Analisi Matematica

Fabio Ferrario
@fefabo

Elia Ronchetti
@ulerich

2022/2023

Indice

Introduzione

Questi appunti di Analisi Matematica sono stati fatti con l'obiettivo di riassumere tutti (o quasi) gli argomenti utili per l'esame di Analisi Matematica del corso di Informatica dell'Università degli Studi di Milano Bicocca.
Come fonte ho utilizzato:

- Appunti di altri studenti.
- Libro "Analisi Uno, teoria ed esercizi" di Giuseppe De Marco (terza edizione).
- Esercitazioni in aula della professoressa Susanna Caimi.

Il Corso

Come già detto, questi appunti sono in funzione del corso di Analisi Matematica di UNIMIB, a.a. 2021/22, insegnato dalla Professoressa Pini.

Programma del corso

1. Numeri Reali
   - 1.1 Funzioni elementari
   - 1.2 Generalità sulle funzioni
   - 1.3 Funzioni reali di una variabile
2. Successioni
   - 2.1 Limiti di successioni reali
   - 2.2 Principio di Induzione
   - 2.3 Limiti notevoli
3. Limiti e continuità

Prerequisiti

- *Algebra elementare*: Calcolo letterale, equazioni e disequazioni di primo e secondo grado
- *Trigonometria elementare*
- *Esponenziali e logaritmi*

Capitolo 1

Analisi 0

Questo capitolo contiene alcuni argomenti che non fanno parte del programma di Analisi Matematica ma che possono essere utili alla comprensione degli argomenti.

1.1 Disequazioni

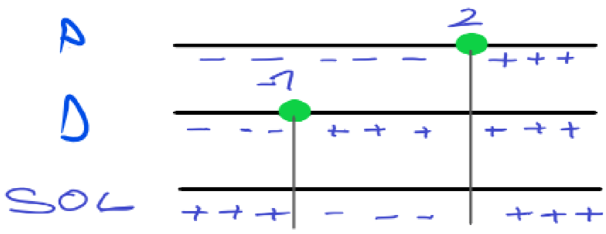
Nel corso di Analisi Matematica troviamo spesso delle disequazioni da risolvere, è bene quindi sapere come risolverle.

Le disequazioni sono come delle equazioni in cui ci si chiede "per quali valori di x questa espressione è maggiore (minore) di un certo valore". Vengono risolte esattamente come le equazioni, ma il significato del risultato è diverso.

Disequazioni Fratte e con Prodotti di Polinomi

Le disequazioni in forma fratta o prodotti, quindi in forma $\frac{P}{D} > 0$ o $(P)(D) > 0$ con P, D Polinomi si risolvono semplicemente *studiando il segno dei due fattori e unendo il risultato.*

Esempio: $(x-2)(x+1) \geq 0$
Studio il segno del primo membro: $(x-2) \geq 0 \to x \geq 2$
E del secondo membro: $(x+1) \geq 0 \to x \geq -1$. Facendo il grafico dei segni ottengo:



Di conseguenza, la soluzione della disequazione è: $S = (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$

N.B. Per le *disequazioni fratte*, **il denominatore non può mai essere uguale a zero**, quindi deve essere **strettamente maggiore (minore)**.

Disequazioni di secondo grado

Le disequazioni (come le equazioni) di secondo grado si risolvono, una volta ridotte alla forma standard $ax^2 + bx + c$, usando la formula risolutiva:

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Formula Ridotta Quando il *coefficiente di primo grado è pari* è possibile applicare la seguente forumula detta **ridotta**:

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b}{2}^{2} - ac}}{a}$$

A seconda del valore di $\Delta = b^2 - 4ac$, la disequazione (equazione) ammette:

- $\Delta > 0 \implies$ 2 soluzioni Reali
- $\Delta < 0 \implies$ Nessuna soluzione Reale (ma 2 complesse)
- $\Delta = 0 \implies$ 1 Soluzione Reale (2 soluzioni coincidenti)

Ricordiamo poi, che un'equazione del tipo $y = ax^2 + bx + c$ è una *parabola*, quindi con una disequazione (ponendo $f(x) > 0$) ci si chiede semplicemente per quali valori di x la funzione è maggiore di 0, quindi quando sta sopra l'asse delle ascisse.

Il Δ, e il valore del parametro a della funzione determinano la "rappresentazione" della parabola

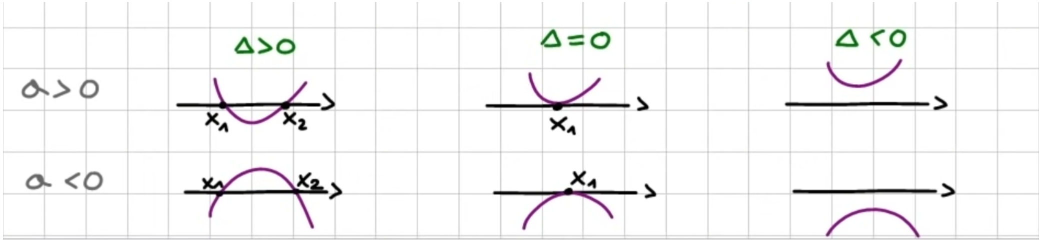


Tabella delle soluzioni Questa tabella è utile a capire quali sono le soluzioni di una disequazione.

Soluzioni equazione associata	Disequazione $(a > 0)$	Soluzione
Due soluzioni reali e distinte $x_1 \neq x_2$ Supponiamo per semplicità $x_1 < x_2$	$ax^2 + bx + c > 0$	$x < x_1 \;\vee\; x > x_2$
	$ax^2 + bx + c \geq 0$	$x \leq x_1 \;\vee\; x \geq x_2$
	$ax^2 + bx + c < 0$	$x_1 < x < x_2$
	$ax^2 + bx + c \leq 0$	$x_1 \leq x \leq x_2$
Due soluzioni reali e coincidenti $x_1 = x_2$	$ax^2 + bx + c > 0$	$\forall x,\; x \neq x_1$
	$ax^2 + bx + c \geq 0$	$\forall x$
	$ax^2 + bx + c < 0$	$\nexists x$
	$ax^2 + bx + c \leq 0$	$x = x_1$
Nessuna soluzione reale $\Delta < 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	$\forall x$
	$ax^2 + bx + c \geq 0$	$\forall x$
	$ax^2 + bx + c < 0$	$\nexists x$
	$ax^2 + bx + c \leq 0$	$\nexists x$

Disequazioni con *Valore Assoluto*

Quando troviamo una disequazione con valore assoluto, bisogna porre a sistema la disequazione con *l'argomento del modulo posto prima maggiore, poi minore di zero.* Così facendo avremo due sistemi di disequazioni, che risolti separatamente ci daranno i due risultati della disequazione

in parole più semplici Noi vogliamo vedere la soluzione della disequazione con l'argomento del modulo sia "così com'è" che con i segni invertiti e poi unire i risultati. Quindi il risultato del modulo posto maggiore o minore di zero non ci interessa! ***N.B.*** (**non sono sicuro** di questo ragionamento. per ora diamolo per buono)

Esempio: $|2x-3| > x+6$. Dobbiamo eliminare il valore assoluto.
quindi ponendo l'argomento del modulo *maggiore o uguale a zero*:

$$\begin{cases} 2x-3 \geq 0 \\ 2x-3 > x+6 \end{cases} = \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x > 9 \end{cases} = x > 9$$

E ponendolo *minore di zero* (nota che cambia di segno):

$$\begin{cases} 2x-3 < 0 \\ -2x+3 > x+6 \end{cases} = \begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ x < -1 \end{cases} = x < -1$$

Quindi il risultato è: $x > 9 \vee x < -1$

Nel caso in cui avessi un valore assoluto dentro un altro parto sempre da quello più esterno a definire le condizioni e creare i sistemi.
Quando ottengo che una soluzione di un sistema non esiste posso non considerarla nell'unione finale delle varie soluzioni dei sistemi.

1.2 Richiamo sui Logaritmi

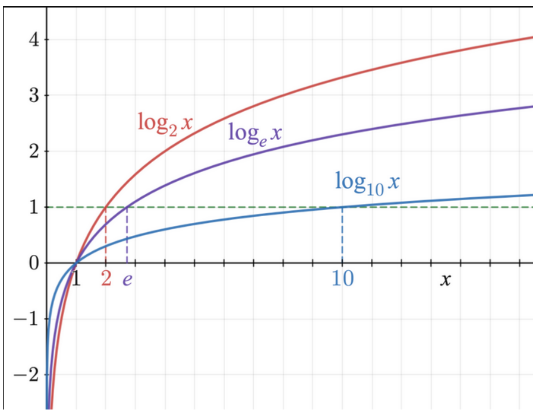
DEFINIZIONE

Il logaritmo è un operatore matematico indicato generalmente con $\log_a(b)$;
Detta a la base e b l'argomento, il logaritmo in base a di b è definito come:

L'esponente a cui elevare la base per ottenere l'argomento.

$$\log_a(b) = c \implies a^c = b$$

Il logaritmo è l'operazione inversa rispetto all'elevamento a potenza.



Proprietà dei logaritmi

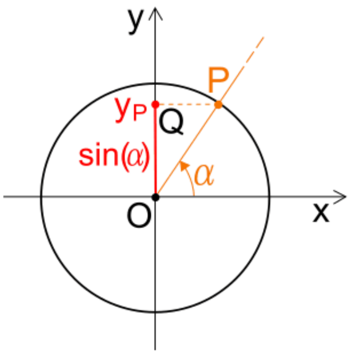
Per i logaritmi valgono le seguenti prorpietà:

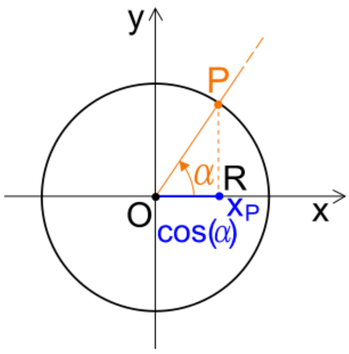
- Toerema del prodotto: $\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$
- Teorema del rapporto: $\log_a(\frac{b}{c}) = \log_a(b) - \log_a(c)$
- Regola dell'esponente: $\log_a(b^c) = c\log_a(b)$
- Formula del cambiamento di base : $\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$
- Formula di inversione : $\log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)}$

Condizioni di esistenza Durante la risoluzione di una disequazione dobbiamo ricordarci di porre come condizione di esistenza l'argomento del logaritmo maggiore di 0, come si può osservare dal grafico il logaritmo non assume mai 0 come valore sull'asse delle x.

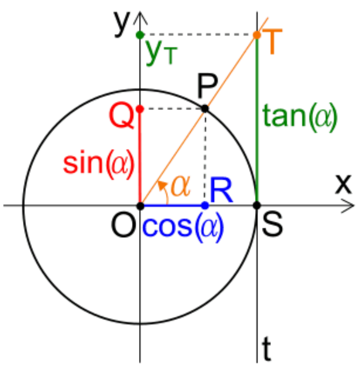
1.3 Richiamo di Trigonometria

Seno e Coseno Due funzioni trigonometriche fondamentali sono *Seno e Coseno*, che vengono definite a partire dalla circonferenza goniometrica e che *associa a ciascun angolo un determinato valore numerico compreso tra -1 e +1.*
Le seguenti immagini evidenziano il significato geometrico del seno e del coseno:





Tangente Sempre partendo dalla circonferenza goniometrica possiamo definire la tangente di un angolo come il rapporto tra il seno e il coseno dello stesso angolo. Qui di seguito il significato geometrico della tangente.



Valori di Seno e Coseno Al variare di α

α°	α RAD	senα	cosα
0°	0	0	1
30°	π/6	1/2	√3/2
45°	π/4	√2/2	√2/2
60°	π/3	√3/2	1/2
90°	π/2	1	0
180°	π	0	-1
270°	3/2·π	-1	0
360°	2π	0	1

Formule Note Seguono alcune formule trigonometriche note che possono essere utili durante gli esami.

- $\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$
- $\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)} = \cot(x)$

Proprietà

- $\sin(\alpha + \beta) = sin(\alpha) + \sin(\beta)$

1.4 Valore assoluto (modulo) di un numero Reale

Definizione Valore assoluto Il **valore assoluto**, detto anche *modulo*, è una funzione che associa ad un numero negativo il numero stesso con segno positivo, a zero associa zero e lascia invariati i numeri positivi.

DEFINIZIONE

Per ogni $x \in R$ si pone

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

$|x|$ si dice valore assoluto, o modulo, di x

Il valore assoluto di un numero è quindi **sempre positivo o eventualmente nullo**.

ATTENZIONE dire che "il modulo di un numero è il numero senza il segno" non ha senso in questo contesto, quindi non va usata perchè vale solo se x è "semplice"

In parole povere il modulo di x è x se x è positivo, il suo opposto se è negativo quindi $|3 - \pi| = \pi - 3$ perchè $3 - \pi$ è negativo $(3 - 3.14)$ quindi il suo modulo è il suo opposto.
Volendo, $|x|$ si può anche interpretare come il massimo tra x e $-x$.

Modulo e moltiplicazione Per ogni $x, y \in R$ si ha $|xy| = |x||y|$.
Se $y \neq 0$, si ha anche $|x/y| = |x|/|y|$

Modulo e addizione Il modulo della somma NON coincide con la somma dei moduli. Però vale la seguente importantissima disuguaglianza:

Disuguaglianza triangolare siano x,y numeri reali. Allora:

$$|x + y| \leq |x| + |y| \tag{1.2}$$

(cioè il modulo della somma è minore o uguale della somma dei due moduli)

1.5 Insiemi e Intervalli in R

DEFINIZIONE

Diremo **intervallo** di $\mathbb{R}$ un sottoinsieme I di $\mathbb{R}$ che sia convesso rispetto all'ordine, cioè che soddisfi la seguente condizione: se $a, b \in I$, e $a \leq b$, ogni $x \in R$ tale che $a \leq x \leq b$ appartiene a I.

In parole povere: I è intervallo di $\mathbb{R}$ se, contenendo due numeri reali, contiene anche *tutti i numeri reali che stanno fra questi due.*

Intervalli limitati. Fissati $a, b \in R$, con $a < b$, si riconosce facilmente che sono intervalli i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

$[a, b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$ CHIUSO

$[a, b) = \{x \in R : a \leq x < b\}$ SUPERIORMENTE APERTO

$(a, b] = \{x \in R : a < x \leq b\}$ INFERIORMENTE APERTO

$(a, b) = \{x \in R : a < x < b\}$ APERTO

(le parentesi tonde a volte vengono sostituite con delle parentesi quadre nel senso opposto)

Tutti questi intervalli sono detti intervalli *limitati*

Intervalli illimitati. sono invece intervalli illimitati, per ogni $a \in R$, gli insiemi:

$\{x \in R : x \geq a\}$ (semiretta *chiusa* inferiormente limitata)

$\{x \in R : x > a\}$ (semiretta *aperta* inferiormente limitata)

$\{x \in R : x \leq a\}$ (semiretta *chiusa* superiormente limitata)

$\{x \in R : x < a\}$ (semiretta *aperta* superiormente limitata)

Massimi e Minimi dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

DEFINIZIONE

Sia S un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Un elemento $m \in R$ si dice *massimo* di S se appartiene ad S ed è maggiore o uguale di ogni elemento di S.
Dualmente, $\mu \in \mathbb{R}$ è detto *minimo* di S se appartiene ad S ed è minore o uguale di ogni elemento di S

Un sottoinsieme può *avere o non avere massimo*, *avere o non avere minimo*, ma se esistono sono **UNICI**.

Maggioranti/Minoranti Un numero reale L si dice **maggiorante** per un insieme A di numeri reali se è maggiore o uguale di ogni elemento di A.
In simboli: L è maggiorante di $A \Leftrightarrow L \geq a, \forall a \in A$
Viceversa vale per i **Minoranti**.

insiemi limitati Se un insieme ammette maggioranti, allora si dice che è *Superiormente limitato*, viceversa per i minoranti. Se un insieme ammette sia maggioranti che minoranti, allora esso è limitato.

In parole povere Un Massimo è un numero compreso nell'insieme che è più grande di tutti gli altri, un maggiorante è un numero (che può essere compreso o non) che è maggiore o uguale a tutti gli altri.

Prodotto Cartesiano

Definizione. Dati due insiemi X e Y, il loro prodotto cartesiano è per definizione l'insieme $X \times Y$ formato da tutte le coppie ordinate (x, y) che hanno la prima componente $x \in X$, la seconda $y \in Y$.
Se $X = Y$, il prodotto $X \times X$ si chiama *quadrato cartesiano* di X e si indica anche con X^2

Capitolo 2

Funzioni

2.1 Generalità

DEFINIZIONE

Siano X e Y insiemi. Si dice che è data una funzione di X in Y, se è data una regola che a ogni elemento di X associa *uno e uno solo* elemento di Y.

In altre parole assegnare una funzione f di X in Y significa dare un procedimento che consenta di assegnare a ogni $x \in X$ un ben determinato $y \in Y$. Tale y, corrispondente di x tramite la funzione f, si indica con $f(x)$, cioè $y = f(x)$ e y si chiama *immagine di x secondo f*. per indicare che f è funzione di X in y si scrive $f : X \to Y$.

DEFINIZIONE

se $f : X \to Y$ è una funzione, gli insiemi X *e* Y sono rispettivamente il **dominio** e il **codominio** di f.

Assegnare una funzione significa assegnare:

- Un dominio X
- Un codominio Y
- Una regola che a ogni x del dominio associ una y del codominio

Pertanto: due funzioni f e g sono **uguali** se e solo se hanno lo *stesso dominio*, lo *stesso codominio*, e inoltre si ha $f(x) = g(x)$ *per ogni x del dominio.*
Non basta dunque dire che la regola sia la stessa: occorre anche che il dominio e il codominio dati siano gli stessi.

Insieme immagine

Se $f : X \to Y$ è una funzione, ed S è sottoinsieme del dominio X (cioè $S \subseteq X$) si indica con $f(s)$ l'insieme degli elementi y che sono immagini secondo f di qualche elemento di S.
In linguaggio matematico è $f(S) = \{f(x) : x \in S\}$ oppure si può anche descrivere così: $f(S) = \{y \in Y : \exists x \in S \text{ tc } y = f(x)\}$.
L'insieme $f(S)$ è detto *immagine di S tramite f*; per $S = X$ (quindi se S corrisponde col dominio), $f(X)$ è detto *immagine di f.*
Vale sempre $f(X) \subseteq Y$, quindi **l'immagine è sempre conenuta nel codomino**, ma in generale è $f(X) \subset Y$, cioè immagine e codominio sono diversi.

In parole povere L'immagine di una funzione è l'insieme dei valori assunti da una funzione sul proprio dominio, ed è quindi contenuta nel codominio (o insieme di arrivo) della funzione, con il quale può al più coincidere.

Come si calcola? Per trovare l'insieme immagine, il modo più facile è guardare il grafico della funzione

Immagine Inversa

Dualmente al concetto di immagine c'è quello di antiimmagine.

Definizione. Sia $f : X \to Y$ una funzione, sia $F \subseteq Y$. Si chiama immagine inversa $f^{\leftarrow}(T)$ (o controimmagine, o antiimmagine) di T mediante f l'insieme degli $x \in X$ la cui immagine sta in T. in simboli: $f^{\leftarrow}(T) = \{x \in X : f(x) \in T\}$.

In parole povere L'antiimmagine mediante un insieme T è l'insime dei valori del dominio la cui immagine è contenuta in T

2.2 Composizione di Funzioni

Siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ funzioni. Si ottiene una funzione $g \circ f : X \to Z$ (che si legge "g tondo f" o "g cerchietto f") ponendo $g \circ f = g(f(x))$ per ogni $x \in X$; $g \circ f$ è detta *funzione composta* di f e g; è la funzione ottenuta applicando f e g nell'ordine.
Per poter fare la composizione, **occorre che il codominio di f coincide con il dominio di g.**

Esempio: Siano $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ e $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ due funzioni così definite:
$f(x) = x^2$ e $g(x) = x - 2$ allora $f \circ g = f(g(x)) = (x - 2)^2$

2.3 Iniettività e Suriettività

Funzioni Suriettive

Quando l'*insieme immagine e il codomino di una funzione coincidono*, essa si dice che è *suriettiva*

DEFINIZIONE

Una funzione $f : X \to Y$ si dice **suriettiva** se è $f(X) = Y$. Attenzione che su alcuni testi di Analisi il termine codominio è inteso nel senso di immagine (e non è propriamente corretto).

Graficamente Per determinare graficamente se una funzione è suriettiva è necessario verificare che la proiezione dell'intero grafico sull'asse delle y copra interamente l'asse stesso, se così fosse possiamo affermare che la funzione è suriettiva.

Funzioni Iniettive

La funzione $f : X \to Y$ è detta **iniettiva** se trasforma elementi distinti in elementi distinti, ovvero:

DEFINIZIONE

$f : X \to Y$ si dice iniettiva se per ogni $x_1, x_2 \in X$ e $x_1 \neq x_2$ implicano $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Per vedere che una $f : X \to Y$ *non* è iniettiva, basta esibire anche una sola coppia x_1, x_2 di elementi distinti ($x_1 \neq x_2$) del dominio per cui sia $f(x_1) = f(x_2)$. Per provare invece che è iniettiva, occorre dimostrare che per ogni coppia di elementi distinti $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$ si ha $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Graficamente Per determinare graficamente se una funziona è iniettiva è necessario verificare che tracciando un'ipotetica linea orizzontale la linea non intersechi il grafico in più di un punto.
Per esempio tracciando una linea orizzontale nel grafico di una parabola la linea interseca il grafico in 2 punti e questo ci indica che la funzione NON è iniettiva.

Biiezioni

Una funzione $f : X \to Y$ è detta biiettiva se è sia iniettiva che suriettiva. Quindi $f : X \to Y$ è biiettive se e solo se per ogni $y \in Y$ esiste uno e un solo $x \in X$ tale che sia $y = f(x)$. Che esista almeno un tale x dice che f è suriettiva, che sia unico dice che f è iniettiva. Una funzione biiettiva viene detta anche biiezione e corrispondenza biunivoca.

2.4 Funzione Inversa

Se $f : X \to Y$ è biiettiva, si può definire una funzione inversa di f,$f^{-1} : Y \to X$, nel modo seguente: dato $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ è quell'unico $x \in X$ tale che sia $y = f(x)$. se $f : X \to Y$ non è biiettiva, la funzione inversa di f non può essere definita.

Graficamente se f è funzione reale di variabile reale biiettiva (ovvero è invertibile), il grafico dell'inversa f^{-1} si ottiene facendo il simmetrico del grafico di f rispetto alla retta di equazione $y = x$.

Come si calcola

In linea generale, per calcolare l'inversa di una funzione bisogna:

- mettere la funzione nella forma $y = ...$
- Isolare la x
- Una volta isolata la x, si sotituisce y con x, e x con $f(x)$ per trovare la funzione

Esempio: $f(x) = x^3$, allora $f^{-1}(x)$:
$y = x^3 \to x^3 = y \to x = \sqrt[3]{y} \to f(x) = \sqrt[3]{x}$

Derivata della Funzione Inversa

In molti casi l'inversa di una funzione non è facilmente calcolabile, esiste però un modo per *calcolare la derivata di una funzione inversa senza saperne l'espressione analitica.*

DEFINIZIONE

Consideriamo una funzione $y = f(x)$ biunivoca e derivabile in un punto x_0 e supponiamo inoltre che $f'(x_0) \neq 0$.
Allora la funzione inversa $x = f^{-1}(y)$ è derivabile nel punto $y_0 = f(x_0)$, e la sua derivata in tale punto è:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Ovvero Questo teorema ci serve all'esame per quelle funzioni di cui dobbiamo trovare la derivata dell'inversa che però sono pressochè impossibili da derivare.
Sia $f(x)$ una funzione (ovviamente invertibile e derivabile) e sia g la sua inversa.
$g'(y_0)$ (con un y_0 fornito) è trovabile in questo modo:
Dal teorema sappiamo che $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$, e sappiamo (tramite la formula della funzione inversa) che $y = f(x)$.
Se $y = y_0$ (che è il valore di y in cui dobbiamo trovare g'), allora $y_0 = f(x)$ ci da un certo valore di $x = x_0$.
Avendo adesso il valore di y_0 e di x_0 basta riempire la formula per trovare $g'(y_0)$.
Si può riassumere questo processo nei seguenti passaggi: Data $g(x) = f^{-1}(x)$ e avendo y_0, sappiamo che $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$. Quindi:

1. trovo x_0 ponendo $y_0 = f(x)$
2. trovo $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

Esempio: detta g la funzione inversa di $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, allora $g'(1) =$
Dal teorema ho $g'(1) = \frac{1}{f'(x_0)}$, e so che $y = x^{\frac{1}{3}}$. Ponendoli a sistema per trovare x ottengo:

$$\begin{cases} y = 1 \\ y = x^{\frac{1}{3}} \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Quindi, $g'(1) = \frac{1}{f'(1)}$. $f'(x) = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$, $f'(1) = \frac{1}{3}$.
Applicando quindi la formula ottengo $g'(1) = 3$.

Funzioni Pari/Dispari

Sia $f : X \to Y$ una funzione reale di variabile reale (quindi $X, Y in \mathbb{R}$).

Pari Si dice che f è pari se per ogni $x \in X$ anche $-x \in X$ ed è $f(x) = f(-x)$;
Le funzioni pari hanno grafico simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.

Dispari Si dice che f è dispari se per ogni $x \in X$ anche $-x \in X$ ed è $f(x) = -f(x)$;
Le funzioni dispari hanno grafico simmetrico rispetto all'origine

2.5 Monotonia di una Funzione

Sia $f : X \to Y$ una funzione reale di variabile reale (quindi $X, Y in \mathbb{R}$).

Funzione Crescente

Si dice che f è *crescente* se da $x_1, x_2 \in X$ e $x_1 < x_2$ segue $f(x_1) \leq f(x_2)$;
Se invece $x_1, x_2 \in X$ e $x_1 < x_2$ implicano $f(x_1) < f(x_2)$ allora f si dice *strettamente crescente*;

Funzione Decrescente

Si dice che f è *decrescente* se da $x_1, x_2 \in X$ e $x_1 > x_2$ segue $f(x_1) \geq f(x_2)$;
Se invece $x_1, x_2 \in X$ e $x_1 < x_2$ implicano $f(x_1) > f(x_2)$ allora f si dice *strettamente decrescente*;

Come si calcola la monotonia? Per calcolare la monotonia di una funzione, bisogna porre la derivata (che è il "rateo" di crescita della funzione) *Maggiore (o minore o maggiore uguale o minore uguale) di 0.* Nei punti in cui la derivata rimane maggiore (minore,...) di 0, la funzione è *monotona crescente (decrescente,...)*

Tip per l'esame (Crocette) Può capitare che venga indicato in una delle possibili risposte un intervallo dove $f(x)$ non è definita, per esempio se ho $\log x$ e una delle possibili risposta è "$logx$ decresce per $(-\infty, 0]$", posso subito escluderla dato che il dominio di $logx$ è $x > 0$.

2.5.1 Teorema di Weierstrass

DEFINIZIONE

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua.
Allora f assume massimo e minimo in $[a, b]$, ovvero:
esistono x_m, $x_M \in [a, b]$ tali che $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$ per ogni $x \in [a, b]$.
Si dice che x_m è punto di minimo per f, e $m = f(x_m)$ è il minimo di f;
analogamente x_M è punto di massimo, e $M = f(x_M)$ è il massimo di f.

2.6 Studio di Funzione

Una parte importantissima dell'Analisi Matematica (che fa parte di un intero esercizio d'esame) è lo *Studio di Funzione*, che mette insieme quasi tutti gli argomenti del corso.

Lo studio di funzione è composto di 5 passaggi:

1. Definizone del Dominio
2. Segno e intersezione con gli assi
3. Limiti e Asintoti

4. Segno della derivata

Definizione del Dominio

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non sempre è definita in tutto $\mathbb{R}$, spesso ci sono degli intervalli (o dei punti) in cui non è definibile. Per trovare questi punti in cui non è definibile bisogna:

- porre tutti i **Denominatori** $\neq 0$
- porre tutti gli **Argomenti delle Radici pari** ≥ 0
- porre tutti gli **Argomenti dei Logaritmi** > 0
- ogni funzione del tipo $f(x)^{g(x)}$, $f(x)$ va posto maggiore di 0
- gli argomenti di arcsin e arccos vanno posti $-1 < x < 1$

Ovviamente, una volta definito il dominio della funzione vado a eliminare dal piano cartesiano le zone in cui $f(x)$ non è definita.

Simmetrie/Periodicità

Questa fase è facoltativa ma ogni tanto ci aiuta.

$$f(-x) = \begin{cases} f(x) \implies \text{Funzione Pari} \\ -f(x) \implies \text{Funzione Dispari} \\ NIL \implies \text{Funzione ne Pari ne Dispari} \end{cases} \tag{2.1}$$

Le *Funzioni Periodiche* sono generalmente quelle goniometriche.

Segno e Intersezione con gli Assi

Il segno della funzione ci permette di vedere dove la funzione è positiva. L'intersezione con gli assi invece ci aiuta a disegnare la funzione.

- $f(x) \geq 0$ Per vedere dove la funzione è positiva
- $f(x) = 0$ è l'intesezione con l'asse delle ascisse
- $f(0)$ è l'intersezione con l'asse delle ordinate

Limiti e asintoti

I limiti ci servono a capire come si comporta la funzione ai limiti del dominio e nei punti di discontinuità. Bisogna calcolare i limiti di x ai punti di accumulazione del dominio che non fanno parte del dominio e agli estremi di esso.

- Se $x_0 \notin DOM$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = c \implies$ il grafico ha un "buco" in (x_0, c).
- Se $x_0 \notin DOM$ e $\lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = \pm\infty \implies x = x_0$ è asintoto VERTICALE.
- Se $\lim_{x \to \pm\infty} = l$ l è asintoto ORIZZONTALE
- Se $\lim_{x \to \pm\infty} = \pm\infty$ potrebbe eistere Asintoto Obliquo

Monotonia: Crescenza/Decrescenza

La monotonia di una funzione è *l'intervallo in cui una funzione è crescente o decrscente*. Per determinare la monotonia di una funzione, bisogna trovarne la derivata e determinare il suo segno, quindi porla > 0. Nei punti in cui la derivata di una funzione è *maggiore di 0* la funzione è *crescente*, nei punti in cui invece è *mionre di 0* la funzione è *decrescente*.

Massimi e Minimi

Tramite lo studio della monotonia si possono anche trovare i punti di massimo e minimo di una funzione

Concavità e Convessità

Cosa sono Una funzione convessa è tale se il segmento che congiunge due punti qualsiasi del suo grafico giace sopra il grafico stesso o coincide con una sua parte. Il contrario vale per le funzioni concave.

- CONC**A**VA $\cap$
- CON**V**ESSA $\cup$

Come si calcola Per trovare la concavità di una funzione, bisogna fare la derivata seconda e porla > 0 per trovarne il segno. Nei punti in cui la derivata seconda è positiva la funzione è CONVESSA, nei punti in cui è negativa la funzione è CONCAVA.

- - CONC**A**VA $\cap \implies f''(x)$ positiva
- + CON**V**ESSA $\cup \implies f''(x)$ negativa

Retta tangente al grafico

Ogni tanto ci viene chiesto di determinare l'*equazione della retta tangente al grafico di una funzione in un punto.*
Una retta è tangente al grafico nel punto x_0 se hanno uno e un solo punto in comune, che sarà x_0 appunto.

Come si calcola Bisogna innanzitutto avere la derivata della funzione. Poi, tenendo conto dell'equazione generica della retta $y = mx + q$ bisogna:

- Trovare $m = f'(x_0)$
- Trovare $q = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$
- Infine, "monti" l'equazione della retta $y = mx + q$

Capitolo 3

Limiti e Continuità

3.1 Forme di Indecisione

Le forme di Indecisione (o forme indeterminate) sono operazioni che coinvolgono infiniti e infinitesimi nel calcolo dei limiti per le quali *non è possibile determinare un risultato a priori*.
Le operazioni problematiche nel calcolo dei limiti sono essenzialmente sette:

$$[\tfrac{0}{0}]\ [\tfrac{\infty}{\infty}]\ [1^{\infty}]\ [\infty - \infty]\ [\infty \cdot 0]\ [0^0]\ [\infty^0]$$

Risoluzione Tutti questi possono essere risolti usando **Limiti Notevoli**, compresi alcuni **trucchi algebrici** per ricondursi ad essi, come sommare e sottrarre la stessa quantità e dividere e moltiplicare per la stessa quantità ma anche eventuali prorpietà dei logaritmi e delle potenze, formule trigonometriche etc...
In particolare però, questi si risolvono usando *anche*:

$$\frac{0}{0}$$

- Confronto tra infinitesimi
- Scomposizione/Raccoglimento/Semplificazione
- Teorema di De l'Hôpital

$$\frac{\infty}{\infty}$$

- Confronto tra infiniti
- Scomposizione/Raccoglimento/Semplificazione
- Teorema di De l'Hôpital

$$1^\infty$$

- Limiti Notevoli (in particolare il limite neperiano)
- Uso dell'identità Logaritmo-Esponenziale

$$0 \cdot \infty$$

- Trucchi per ricondursi a $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$

$$\infty - \infty$$

- Razionalizzazione Inversa
- Prodotti notevoli al contrario

$$\infty^0$$

- Confronto tra infiniti
- Confronto tra infinitesimi
- Uso dell'identità Logaritmo-Esponenziale

$$0^0$$

- Confronto tra infiniti
- Confronto tra infinitesimi
- Uso dell'identità Logaritmo-Esponenziale

3.2 Limiti Notevoli

Per risolvere le forme indeterminate non sono sufficienti gli strumenti che l'algebra dei limiti e degli infiniti/infinitesimi ci forniscono. Esistono dunque alcuni limiti notevoli che ci permetteranno di risolvere buona parte delle forme indeterminate.

Logaritmo Naturale

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \lim_{h(x) \to 0} \frac{\ln(1+h(x))}{h(x)}$$

Funzione Esponenziale

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1;\ \lim_{h(x)\to 0}\frac{e^{h(x)}-1}{h(x)}=1$$

3.3 Asintoti Verticali e Orizzontali

Asintoti Verticali

DEFINIZIONE

Si dice che la retta $x=a$ è un *Asintoto Verticale* di $f(x)$ se si verifica almeno una di queste caratteristiche:

- $\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$
- $\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$
- $\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$
- $\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

Una funzione può avere un numero qualsiasi di asintoti verticali

In poche parole Un Asintoto Verticale è una retta che fa da "muro" nel dominio di una funzione, e si trova facendo il limite della funzione in un punto specifico, se questo limite è uguale a $\pm\infty$ allora abbiamo trovato un asintoto verticale.

Come si trova? Per trovare eventuali *Asintoti Verticali* devo identificare i punti dove ci sono *problemi di definizione*, come "buchi" o estremi del dominio.

Esempio:

$$y=\ln x+\frac{1}{x-2}$$

Dominio: $x-2\neq 0\to x\neq 2\land x>0$
In questo esempio abbiamo dei problemi di definizione in $x=2$, dove c'è un "buco" nel dominio, e in $x=0$ dove c'è il limite del dominio.
in questi punti *potrebbero* esserci degli AV. Proviamo:
$\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$
$\lim_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$
$\lim_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$

Quindi $x = 0$ e $x = 2$ sono asintoti verticali.

Asintoti Orizzontali

Una situazione abbastanza analoga si ha con gli *Asintoti Orizzontali*

DEFINIZIONE

Si dice che la retta $y = l$ è un *Asintoto orizzontale (destro)* di $f(x)$ per $x \to +\infty$ se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$
Si dice che la retta $y = l$ è un *Asintoto orizzontale (sinistro)* di $f(x)$ per $x \to -\infty$ se $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$

In questo caso però, una funzione può avere *al massimo 2 asintoti orizzontali*

3.4 Asintoti Obliqui

definizione Si dice che la retta $y = mx + q$ è un asintoto obliquo (destro) di $f(x)$ per $x \to +\infty$ se $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx - q] = 0$. Una Situazione analoga si ha per $-\infty$ (sinistro).

Una funzione può avere al massimo 2 asintoti obliqui diversi, uno a $+\infty$ e uno a $-\infty$. La stessa retta può essere asintoto obliquo destro e sinistro.

Come trasintoti oriovare un asintoto obliquo a $\pm\infty$? Bisogna provare a svolgere un paio di limiti.
$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \to$ Se $m \in \mathbb{R}$ e $m \neq 0 \to q = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] \to$ Se $q \in \mathbb{R} \to y = mx + q$ è asintoto obliquo ***N.B.*** Se $m = 0$ (con $q \in \mathbb{R}$) si ricade nel caso degli asintoti orizzontali (quindi, da un certo punto di vista, gli asintoti orizzontali sono un caso particolare di asintoti obliqui)

3.5 Equivalenze Asintotiche

Le equivalenze asintotiche sono delle "regole" molto utili per il calcolo dei limiti. Dire che una funzione è asintoticamente equivalente a un altra, significa bene o male dire "la funzione f(x) si comporta come g(x) quando x tende a 0"

DEFINIZIONE

Due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ si dicono *asintoticamente equivalenti* per $x \to x_0$ se:

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ e si scrive $f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$

Dai limiti notevoli si ricava facilmente che, per $x \to 0$

- $\sin x \sim x$
- $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$
- $\tan x \sim x$
- $ln(1 + x) \sim x$
- $(1 + x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ $(\forall \alpha \in \mathbb{N})$

N.B. Naturalmente tutte le equivalenze precedenti possono essere generalizzate sostituendo ad x una generica $\epsilon(x)$ che tenda a 0, quindi anche con una funzione che è *infinitesima per* $x \to +\infty$

Esempio:
$\sin(5x) \sim 5x$ per $x \to 0$, dato che $5x$ tende a 0.
$e^{\frac{1}{x}} - 1 \sim \frac{1}{x}$ per $x \to +\infty$, dato che $\frac{1}{x}$ tende a 0 con $x \to +\infty$

Alcune Proprietà

1. Se $f_1(x) \sim g_1(x)$ e $f_2(x) \sim g_2(x)$ per $x \to x_0$ allora $f_1(x) \cdot f_2(x) \sim g_1(x) \cdot g_2(x)$ per $x \to x_0$.
   in particolare, se i limiti per $x \to x_0$ dei due prodotti esistono, sono uguali.
2. Se $f_1(x) \sim g_1(x)$ e $f_2(x) \sim g_2(x)$ per $x \to x_0$ allora $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \sim \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ per $x \to x_0$.
   in particolare, se i limiti per $x \to x_0$ dei due rapporti esistono, sono uguali.
3. se $f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$ allora $[f(x)]^\alpha \sim [g(x)]^\alpha$ per $x \to x_0$

3.6 Confronto tra infiniti/infinitesimi

Ordine di infiniti

Nel calcolo dei limiti, quando bisogna trovare l'infinito di ordine maggiore:

$$\log_a x \ll x^b \ll x^c \ll d^x \ll g^x \ll x^x$$

con $a > 0 \land a \neq 1$, $0 < b < c$, $1 < d < g$ ***N.B.*** la radice è "più grande" del logaritmo

o-piccolo

L' o-piccolo è un simbolo matematico che viene usato per individuare l'ordine di infinitesimo di una funzione rispetto ad una funzione campione, al tendere di x ad un determinato valore di infinito.

DEFINIZIONE

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni (definite sullo stesso insieme) e sia x_0 un punto di accumulazione del dominio, eventualmente infinito. Se il $\lim\limits_{x \to x_0}$ del rapporto delle due funzioni f e g è uguale a zero, allora diremo che $f(x)$ *è un o-piccolo di* $g(x)$ *per* x *che tende a* x_0.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \implies f(x) = o_{x_0} g(x)$$

3.7 Continuità di una funzione

La continuità di una funzione è una delle nozioni più importanti dell'analisi matematica (o almeno così dice youmath).

DEFINIZIONE

Una *Funzione continua in un punto* è una funzione in cui due limiti sinistro e destro calcolati nel punto coincidono con la valutazione della funzione nel punto.
Quindi, diciamo che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è *continua nel punto* x_0 se

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Una funzione continua su un insieme è una funzione continua in ogni punto dell'insieme, se una funzione è continua su *tutto il suo dominio*, si dice che è *continua.*

Punti di discontinuità

Se una funzione non è continua in un punto, allora si dice che quello è un punto di discontinuità.

DEFINIZIONE

Una funzione si dice discontinua in x_0 se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *non esiste, è infinito o esiste ma è diverso da* $f(x_0)$

Osservazione Esiste una seconda definizione che estende la prima, spesso utilizzata alle superiori per semplificare il concetto. Questa definizione enuncia, in estensione alla prima, che è anche punto di discontinuità un *punto di accumulazione del dominio che non appartiene al dominio.*
Si noti che per correttezza questi punti vengono spesso chiamati **singolarità**, ovvero un punto di discontinuità è una singolarità se non appartiene al dominio.

Classificazione dei punti di Discontinuità

Ci sono 3 classificazioni per identificare i punti di discontinuità. Data una funzione $f : \mathbb{R} \in \mathbb{R}$ e un punto x_0 si dice che x_0 è un punto di discontinuità di:

Prima Specie se i *limiti sinistro e destro di x_0 esistono finiti ma sono diversi.* Questa viene anche chiamata **Discontinuità a Salto**

Seconda Specie se almeno uno dei due limiti, destro o sinistro, di x_0 è *infinito o non esiste*. Questa viene anche chiamata **Discontinuità Essenziale**

Terza Specie Se il limite di x_0 *esiste finito* ma è *diverso da* $f(x_0)$ oppure $f(x_0)$ non esiste. Questa viene chiamata **Discontinuità Eliminabile**, (oppure buco nella funzione).

3.8 Calcolo dei limiti

Qui di seguito verranno riportate alcune definizioni e teoremi utili per il calcolo dei limiti, può tornare utile guardare la sezione relativa alle forme di indecisione.

DEFINIZIONE

Un **intorno** di un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è un intervallo aperto che contiene x_0

DEFINIZIONE

Diremo che una funzione $f(x)$ ha una certa proprietà **definitivamente** per $x \to c$ se esiste un intorno U di c tale che la proprietà vale per $f(x)$ per ogni $x \in U$, $x \neq c$

.

Teorema del confronto

DEFINIZIONE

Se:

1. Per $x \to c$, $f(x) \to l$ e $g(x) \to l$
2. $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ definitivamente per $x \to c$

allora anche $h(x) \to l$ per $x \to c$

DEFINIZIONE

Se $a_n \leq b_n \leq c_n$ definitivamente e $a_n \to l$, $c_n \to l \in \mathbb{R}$
allora anche $b_n \to l$.

Corollario Se:

1. Per $x \to c$, $g(x) \to 0$
2. $|h(x)| \leq g(x)$ definitivamente per $x \to c$

Allora anche $h(x) \to 0$, per $x \to c$.

Another Corollario Se $f(x) \to 0$ per $x \to 0$ e $g(x)$ è limitata definitivamente per $x \to c$, allora $f(x)g(x) \to 0$ per $x \to c$.

3.8.1 Teorema di Permanenza del Segno

Il teorema di permanenza del segno assicura l'esistenza di un intorno di un punto c in cui una funzione $f(x)$ é concorde con il limite di $f(x)$ per $x \to c$, a patto che tale limite sia diverso da 0.

DEFINIZIONE

Sia $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia c un punto di accumulazione per il dominio.

$$\text{Se } \lim_{x \to c} f(x) = l > 0 \implies f(x) > 0 \forall x \in I_c$$
$$\text{Se } \lim_{x \to c} f(x) = l < 0 \implies f(x) < 0 \forall x \in I_c$$

con I_c intorno di c

Teorema di permanenza del segno - 1 forma

DEFINIZIONE

Se $x \to c$ e $f(x) \to l > 0$ allora $f(x) > 0$ definitivamente per $x \to c$.

Teorema di permanenza del segno - 2 forma

DEFINIZIONE

Se per $x \to c$, $f(x) \to l > 0$ definitivamente per $x \to c$ allora $l \geq 0$

Teorema di permanenza del segno per funzioni continue

DEFINIZIONE

Se f è continua in c e $f(c) > 0$, allora $f(x) > 0$ definitivamente per $x \to c$.

Teorema degli zeri

DEFINIZIONE

Sia

1. f continua in [a, b]
2. $f(a)f(b) < 0$

Allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$. Se f è anche strettamente monotna, lo zero è unico.

3.8.2 Teorema di De l'Hopital

Il teorema di de l'Hoptial è un teorema sui limiti di funzioni reali di variabile reale che, sotto opportune ipotesi, consente di calcolare il limite di un rapporto di funzioni considernado il limite del rapport tra la derivata del numeratore e la derivata del denominatore.

DEFINIZIONE

Siano f, g due funzioni, derivabili in un certo intervallo (a, b). Se:

- $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$
- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = [\frac{0}{0}] \vee \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = [\frac{\infty}{\infty}]$

E se il limite $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ esiste *finito o infinito*
Allora esiste il limite del rapporto delle due funzioni, e vale la relazione:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

In pratica Se ho una funzione del tipo $\frac{f(x)}{g(x)}$ il cui limite per un x_0 (che può essere un numero o $\pm\infty$) mi da una forma di indecisione $[\frac{0}{0}]$ o $[\frac{\infty}{\infty}]$, e la derivata del denominatore è *Sempre* $\neq 0$, allora per trovare il limite mi basta trovare il limite di $\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Attenzione, non la derivata di tutta la funzione, ma le derivate (separate) di numeratore e denominatore.

Teorema dei Valori Intermedi

DEFINIZIONE

Se f è continua su [a,b], allora per ogni valore λ compreso tra m e M (minimo e massimo di f in [a,b]), esiste un ingresso x in [a,b] che ha il valore λ cine yscuta (proprietè dei valori intermedi).

Teorema di monotonia

DEFINIZIONE

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione monotona. Allora per ogni $c \in (a, b)$ esistono finiti i limit destro e sinistro, per $x \to c$; ai due estremi a,b esistono i limiti destro (in a) e sinistro (in b), eventualmente infiniti.

Teorema invertibilità

DEFINIZIONE

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ con I intervallo, una funzione continua in I. Allora f è invertibile se e solo se è strettamente monotona. In tal caso la sua inversa è ancora strettamente monotona e continua.

Capitolo 4

Calcolo Differenziale

4.1 Definizione di Derivata

Partiamo dal concetto di Rapporto Incrementale, che sta alla base delle derivate:

Il rapporto incrementale Di una funzione in un punto è il rapporto tra la variazione di ordinate e la variazione di ascisse definite a partire da un incremento h.
Consideriamo una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$. Il rapporto incrementale della funzione f nel punto generico punto x_0 è:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} := \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

DEFINIZIONE

La **Derivata** di una funzione $f(x)$ in un punto x_0 è definita come il limite del rapporto incrementale della funzione nel punto al tendere dell'incremento a zero:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Se questo limite *esiste*, allora $f(x)$ è derivabile nel punto x_0.

Per gli esercizi ci sono dei trucchi più rapidi per verificare la derivabilità di un punto.

4.1.1 Criterio di Derivabilità

Una funzione è derivabile in un punto x_0 *se e solo se*: Essa è continua nel punto x_0 e i limiti sinistro e destro del rapporto incrementale in quel punto esistono finiti e coincidono.

tips and tricks Essendo il limite del rapporto incrementale nel punto la derivata stessa, per controllare la derivabilità di una funzione in un punto basta:

- Controllare se essa è CONTINUA.
- Controllare se i limiti $x \to x_0$ dx e sx della derivata stessa coincidano

4.2 Derivate note

Non esistono veramente delle derivate note, però alcune funzioni hanno delle derivate che vale la pena ricordare per velocizzare il processo di derivazione:

Seno $f(x) = \sin(x) \to f'(x) = \cos(x)$

Coseno $f(x) = \cos(x) \to f'(x) = -\sin(x)$

Arcotangente $f(x) = \arctan(x) \to f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Logaritmo $f(x) = \ln(x) \to f'(x) = \frac{1}{x}$

Radice Meglio fare il calcolo a mano con le potenze

e^x $f(x) = e^x \to f'(x) = e^x$

e^{-x} $f(x) = e^{-x} \to f'(x) = -e^{-x}$

1/x $f(x) = \frac{1}{x^2} \to f'(x) = -\frac{2}{x^3}$

x$^\alpha$ $f(x) = x^\alpha \to f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$

Derivate composte

Composizione $f(g(x)) \implies f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Prodotto $f(x) \cdot g(x) \implies f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Divisione $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \implies h'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]2}$

Punti di non derivabilità

Una funzione è derivabile in tutto il suo intervallo solamente se è continua, la continuità è quinda una condizione **necessaria** per la derivabilità. Non è detto però che se una funziona è continua sia derivabile, ci sono dei casi in cui la funzione risulta continua, ma non derivabile, in questo caso parliamo di **punti di non derivabilità**. Esistono 3 particoli tipi:

- Punto Angoloso
- Cuspide
- Flesso a Tangente Verticale

Verifica della derivabilità di un punto Per verificare che un punto sia derivabile (dopo aver verificato la sua continuità) è necessario calcolare il limite destro e sinistro della derivata della funzione per il punto in questione. Se i limiti sono finiti e assumono lo stesso valore il punto sarà derivabile, altrimenti il punto sarà non derivabile, in particolare potrò avere degli specifici punti di non derivabilità:

- I limiti destro e sinistro esistono e sono finiti, ma assumono valori diversi - **Punto Angolso**
- I limiti destro e sinistro sono infiniti di segno opposto - **Punto di Cuspide**
- I limiti desto e sinistro sono infiniti dello stesso segno - **Flesso a Tangente Verticale**

Possono esserci anche altri casi di non derivabilità senza nome, ma a noi non interessa, ci basterà dire che si tratta di un punto non derivabile.

4.3 Formula di Taylor

La formula di Taylor consente di *Approssimare, almeno localmente*, tutte le funzioni sufficientemente regolari con dei **Polinomi** rendendone quindi più agevole lo studio. Più derivate utilizzo, (quindi più è alto l'ordine del polinomio) e più sarà precisa questa approssimazione.
Ovviamente perchè questa formula sia fattibile la funzione deve essere derivabile in x_0 almeno k volte.

Il Polinomio di Taylor Una funzione $f(x)$, che passi per un punto x_0 e che abbia in quel punto tutte le derivate necessarie, si può approssimare nel punto x_0 mediante un polinomio così definito:

$$P_k(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + ... + \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$$

L'errore che si commette in questa approssimazione non è maggiore della prima derivata che si trascura

Polinomio di McLaurin

Nel caso in cui il punto x_0 sia l'origine ($x_0 = 0$) si ottiene la formula di McLaurin:

$$T_f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

Nota che quando si chiede il "polinomio di McLaurin del secondo ordine" ci si ferma alla derivata seconda, del terzo ordine alla terza e così via.

4.4 Teorema di Rolle

DEFINIZIONE

Sia $f[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in $[a, b]$. Se la funzione assume lo stesso valore agli estremi dell'intervallo, ossia:

$$f(a) = f(b)$$

Allora esiste almeno un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che:

$$f'(x_0) = 0$$

In poche parole Se una funzione (continua e derivabile in tuttto l'intervallo) assume lo stesso valore ai due estremi di un intervallo, significa che ci sarà *almeno un punto* in cui la derivata si annulla.

Gli esercizi Quando in un esercizio ci viene richiesto che la funzione soddisfi le ipotesi del teorema di Rolle devo verificare 3 condizioni:

1. Che la funzione assuma lo stesso valore agli estremi dell'intervallo, quindi che $f(a) = f(b)$
2. Che $f : [a, b]$ sia continua in tutto l'intervallo $[a, b]$ (quindi estremi compresi)
3. Che $f : [a, b]$ sia derivabile in tutto l'intervallo (a, b) (quindi estremi esclusi)

Se viene richiesto di trovare il punto c dove $f'(c) = 0$, allora devo sostituire c nella funzione derivata e porla $= 0$. Infine ricavo c stessa.

4.5 Teorema di Lagrange

DEFINIZIONE

Sia $f[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b). Allora esiste almeno un punto x_0 interno all'intervallo (a, b) tale che:

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a)$$

In poche parole chiedere se una funzione rispetti le ipotesi di Lagrange è come chiedere di verificare se una funzione è continua e derivabile.

Gli esercizi Quando in un esercizio ci viene richiesto di controllare che la funzione soddisfi le ipotesi del *Teorema di Lagrange*, devo verificare 2 condizioni:

1. Funziona continua in $[a, b]$
2. Funzione derivabile in (a, b)

Capitolo 5

Calcolo Integrale

5.1 Gli integrali

DEFINIZIONE

L'integrale di una funzione su a e b ($\int_a^b f(x)dx$) è *l'area sottesa della funzione nell'intervallo [$x = a, x = b$]*

5.1.1 Classi di Funzioni Integrabili

Le classi di funzioni integrabili sono famiglie di funzioni dotate di particolari proprietà che ne garantisconto l'integrabilità *su un intervallo chiuso e limitato.* Riporto qui le 3 principali condizioni *Sufficienti (ma non necessarie) per l'integrabilità*: Sia $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato.

1. Se la funzione $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ è **Continua**, allora essa è integrabile su $[a, b]$.
2. Se la funzione $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ è **Limitata** e con un **numero finito di discontinuità**, allora essa è integrabile su $[a, b]$
3. Se una funzione f è **Monotona** e definita in $[a, b]$, allora essa è integrabile su $[a, b]$

5.1.2 Il calcolo degli integrali

Per calcolare $\int_a^b f(x)dx$ devo:

1. Trovare una funzione che nell'intervallo $[a, b]$ abbia $f(x)$ come derivata, ovvero una **primitiva** di $f(x)$
2. Calcolare il valore della primitiva negli estremi di integrazione ($F(a)$ e $F(b)$)

3. Sottrarre i due valori $(F(b) - F(a))$

Per cui data una funzione $f(x)$ e la sua primitiva $F(x)$:

$$\int_1^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Esempio: $^5_0\,3x^2\,dx = [x^3]^5_0 = 5^3 - 0^3 = 125$

5.1.3 Proprietà degli integrali

- $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int g(x)dx \pm \int f(x)dx$
- $\int Kf(x)dx = K \int f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

5.2 Le primitive

Si dice primitiva (o antiderivata) di una funzione f una funzione *derivabile* F la cui derivata è uguale alla funzione di partenza.
Quindi:

DEFINIZIONE

Si dice che $F(x)$ è una **primitiva** di $f(x)$ se:

- $F(x)$ è **derivabile**
- La derivata di $F(X)$ è $f(x)$: $F'(x) = f(x) \forall x \in (a, b)$

Dalla definizione si può notare che:

- Ogni funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua* ammette primitive
- Le primitive non sono *mai uniche*

Per indicare una generica primitica si utilizza la notazione $\int f(x)dx$ (integrale indefinito).

5.2.1 Primitive Elementari

Alcune primitive sono immediate da trovare, si chiamano *primitive elementari*

$f(x)$	$F(x)$
$cos(x)$	$sin(x)$
$sin(x)$	$-cos(x)$
e^x	e^x
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} \forall n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$
$\frac{1}{1+x^2}$	$arctg(x)$

5.2.2 Integrali Quasi Immediati

Anche dette *primitive "elementari" generalizzate*, ci sono dei casi in cui le funzioni composte sono facilmente derivabili.

DEFINIZIONE

Sia $F(x)$ una primitiva di $f(x)$ e sia $g(x)$ una funzione derivabile e tale che *sia possibile costruire la funzione composta* $F(g(x))$. In questo caso:

$$[F(g(x))]' = f(g(x)) \cdot g'(x) \implies \int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + c$$

Ovvero se abbiamo una funzione del tipo $f(g(x)) \cdot g'(x)$ il suo integrale sarà semplicemente $F(g(x)) + c$, quindi bisogna trovare *la primitiva solo della funzione esterna.*
É comunque ovvio che si possono effettuare "giochetti" per smontare e rimontare la nostra funzione in modo da ottenere una formad i questo tipo.

Esempio: $\int 3x^2 \cdot \sin(x^3)dx = -\cos(x^3) + c$

Esempio: $\int x(x^2)^3 dx = \frac{1}{2} \int 2x(x^2)^3 dx = \frac{1}{2}\frac{(x^2)^4}{4} + c = ...$

Da quest'ultimo esempio si può notare sia che abbiamo moltiplicato e diviso per due in modo da ottenere la derivata della funzione interna, ma si può anche dedurre che:

$$\int f'(x) \cdot [f(x)]^\alpha dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + c$$

Tips Questo tipo di integrazione la si può sempre "inventare" quando si hanno delle funzioni composte la cui funzione interna ha come derivata una costante, oppure la sua derivata è facilmente riconducibile tramite trucchetti algebrici.

5.3 Integrazione per Parti

Se le funzioni da integrare non sono immediate, si può usare l'integrazione per parti, che dice:

DEFINIZIONE

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni, allora

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

In pratica, l'integrale di una funzione derivabile moltiplicata per una funzione integrabile è integrabile per parti.
Questa tecnica può essere usata per risolvere integrali complessi.

Esempio:

$$\int x\cos(x)dx = x\sin(x) - \int \sin(x)dx = x\sin(x) + \cos(x) + c$$

In questo esempio, $f(x) = x$, quindi $f'(x) = 1$ e $g'(x) = \cos(x)$, quindi $g(x) = \sin(x)$.

Tecnica della moltiplicazione per 1

In alcuni casi ci potremmo trovare degli integrali che appaiono molto semplici, ma in realtà non sono per niente *banali.* Ad esempio alcuni integrali con un solo termine non sono risolvibili da soli, quindi si può utlizzare la tecnica della *moltiplicazione per 1.*
Dato un integrale, lo si può moltiplicare (esplicitamente) per 1 in modo da permetterci di usare l'integrazione per parti, dato che il risultato non è modificato e 1 è facilmente integrabile.

Esempio:

$$\int \ln(x)dx = \int \ln(x) \cdot 1dx$$

Questo ci permette di considerare:
$f(x) = \ln(x) \implies f'(x) = \frac{1}{x}$ e $g'(x) = 1 \implies g(x) = x$.
Di conseguenza, la nostra integrazione prosegue così:

$$= \ln(x) \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x \ln(x) - \int 1 dx = x \ln(x) - x + c$$

5.4 Integrazione per Sostituzione

L'integrazione per sostituzione è uno dei metodi di integrazione più utili, ma anche uno dei più complicati da capire. In questa sezione introdurremo sia la definizione generale di questo metodo, che le sue effettive implementazioni.
Nota che **ai fini dell'esame è utlie soltanto la seconda implementazione** nella versione semplificata.

Quando si usa? In generale mi accorgo di dover usare la sostituzione quando ho una particolare espressione della x ripetuta che "mi da fastidio", oppure quando usare le altre tecniche mi risulta impossibile.

Definizione lo scopo dell'integrazione per sostituzione è quello di *trasformare l'integrale in modo da renderlo più semplice e riconducibile a formule immediate.*

DEFINIZIONE

Siano $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua, e $g : J \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile con derivata continua. Si ha che:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$$

Nel caso in cui la funzione $g(y)$ sia **invertibile**, allora vale la seguente formula di integrazione:

$$\int f(x)dx = \int f(g(y))g'(y)dy$$

Queste due formule sono equivalenti e bisogna scegliere quale usare in base a come si presenta la funzione integranda.

Si può notare che una definizione è l'inverso dell'altra, ed entrambe sono valide (ovviamente). La seconda definizione è quella più utile nella pratica, però nota che si può usare solo quando g è **invertibile!**

Primo Uso

Questa implementazione segue la *prima definizione*, quindi richiede che l'integrale da calcolare si trovi nella forma:

$$\int f(g(x))g'(x)dx$$

1. Poniamo $y = g(x)$ e lo deriviamo, cos' da ottenere il nuovo differenziale $dy = g'(y)dx$
2. Sostituiamo i nuovi valori nell'integrale, cos' da ottenere la forma $\int f(y)dy$
3. Calcoliamo l'integrale nella nuova variabile (sperando che sia più semplice) ottendendo così $F(y) + c$
4. Sostiuiamo a y l'espressione della funzione $g(x)$.

Esempio: Calcola l'integrale di $2xe^{x^2}$.
Si può ben notare che $2x$ è la derivata di x^2, quindi questa funzione si presenta nella forma $g'(x)f(g(x))$. Poniamo quindi $y = g(x) = x^2$ e $dy = g'(x)dx = 2xdx$.
Sostituiamo, $\int 2xe^{x^2} = \int e^y dy = e^y + c$.
Ri sostiuiamo y con x^2 e troviamo $e^{x^2} + c$.
Nota che questo era comunque un integrale quasi immediato

Secondo Uso

Se una generica funzione $\int f(x)dx$ ha un'espressione della x "scomoda" che si ripete, la possiamo sostituire. Troviamo quindi, dentro $f(x)$, una funzione $g(y)$ **INVERTIBILE** (che sarà l'espressione scomoda di x) e effettuo i seguenti passi:

1. Poniamo $x = g(y)$. lo derivo in modo da ottenere $dx = g'(y)dy$
2. Sostiuiamo il tutto nell'integrale in modo da ricavare $f(g(y))g'(y)$
3. Calcoliamo l'integrale ottenuto (nella speranza che sia di più facile risoluzione)
4. Sostiuiamo di nuovo per tornare nella variabile x. Per farlo però è necessario esprimere la variabile y in funzione di x determinando la funzione inversa $y = g^{-1}(x)$

5.4.1 Metodo pratico dell'integrazione per parti

Esiste un processo "semplificato" per utilizzare la seconda definizione.
Avendo $\int f(x)dx$, vado a cercare un'espressione di x che vado a rimuovere e sostituire con y per semplificare l'integrale. Questa "espressione di x" la chiameremo $g(x)$ ed essa deve *necessariamente essre invertibile.*

Quindi, avendo $\int f(x)$ che contiene una $g(x)$ che voglio togliere per semplificare il tutto

1. Decido che $y = g(x)$
2. Inverto $g(x)$ in modo da isolare la x, ottenendo $x = g^{-1}(y)$
3. Derivo entrambi i membri e "moltiplico" per dx e dy in modo da ottenere: $dx = (g^{-1})'(y)dy$
4. All'interno della funzione sostiuisco $g(x)$ con y e dx con $(g^{-1})'(y)dy$
5. A questo punto mi (dovrei) trovare un integrale più facile, che posso risolvere
6. Una volta risolto sostiuisco y con $g(x)$.

5.4.2 Integrazione di Funzioni Razionali

Sono funzioni razionali tutte quelle funzioni del tipo:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ con } P(x), Q(x) \text{ Polinomi}$$

Questo tipo di integrale si risolve in modi diversi in base al grado/tipo di numeratore e denominatore:

Numeratore è la Derivata del Denominatore

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + c$$

Esempio:
$\int \frac{2x}{x^2-5} = \ln|x^2 - 5| + c$
Oppure:
$\int \frac{x^3}{x^4+1} = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{x^4+1} = \frac{1}{4}\ln|x^4 + 1| + c$

Numeratore Costante e Denominatore di I° grado La risoluzione è sostanzialmente uguale al caso precedente, varrebbe ricordarsi però la formula:

$$\int \frac{k}{ax+b}dx = \frac{k}{a}\ln|ax+b|$$

Esempio: $\int \frac{3}{2x-1}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2}{2x-1} = \frac{3}{2}\ln|2x-1| + c$

Numeratore costante e Denominatore al Quadrato Bisogna ricordarsi che: $\frac{1}{[f(x)]^2} = [f(x)]^{-2}$ e che $\int f'(x)[f(x)]^n dx = \frac{[f(x)^{n+1}]}{n+1}$ (primitiva di funzione elementare generalizzata)

Esempio: $\int \frac{5}{(2x-1)^2} = 5\int(2x-1)^{-2} = \frac{5}{2}\int 2(2x-1)^{-2} = \frac{5}{2}\cdot\frac{(2x-1)^{-1}}{-1} + c = -\frac{5}{4x-2} + c$

Funzioni razionali del tipo $\frac{dx-c}{ax^2+bx+c}$ con $\Delta < 0$ In questo caso, bisogna smontare la funzione e ricondursi a integrali del tipo:

- $\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}dx = \arctan[f(x)] + c$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + c$

Esempio: $\int \frac{3x+1}{x^2+1}dx$.
Spacco in due la funzione e la gestisco come due integrali separati $\int \frac{3x}{x^2+1} + \int \frac{1}{x^2+1} = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+1} + \int \frac{1}{x^2+1} = \frac{3}{2}\ln|x^2+1| + \arctan(x) + c$

Esempio: Più complicato:

$$\int \frac{18x+3}{9x^2+6x+2}$$

Bisogna ragionare:
Voglio ottenere una funzione del tipo $\frac{f'(x)}{f(x)}$, quidni calcolo la derivata del denominatore: $D' = 18x+6$ e cerco di trasformare il nuemratore in esso. Per

fare ciò, posso vedere quel "+3" al numeratore come un "+6 − 3"

$$= \int \frac{18x+6-3}{9x^2+6x+2} = \int \frac{18x+6}{9x^2+6x+2} - \int \frac{-3}{9x^2+6x+2} = ln|9x^2+6x+2| - \int \frac{3}{9x^2+6x+2} + c$$

Adesso il secondo integrale lo cerco di trasformare in una funzione del tipo $\frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$. Guardo il denominatore e cerco di trasformarlo in $\frac{f'(x)}{f(x)}$: $9x^2 = (3x)^2$, $6x = 2 \cdot 3x \cdot 1$ (come (2ab)) e $+2 = +1 + 1$. Quindi il denominatore diventa: $(3x+1)^2 + 1$.

$$= \ln|9x^2 + 6x + 2| - \arctan(3x+1) + c$$

5.5 Altre Proprietà importanti

Integrale di una funzione dispari

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e dispari, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.
Perchè essendo la funzione simmetrica rispetto all'origine, $\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(x)$, quindi $\int_{-a}^{-a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{-a} f(x)dx = 0$.

Capitolo 6

Successioni

6.1 Introduzione

DEFINIZIONE

Una *Successione di numeri reali* è una funzione $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
La variabile Indipendente viene di solito indicata con n mentre per la funzione alla notazione $a(n)$ si preferisce a_n

Esempio: $a_n = 2n - 3$ è una successione. $a_0 = -3$, $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 3$, ... sono i suoi valori

Limitazioni Una successione $\{a_n\}$ si dice:

- **Inferiormente limitata** se esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che $a_n \geq m \forall n \in \mathbb{N}$
- **Superiormente limitata** se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $a_n \leq M \forall n \in \mathbb{N}$
- **Limitata** se esistono $m \in \mathbb{R}$ e $M \in \mathbb{R}$ tali che $m \leq a_n \leq M \forall n \in \mathbb{N}$

Esempio: La successione $\{\frac{1}{n+1}\}$ i cui primi termini sono $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$,...
è *limitata*: si ha infatti che $0 < a_n \leq 1 \forall n \in \mathbb{N}$

Monotonia Una successione $\{a_n\}$ si dice:

- **Monotona crescente** se $a_n \leq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$

- **Monotona strettamente crescente** se $a_n < a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$
- **Monotona decrescente** se $a_n \geq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$
- **Monotona strettamente decrescente** se $a_n > a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$

Definizione Si dice che una successione a_n possiede (o acquista) una certa proprietà **definitivamente** se esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che a_n soddisfa quella proprietà per ogni $n \geq N$, quindi da un certo n in poi.

Esempio: Queste serie:
$a_n = 2n - 3$ $[-3, -1, 1, 3, 5, ...]$ è *Definitivamente positiva*
$a_n = \frac{1}{n+1}$ $[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}...]$ è *Definitivamente minore di* $\frac{1}{3}$

6.2 Limiti di Successioni

Calcolare il limite di una successione (che si indica con $\lim_{n\to+\infty} a_n$ o $\lim a_n$) è equivalente a chiedersi che tipo di comportamento ha la successione quando n tende a diventare molto molto grande.

Definizione Sia a_n una successione, e sia $l \in \mathbb{R}$. Si dice che a_n ha per limite l per n tendente all'infinito (o che a_n tende a l) se la successione a_n si trova *definitivamente* in ogni intorno di $l \in \mathbb{R}$ e si scrive $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$

Quando si calcola il limite bisogna però distinguere 4 casistiche:

1. **Convergenza**, se $l \in \mathbb{R}$, si ha $\lim a_n = l$ sse $\forall \epsilon > 0$ esiste un indice $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che si abbia:
$$|a_n - l| \leq \epsilon \text{ per ogni } n \geq n_\epsilon$$
2. **Divergenza a** $+\infty$, si ha $\lim a_n = +\infty$ sse $\forall a \in \mathbb{R}$ esiste un indice $n_a \in \mathbb{N}$ tale che si abbia:
$$a_n \geq a \text{ per ogni } n \geq n_a$$
3. **Divergenza a** $-\infty$, si ha $\lim a_n = -\infty$ sse $\forall a \in \mathbb{R}$ esiste un indice $n_a \in \mathbb{N}$ tale che si abbia:
$$a_n \leq a \text{ per ogni } n \geq n_a$$
4. **Indeterminazione** se non si verifica nessuno dei casi precedenti, quindi il $\lim a_n$ non esiste.

In parole povere La successione converge se la successione al crescere di n va ad avvicinarsi sempre di più a l, diverge a $+\infty$ se esiste un indice che permette alla successione di essere più grande di un qualsiasi numero Reale e infine diverge a $-\infty$ se esiste un indice che permette alla successione di essere più piccolo di una qualsiasi numero Reale.

Teorema di esistenza del limite

DEFINIZIONE

Se una successione è monotona crescente allora il limite esiste e coincide con l'estremo superiore della successione. Se invece è monotona decrescente allora il limite esiste e coincide con l'estremo inferiore della successione.

Teorema di permanenza del segno - 1 forma

DEFINIZIONE

Se $a_n \to a$ e $a > 0$ allora $a_n > 0$ definitivamente. Se $a_n \to a$ e $a < 0$ allora $a_n < 0$ definitivamente.

Teorema di permanenza del segno - 2 forma

DEFINIZIONE

Se $a_n \to a \in \mathbb{R}$, e $a_n \geq 0$ definitivamente, allora risulta $a \geq 0$ più in generale: Se $a_n \to a$, $b_n \to b$ e $a_n \geq b_n$ definitivamente, allora $a \geq b$.

Teorema del confronto

DEFINIZIONE

Se $a_n \leq b_n \leq c_n$ definitivamente e $a_n \to l$, $c_n \to l \in \mathbb{R}$
allora anche $b_n \to l$.

6.3 Principio di Induzione

Introduzione

Il principio di Induzione è un teorema noto, che è spesso utile per discutere la validità di una successione *infinita* di proposizioni in un *numero finito di passi.*

DEFINIZIONE

Sia data una proposizione $P(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ con $n > n_0$.
Se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1. $\exists n_0$ tale che $P(n_0)$ è VERA
2. $\forall n \geq n_0$ vale l'implicazione $P(n-1) \implies P(n)$

Allora $P(n)$ è vera per ogni $n \geq n_0$

Una *propisizione* è un qualunque enunciato il cui valore dipende da n, per esempio "n è pari", "n è primo".

Esempio: Consideriamo l'enunciato: $P(n) : 2^n \geq n^3$, e proviamo che "$P(n)$ vera $\implies P(n+1)$ vera" per ogni $n \geq 7$. Infatti per $n \geq 7$ risulta:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot n^3 = n^3 + n \cdot n^2 \geq n^3 + 7n^2 \geq n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3$$

e quindi per ogni $n \geq 7$, se $2^n \geq n^3$ allora $2^{n+1} \geq (n+1)^3$. D'altra parte, semplici calcoli mostrano che $P(n)$ è falsa per $n = 7, 8, 9$, mentre è vera per $n = 10$. Sintetizzando si può dire che $P(n)$ è *induttiva*, cioè verifica l'implicazione, per ogni $n \geq 7$, mentre è vera per ogni $n \geq 10$, dal momento che (1) è verificata con $n_0 = 10$.

Esempio: *Somma di Gauss*
Proviamo per induzione che $\forall n \in \mathbb{N}$ risulta:

$$P_n : \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

ovvero, la somma dei primi $n \in \mathbb{N}$ numeri equivale a $\frac{n(n+1)}{2}$

Questa formula è banalmente vera per $n = 0$. Mentre per il passo induttivo si può provare come segue:

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Spiegazione se guardi $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ si può notare che equivale a $\frac{n(n+1)}{2}$ se ad n sostituisci $n+1$

Esempio: Un esempio sostanzialmente analogo è il seguente:

$$P_n : \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Questa formula è banalmente vera per $n = 0$. Mentre per il passo induttivo si può provare come segue:

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k \cdot x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \cdot x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}$$

Spiegazione Osserviamo che $\frac{1-x^{n+2}}{1-x}$ equivale a $\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ sostituendo n con $n+1$

Capitolo 7

Serie Numeriche

7.1 Introduzione

Da sempre ci si è posti il problema di sommare infiniti numeri e ovviamente pensare di ottenere un numero finito dalla somma di infiniti numeri potrebbe sembrare qualcosa di assurdo. In realtà non è cosi, infatti spesso è possibile che la somma di infiniti numeri può darci un numero finito.

Richiamiamo le successioni Come si dovrebbe già sapere, chiamiamo successione ogni funzione il cui dominio sia l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali. Le successioni a cui siamo particolarmente interessati sono le *successioni reali*, ovvero le funzioni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

DEFINIZIONE

Si chiama **serie numerica reale** una coppia ordinata di successioni $((x_j)_{j\in\mathbf{N}}, (s_m)_{m\in(N)})$ di numeri reali legate dalla seguente relazione

$$s_m = x_0 + ... + x_m$$

Che equivale alla notazione:

$$s_m = \sum_{n=0}^{m} x_n$$

La successione $(x_j)_{j\in\mathbf{N}}$ è il *termine generale* della serie, la successione $(s_m)_{m\in(N)}$ è la successione delle somme parziali, o *ridotte* della serie data.
Si dice che una serie **converge** se converge la successione $(s_m)_{m\in(N)}$ delle sue ridotte, in tal caso il limite finito s di $(s_m)_{m\in(N)}$ si chiama *somma della serie*

Se la successione delle ridotte ha limite $+\infty$ o $-\infty$, si usa dire che la serie è *divergente* (a $+\infty$, $-\infty$), mentre se la successione delle ridotte non ha limite, né finito né infinito, si dice che la serie è *indeterminata*.
Questi appellativi descrivono il *carattere* della serie: è la terminologia delle successioni applicata alla successione delle somme parziali.

In parole povere...

Una serie numerica è il modo di indicare una somma di infiniti numeri. Come dice la definizione, una serie è formata da una coppia ordinata di successioni, una (s) che indica la successione delle somme parziali, e l'altra (x, spesso indicata con a) che corrisponde al termine generale della serie.
Una serie può convergere, quindi ha un limite finito che si chiama somma della serie. Può anche divergere a piò o meno infinito oppure essere indeterminata

7.2 Serie Convergenti

7.2.1 Serie Geometrica

La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$, con $q \in \mathbb{R}$ è detta *Serie geometrica* Questo è uno dei (pochi) casi in cui si riescono a calcolare esplicitamente, al variare di q, le somme parziali s_n. Infatti possiamo facilmente calcolare il limite della successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e determinare il carattere della serie geometrica. risulta:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n \begin{cases} \text{non esiste} & q \leq -1 \\ = \frac{1}{1-q} & -1 < q < 1 \\ = +\infty & q \geq 1 \end{cases} \tag{7.1}$$

Per cui

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n \text{è} \begin{cases} indeterminata & q \leq -1 \\ convergente & -1 < q < 1 \\ divergente + \infty & q \geq 1 \end{cases} \tag{7.2}$$

Esempio: $\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{1}{2})^n$ Converge (essendo $\frac{1}{2} < 1$) e la somma è $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

In parole povere Se la serie è geometrica, quindi del tipo x^n e il suo termine (x) è comporeso tra -1 e 1, allora per calcolare il carattere della serie basta fare: $\frac{1}{1-x}$
N.B. La formula risolutiva risolve le serie che partono da $n = 0$, se parte da $n = 1$ bisogna togliere dal risultato x^0, se parte da $n = 2$ bisogna togliere x^1 e x^0 e così

via.
Nota anche che se la serie presenta una costante moltiplicativa, questa va poi moltiplicata anche alle somme che vai a rimuovere!
$k \cdot \sum_{n=1} q^n = k(\frac{1}{1-q} - q^0) = \frac{k}{1-q} - k(q^0)$

7.2.2 Serie Telescopica

Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ Una serie tale che esiste una successione infinitesima (b_n) per cui $a_n = b_n - b_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$. Allora risulta:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1}$$

Da cui

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n \to +\infty} s_n = b_- \lim_{n \to +\infty} b_{n+1} = b_1$$

Serie di Mengoli

La serie $sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ è detta *Serie di Mengoli*. La caratteristica di questa serie è che il suo termine generale a_n si può semplificare come:

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

quindi, la sua somma parizale è:

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

questa somma parziale è "speciale" perchè *ogni termine tranne il primo e l'ultimo si annulla.* per cui $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$.
Da qui è possibile calcolarne il $\lim_{n \to +\infty} s_n = 1$, quindi la serie *converge a 1.* Questo è l'esempio più semplice di **serie telescopica**

7.3 Criteri di Convergenza

Se ci troviamo una serie di cui non è banale studiare il carattere, possiamo utilizzare dei metodi per verificarne la convergenza. Innanzitutto diamo la condizione **necessaria** per la convergenza:

DEFINIZIONE

Condizione *necessaria (ma non sufficiente)* per la convergenza è che il *termine* *generale a_n sia infinitesimo.*

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0 \text{ Necessario per la convergenza}$$

Questa condizione, purchè necessaria, non è sufficiente per verificare la convergenza. Ci sono quindi dei criteri che forniscono *condizioni sufficienti* per la convergenza di una serie:

- Criterio del Rapporto
- Criterio della Radice
- Criterio del Confronto
- Criterio del Confronto asintotico

Questi vengono utilizzati per serie a termini generali *non negativi*

- Criterio dell'assoluta convergenza
- Criterio di Leibniz

Questi invece sono usate per serie a termini generali di *segno variabile.*

7.3.1 Alcune proprietà utili

Ecco alcune proprietà delle serie che ci saranno utili a verificare la convergenza.

1 Siano $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ due serie *convergenti* e sia $k \in \mathbb{R}$. Allora:

1. $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} ka_n = k \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

N.B. che una costante moltiplicativa non modifica il carattere di una serie

2 Una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ a termini **definitivamente non negativi** non può essere *indeterminata*, Quindi converge o diverge a $+\infty$

Esempio: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+3^{-n}}{n^2-5}$

- $a_n \geq 0$ Definitivamente, quindi la serie CONVERGE o DIVERGE a $+\infty$
- il termine generale tende a 1 ($\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2+3^{-n}}{n^2-5} = 1$) quindi la serie NON CONVERGE (il termine generale non è *infinitesimo*!)

Per cui questa serie **diverge a** $+\infty$

7.3.2 Criterio del Rapporto

Il primo criterio è quello del rapporto, che può essere usato se il termine generale è definitivamente positivo.

DEFINIZIONE

Sia $a_n > 0$ *definitivamente* e supponiamo che $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, allora:

- se $l < 1$ allora $\sum a_n$ **Converge**
- se $l > 1$ allora $\sum a_n$ **Diverge**
- se $l = 1$ allora tutto è possibile e il criterio è **inconclusivo**

N.B. che siccome $a_n > 0$ allora $l \in [0, +\infty)$ oppure $l = +\infty$

Esempio: Studiare il carattere di $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^{2015}}{3^n}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{2015}}{3^{n+1}}}{\frac{n^{2015}}{3^n}} = \frac{(n+1)^{2015}}{3 \cdot \cancel{3^n}} \cdot \frac{\cancel{3^n}}{n^{2015}} = \frac{(n+1)^{2015}}{3 \cdot n^{2015}} = \frac{1}{3} \frac{(n+1)^{2015}}{n^{2015}}$$

Siccome $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{2015}}{n^{2015}} = 1$ allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3}$$

$\frac{1}{3} < 1$ quindi la serie *Converge*

7.3.3 Criterio della Radice

Questo criterio, molto simile a quello del Rapporto, dice che:

DEFINIZIONE

Sia $a_n \geq 0$ *definitivamente* e supponiamo che $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, allora:

- se $l < 1$ allora $\sum a_n$ **Converge**

- se $l > 1$ allora $\sum a_n$ **Diverge**
- se $l = 1$ allora tutto è possibile e il criterio è **inconclusivo**

N.B. Usando questo criterio capiterà spesso di trovare $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}$ o $\lim_{n\to+\infty} (\sqrt[n]{n^\alpha})$
Tali limiti valgono semre 1

Esempio: Studiare il carattere di $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\log n)^{\frac{n}{2}}}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\log n)^{\frac{n}{2}}}} = (\frac{1}{(\log n)^{\frac{n}{2}}})^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{(\log n)^{\frac{n}{2n}}} = \frac{1}{\sqrt{(\log n)}}$$

siccome $\lim_{n\to+\infty} \log n = +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{(\log n)}} = 0$$

$0 < 1$, per cui la serie *Converge*

7.3.4 Criterio del Confronto

DEFINIZIONE

Supponiamo che $0 \leq a_n \leq b_n$ definitivamente. Allora valgono le seguenti implicazioni:

1. $\sum b_n$ converge $\implies \sum a_n$ converge
2. $\sum a_n$ diverge a $+\infty \implies \sum b_n$ diverge a $+\infty$

N.B. L'inverso di queste implicazioni generalmente non valgono

In pratica quindi Se riusciamo a trovare una serie che sia definitivamente maggiore (o minore) della nostra serie e di cui conosciamo il carattere possiamo conoscere anche il carattere della nostra serie.
Il trucco quindi è scoprire tale serie, per farlo vengono spesso utilizzate le *Serie Armoniche Generalizzate*

Serie Armoniche Generalizzate

Riporto le due formule delle serie Armoniche Generalizzate:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{CONVERGE} & \text{Se } \alpha > 1 \\ \text{DIVERGE} & \text{Se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta} \begin{cases} \text{CONVERGE} & \text{Se } \alpha > 1 \vee \alpha = 1 \wedge \beta > 1 \\ \text{DIVERGE} & \text{Se } \alpha < 1 \vee \alpha = 1 \wedge \beta \leq 1 \end{cases}$$

Esempio: Studiare il carattere di $\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{\cos n}{n})^2$:
$(\cos n)^2$ Varia tra 0 e 1, quindi è ≤ 1.
$0 \leq (\frac{\cos n}{n})^2 \leq \frac{1}{n^2}$ per ogni $n \geq 1$.
$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, quindi anche nostra serie *Converge*

7.3.5 Criterio del Confronto Asintotico

DEFINIZIONE

Date 2 successioni a_n e b_n a termini *definitivamente positivi*, se

$$a_n \sim b_n \text{ (ovvero se } \lim_{n \to +\inf} \frac{a_n}{b_n} = 1)$$

Allora le corrispontenti serie Σa_n e Σb_n hanno lo stesso carattere, quindi sono o *entrambe convergenti o entrambe divergenti*

Esempio: Determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\inf} \frac{n+\cos n}{n^3 - 3n}$.
I termini della serie sono *definitivamente positivi*, quindi possiamo usare il confronto asintotico. Al numeratore, essendo $\cos n$ un valore limitato diventa irrilevante in confronto ad n. Al denominatore, essendo $3n$ molto più piccolo di n^3 diventa irrilevante. Quindi:

$$\frac{n + \cos n}{n^3 - 3n} \sim \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$$

$\Sigma \frac{1}{n}$ converge (serie armonica generalizzata con $\alpha > 1$), quindi anche $\frac{n+\cos n}{n^3 - 3n}$ **converge**

Ma non è sempre così semplice In quest'ultimo esempio per trovare una successione asintotica alla nostra è stato sufficiente focalizzarci sui *termini preponderanti* al numeratore e al denominatore. Spesso però le cose sono più complicate, conviene quindi affidarci ai *limiti notevoli* come nel prossimo esempio:

Esempio: Determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\inf} \frac{e^{\frac{1}{n^2}}-1}{4n}$.
Anche qui la serie è a termini positivi (il numeratore è sempre positivo, visto che $e^{\frac{1}{n^2}}$ sarà sempre > 1). In questo caso però è più difficile trovare una serie asintotica, visto che il numeratore tende a 0 quando n tende a inf non abbiamo un termine prenponderante sull'altro. Il numeratore però ricorda il *limite notevole legato all'esponenziale* che diceva:

$$\lim_{\epsilon(x)\to 0} \frac{e^{\epsilon(x)}-1}{\epsilon(x)} = 1$$

Il che, data la definizione di confronto asintotico, implica che $e^{\epsilon(x)} - 1 \sim \epsilon(x)$ per $\epsilon(x) \to 0$. Nel nostro caso, $\frac{1}{n^2}$ tende a 0, quindi $e^{\frac{1}{n^2}} - 1 \sim \frac{1}{n^2}$.

Di conseguenza $\frac{e^{\frac{1}{n^2}}-1}{4n} \sim \frac{\frac{1}{n^2}}{4n} = \frac{1}{4n^3}$.
Come prima, $\frac{1}{4n^3}$ è una serie armonica generalizzata con termine $\alpha > 1$, quindi **Converge**

N.B. Esiste un enunciato più generale di questo criterio

7.4 Criterio dell'Assoluta Convergenza

Questo criterio è il primo che vediamo che vale anche per serie a *termine di segno variabile*

DEFINIZIONE

Una serie $\sum a_n$ si dice *assolutamente convergente* se converge la serie $\sum |a_n|$.
Se la serie $\sum a_n$ converge assolutamente, allora *Connverge*
N.B. Il viceversa, in generale, non è vero

Esempio: Studiare il carattere della serie $\sum_{n=n=1}^{+1\infty} \frac{\sin(n!)}{n^4}$
in questa serie abbiamo il numeratore che oscilla tra -1 e 1, quindi questa serie non è a termini definitivamente positivi. Usando quindi il criterio della

convergenza assoluta, e poi il criterio del confronto abbiamo che:

$$0 \leq \frac{|\sin(n!)|}{n^4} \leq \frac{1}{n^4} \implies \text{Converge Assolutamente}$$

Visto che la serie converge assolutamente, allora *converge*

Esempio: Studiare il carattere della serie $\sum_{n=n=1}^{+1\infty}(-1)^n \frac{n^2+3}{n^4+2n}$
Anche questa serie ha il segno variabile (per il $(-1)^n$) quindi usiamo il criterio dell'assoluta convergenza

$$|(-1)^n \frac{n^2+3}{n^4+2n}| = \frac{n^2+3}{n^4+2n} \sim \frac{1}{n^2}$$

sappiamo che $\frac{1}{n^2}$ è una serie armonica generalizzata che converge, quindi la serie converge assolutamente e di conseguenza converge

Criterio di Leibniz

Il criterio di Leibniz è il secondo criterio utilizzabile per le serie a *Segno variabile*

DEFINIZIONE

Sia $\{a_n\}$ una successione:

- $a_n \geq 0$ Definitivamente
- $a_n \to 0$ per $n \to \infty$
- $a_{n+1} \leq a_n$ Definitivamente (monotona decrescente)

Allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ è convergente

In parole povere, se a_n è positiva (≥ 0), infinitesima e monotona decrescente, allora la serie $\sum(-1)^n a_n$ Converge.

Esempio: Studiare il carattere della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$
$a_n = \frac{1}{n!}$, ed è *positiva*, *infinitesima* e *decrescente*
Di conseguenza, *converge per Leibniz*