

# Esami di Ricerca Operativa e Pianificazione delle Risorse

Fabio Ferrario

@fefabo

2023

# Indice

<b>1</b>	<b>Domande di Teoria dal Mega</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Domande di Teoria - Bibbia</b>	<b>4</b>
2.0.1	Programmazione Lineare e Metodo del Simplex . . .	4
2.0.2	Dualità . . . . .	6
2.0.3	Analisi di sensitività . . . . .	6
2.0.4	Gradiente/Newton 2D . . . . .	7
2.0.5	KKT . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Domande Aperte</b>	<b>10</b>

# Capitolo 1

## Domande di Teoria dal Mega

Si faccia riferimento a un problema di Massimizzazione ed, ove richiesto, ad un problema artificiale per la fase 1 del metodo del simplesso.

**1?** Se  $B$  é la matrice di base associata ad una base ottima, il valore della funzione obiettivo associato alla corrispondente SBA non negativo

**2** Il valore Nullo di una variabile indica che essa sia fuori base

**Risposta:** Falso, una variabile può valere 0 anche nel caso sia in base (soluzione degenere)

# Capitolo 2

## Domande di Teoria - Bibbia

### 2.0.1 Programmazione Lineare e Metodo del Simplexso

VERO

Un vertice ammissibile é una soluzione ammissibile che non giace lungo un segmento che connette altre due soluzioni ammissibili.

Dalla definizione

VERO

Dato un vertice (soluzione) ammissibile, se non esiste uno spigolo, incidente in esso, cui compete un tasso positivo di miglioramento, allora la soluzione corrente é ottimale.

Il TEST DI OTTIMALITÀ consiste nel verificare se esiste uno spigolo con tasso positivo di miglioramento. Se tale condizione non è soddisfatta allora la soluzione corrente è ottimale.

FALSO

In ogni problema di PL con  $n$  variabili di decisione e  $m$  vincoli, ogni vertice ammissibile giace all'intersezione di  $n+m$  frontiere di altrettanti vincoli.

In ogni problema di programmazione lineare con  $n$  variabili di decisione,

ogni vertice ammissibile giace all'intersezione di  $n$  frontiere di altrettanti vincoli,

VERO

**Una soluzione che giace lungo un segmento che collega due altre soluzioni ammissibili non é un vertice ammissibile.**

Dalla definizione

VERO

**I valori delle variabili di base si ricavano risolvendo il sistema di equazioni lineari determinato dai vincoli funzionali in forma aumentata.**

Avendo il valore 0 delle variabili non in base si può risolvere il sistema di equazioni lineari per trovare il valore delle variabili in base.

FALSO

**Una variabile nulla é certamente una variabile di base.**

Una variabile nulla può essere sia in base, che fuori base. Una variabile fuori base è sicuramente nulla, ma se una variabile è nulla può anche essere in base

VERO

**il numero delle variabili di base é sempre determinato dal numero di vincoli funzionali.**

Proprietà numero (2) delle soluzioni di base.

VERO

**Se le variabili di base soddisfano i vincoli di non negatività, la soluzione di base é una soluzione ammissibile di base.**

Proprietà numero (5) delle soluzioni di base.

### 2.0.2 Dualità

Si consideri un problema primale in forma di massimo. Se il duale é inammissibile, allora :

FALSO

**Il primale é sempre illimitato come corollario del teorema della dualità Debole**

Il primale potrebbe anche non avere soluzioni ammissibili.

FALSO

**Il primale ha almeno una soluzione ottima**

Se il duale é inammissibile, allora il primale o non ha soluzioni, oppure ha funzione obiettivo illimitata, quindi il primale non ha ottimo.

Da Capire

**Valgono le condizioni degli scarti complementari.**

### 2.0.3 Analisi di sensitività

VERO

**L'analisi di sensitività ha l'obiettivo di identificare i Parametri Sensibili.**

Uno degli obiettivi principali dell'analisi di sensitività è l'identificazione dei PARAMETRI SENSIBILI, vale a dire quei parametri il cui valore non può essere modificato senza portare ad una nuova soluzione ottimale.

VERO

**Un parametro é sensibile se la sua variazione porta alla variazione della soluzione ottimale.**

I Parametri sensibili sono parametri il cui valore non può essere modificato senza portare a una nuova soluzione ottimale

VERO

Dato un termine noto destro, il metodo del simplesso identifica il corrispondente prezzo ombra tramite il coefficiente della corrispondente variabile slack nella riga zero del tableau finale.

Da Capire

È sempre vero che un termine noto non è un parametro sensibile se il corrispondente prezzo ombra è nullo

Da Capire

Un termine noto è un parametro sensibile se il corrispondente prezzo ombra è positivo.

## 2.0.4 Gradiente/Newton 2D

VERO

**Il metodo di Newton (se) converge, converge molto più velocemente del metodo del gradiente, ma ogni iterazione richiede uno sforzo computazionale maggiore**

Newton potrebbe non convergere, ma se converge converge più rapidamente perchè utilizza le informazioni di Gradiente ed Hessiana invece che solo del gradiente. Richiede uno sforzo computazionale maggiore perchè oltre che il gradiente ad ogni iterazione deve calcolare l'inversa della Hessiana

VERO

**Nel caso di funzioni quadratiche, il metodo di Newton converge al punto stazionario al più in una iterazione, partendo da qualsiasi punto.**

FALSO

**Il metodo di Newton converge sempre ad un punto di minimo locale.**

Se la funzione è Concava Newton converge ad un punto di massimo.

FALSO

**Il Metodo di Newton applicato ad una funzione continua quadratica può non convergere se il punto iniziale è lontano dal punto di ottimo**

Il Metodo di Newton, se la funzione è quadratica, converge sempre in una iterazione.

### 2.0.5 KKT

VERO

**Le condizioni KKT non sono un algoritmo di ottimizzazione.**

Le KKT non sono un algoritmo bensì delle condizioni necessarie non sufficienti per i punti di ottimo.

VERO

**I punti dove il gradiente della Lagrangiana é nullo possono essere possibili candidati ad essere punti di ottimo del problema PNL corrispondente, ma per stabilire se sono punti di ottimo devo verificare anche altre condizioni**

VERO

**Supponendo di avere un problema di PNL vincola di massimizzazione con vincoli di  $\leq$ , se la funzione Lagrangiana é espressa sommando alla funzione obiettivo  $f$  la somma pesata dei vincoli, allora i pesi (moltiplicatori di lagrange) nei punti di ottimo devono essere  $\geq 0$ .**



FALSO

Supponendo di avere un problema di PNL vincola di massimizzazione con vincoli di  $\leq$ , se la funzione Lagrangiana é espressa sommando alla funzione obiettivo  $f$  la somma pesata dei vincoli, allora i pesi (moltiplicatori di lagrange) nei punti di ottimo devono essere  $\leq 0$ .

VERO

In un problema di *max* con vincoli di  $\geq$ , la corrispondente funzione lagrangiana si ottiene sommando alla funzione obiettivo la combinazione lineare dei vincoli con pesi tutti *positivi*

In un problema di *Max* in cui i vincoli sono tutti di  $\leq$ , la lagrangiana ha i pesi  $\mu$  tutti Negativi, di conseguenza, se avessimo vincoli di  $\geq$  dobbiamo invertire i segni dei pesi  $\mu$ , rendendoli tutti positivi.

VERO

In un problema di PNL Vincolata, nel punto di ottimo il gradiente della funzione  $f$  può essere riscritto come combinazione lineare dei gradienti dei vincoli.

# Capitolo 3

## Domande Aperte

### 3 PROPRIETÀ DEI VERTICI AMMISSIBILI

Si enuncino le Proprietà dei Vertici Ammissibili di un problema di PL. Si scelga poi una delle proprietà e si mostri un esempio grafico o numerico.

**Risposta:** I vertici ammissibili di un problema di PL hanno le seguenti proprietà:

1. Se esiste una sola soluzione ottima, questa sarà un vertice ammissibile. Se esistono più soluzioni con regione ammissibile limitata, allora almeno due di queste sono vertici ammissibili tra loro adiacenti.
2. Il numero di vertici ammissibili è finito e dipende da  $n$  vincoli di non negatività e  $m$  vincoli funzionali. il numero di combinazioni di  $m + n$  vincoli presi a gruppi di  $n$  è pari  $\frac{(m+n)!}{m!n!}$ . Questa quantità (finita) rappresenta un limite superiore al numero di vertici ammissibili.
3. Se un vertice ammissibile non ha vertici adiacenti migliori, allora non ci sono vertici migliori. Quindi se il problema ha una soluzione ottima, questo vertice è la soluzione ottima.

### 4 PROPRIETÀ DI UNA SOLUZIONE DI BASE

Si elenchino le proprietà di una Soluzione di Base

**Risposta:**

1. Una variabile può essere una variabile di base o una variabile non

di base.

2. Il numero delle variabili di base eguaglia il numero dei vincoli funzionali.
3. Le variabili non di base vengono poste a zero.
4. I valori delle variabili di base sono ottenuti come risoluzione simultanea del sistema di equazioni lineari.
5. Se le variabili di base soddisfano i vincoli di non negatività, la soluzione di base è una soluzione ammissibile di base.

## 5

## DUALITÀ DEBOLE E FORTE

Si dia una definizione di Dualità Debole e Forte

### **Risposta:**

- Dualità Debole: Il valore della funzione obiettivo per una qualsiasi soluzione ammissibile del problema primale (max) non può eccedere il valore della funzione obiettivo per una qualsiasi soluzione ammissibile del problema duale. Il valore del problema duale fornisce quindi un limite superiore del problema primale. Detto breve: se il primale ha soluzione illimitata allora il duale non ha soluzione.
- Dualità forte: Se esiste una soluzione ottima (finita), il valore ottimo della funzione obiettivo del problema primale è uguale al valore ottimo della funzione obiettivo del problema duale.

## DUALITÀ E LE PROPRIETÀ

Descrivere la proprietà di dualità debole, di dualità forte, la proprietà delle soluzioni complementari e la proprietà delle soluzioni ottimali complementare. Infine si presenti il teorema di dualità

### **Risposta:**

**Dualità Debole** Dualità Debole: Il valore della funzione obiettivo per una qualsiasi soluzione ammissibile del problema primale (max) non può eccedere il valore della funzione obiettivo per una qualsiasi soluzione

ammissibile del problema duale.

**Dualità Forte** Se esiste una soluzione ottima (finita), il valore ottimo della funzione obiettivo del problema primale è uguale al valore ottimo della funzione obiettivo del problema duale.

**Proprietà delle soluzioni Complementari** Ad ogni iterazione del metodo del simplesso, l'algoritmo calcola contemporaneamente una soluzione ammissibile per il primale e una soluzione per il duale (dato dai valori delle variabili di slack nella riga 0) i cui valori della funzione obiettivo si eguagliano. La soluzione del duale è ammissibile (e ottima) solo all'ultima iterazione del simplesso.

**Proprietà delle soluzioni Ottime Complementari** All'ultima iterazione il metodo del simplesso calcola contemporaneamente una soluzione ottima per il primale, e ottima per il duale, in cui vale la dualità forte quindi i valori delle funzioni obiettivo si eguagliano.

**Teorema della dualità** Se il primale è ammissibile e ha funzione obiettivo limitata, quindi ha ottimo, lo stesso vale per il duale. Se il primale ha soluzioni ammissibili, ma funzione obiettivo illimitata, il duale non ha soluzioni ammissibili. Se il primale non ha soluzioni ammissibili, il duale o non ha soluzioni ammissibili o ha funzione obiettivo illimitata.

## 9

### PROPRIETÀ DI COMPLEMENTARIETÀ

Si definisca la Proprietà di Complementarietà in PL. Si diano due esempi reali in cui è utilizzabile e cosa permette di concludere.

**Risposta:** La complementarietà in un problema di Programmazione Lineare si evince dalla relazione tra problema primale e duale. In particolare, la complementarietà afferma che ogni soluzione primale ha una soluzione complementare duale tale che  $W = Z$ . Se un problema lineare in forma primale ha soluzione ottimale  $x^*$  allora anche il problema