

# CheatSheet di Ricerca Operativa e Pianificazione delle Risorse

Fabio Ferrario

@fefabo

2022/2023

# Indice

<b>1</b>	<b>Gli esercizi d'esame</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Programmazione Lineare</b>	<b>4</b>
2.1	Il metodo del Simplexso . . . . .	4
2.1.1	Due Fasi . . . . .	6
2.2	Dualità . . . . .	7
2.2.1	Passare da Primale a Duale . . . . .	7
2.3	Gli Scarti Complementari . . . . .	8
2.4	Esercizi su Analisi di Sensitività . . . . .	8
2.4.1	Analisi sui termini noti . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Ottimizzazione Non Lineare</b>	<b>10</b>
3.1	Risoluzione analitica per PNL Multivariati . . . . .	10
3.1.1	Matrice definita positiva/negativa . . . . .	10
3.2	Algoritmo del Gradiente . . . . .	10
3.3	Algoritmo di Newton (Multivariato) . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Ottimizzazione Non Lineare Vincolata</b>	<b>13</b>
4.1	Funzione Lagrangiana . . . . .	13
4.2	Condizioni KKT . . . . .	13
4.2.1	Differenziare tra Max e Min . . . . .	14
4.2.2	Risolvere il Sistema . . . . .	14
4.2.3	Trovare i punti di Minimo e Massimo . . . . .	15

# Capitolo 1

## Gli esercizi d'esame

Gli esercizi possibile all'esame sono:

- Metodo del Simplexso e Due Fasi
- Scarti Complementari
- Analisi di Sensitività
- Branch and Bound per PLI o PLB
- Risoluzione Analitica di PNL Multivariato
- Metodo del Gradiente
- Algoritmo di Newton
- Condizioni KKT

Oltre a varie possibili domande di teoria.

# Capitolo 2

## Programmazione Lineare

### 2.1 Il metodo del Simpleso

La forma Tabellare

V. BASE	Eq	Z	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$	T. Noto
Z	R <sub>0</sub>	1	$c_1$	$c_2$	...	$c_n$	0
$x_1$	R <sub>1</sub>	0	$a_{11}$	$a_{12}$	...	$a_{1n}$	$b_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_m$	R <sub>n</sub>	0	$a_{m1}$	$a_{m2}$	...	$a_{mn}$	$b_m$

**Forma Aumentata** Per portare il problema in forma aumentata:

Vincoli	Minoreuguale	$\leq$	=	+ Slack
	Maggioreuguale	$\geq$	=	- Surplus
	Uguale	=	Invariato	

Variabili non positive	$x_i \leq 0$	$x_i = -x'_i$ con $x'_i \geq 0$
	Ogni apparizione di $x_i$ viene sostituita con $-x'_i$	

Funzione Obiettivo	$Z = \Sigma x_i \rightarrow Z - \Sigma x_i = 0$
--------------------	---

**Test di Ottimalità** Una volta portato il problema in forma tabellare, eseguo il test di ottimalità:

Tipo di Problema	Massimo	Minimo
<b>Soluzione Ottima sse</b>	Coefficienti riga (0) $\geq 0$	Coefficienti riga (0) $\leq 0$

**Nuova Soluzione di Base** Una volta verificato che la soluzione non é ottima, bisogna calcolare una nuova soluzione di base:

Definisco:

Tipo di Problema	Massimo	Minimo
<b>Variabile Entrante</b> (Colonna Pivot)	Coefficiente riga (0) più Piccolo (Più Negativo)	Coefficiente riga (0) più Grande (Più Positivo)
<b>Variabile Uscente</b> (Riga Pivot)	Test del Rapporto Minimo	
<b>Numero Pivot</b>	Intersezione Riga/Colonna Pivot	

Per la nuova <b>Riga Pivot</b>	
Variabile di Base	→ Variabile Entrante.
Coefficienti e Termine Noto	→ Divisi per Numero Pivot.

per ogni <b>altra Riga</b>	
Definisco	$P_i$ $i$ -esimo coefficiente della nuova riga pivot
	$X_p$ coefficiente della colonna pivot nella riga in esame.
il coefficiente $i$ -esimo $x_i$ della riga in esame $X$ diventa:	
$X_p > 0$	$x_i := x_i -  X_p  \cdot P_i$
$X_p < 0$	$x_i := x_i +  X_p  \cdot P_i$
$X_p = 0$	La riga in esame resta Invariata

### 2.1.1 Due Fasi

Funzione Obiettivo: Somma di tutte le variabili artificiali introdotte. ( $\min z = \sum y_i \implies \max z = -\sum y_i \implies \max z + \sum y_i = 0$ ) Vincoli: Per ogni vincolo che viene violato dalla soluzione Origine, sommo una variabile artificiale (unica) con coefficiente 1.

Tableau iniziale: Le variabili artificiali devono essere in base, quindi devo azzerarle in  $R(0)$  sottraendogli il vincolo a cui sono associate.

Una volta fatte entrare in base tutte le variabili artificiali, posso iterare normalmente.

Finito di iterare, avr  tutte le variabili artificiali  $=1$  in  $(0)$ , rimuovo quindi le colonne artificiali e ripristino la funzione obiettivo.

Adesso faccio entrare in base (nello stesso modo di prima) le variabili che devono essere in base. poi itero normalmente.

## 2.2 Dualità

### 2.2.1 Passare da Primale a Duale

	Primale	Duale	Ritorno
<b>Funzione Obiettivo</b>	$\max c^T x$	$\min b^T \lambda$	$\max c^T x$
Vincoli $\implies$ Non Negatività	$x_i^T a \leq c$	$\lambda_i \geq 0$	$x_i^T a \leq c$
	$x_i^T a \geq c$	$\lambda_i \leq 0$	$x_i^T a \geq c$
	$x_i^T a = c$	$\lambda_i$ Free	$x_i^T a = c$
Non Negatività $\implies$ Vincoli	$x_j \geq 0$	$\lambda_j^T a \geq c$	$x_j \geq 0$
	$x_j \leq 0$	$\lambda_j^T a \leq c$	$x_j \leq 0$
	$x_j$ Free	$\lambda_j^T a = c$	$x_j$ Free

**Metodo con le matrici** Un trucco per generare rapidamente il duale é utilizzare le matrici:

Avendo il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{l}
 \text{Primale} \left[ \begin{array}{l}
 \max \quad c_1 x_1 + c_2 x_2 \\
 a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leq b_1 \\
 a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \leq b_2 \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

si riconoscono opportunamente gli elementi che compongono il duale:

$$\begin{array}{l}
 \text{Primale} \left[ \begin{array}{l}
 \text{max} \quad \boxed{\begin{array}{l} \text{Primo vincolo} \\ C_1 X_1 \\ \wedge \\ \lambda_1 a_{11} X_1 + \lambda_2 a_{21} X_1 \end{array}} + \boxed{\begin{array}{l} \text{Secondo vincolo} \\ C_2 X_2 \\ \wedge \\ \lambda_1 a_{12} X_2 + \lambda_2 a_{22} X_2 \end{array}} \leq \boxed{\begin{array}{l} \text{Funzione Obb.} \\ b_1 \lambda_1 \\ b_2 \lambda_2 \end{array}} \\
 X_1 \geq 0, X_2 \geq 0
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Che come problema duale generano:

$$\begin{array}{l}
 \text{Duale} \left[ \begin{array}{l}
 \text{min} \quad b_1 \lambda_1 + b_2 \lambda_2 \\
 a_{11} \lambda_1 + a_{21} \lambda_1 \geq C_1 \\
 a_{12} \lambda_2 + a_{22} \lambda_2 \geq C_2 \\
 \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

## 2.3 Gli Scarti Complementari

Se abbiamo una soluzione ammissibile per il primale possiamo verificarne l'ottimalità tramite le condizioni degli scarti complementari: Quindi, data  $x^*$ :

$x_i^* \neq 0$	i-esimo (corrispondente) vincolo del duale attivo.
i-esimo vincolo del primale NON attivo	$\lambda_i = 0$

Pongo quindi a sistema le equazioni trovate per trovare la soluzione corrispondente del Duale. Se i valori delle funzioni obiettivo sono uguali, allora le due soluzioni sono entrambe ottime.

## 2.4 Esercizi su Analisi di Sensitività

**Analisi sui termini noti** Se si chiede di fare l'analisi di sensitività di un termine noto ( $b_i$ ) della  $i$ -esima equazione di vincolo, dato il tableau dell'ultima iterazione:



- Trovo la variabile di Slack della  $i$ -esima equazione di vincolo.
- Per ogni Riga del tableau in cui il coefficiente della variabile di slack è  $\neq 0$  faccio:

$$\text{T.Noto} + (\text{Coefficiente della variabile di slack} \cdot \Delta) \geq 0$$

- Metto a sistema le disequazioni trovate e risolvo per Delta.

### 2.4.1 Analisi sui termini noti

Trovo la slack associata all'equazione e  $\forall R$  con slack  $\neq 0$  faccio:  $\text{T.noto} + (\text{slack} \cdot \Delta) \geq 0$ . Isolo Delta e metto a sistema per trovare il range

# Capitolo 3

## Ottimizzazione Non Lineare

### 3.1 Risoluzione analitica per PNL Multivariati

Per risolvere analiticamente un problema di PNL multivariato:

- Controllo tutti i punti in cui  $\nabla f = 0$
- Per ognuno di questi punti, se:
  - $Hf$  nel punto è definita positiva allora è minimo.
  - $Hf$  nel punto è definita negativa allora è massimo.
  - $Hf$  non è né l'uno né l'altro allora è punto di sella.

#### 3.1.1 Matrice definita positiva/negativa

Per verificare se una matrice è positiva o negativa, trovo gli autovalori sottraendo  $\lambda$  dalla diagonale di  $H$  valutata nel punto, e poi ponendo  $\det(H_\lambda) = 0$ . per una matrice 2x2 il calcolo è:  $(a_{11} - \lambda) \cdot (a_{22} - \lambda) - (a_{12} \cdot a_{21})$  Se tutti gli autovalori sono  $\geq 0$  allora  $H$  nel punto è (semi) definita positiva, mentre è (semi) definita negativa se gli autovalori sono  $\leq 0$ .

### 3.2 Algoritmo del Gradiente

Data una funzione a più variabili  $f(X)$  e un punto  $x^0$ , ogni passo del metodo del gradiente si effettua in questo modo:

1. Calcolo  $d^k = \pm \nabla f(x^k)$  (+ max e - min)

2. Calcolo  $x^{k+1} = x^k \pm \alpha^k \cdot d^k$
  
3. Calcolo  $\alpha^k$  come  $\text{Max } f(x^k \pm \alpha^k \cdot d^k)$ .  
 ovvero valuto  $f$  nel nuovo punto e massimizzo (minimizzo per i problemi di minimo) la funzione risultante  $g(\alpha)$ , generalmente in modo analitico ( $g'(\alpha) = 0$ )
  
4. Sostituisco  $\alpha$  trovato in  $x^{k+1}$ .
  
5. Valuto i criteri di arresto

Per verificare che il punto trovato sia un punto di ottimo, semplicemente controllo che  $\nabla f(x^*) = 0$ .

Nuovo punto	$x^{k+1}$	$x^k \pm \alpha^k \cdot d^k$
Direzione di Crescita	$d^k$	$\pm \nabla f(x^k)$ (+ max e - min)
Step Size	$\alpha^k$	max/min $f(x^k \pm \alpha^k \cdot d^k)$

### 3.3 Algoritmo di Newton (Multivariato)

Data una funzione a più variabili  $f(X)$  e un punto  $x^0$ , una iterazione del metodo di Newton si effettua in questo modo:

1. Calcolo  $\nabla f(x^k)$  e  $H(x^k)$ .
2. Calcolo  $V$  Vettore Spostamento:  $H_f(x^k)V = -\nabla f(x^k)$   
è un sistema di equazioni, risolvo per  $v_1, \dots, v_n$
3. trovo  $x^{k+1} = x^k + V$ , in cui  $V$  è il vettore spostamento.

Vettore Spostamento	$V$	$H_f(x^k)V = -\nabla f(x^k)$
Nuovo punto	$x^{k+1}$	$x^k + V$

# Capitolo 4

## Ottimizzazione Non Lineare Vincolata

### 4.1 Funzione Lagrangiana

In un problema di ottimizzazione vincolata definito come:

$$\begin{aligned} & \text{opt } f(x_1, \dots, x_n), \\ & g_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ Vincoli di Uguaglianza,} \\ & h_l(x_1, \dots, x_n) \leq 0 \text{ Vincoli di Disuguaglianza,} \end{aligned}$$

Generiamo la Lagrangiana così definita:

$$L(V) = f(X) \pm \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot g_i(X) \pm \sum_{j=1}^l \mu_j \cdot h_j(X)$$

in cui  $\pm$  diventa  $+$  per i problemi di MIN e  $-$  per i problemi di MAX, Abbiamo che  $\lambda$  sono i moltiplicatori lagrangiani associati ai vincoli di Uguaglianza, e  $\mu$  quelli associati ai vincoli di Disuguaglianza.

con  $V = \{x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_l\}$ , ovvero tutte le variabili e  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ , ovvero tutte le variabili originali.

### 4.2 Condizioni KKT

**Tabella** Bisogna quindi generare un sistema che avrà  $n + m + l$  incognite utilizzando le KKT, riportate qui in modo semplificato:

Stazionarietà Problemi di MIN (-)		
$\nabla f = - \sum \lambda_i \cdot \nabla g_i - \sum \mu_j \cdot \nabla h_j$		
Stazionarietà Problemi di MAX (+)		
$\nabla f = + \sum \lambda_i \cdot \nabla g_i + \sum \mu_j \cdot \nabla h_j$		
Ammissibilità Vincoli Uguaglianza	$\forall$	$g_i = 0$
Ammissibilità Vincoli Disuguaglianza	$\forall$	$h_j \leq 0$
Condizione di Complementarietà	$\forall$	$\mu_j \cdot h_j = 0$
Non Negatività di $\mu$	$\forall$	$\mu_j \geq 0$

Dove con  $\forall$  si intende chiaramente tutti quelli presenti.

#### 4.2.1 Differenziare tra Max e Min

Quando si usano le KKT bisogna differenziare tra problemi di Max e Problemi di Min. Ogni problema ha le seguenti possibili combinazioni:

<b>Problema di Massimo</b>	$\mu_i \geq 0$	$\nabla f = + \sum \lambda_i \cdot \nabla g_i + \sum \mu_j \cdot \nabla h_j$
	$\mu_i \leq 0$	$\nabla f = - \sum \lambda_i \cdot \nabla g_i - \sum \mu_j \cdot \nabla h_j$
<b>Problema di Minimo</b>	$\mu_i \geq 0$	
	$\mu_i \leq 0$	$\nabla f = + \sum \lambda_i \cdot \nabla g_i + \sum \mu_j \cdot \nabla h_j$

é utile sapere che se scegliessimo di avere la funzione obiettivo **Sempre come somma di elementi negativi**, sia per i problemi di massimo che di minimo, allora potremmo, in base ai valori di  $\mu$ , sapere in un solo calcolo se il punto é candidato a massimo o minimo.

#### 4.2.2 Risolvere il Sistema

Per risolvere il sistema, o lo si risolve con il metodo classico, oppure tramite questo metodo: Con la condizione di **Complementarietà** sappiamo che:

$$\mu_j \cdot h_j = 0 \implies \mu_j = 0 \vee h_j = 0$$

Quindi, con  $l$  variabili  $\mu_j$  abbiamo  $2^l$  combinazioni di sistemi, in cui  $\mu_j = 0 \vee \mu_j \neq 0$ . Cosí possiamo risolvere le  $2^l$  combinazioni per trovare tutti i punti candidati.

### 4.2.3 Trovare i punti di Minimo e Massimo

I punti trovati dalle condizioni KKT sono solo candidati a essere punti di max/min, perché le KKT sono condizioni Necessarie ma non Sufficienti.

Le condizioni KKT diventano Sufficienti se:

- Per i Punti di Massimo:
  - $f$  é concava.
  - I vincoli  $h_i(X)$  sono tutti Convessi.
- Per i Punti di Minimo:
  - $f$  é convessa.
  - I vincoli  $h_i(X)$  sono tutti Convessi.