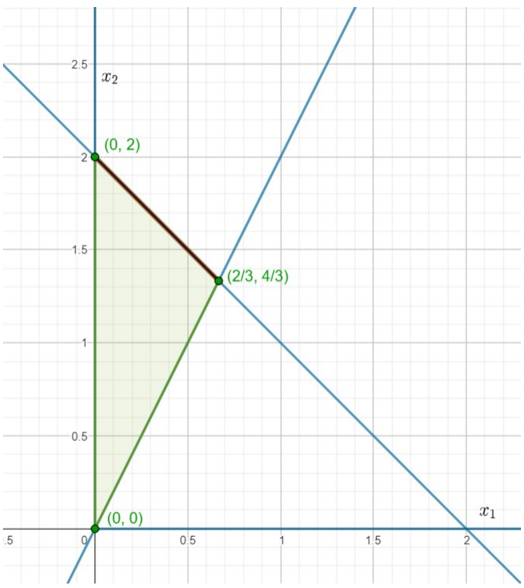
Capitolo 1

Assignments

1.1 Assignment 1

1.1.1 Soluzione grafica

$$\begin{aligned}
&\text{Max } x_1 + x_2\\
&x_1 + x_2 \leq 2\\
&2x_1 - x_2 \leq 0\\
&x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$



1.1.2 Soluzione con Metodo del Simplesso

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } x_1 + x_2 \\
&x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\
&2x_1 - x_2 \leq 0 \\
&x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \leq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Z &= x_1 + x_2 \\
&\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\
&\ 2x_1 - x_2 \leq 0 \\
&\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \leq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Z - {}& x_1 - x_2 = 0 \\
& x_1 + x_2 + \mathbf{x_3'} = 2 \\
& 2x_1 - x_2 \leq 0 \\
& x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \mathbf{x_3'} \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Z - {}& x_1 - x_2 = 0 \\
& x_1 + x_2 + x_3' = 2 \\
& 2x_1 - x_2 + \mathbf{x_4} = 0 \\
& x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3' \geq 0,\ x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Se l'origine del problema $(0,\ 0)$ è ammissibile, seleziono x_1 e x_2 (cioè le variabili della funzione obiettivo) come **variabili di base**.
Provo il problema originario usando l'**origine del problema**, ovvero azzero x_1 e x_2.

Iterazione 0:

Var di Base	Eq	Z	x_1	x_2	x_3'	x_4	t. n.
Z	R_0	1	-1	-1	0	0	0
x_3'	R_1	0	1	1	1	0	2
x_4	R_2	0	2	-1	0	1	0

I vincoli sono rispettati. Ottengo dunque la **soluzione di base ammissibile** $(0, 0, 2, 0)$.
La soluzione di base che ho ottenuto è **ottimale**? Lo è se nella riga R_0 corrispondente alla funzione obiettivo ho solo coefficienti ***non*** **negativi**.
Ho -1 e -1, quindi **non** è ottimale. Allora procedo.

Ora scelgo la *variabile non di base* ***entrante***. Di solito è quella con coefficiente con *valore assoluto* ***maggiore***. Ma qui ho -1 e -1 quindi scelgo in maniera arbitraria.
Scelgo x_1, la cui colonna diventa **colonna pivot**. La **riga pivot** viene identificata tramite la ***regola del rapporto minimo***. Questa mi dà un numero che corrisponde al rapporto fra il **termine noto** e il coefficiente della **variabile entrante** che ho già individuato.
Nel nostro caso x_3' mi dà $\frac{2}{1}$ e x_4 mi dà $(\frac{0}{2})$, perciò x_4 vince la regola del rapporto minimo diventando la *variabile* ***uscente***. Ricapitolando, x_1 è la *variabile* ***entrante*** e x_4 è la *variabile* ***uscente***, mentre il ***numero pivot*** è 2.
Ricorda la regola:

Prima divido la riga pivot R_p per il numero pivot.
Poi tutte le altre righe con la formula:

$$R_i = R_i - |c| \cdot R_p \qquad \text{se } c > 0$$

$$R_i = R_i + |c| \cdot R_p \qquad \text{se } c < 0$$

Procedo con la prossima iterazione.

Iterazione 1:

Var di Base	Eq	Z	x_1	x_2	x_3'	x_4	t. n.
Z	R_0	1	0	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
x_3'	R_1	0	0	$\frac{3}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	2
x_1	R_2	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0

La soluzione di base ammissibile che ottengo è $(0, 0, 2, 0)$, la stessa di prima.
Procedo dunque con il prossimo passo.
Questa volta la *variabile* ***entrante*** è x_2 perché è l'unica con coefficiente **negativo** nella riga della funzione obiettivo.
Invece la *variabile* ***uscente*** è x_3' perché è l'unica con coefficiente **positivo** nella colonna della *variabile entrante*. Il nuovo **numero pivot** è $\frac{3}{2}$.

Iterazione 2:

Var di Base	Eq	Z	x_1	x_2	x_3'	x_4	t. n.
Z	R_0	1	0	0	1	0	2
x_3'	R_1	0	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
x_1	R_2	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

La soluzione di base ammissibile che ottengo è $(\frac{2}{3},\ \frac{4}{3},\ 0,\ 0)$ e Z ha valore $Z\ =\ 2$. Procedo controllando se è una soluzione ottimale.
Ho tutti coefficienti non negativi nella riga della funzione obiettivo, quindi **la mia soluzione è ottimale**. Esercizio finito.
Però nota bene: all'inizio ho fatto una scelta arbitraria, scegliendo x_1 come variabile non di base entrante. Cosa succederebbe se scegliessi invece x_2?

Ricomincio l'esercizio scegliendo x_2 come variabile non di base entrante.

Iterazione 0:

Var di Base	Eq	Z	x_1	x_2	x_3'	x_4	t. n.
Z	R_0	1	-1	-1	0	0	0
x_3'	R_1	0	1	1	1	0	2
x_4	R_2	0	2	-1	0	1	0

Variabile entrante: x_2.
Variabile uscente: x_3', ovvero l'unica con coefficiente positivo nella colonna della variabile entrante.
Numero pivot: 1.

Iterazione 0:

Var di Base	Eq	Z	x_1	x_2	x_3'	x_4	t. n.
Z	R_0	1	0	0	1	0	2
x_3'	R_1	0	1	1	1	0	2
x_4	R_2	0	3	0	1	1	2

La soluzione di base ammissibile che ottengo è $(0,\ 2,\ 0,\ 2)$ e Z ha valore $Z\ =\ 2$. Procedo controllando se è una soluzione ottimale.
Ho solo coefficienti non negativi nella riga della funzione obiettivo, perciò **la mia soluzione è ottimale**.
Però con x_1 avevo ottenuto una soluzione ottimale diversa, ovvero $(\frac{2}{3},\ \frac{4}{3},\ 0,\ 0)$.
Va bene? Sì se questi due vertici sono *adiacenti*.
Ma **quando due vertici sono adiacenti? Quando condividono $n\ -\ 1$ *frontiere di vincoli***.

Contando di non aver fatto errori nei tableau, posso assumere che lo siano. In tal caso *la mia soluzione ottimale sarà il* ***segmento*** *che unisce i due vertici* $(0,\ 2,\ 0,\ 2)$ *e* $(\frac{2}{3},\ \frac{4}{3},\ 0,\ 0)$ *e che avrà come valore della funzione obiettivo* $Z\ =\ 2$.

Però potrei avere una domanda per Fabio: ho letto nel tuo file che due vertici sono adiacenti se condividono tutte le variabili non di base tranne una. Io qua ho $(0,\ 2,\ 0,\ 2)$ ***che ha come variabili non in base*** x_3' ***e*** x_4 ***mentre*** $(\frac{2}{3},\ \frac{4}{3},\ 0,\ 0)$ ***ha come variabili in base*** x_2 ***e*** x_4. ***La mia domanda è: condividono*** x_2, ***basta per dire che sono adiacenti o devono condividere il valore***?