Lezioni di ROPR

Fabio Ferrario

2022/2023

Contents

Chapter 1

Lezione 1 04/10

Organizzazione Il corso è erogato in maniera verticale, quindi la prima parte con il professor Stella e la seconda con la professoressa Messina. Di conseguenza i due turni sono uguali. Non ci saranno streaming ma ci sono delle videolezioni registrate.

Libro di testo, gran parte delle lezioni seguono il libro di testo, quindi tanto vale prenderlo.

Che cos'è la ricerca operativa è una disciplina trasversale a molte altre discipline (informatica, economia, ingegneria, ...).

Utilizza strumenti matematici per risolvere problemi complessi dove è necessario prendere delle decisioni

- Come instradare il flusso dei dati in una rete
- come gestire un portafoglio di asset finanziari
- come apprendere un modello di ML
- ...

Prerequisiti Sono importanti, alcuni ripassi si trovano su elearning.

Modalità d'esame come sopra. Chi è *fuori corso PUÒ FARE I PARZIALI.*

Stella

Regola del contratto lol si può usare il pc, il telefono o dormire (emoji con la faccia piatta) ma non si può parlare, disturbare e lanciare aeroplanini (ha messo hulk)

Modelli nella ricerca operativa La RO si occupa di Problemi di Ottimizzazione: Data la funzione $f : R^n \to R$, un problema di ottimizzazione è formulabile come segue:

$$opt f(x) s.a. x \in X, X \subseteq R^n$$

(opt = ottimizzazione, s.a. = soggetto a), dove $opt \in \{min, max\}$, ci sono problemi di minimizzazione (min f(x)) e massimizzazione (max f(x)).
La funzione $f : R^n$... è detta funzione obiettivo, X è la regione ammissibile e $x \in X$ sono le variabili decisionali.

Quindi un problema di ottimizzazione consiste nel determinare (se esistono) uno o più punti di min max x^*(x star è una particolare assegnazione che gode di una certa proprietà), DISEGNO 1 slide 2

Ottimizzazione Vincolata/non Vincolata Ci possiamo accontentare di avere come spazio *tutto* R^n, però possiamo anche definire delle regioni di vincolo:
$X = R^n$ è ottimizzazione NON VINCOLATA, la ricerca viene effettuata in tutto R^n.
$X \subset R^n$ è ottimizzazione VINCOLATA, la ricerca è soggetta al muoversi all'interno di una certa regione ($x \in [a, +\infty)$ per esempio) Nel caso dell'ottimizzazione vincolata semplicemente si considera la regione dello spazio definita da un determinato intervallo, quindi le soluzione valide di solito cambiano.

Ottimizzazione Intera e Binaria , non esiste solo l'ottimizzazione in cui le variabili assumono valori nello spazio reale, ma alcune hanno delle caratteristiche particolari. $X \in Z^n$ richiede che le mie soluzioni *siano valori interi*, quindi ottimizzazione intera. $x \in \{0, 1\}^n$ è un caso molto "reale", si chiama ottimizzazione binaria (vero falso, spento acceso,...). Entrambe queste ottimizzazioni formano le ottimizzazioni a numeri intere. Esiste anche l'ottimizzazione mista, in cui alcune variabili sono intere e altre binarie.

Come si specificano i vincoli Quando andiamo a specificare come è fatto lo spazio con delle equazioni o disequazioni allora parliamo di *programmazione matematica*. In questo caso i vincoli sono espressi con delle espressioni del tipo SLIDE 6, quindi intendiamo che $g_i(x)$ può essere maggiore, minore o uguale a 0. NB i vincoli dipendono dalle stesse variabili da cui dipende la funzione obiettivo $g_i : X \to R$ è una funzione generica che lega tra loro variabili decisionali. In generale possimao avere più vincoli che definiscono la *regione ammissibile*. SLIDE 7 equazione Osserviamo quindi che abbiamo m vincoli e n variabili, se x è in X allora è una soluzione ammissibile.

Esempio Consideriamo il seguente problema: $min(x^2+y^2)s.a x+y \leq 3, x \geq 0, y \geq 0$. x e y sono variabili di decisione, (x^2+y^2) è la funzione obiettivo e ci sono tre vincoli. La regione ammissibile è tutto R limitato dai vincoli (combinati).

Possibilità PM Quindi abbiamo le seguenti possibilità:

- Problema non ammissibile, $X = \emptyset$ (problema mal posto con regione ammissibile vuota)
- Problema illimitato, ovvero per ogni soluzione che trovo ne posso trovare un'altra che è MIGLIORE di quella che ho trovato, (può essere illimitato superiormente o inferiormente)
- Problema con soluzione ottima unica
- Problema con più soluzioni ottime (anche infinite), tutte le ottime hanno lo stesso valore della funzione obiettivo.

Esempio di problema illimitato $\max(x^2+y^2)$ s.a. $x \geq 0, y \geq 0$ non ha un "soffitto", quindi il problema è illimitato superiormente. Un problema per essere illimitato dipende sia dalla regione ammissibile che dal tipo di ottimo (max,min).

Ottimi Globali e Locali I punti di ottimo possono essere Locali o Globali (se la funzione è convessa Locale=Globale). NB: un minimo globale è anche locale, un minimo locale non necessariamente è globale. Ad oggi sappiamo dire se una soluzione sia Globale, sappiamo solo con certezza che sia locale (a meno di usare brute force). La risoluzione di un problema di programmazione matematica consiste nel trovare una soluzione ammissibile che sia ottimo GLOBALE. Alla fine della fiera la definizione di globale e locale corrisponde a quella di Analisi Matematica. I punti di ottimo globali possono essere multipli.

Programmazione lineare Con lo Stella, la programmazione lineare è la PM in cui ogni funzione (obiettivo e vincoli) sono funzioni LINEARI (polinomio di grado 1). Se una funzione vincolo è di secondo grado ma è riscrivibile (scomponibile) in più vincoli a grado uno allora può essere lineare $(x^2-1 = (x-1)\cdot(x+1)$, quindi $x^2-1 = (x-1) \geq 0 \rightarrow$ SLIDE 30) ESEMPIO del cuba libre slide 31

Chapter 2

Lezione 2: Introduzione alla programmazione lineare

11/10/22

La Wyndor Glass Co. Si introduce il problema della Wyndor Glass Co., che sarà l'esempio per il resto della lezione. Produce vetri, incluse finestre e porte. Ha tre impianti:

- Impianto 1: Produce le cornici in alluminio e le altre componenti metalliche.
- Impianto 2: Produce le cornici in legno.
- Impianto 3: Produce i vetri e assembla i vari prodotti.

A causa di guadagni in calo si è deciso di modificare la linea di prodotti, dismettendo la produzione di prodotti non economicamente sostenibili per liberare risorse per incrementare gli altri prodotti.

- Prodotto 1: Porta di vetro extra lusso (impianti 1 e 3)
- Prodotto 2: Finestra con doppia apertura (impianti 2 e 3)

Non c'è limite al numero di prodotti che si possono produrre. Questi prodotti utilizzano gli impianti 1 e 2 in maniera esclusiva, però utilizzano entrambi l'impianto 3.

Determinare quali tassi di produzione devono essere adottati per i due prodotti al fine di **massimizzare il profitto totale**. Bisogna ovviamente tenere in considerazione i vincoli (tecnologici) di capacità dei tre impianti. Ogni prodotto viene realizzato in lotti da 20 unità e i tassi di produzione vengono espressi come lotti prodotti settimanalmente.

Collezioniamo i dati per formulare il problema di programmazione matematica:

- Numero di ore settimanali disponibili in ogni impianto per la produzione.
- Numero di ore di lavorazione necessarie per produrre un lotto.
- Profitto ottenuto dalla produzione di ogni lotto.

I dati sono contenuti in questa tabella: [TABELLA SLIDE 4]

Traduciamo in termini di PL **Variabili decisionali**

- x_1 numero di lotti di prodotto 1 per settimana
- x_2 ...

Funzione obiettivo: $\max Z = 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2$
Vincoli: $x_1 \leq 4$ — $2 \cdot x_2 \leq 12$ — $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 18$
Ovviamente $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$

La soluzione grafica

Essendo questo un problema molto piccolo, con sole due variabili è possibile utilizzare la *soluzione grafica*:

- Disegno la regione ammissibile
- Determino l'ottimo

Per disegnare la regione ammissibile, bisogna andare a eliminare una alla volta le zone del grafico che sono escluse dai vincoli. Dentro la regione ammissibile vivono tutte le possibili soluzioni al nostro problema, bisogna solo determinare la funzione ottima.

Funzione obiettivo Per trovare l'ottimo bisogna rappresentare la funzione obiettivo: in questo caso, si aggiunge un asse Z e si mettono i piani di *isolivello*. [Guarda dalle lezioni bene la spiegazione] [In pratica si rappresenta Z come un piano per alcuni valori di x1 e x2 e si proiettano su x e y i segmenti che genera. Si trova quindi l'andazzo del piano di isolivello e si incrementa fino a trovare il massimo.]

Vincoli funzionali di $\leq$ slide 16

Regione ammissibile La regione ammissibile X è data dal soddisfacimento dei vari vincoli (rette e semipiani): $x = x \in R^n : g_i$... finire a slide 20. La regione ammissibile da un punto di vista geometrico corrisponde ad un poliedro convesso e può essere limitata (**politopo**) o illimitata.
Con la soluzione grafica si possono verificare quattro situazioni:

- Ammette un'unica soluzione ottima in un *vertice del poligono* che delimita la regione ammissibile.
- Ammette infinite soluzioni ottime in un *lato del poligono* se la direzione di decrescita è perpendicolare a un lato del poligono.
- Non ammette soluzione perchè la regione ammissibile è illimitata e la funzione obiettivo è limitata superiormente.
- Non ammette soluzione perchè la regione ammissibile è vuota.

Quindi un problema di PL è strutturato come segue: $opt_{x \in X} Z = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j$ è la funzione obiettivo (n numero di variabili decisionali)
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \leq b_i$ con $i = \ ..., m$ sono i vincoli (m numero vincoli)
x_j è variabile decisionale, c_j coefficiente di costo, a_ij termine noto sinistro e b_i termine noto destro (questi ultimi tre sono i parametri).

Programmazione Lineare: Assunzioni

Un problema di PL si appoggia su 4 assunzioni base:

- Proporzionalità: il contributo di ogni variabile decisionale è porporzionale rispetto al valore assunto
- Additività
- Continuità
- Certezza

Esempio Personnel Scheduling

...Questo è un problema di programmazione intera (non posso dividere le persone) e per "fortuna" il risulato è intero, quindi è accettabile. Se la soluzione non fosse stata intera avremmo potuto fare due cose: arrotondare (non garantisce l'ottimalità) o aggiungere vincoli che garantiscono l'interezza delle variabili di decisione.

Metodo del simplesso

Algoritmo generale per la risoluzione di problemi di programmazione lineare (e non solo).
Nel caso medio il tempo è *lineare al numero delle variabili*, nel caso peggiore può risultare esponenziale.
Ancora oggi è uno degli algoritmi più efficienti per risolvere un problema di PL.

Cos'è è una procedura algebrica ma i suoi concetti base sono geometrici.
La frontiera di un vincolo è la retta corrispondente al vincolo.
Un vertice si trova all'intersezione di coppie di frontiere di vincoli. Alcuni vertici sono nella regione ammissibile e si chiamano ammissibili, mentre altri sono non ammissibili.
Uno spigolo è un segmento che giace sull'intersezione delle frontiere dei vincoli condivisi dai due vertici adiacenti, che sono collegati da questo segmento.

Test di ottimalità. Si consideri ogni problema di PL tale da ammettere almeno una soluzione ottimale: se una soluzione vertice non ammette soluzioni vertice a lei adiacenti con valore della funzione obiettivo Z migliore, allora la soluzione in questione è ottimale.

I 6 concetti chiave [SLIDE 15]

1. Primo
   - Il metodo del simplesso ispeziona solo soluzioni ammissibili corrispondenti a vertici.
   - Per ogni problema di PL che ammetta almeno una soluzione ottimale, trovarne una, richiede di trovare solamente il vertice ammissibile cui compete il miglior valore della funzione obiettivo(*) .
   - Dato che il numero di soluzioni ammissibili è generalmente infinito, ridurre il numero di soluzioni da ispezionare ad un numero finito e piccolo è una semplificazione notevole.
2. Secondo: il metodo è un algoritmo iterativo
   (a) Inizializzazione
   (b) Test di ottimalità
3. Terzo:

Esercitazione 3

Esercizio Call.SPA 2

Nelle slide esercitazioni PM

Parametri

- $Z = \{1, ..., 36\}$ insieme delle zone
- u_i = utenti nella zona $i \in Z$
- $n = 5$ numero di ripetitori da installare
- $a_{ij} = 1$ se la zona i è adiacente alla zona j, 0 altrimenti

...

Soluzione con il gradiente Per la soluzione grafica posso usare il gradiente, quindi disegno i vettori di modulo x e y e poi non ho più capito