

# Algebra Lineare e Geometria

Fabio Ferrario

@fefabo

Elia Ronchetti

@ulerich

2023/2024

# Indice

# Introduzione

Questi appunti di Algebra Lineare e Geometria sono stati fatti con l'obiettivo di riassumere tutti (o quasi) gli argomenti utili per l'esame di Algebra Lineare e Geometria del corso di Informatica dell'Università degli Studi di Milano Bicocca.

## Il Corso

Gli appunti fanno riferimento alle lezioni di GAL erogate nel secondo semestre dell'anno accademico 22/23.

## Programma del corso

Il programma si sviluppa come segue:

### 1. Algebra Lineare

- Spazi Vettoriali
- Dipendenza Lineare
- Basi
- Prodotto scalare euclideo
- Prodotto vettoriale

### 2. Matrici

- Operazioni
- Rango
- Invertibilità
- Determinante
- Trasformazioni elementari e riduzione a scala

**3. Sistemi di equazioni lineari**

- Risultati di base
- Teoremi di Rouché-Capelli e Cramer
- Cenni alla regressione lineare semplice

**4. Applicazioni lineari**

- Matrice associata
- Proprietà

**5. Diagonalizzabilità di Matrici**

- Autovalori
- Autovettori
- Molteplicità algebrica e geometrica
- Teorema Spettrale

**6. Geometria Analitica nel Piano**

- Sottospazi lineari affini
- Classificazione delle coniche

**7. Geometria Analitica nello spazio**

- Sottospazi lineari Affini

**Prerequisiti**

I prerequisiti per questo corso sono: Teoria di insiemi di base. Insiemi con strutture (monoidi e gruppi). Dimostrazioni per assurdo e per induzione.

# Insiemistica e Funzioni

In questo capitolo ripassiamo i concetti di insiemistica e funzioni e fissiamo le notazioni che verranno usate durante il corso.

## Insiemi

Non verrà data una definizione formale di insieme perchè la definizione matematica di insieme è complessa, verrà quindi data una definizione intuitiva. Fissiamo le **Notazioni** che useremo nell'insiemistica.

Voglio considerare degli oggetti e distinguerli da altri oggetti. In genere si utilizza la notazione classica disegnando un insieme, ma questo metodo è scomodo. Quindi, per rappresentiamo un insieme usiamo le **Parentesi Graffe**

$$I = \{ x, \Delta, 3, \odot \}$$

Teniamo a mente due cose:

- L'ordine degli elementi non è sensibile.
- Se un valore viene ripetuto, allora questo non è un insieme.

## Sottoinsieme

Un sottoinsieme è un insieme contenuto in un altro insieme e si indica con il simbolo  $\subset$ .

Considerando l'insieme I sopra avremo che:

$$S \subset I = \{\Delta, 3\} \text{ è un sottoinsieme di } I$$

## Operazioni sugli insiemi

Esistono diverse operazioni che ci permettono di ottenere degli insiemi partendo da altri insiemi.

In questo corso useremo le seguenti:

- **Unione**  $A \cup B$  Contiene gli elementi contenuti sia in A che in B (Senza ripetizioni).
  - **Unione Disgiunta**  $A \sqcup U$  come l'unione, ma se ci sono degli elementi condivisi vengono entrambi rappresentati con indicato a pedice l'insieme di provenienza.
- **Intersezione**  $A \cap B$  Contiene gli elementi comuni tra A e B.
- **Complemento**  $B \setminus A$  (oppure  $B - A$ ) è l'insieme contenente gli elementi di B che non sono presenti in A.
- **Prodotto Cartesiano**  $A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$   
Ovvero l'insieme delle coppie di ogni elemento di A con ogni elemento di B. Nota che il prodotto cartesiano NON è commutativo.

**Osservazione notazione** Scrivere  $(x, y)$  è diverso che scrivere  $\{x, y\}$ , perchè nel primo caso sto considerando la coppia di elementi  $x, y$ , mentre nel secondo caso sto considerando l'insieme contenente gli elementi  $x, y$ .  
Quindi  $(x, y) \neq (y, x)$ , mentre  $\{x, y\} = \{y, x\}$ .

## Insiemi Numerici

Esistono diversi insiemi numerici:

- Naturali  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} = \{0, 1, 2, \dots\}$
- Interi  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- Razionali  $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}\}$
- Reali  $\mathbb{R} = \{Q, \sqrt{q}, \pi, e : q > 0 \in \mathbb{Q}\}$
- Complessi  $\mathbb{C}$ , che non faremo in questo corso

## Spazi Multidimensionali

Esistono spazi numerici multidimensionali, che sono semplicemente il prodotto cartesiano di più spazi:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

## Funzioni

### DEFINIZIONE

Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , una funzione è una relazione che associa ogni elemento di  $A$  a uno e un solo elemento di  $B$ . L'insieme  $A$  viene chiamato **Dominio**, mentre  $B$  è il **Codominio**.

**Definizione in termini matematici** Poichè  $f$  sia una funzione deve valere:

$$\forall x \in \text{dom}(f), \exists ! f(x)$$

**Immagine** Sia  $S \subset A$ , allora con  $f(S)$  indicheremo l'immagine di  $S$  tramite  $f$ .

$$f(S) = \{b \in B : \text{è associato ad un elemento di } S\}$$

**Controimmagine** Sia  $R \subset B$ , allora con  $f^{-1}(R)$  indicheremo la controimmagine.

$$f^{-1}(R) = \{a \in A : f(a) \in R\}$$

**Iniettività**  $f$  è iniettiva se  $a_1 \neq a_2 \in \text{dom} f \implies f(a_1) \neq f(a_2)$

**Suriettività**  $f$  è suriettiva se  $\forall b \in \text{codom} f, \exists a \in \text{dom} f : f(a) = b$

**Biettiva**  $f$  è biettiva (o bigetta o biunivoca) se  $f$  è sia iniettiva che suriettiva.