

CheatSheet di Ricerca Operativa e Pianificazione delle Risorse

Fabio Ferrario

@fefabo

2022/2023

Indice

1	Gli esercizi d'esame	3
2	Programmazione Lineare	4
2.1	Metodo del Simplexso	4
2.1.1	Due Fasi	6
2.2	Dualità	7
2.2.1	Passare da Primale a Duale	7
2.3	Gli Scarti Complementari	8
2.4	Esercizi su Analisi di Sensitività	8
3	BranchAndBound	9
4	Ottimizzazione Non Lineare	10
4.1	Metodo di Bisezione	10
4.2	Algoritmo di Newton 1D	10
4.3	Risoluzione analitica per PNL Multivariati	10
4.3.1	Matrice definita positiva/negativa	11
4.4	Algoritmo del Gradiente	11
4.5	Algoritmo di Newton (Multivariato)	12
5	Ottimizzazione Non Lineare Vincolata	13
5.1	Funzione Lagrangiana	13
5.2	Condizioni KKT	13
5.2.1	Differenziare tra Max e Min	14
5.2.2	Risolvere il Sistema	14
5.2.3	Trovare i punti di Minimo e Massimo	15

Capitolo 1

Gli esercizi d'esame

Gli esercizi possibile all'esame sono:

- Metodo del Simplexso e Due Fasi
- Scarti Complementari
- Analisi di Sensitività
- Branch and Bound per PLI o PLB
- Risoluzione Analitica di PNL Multivariato
- Metodo del Gradiente
- Algoritmo di Newton
- Condizioni KKT

Oltre a varie possibili domande di teoria.

Capitolo 2

Programmazione Lineare

2.1 Metodo del Simplexso

Forma Aumentata

Per portare il problema in forma aumentata:

Vincoli		
Minoreuguale	\leq	$=$ + Slack
Maggioreuguale	\geq	$=$ - Surplus
Uguale	$=$	Invariato

Variabili non positive	
$x_i \leq 0$	$x_i = -x'_i$ con $x'_i \geq 0$
Ogni apparizione di x_i viene sostituita con $-x'_i$	

Funzione Obiettivo	
$Z = \Sigma x_i$	$\rightarrow Z - \Sigma x_i = 0$

Test di Ottimalità

Una volta portato il problema in forma tabellare, eseguo il test di ottimalità:

Tipo di Problema	Massimo	Minimo
Soluzione Ottima sse	Coefficienti riga (0) ≥ 0	Coefficienti riga (0) ≤ 0

Nuova Soluzione di Base Una volta verificato che la soluzione non é ottima, bisogna calcolare una nuova soluzione di base:

Definisco:

Dennisco.

Tipo di Problema	Massimo	Minimo
Variabile Entrante (Colonna Pivot)	Coefficiente riga (0) più Piccolo (Più Negativo)	Coefficiente riga (0) più Grande (Più Positivo)
Variabile Uscente (Riga Pivot)	Test del Rapporto Minimo (T.noto/Pivot)	
Numero Pivot	Intersezione Riga/Colonna Pivot	
Per la nuova Riga Pivot		
Variabile di Base	→ Variabile Entrante.	
Coefficienti e Termine Noto	→ Divisi per Numero Pivot.	

per ogni altra Riga	
Definisco	P_i i -esimo coefficiente della nuova riga pivot
	X_p coefficiente della colonna pivot nella riga in esame.
il coefficiente i -esimo x_i della riga in esame X diventa:	
$X_p > 0$	$x_i := x_i - X_p \cdot P_i$
$X_p < 0$	$x_i := x_i + X_p \cdot P_i$
$X_p = 0$	La riga in esame resta Invariata

2.1.1 Due Fasi

Funzione Obiettivo: Somma di tutte le variabili artificiali introdotte.

$$(\min Z = \Sigma y_i \implies \max Z = -\Sigma y_i \implies \max Z + \Sigma y_i = 0)$$

Vincoli: Per ogni vincolo che viene violato dalla soluzione Origine, sommo una variabile artificiale (unica) con coefficiente 1.

Tableau iniziale: Le variabili artificiali devono essere in base, quindi devo azzerarle in $R(0)$ sottraendogli il vincolo a cui sono associate.

Una volta fatte entrare in base tutte le variabili artificiali, posso iterare normalmente.

Finito di iterare, avr  tutte le variabili artificiali $=1$ in (0) , rimuovo quindi le colonne artificiali e ripristino la funzione obiettivo.

Adesso faccio entrare in base (nello stesso modo di prima) le variabili che devono essere in base. poi itero normalmente.

2.2 Dualità

2.2.1 Passare da Primale a Duale

	Primale	Duale	Ritorno
Funzione Obiettivo	$\max c^T x$	$\min b^T \lambda$	$\max c^T x$
Vincoli \Rightarrow Non Negatività	$x_i^T a \leq c$	$\lambda_i \geq 0$	$x_i^T a \leq c$
	$x_i^T a \geq c$	$\lambda_i \leq 0$	$x_i^T a \geq c$
	$x_i^T a = c$	λ_i Free	$x_i^T a = c$
Non Negatività \Rightarrow Vincoli	$x_j \geq 0$	$\lambda_j^T a \geq c$	$x_j \geq 0$
	$x_j \leq 0$	$\lambda_j^T a \leq c$	$x_j \leq 0$
	x_j Free	$\lambda_j^T a = c$	x_j Free

Duale con le matrici Un trucco per generare rapidamente il duale è utilizzare le matrici:

Avendo il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{l}
 \text{Primale} \left[\begin{array}{l}
 \max \quad c_1 x_1 + c_2 x_2 \\
 a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leq b_1 \\
 a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \leq b_2 \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

si riconoscono opportunamente gli elementi che compongono il duale e se lo si genera:

$$\begin{array}{l}
 \text{Primale} \left[\begin{array}{l}
 \max \quad \begin{array}{l} \text{Primo vincolo} \\ c_1 x_1 + \lambda_1 a_{11} x_1 + \lambda_2 a_{21} x_1 \end{array} + \begin{array}{l} \text{Secondo vincolo} \\ c_2 x_2 + \lambda_1 a_{12} x_2 + \lambda_2 a_{22} x_2 \end{array} \leq \begin{array}{l} \text{Funzione Obb.} \\ b_1 \lambda_1 + b_2 \lambda_2 \end{array} \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{array} \right.
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{Duale} \left[\begin{array}{l}
 \min \quad b_1 \lambda_1 + b_2 \lambda_2 \\
 a_{11} \lambda_1 + a_{21} \lambda_2 \geq c_1 \\
 a_{12} \lambda_1 + a_{22} \lambda_2 \geq c_2 \\
 \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

2.3 Gli Scarti Complementari

Se abbiamo una soluzione ammissibile per il primale possiamo verificarne l'ottimalità tramite le condizioni degli scarti complementari: Quindi, dato x^* :

$x_i^* \neq 0$	i -esimo (corrispondente) vincolo del duale attivo.
i -esimo vincolo del primale NON attivo	$\lambda_i = 0$

Pongo quindi a sistema le equazioni trovate per trovare la soluzione corrispondente del Duale.

Se i valori delle funzioni obiettivo sono uguali, e la soluzione trovata è ammissibile per il duale, allora le due soluzioni sono entrambe ottime.

2.4 Esercizi su Analisi di Sensitività

Analisi su Termini Noti Analisi di sensitività di un termine noto (b_i) relativo alla i -esima equazione di vincolo, dato il tableau dell'ultima iterazione:

- Identifico la variabile di Slack della i -esima equazione di vincolo.
- \forall Riga del tableau (tranne R_0) in cui il coefficiente della Slack in esame è $\neq 0$ faccio:

$$\text{T.Noto} + (\text{Coefficiente della Slack} \cdot \Delta) \geq 0$$

- Metto a sistema le disequazioni trovate e risolvo per Delta.

Analisi su Coefficienti Funzione Obiettivo Analisi di sensitività sui coefficienti c_i :

- Se c_i è un base nell'equazione R_i : metto a sistema $R_0 + \Delta R_i \geq 0$ e trovo Δ .
- Se non è in base sottraggo Δ dal suo coefficiente in R_0 , che deve però rimanere ≥ 0

Capitolo 3

BranchAndBound

I problemi di Branch and Bound si risolvono in questo modo:

- Apro il nodo k e risolvo il rilassamento lineare:
 - Aggiorno Z^* se la soluzione è intera (binaria)
 - Fisso il mio Upper(Lower) Bound come l'arrotondamento (se necessario) della soluzione.
- Prendo la variabile frazionaria (o il primo indice se binario) e ne "vincolo" le soluzioni
- Elaboro tutti i nodi fino a che non si chiudono.

Capitolo 4

Ottimizzazione Non Lineare

4.1 Metodo di Bisezione

- Calcolo $f'(x_k)$
- Se f è **concava**:
 - $f'(x_k) < 0 \implies \bar{x} = x_k$
 - $f'(x_k) > 0 \implies \underline{x} = x_k$
- Cerco il nuovo punto: $x_{k+1} = \frac{x + \bar{x}}{2}$
- Se $f'(x_k) = 0$ sono al punto di ottimo

Criterio di arresto: $\underline{x} - \bar{x} \leq 2\epsilon$

4.2 Algoritmo di Newton 1D

Nuovo punto: $x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$

4.3 Risoluzione analitica per PNL Multivariati

Per risolvere analiticamente un problema di PNL multivariato:

- Controllo tutti i punti in cui $\nabla f = 0$
- Per ognuno di questi punti, se:

- Hf nel punto è definita positiva allora è minimo.
- Hf nel punto è definita negativa allora è massimo.
- Hf non è né l'uno né l'altro allora è punto di sella.

4.3.1 Matrice definita positiva/negativa

Per verificare se una matrice è positiva o negativa, trovo gli autovalori sottraendo λ dalla diagonale di H valutata nel punto, e poi ponendo $\det(H_\lambda) = 0$. per una matrice 2x2 il calcolo è: $(a_{11} - \lambda) \cdot (a_{22} - \lambda) - (a_{12} \cdot a_{21})$ Se tutti gli autovalori sono ≥ 0 allora H nel punto è (semi) definita positiva, mentre è (semi) definita negativa se gli autovalori sono ≤ 0 .

4.4 Algoritmo del Gradiente

Data una funzione a più variabili $f(X)$ e un punto x^0 , ogni passo del metodo del gradiente si effettua in questo modo:

1. Calcolo $d^k = \pm \nabla f(x^k)$ (+ max e - min)
2. Calcolo $x^{k+1} = x^k \pm \alpha^k \cdot d^k$
3. Calcolo α^k come $\text{Max } f(x^k \pm \alpha^k \cdot d^k)$.
ovvero valuto f nel nuovo punto e massimizzo (minimizzo per i problemi di minimo) la funzione risultante $g(\alpha)$, generalmente in modo analitico ($g'(\alpha) = 0$)
4. Sostituisco α trovato in x^{k+1} .
5. Valuto i criteri di arresto

Per verificare che il punto trovato sia un punto di ottimo, semplicemente controllo che $\nabla f(x^*) = 0$.

Nuovo punto	x^{k+1}	$x^k \pm \alpha^k \cdot d^k$
Direzione di Crescita	d^k	$\pm \nabla f(x^k)$ (+ max e - min)
Step Size	α^k	max/min $f(x^k \pm \alpha^k \cdot d^k)$

4.5 Algoritmo di Newton (Multivariato)

Data una funzione a piú variabili $f(X)$ e un punto x^0 , una iterazione del metodo di Newton si effettua in questo modo:

1. Calcolo $\nabla f(x^k)$ e $H(x^k)$.
2. Calcolo V Vettore Spostamento: $H_f(x^k)V = -\nabla f(x^k)$
è un sistema di equazioni, risolvo per v_1, \dots, v_n
3. trovo $x^{k+1} = x^k + V$, in cui V é il vettore spostamento.

Vettore Spostamento	V	$H_f(x^k)V = -\nabla f(x^k)$
Nuovo punto	x^{k+1}	$x^k + V$

Capitolo 5

Ottimizzazione Non Lineare Vincolata

5.1 Funzione Lagrangiana

In un problema di ottimizzazione vincolata definito come:

$$\begin{aligned} & \text{opt } f(x_1, \dots, x_n), \\ & g_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ Vincoli di Uguaglianza,} \\ & h_l(x_1, \dots, x_n) \leq 0 \text{ Vincoli di Disuguaglianza,} \end{aligned}$$

Generiamo la Lagrangiana così definita:

$$L(V) = f(X) \pm \sum_{i=0}^m \lambda_i \cdot g_i(X) \pm \sum_{j=0}^l \mu_j \cdot h_j(X)$$

in cui \pm diventa $+$ per i problemi di MIN e $-$ per i problemi di MAX, Abbiamo che λ sono i moltiplicatori lagrangiani associati ai vincoli di Uguaglianza, e μ quelli associati ai vincoli di Disuguaglianza.

con $V = \{x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_l\}$, ovvero tutte le variabili e $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, ovvero tutte le variabili originali.

5.2 Condizioni KKT

Tabella Bisogna quindi generare un sistema che avrà $n + m + l$ incognite utilizzando le KKT, riportate qui in modo semplificato:

Stazionarietà Problemi di MIN (-)		
$\nabla f = - \sum \lambda_i \cdot \nabla g_i - \sum \mu_j \cdot \nabla h_j$		
Stazionarietà Problemi di MAX (+)		
$\nabla f = + \sum \lambda_i \cdot \nabla g_i + \sum \mu_j \cdot \nabla h_j$		
Ammissibilità Vincoli Uguaglianza	\forall	$g_i = 0$
Ammissibilità Vincoli Disuguaglianza	\forall	$h_j \leq 0$
Condizione di Complementarietà	\forall	$\mu_j \cdot h_j = 0$
Non Negatività di μ	\forall	$\mu_j \geq 0$

Dove con \forall si intende chiaramente tutti quelli presenti.

5.2.1 Differenziare tra Max e Min

Quando si usano le KKT bisogna differenziare tra problemi di Max e Problemi di Min. Ogni problema ha le seguenti possibili combinazioni:

Problema di Massimo	$\mu_i \geq 0$	$\nabla f = + \sum \lambda_i \cdot \nabla g_i + \sum \mu_j \cdot \nabla h_j$
	$\mu_i \leq 0$	$\nabla f = - \sum \lambda_i \cdot \nabla g_i - \sum \mu_j \cdot \nabla h_j$
Problema di Minimo	$\mu_i \geq 0$	
	$\mu_i \leq 0$	$\nabla f = + \sum \lambda_i \cdot \nabla g_i + \sum \mu_j \cdot \nabla h_j$

é utile sapere che se scegliessimo di avere la funzione obiettivo **Sempre come somma di elementi negativi**, sia per i problemi di massimo che di minimo, allora potremmo, in base ai valori di μ , sapere in un solo calcolo se il punto é candidato a massimo o minimo.

5.2.2 Risolvere il Sistema

Per risolvere il sistema, o lo si risolve con il metodo classico, oppure tramite questo metodo: Con la condizione di **Complementarietà** sappiamo che:

$$\mu_j \cdot h_j = 0 \implies \mu_j = 0 \vee h_j = 0$$

Quindi, con l variabili μ_j abbiamo 2^l combinazioni di sistemi, in cui $\mu_j = 0 \vee \mu_j \neq 0$. Cosí possiamo risolvere le 2^l combinazioni per trovare tutti i punti candidati.

5.2.3 Trovare i punti di Minimo e Massimo

I punti trovati dalle condizioni KKT sono solo candidati a essere punti di max/min, perché le KKT sono condizioni Necessarie ma non Sufficienti.

Le condizioni KKT diventano Sufficienti se:

- Per i Punti di Massimo:
 - f é concava.
 - I vincoli $h_i(X)$ sono tutti Convessi.
- Per i Punti di Minimo:
 - f é convessa.
 - I vincoli $h_i(X)$ sono tutti Convessi.