p$ é Negativo	$x_i := x_i +  X_p  \cdot P_i$

# Capitolo 2

## Ottimizzazione Non Lineare

### 2.1 Algoritmo del Gradiente

Data una funzione a più variabili  $f(X)$  e un punto  $x^0$ , ogni passo del metodo del gradiente si effettua in questo modo:

1. Calcolo  $\nabla f(x^k)$ , con la direzione di crescita  $d^k = \pm \nabla f(x^k)$  (+ max e - min)
2. Calcolo  $x^{k+1} = x^k \pm \alpha^k \cdot d^k$
3. In cui  $\alpha^k$  è il max di  $f(x^k \pm \alpha^k \cdot d^k)$ . ovvero Valuto  $f$  nel nuovo punto e massimizzo la funzione risultante  $g(\alpha)$ , generalmente in modo analitico ( $g'(\alpha) = 0$ ).
4. Sostituisco  $\alpha$  trovato in  $x^{k+1}$ .
5. Valuto i criteri di arresto (Con epsilon o con un numero predefinito di iterazioni, e nel caso ripeto)

Per verificare che il punto trovato sia un punto di ottimo, semplicemente controllo che  $\nabla f(x^*) = 0$ .

## 2.2 Algoritmo di Newton

Data una funzione a piú variabili  $f(X)$  e un punto  $x^0$ , una iterazione del metodo di Newton si effettua in questo modo:

1. Calcolo  $\nabla f(x^k)$  e  $H(x^k)$ .
2. Calcolo il vettore spostamento, ponendo:  $H_f(x^0)V = -\nabla f(x^0)$  e risolvendo il sistema di equazioni.
3. trovo  $x^{k+1} = x^k + V$ , in cui  $V$  é il vettore spostamento.

## Capitolo 3

# Ottimizzazione Non Lineare Vincolata

### 3.1 Funzione Lagrangiana

In un problema di ottimizzazione vincolata definito come:

$$\begin{aligned} & \text{opt } f(x_1, \dots, x_n), \\ & g_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ Vincoli di Uguaglianza,} \\ & h_l(x_1, \dots, x_n) \leq 0 \text{ Vincoli di Disuguaglianza,} \end{aligned}$$

Generiamo la Lagrangiana così definita:

$$L(V) = f(X) \pm \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot g_i(X) \pm \sum_{j=1}^l \mu_j \cdot h_j(X)$$

in cui  $\pm$  diventa  $+$  per i problemi di MIN e  $-$  per i problemi di MAX, Abbiamo che  $\lambda$  sono i moltiplicatori lagrangiani associati ai vincoli di Uguaglianza, e  $\mu$  quelli associati ai vincoli di Disuguaglianza.

con  $V = \{x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_l\}$ , ovvero tutte le variabili e  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ , ovvero tutte le variabili originali.

### 3.2 Condizioni KKT

**Tabella** Bisogna quindi generare un sistema che avrà  $n + m + l$  incognite utilizzando le KKT, riportate qui in modo semplificato:

Stazionarietà Problemi di MIN (-)		
$\nabla f = - \sum \lambda_i \cdot \nabla g_i - \sum \mu_j \cdot \nabla h_j$		
Stazionarietà Problemi di MAX (+)		
$\nabla f = + \sum \lambda_i \cdot \nabla g_i + \sum \mu_j \cdot \nabla h_j$		
Ammissibilità Vincoli Uguaglianza	$\forall$	$g_i = 0$
Ammissibilità Vincoli Disuguaglianza	$\forall$	$h_j \leq 0$
Condizione di Complementarietà	$\forall$	$\mu_j \cdot h_j = 0$
Non Negatività di $\mu$	$\forall$	$\mu_j \geq 0$

Dove con  $\forall$  si intende chiaramente tutti quelli presenti.

### 3.2.1 Differenziare tra Max e Min

Quando si usano le KKT bisogna differenziare tra problemi di Max e Problemi di Min. Ogni problema ha le seguenti possibili combinazioni:

<b>Problema di Massimo</b>	$\mu_i \geq 0$	$\nabla f = + \sum \lambda_i \cdot \nabla g_i + \sum \mu_j \cdot \nabla h_j$
	$\mu_i \leq 0$	$\nabla f = - \sum \lambda_i \cdot \nabla g_i - \sum \mu_j \cdot \nabla h_j$
<b>Problema di Minimo</b>	$\mu_i \geq 0$	
	$\mu_i \leq 0$	$\nabla f = + \sum \lambda_i \cdot \nabla g_i + \sum \mu_j \cdot \nabla h_j$

é utile sapere che se scegliessimo di avere la funzione obiettivo **Sempre come somma di elementi negativi**, sia per i problemi di massimo che di minimo, allora potremmo, in base ai valori di  $\mu$ , sapere in un solo calcolo se il punto é candidato a massimo o minimo.

### 3.2.2 Risolvere il Sistema

Per risolvere il sistema, o lo si risolve con il metodo classico, oppure tramite questo metodo: Con la condizione di **Complementarietà** sappiamo che:

$$\mu_j \cdot h_j = 0 \implies \mu_j = 0 \vee h_j = 0$$



Quindi, con  $l$  variabili  $mu_j$  abbiamo  $2^l$  combinazioni di sistemi, in cui  $mu_j = 0 \vee \mu_j \neq 0$ . Così possiamo risolvere le  $2^l$  combinazioni per trovare tutti i punti candidati.

### 3.2.3 Trovare i punti di Minimo e Massimo

I punti trovati dalle condizioni KKT sono solo candidati a essere punti di max/min, perché le KKT sono condizioni Necessarie ma non Sufficienti.

Le condizioni KKT diventano Sufficienti se:

- Per i Punti di Massimo:
  - $f$  é concava.
  - I vincoli  $h_i(X)$  sono tutti Convessi.
- Per i Punti di Minimo:
  - $f$  é convessa.
  - I vincoli  $h_i(X)$  sono tutti Convessi.