# CheatSheet di Analisi Matematica

Fabio Ferrario

@fefabo

2022/2023

# Indice

# Capitolo 1

# Funzioni

## Insiemistica

Dati un elemento $m$ e un insieme $A$:
- **Massimo/Minimo**: $m$ si dice massimo/minimo di $A$ se esso *Appartiene ad* $A$ ed é il piú grande/piccolo elemento di $A$.
- **Maggiorante/Minorante**: $m$ si dice maggiorante/minorante di $A$ se é *Maggiore/Minore o uguale* di ogni elemento di $A$.

## Studio di Funzione

Per lo studio di una funzione bisogna trovare:

**Dominio** della funzione, poni:

| | |
|---|---|
| Denominatore | $\neq 0$ |
| Logaritmo | Argomento $> 0$ |
| Radice$^n$ | Argomento $\geq 0$ (*sse n pari*) |
| $[f(x)]^{g(x)}$ | $f(x) > 0$ |

**Limiti ai punti di frontiera del dominio** Trovato il dominio, trova *i limiti ai punti di frontiera*, quindi porre i limiti ad ogni punto in cui il dominio si interrompe (sia da destra che da sinistra) e eventualmente a $\pm\infty$.

**Asintoti** Trovati tutti i limiti, se trovi:
- $\lim_{x\to\alpha^\pm} f(x) = \pm\infty \implies$ Asintoto *Verticale*.
- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = l \implies$ Asintoto *Orizzontale* (di equazione $y = l$)

Bisogna anche controllare la presenza di **Asintoti Obliqui**:
- $m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \implies$ se $m$ *esiste e non è nullo* trovo $q$:
- $q = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] \implies$ se $q$ esiste allora $y = mx + q$ è *asintoto obliquo*

**Monotonia** La monotonia di una funzione si calcola *ponendo* $f'(x) > 0$. Nei punti in cui la derivata è positiva, la funzione è **Crescente**, nei punti in cui è negativa la funzione è **Decrescente**

**Punti di estremo** I punti in cui la derivata cambia direzione sono punti di estremo (max/min). Se il punto di estremo è il più grande/piccolo di tutta la funzione, allora sono Assoluti.

**Convessità/Concavità**
- $-$ conc$\mathcal{A}$va $\cap \implies f''(x)$ positiva
- $+$ con$\mathcal{V}$essa $\cup \implies f''(x)$ negativa

**Retta Tangente** al grafico in $x_0$:
trova $y = mx + q$ ponendo:
- $m = f'(x_0)$
- $q = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$

**Punti di Discontinuità**
1. Prima specie (Salto): i limiti dx e sx di $x_0$ esistono finiti ma sono diversi.
2. Seconda spece (Essenziale): Almeno uno dei limiti è inifinito o non esiste.
3. Terza Spece (Eliminabile): il limite di $x_0$ esiste finito ma è diverso da $f(x_0)$ o non esiste.

## Funzioni Pari/Dispari

(serve solo per le crocette)
- $-$ Dispari $\implies f(-x) = -f(x)$
- $+$ Pari $\implies f(-x) = f(x)$

**Paritá e disparitá di funzioni note** $\sin(x)$ è *Pari*, *Decrescente* in $[0, \pi]$ e *Crescente* in $[\pi, 2\pi]$.
$\cos(x)$ è *Pari*, *Crescente* in $[0, \pi]$ e *Decrescente* in $[\pi, 2\pi]$.

# Capitolo 2

# Serie

**DEFINIZIONE**

Condizione **Necessaria non Sufficiente** per la convergenza:
Il Limite della successione del termine generale $a_n$ deve essere *Inifinitesimo.*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge } \implies \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

## 2.1 Serie Note

### Serie Telescopica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n+k})$$

oppure

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_{n+k} - a_n)$$

**Come si risolve una serie telescopica** É necessario applicare la definzione di serie, cioè la successione delle somme parziali. Devo quindi manualmente sostituire n=1, n=2, n=3, ... fino a quando non riconosco il pattern della serie. *Ricordati di non semplificare Numeratore e Denominatore!*, mantenendo i numeri sostituiti sarà più facile scrivere il carattere della serie.

### Serie Geometrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n \begin{cases} \text{Diverge} & q \geq 1 \\ \text{Converge} & -1 < q < 1 \\ \text{Irregolare} & q \leq -1 \end{cases}$$

Se una serie geometrica converge ($-1 < q < 1$), la somma si calcola:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

### Serie Armonica Generalizzata

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{Diverge} & \alpha \leq 1 \\ \text{Converge} & \alpha > 1 \end{cases}$$

### Serie Armonica Logaritmica

$$\sum \frac{1}{n^\alpha \log^\beta(n)} \begin{cases} \text{Converge} & \alpha > 1 \wedge \forall \beta \\ \text{Converge} & \alpha = 1 \wedge \beta > 1 \\ \text{Diverge} & \alpha = 1 \wedge \beta \leq 1 \\ \text{Diverge} & \alpha < 1 \wedge \forall \beta \end{cases}$$

# 2.2 Criteri di Convergenza

## Serie Positive def$^{\underline{\text{nte}}}$

Se $a_n$ è def$^{\underline{\text{nte}}}$ $\geq 0$ uso:

### Criterio del Rapporto

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \begin{cases} \text{Converge} & l < 1 \\ \text{Diverge} & l > 1 \\ \text{Criterio inconclusivo} & l = 1 \end{cases}$$

### Criterio della Radice

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \begin{cases} \text{Converge} & l < 1 \\ \text{Diverge} & l > 1 \\ \text{Criterio inconclusivo} & l = 1 \end{cases}$$

**Criterio del Confronto** $a_n \leq b_n$ definitivamente $\implies$
- se $b_n$ Converge $\implies$ $a_n$ Converge
- se $a_n$ Diverge $+\infty$ $\implies$ $b_n$ Diverge $+\infty$

### Serie con Segno Alterno

Se $a_n$ è a segno **Alterno**:

**Criterio della Assoluta Convergenza** .
$\sum a_n$ **converge assolutamente** se converge $\sum |a_n|$.
Se una serie converge assolutamente, allora converge.

**Criterio di Leibniz** DA SCRIVERE

## 2.3 Limiti

**Equivalenza asintotica tra funzioni** Se il limite ($\to x_0$) di $\frac{f(x)}{g(x)} = 1$ allora $f$ e $g$ sono asintoticamente equivalenti

**$o$-piccolo** Se il limite ($\to x_0$) del rapporto di $f(x)$ su $g(x)$ è uguale a 0 allora $f(x)$ è $o$-piccolo di $g(x)$. Nota, che per $x_0$ si intende un valore arbitrario che può essere anche 0 o $\pm\infty$

$$lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \implies f(x) = og(x) \text{ per } x \to x_0$$

**Limiti Notevoli**

| | |
|---|---|
| Logaritmo naturale | $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ |
| Logaritmo con base $a$ | $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln(a)}$ |
| $f$ Esponenziale | $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ |
| $f$ Esponenziale base $a$ | $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln(a)$ |
| Costante e Frazione | $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ax-1}{x} = \ln(a)$ |
| Seno | $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ |
| Coseno | $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$ |

| | |
|---|---|
| $\ln(x)$ | $\lim\limits_{x\to 0} ln(x) = -\infty$ |

**Equivalenze Asintotiche**

| **con $x \to 0$** | | |
|---|---|---|
| $\sin x$ | $\sim$ | $x$ |
| $1 - \cos x$ | $\sim$ | $\frac{1}{2}x^2$ |
| $\tan x$ | $\sim$ | $x$ |
| $\ln(1+x)$ | $\sim$ | $x$ |
| $(1+x)^\alpha - 1$ | $\sim$ | $\alpha x$ |

**Ordine degli infiniti $\infty$** In generale:

$$\log_a x \ll x^b \ll x^c \ll d^x \ll g^x \ll x^x$$

***N.B.***
- $\sqrt{x} \gg \ln(x)$
- $x \ln(x) \gg \sqrt{x}$

**Forme di indecisione** .

| $[\frac{0}{0}]$ $[\frac{\infty}{\infty}]$ $[1^\infty]$ $[\infty - \infty]$ $[\infty \cdot 0]$ $[0^0]$ $[\infty^0]$ | |
|---|---|
| Tutte le forme possono essere risolte usando **Limiti Notevoli** e **Trucchi algebrici** per ricondursi ad essi. In particolare però, questi si risolvono usando anche: | |
| $[\frac{0}{0}]$ | Conf. infinitesmi — Scomp/Racc/Semp — De l'Hopital |
| $[\frac{\infty}{\infty}]$ | Conf. infinti — Scomp/Racc/Semp — De l'Hopital |
| $[1^\infty]$ | Identità Logaritmo-Esponenziale |
| $[\infty - \infty]$ | Riconduzione a $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ |
| $[\infty \cdot 0]$ | Razionalizzazione inversa — Prodotti notevoli al contrario |
| $[0^0]$ / $[\infty^0]$ | Conf. infiniti/infinitesimi—Identità Logaritmo-Esponenziale |

### Teoremi Limiti utili per esercizi

**Teorema del Confronto** Se ho $x \to +\infty$ e ho sin o cos potrei dover usare il teorema del confronto dato che sin e cos (NB solo per $x \to +\infty$) sono delle costanti che oscillano tra $-1$ e 1.

# Calcolo Differenziale

**Derivate "note"**

| Nome | Funzione | Derivata |
|---|---|---|
| Seno | $\sin x$ | $\cos x$ |
| Coseno | $\cos x$ | $-\sin x$ |
| Arcotangente | arctan | $\frac{1}{1+x^2}$ |
| Logaritmo | $\ln(x)$ | $\frac{1}{x}$ |
| Radice | | |
| Esponenziale | $e^x$ | $e^x$ |
| Esponenziale (negativo) | $e^{-x}$ | $-e^{-x}$ |
| 1 su $x^2$ | $\frac{1}{x^2}$ | $-\frac{2}{x^3}$ |
| $x$ alla $\alpha$ | $x^\alpha$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ |

**Derivate Composte** .

| | | |
|---|---|---|
| Composizione | $f(g(x))$ | $f'(g(x)) \cdot g'(x)$ |
| Prodotto | $f(x) \cdot g(x)$ | $f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$ |
| Divisione | $\frac{f(x)}{g(x)}$ | $\frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}$ |

**Derivata dell'inversa di una funzione** Dati:
$y_o$ e $f(x)$, avendo $g(x) = f^{-1}(x)$ allora: Per calcolare $g'(y_0)$
1. trovo $x_0$ ponendo $y_0 = f(x)$
2. trovo $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

**Formula di Taylor** di grado $k$ e centrato in $x_0$:

$$P_k(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + ... + \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$$

**Formula di Mclaurin** di grado $k$:

$$P_k(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + ... + \frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k$$

Mclaurin = Taylor con $x_0 = 0$

**Rapporto incrementale**

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

# Calcolo Integrale

**Condizione di integrabilità** Per l'integrabilità di una funzione su un intervallo la condizione che essa sia *continua è sufficiente ma non necessaria*

**Primitive elementari** Funzioni il cui integrale è immediatamente calcolabile.

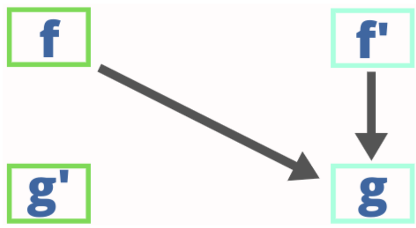
| Funzione | Primitiva |
|---|---|
| $k$ | $kx$ |
| $x^a$,$a \neq -1$ | $\frac{x^{a+1}}{a+1}$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\log\lvert x\rvert$ |
| $\sin x$ | $-\cos x$ |
| $\cos x$ | $\sin x$ |
| $a^x$ | $\frac{a^x}{\log a}$ |
| $e^{-x}$ | $-e^{-x}$ |
| $\frac{1}{x^2+1}$ | $\arctan(c)$ |

**Proprietà degli integrali**
- Somma di integrali: $\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
- Costante moltiplicativa $\int k \cdot f(x) = k \int f(x)$

## I metodi di risoluzione

### Integrazione per Parti

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$




### Integrazione per Sostituzione

***Metodo Generale e Semplificato*** per itnegrali generali $f(x)$:
Trovo una funzione $g(x)$ *Derivabile e Invertibile* da sostituire ad $x$.
1. decido che $y = g(x)$
2. Inverto $g(x)$ per isolare la x, ottenendo $x = g^{-1}(y)$
3. Derivo entrambi i membri e aggiungo $dx$ e $dy$: $\to dx = (g^{-1})'(y)dy$
4. all'interno di $f(x)$ sosdtituisco $g(x) \to y$ e $dx \to (g^{-1})'(y)dy$
5. Risolvo l'integrale
6. Sostiuisco $y \to g(x)$

**Metodo dalla definizione** : Abbiamo un integrale nella forma

$$\int f(g(x))g'(x)dx$$

1. $y = g(x) \to dy = g'(y)dx$
2. Sostituiamo per ottenere $\int f(y)dy$
3. Calcolo l'integrale nella nuova variabile
4. Sostituisco $y \to g(x)$

**Formula Media Integrale** Considerata f limitata e integrabile su un intervallo $[a, b]$

$$M(f, [a, b]) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

# Dimostrazioni per induzione

Le due casistiche principali sono:
- Dimostrazioni con la sommatoria $\sum$
- Dimostrazioni con disequazioni

**Ricorda** Devi sempre dimostrare che la formula è vera per $n + 1$, quindi devi ricondurti a ciò che hai a destra dell'equazione.

## Dimostrazioni con la sommatoria

In questo caso devo ricordarmi di ricondurmi al caso base estrando dalla sommatoria (n+1) per ricondurmi alla sommatoria $\sum^n$ e poi sostituendo l'ipotesi induttiva (la sommatoria che supponiamo vera). Così facendo posso ottenere ciò che ho a sinistra della formula $\sum^{n+1}$.

## Dimostrazioni con le disequazioni

In questo caso devo ricordarmi che oltre a dover sostituire l'ipotesi induttiva nella disequazione possono aggiungere numeri che mi possono servire a patto che abbia la certezza che questi numeri non vadano in contraddizione con il segno della disequazione, quindi se ho $a > b$, aggiungendo numeri non deve succedere che b diventi maggiore di a.

**Ricorda** Nell'ipotesi avrai una condizione (per esempio per $n > 1$), ricordati che puoi e spesso devi usarla per poter aggiungere numeri utili alla dimostrazione.