Esami di Ricerca Operativa e Pianificazione delle Risorse

Fabio Ferrario
@fefabo

2023

Indice

Capitolo 1

Domande di Teoria dal Mega

Si faccia riferimento a un problema di Massimizzazione ed, ove richiesto, ad un problema artificiale per la fase 1 del metodo del simplesso.

1? Se B é la matrice di base associata ad una base ottima, il valore della funzione obiettivo associato alla corrispondende SBA non negativo

2 Il valore Nullo di una variabile indica che essa sia fuori base

Risposta: Falso, una variabile puó valere 0 anche nel caso sia in base (soluzione degenere)

Capitolo 2

Domande di Teoria - Bibbia

2.0.1 Programmazione Lineare e Metodo del Simplesso

VERO

Un vertice ammissibile é una soluzione ammissibile che non giace lungo un segmento che connette altre due soluzioni ammissibili.
Dalla definizione

VERO

Dato un vertice (soluzione) ammissibile, se non esiste uno spigolo, incidente in esso, cui compete un tasso positivo di miglioramento, allora la soluzione corrente é ottimale.
Il TEST DI OTTIMALITÀ consiste nel verificare se esiste uno spigolo con tasso positivo di miglioramento. Se tale condizione non è soddisfatta allora la soluzione corrente è ottimale.

FALSO

In ogni problema di PL con n variabili di decisione e m vincoli, ogni vertice ammissibile giace all'intersezione di n+m frontiere di altrettanti vincoli.
In ogni problema di programmazione lineare con n variabili di decisione,

ogni vertice ammissibile giace all'intersezione di n frontiere di altrettanti vincoli,

VERO

Una soluzione che giace lungo un segmento che collega due altre soluzioni ammissibili non é un vertice ammissibile.
Dalla definizione

VERO

I valori delle variabili di base si ricavano risolvendo il sistema di equazioni lineari determinato dai vincoli funzionali in forma aumentata.
Avendo il valore 0 delle variabili non in base si può risovlere il sistema di equazioni lineari per trovare il valore delle variabili in base.

FALSO

Una variabile nulla é certamente una variabile di base.
Una variabile nulla può essere sia in base, che fuori base. Una variabile fuori base è sicuramente nulla, ma se una variabile è nulla può anche essere in base

VERO

il numero delle variabili di base é sempre determinato dal numero di vincoli funzionali.
Proprietá numero (2) delle soluzioni di base.

VERO

Se le variabili di base soddisfano i vincoli di non negativitá, la soluzione di base é una soluzione ammissibile di base.
Prporietá numero (5) delle soluzioni di base.

2.0.2 Dualità

Si consideri un problema primale in forma di massimo. Se il duale é inammissibile, allora :

FALSO

Il primale é sempre illimitato come corollario del teorema della dualitá Debole
Il primale potrebbe anche non avere soluzioni ammissibili.

FALSO

Il primale ha almeno una soluzione ottima
Se il duale é inammissibile, allora il primale o non ha soluzioni, oppure ha funzione obiettivo illimitata, quindi il primale non ha ottimo.

Da Capire

Valgono le condizioni degli scarti complementari.

2.0.3 Analisi di sensitività

VERO

L'analisi di sensitivitá ha l'obiettivo di identificare i Parametri Sensibili.
Uno degli obiettivi principali dell'analisi di sensitività è l'identificazione dei PARAMETRI SENSIBILI, vale a dire quei parametri il cui valore non può essere modificato senza portare ad una nuova soluzione ottimale.

VERO

Un parametro é sensibile se la sua variazione porta alla variazione della soluzione ottimale.
I Parametri sensibili sono parametri il cui valore non può essere modificato senza portare a una nuova soluzione ottimale

VERO

Dato un termine noto destro, il metodo del simplesso identifica il corrispondente prezzo ombra tramite il coefficiente della corrispondente variabile slack nella riga zero del tableau finale.

Da Capire

É sempre vero che un termino noto non é un parametro sensibile se il corrispondente prezzo ombra é nullo

Da Capire

Un termine noto é un parametro sensibile se il corrispondente prezzo ombra é positivo.

2.0.4 Metodo di Bisezione

VERO

Si consideri il metodo di bisezione per la determinazione del punto massimo di una funzione $f(x)$: Nei punti estremi dell'intervallo di ricerca dell'ottimo $[l, u]$ puó succedere che i valori di $f(l)$ e $f(u)$ abbiano lo stesso segno.
Se una funzione é pari sappiamo che $f(x) = f(-x)$, quindi possono avere lo stesso segno

VERO

Consideriamo il metodo di bisezione applicato ad una funzione convessa: se $f'(x) > 0$ allora x é un estremo superiore
Se la funzione é convessa, quando la derivata é > 0 allora ci troviamo a

destra dell'ottimo, quindi dobbiamo modificare l'estremo superiore

Da Capire

L'Algoritmo di Bisezione fornisce una soluzione analitica al problema di trovare un massimo (o minimo) di una funzione in una variabile

Da Capire

Gli algoritmi di ottimizzazione non linare permettono di individuare gli ottimi globali di una funzione continua.

2.0.5 Gradiente/Newton 2D

VERO

Il metodo di Newton (se) converge, converge molto più velocemente del metodo del gradiente, ma ogni iterazione richiede uno sforzo computazionale maggiore

Newton potrebbe non convergere, ma se converge converge più rapidamente perchè utilizza le informazioni di Gradiente ed Hessiana invece che solo del gradiente. Richiede uno sforzo computazionale maggiore perchè oltre che il gradiente ad ogni iterazione deve calcolare l'inversa della Hessiana

VERO

Nel caso di funzioni quadratiche, il metodo di Newton converge al punto stazionario al più in una iterazione, partendo da qualsisasi punto.

FALSO

Il metodo di Newton converge sempre ad un punto di minimo locale.
Se la funzione è Concava Newton converge ad un punto di massimo.

FALSO

Il Metodo di Newton applicato ad una funzione continua quadratica può non convergere se il punto iniziale è lontano dal punto di ottimo
Il Metodo di Newton, se la funzione è quadratica, converge sempre in una iterazione.

2.0.6 KKT

VERO

Le condizioni KKT rappresentano delle condizioni di ottimalitá e non un algoritmo di ottimizzazione.

VERO

Le condizioni KKT non sono un algorimto di ottimizzazione.
Le KKT non sono un algoritmo bensí delle condizioni necessarie non sufficienti per i punti di ottimo.

VERO

I punti dove il gradiente della Lagrangiana é nullo possono essere possibili candidati ad essere punti di ottimo del problema PNL corrisponendte, ma per stabilire se sono punti di ottimo devo verificare anche altre condizioni

VERO

Supponendo di avere un problema di PNL vincola di massimizzazione con vincoli di $\leq$, se la funzione Lagrangiana é espressa sommando alla funzione obiettivo f la somma pesata dei vincoli, allora i pesi (moltiplicatori di lagrange) nei punti di ottimo devono essere ≥ 0.

FALSO

Supponendo di avere un problema di PNL vincola di massimizzazione con vincoli di $\leq$, se la funzione Lagrangiana é espressa sommando alla funzione obiettivo f la somma pesata dei vincoli, allora i pesi (moltiplicatori di lagrange) nei punti di ottimo devono essere ≤ 0.

VERO

In un problema di max con vincoli di $\geq$, la corrispondente funzione lagrangiana si ottiene sommando alla funzione oiettivo la combinazione lineare dei vincoli con pesi tutti *positivi*

In un problema di Max in cui i vincoli sono tutti di $\leq$, la lagrangiana ha i pesi μ tutti Negativi, di conseguenza, se avessimo vincoli di $\geq$ dobbiamo invertire i segni dei pesi μ, rendendoli tutti positivi.

VERO

In un problema di PNL Vincolata, nel punto di ottimo il gradiente della funzione f puó essere riscritto come combinazione lineare dei gradienti dei vincoli.

FALSO

Nel punto di ottimo di un problema di PNL Vincolata il gradiente della funzione obiettivo é sempre nullo

In PNL Vincolata non abbiamo bisogno di sapere se il gradiente della funzione obiettivo sia nullo, perché avendo i vincoli non é detto che l'ottimo sia anche l'ottimo della f.obiettivo.

Capitolo 3

Domande Aperte

3 PROPRIETÁ DEI VERTICI AMMISSIBILI

Si enuncino le Proprietà dei Vertici Ammissibili di un problema di PL. Si scelga poi una delle proprietà e si mostri un esempio grafico o numerico.

Risposta: I vertici ammissibili di un problema di PL hanno le seguenti proprietá:

1. Se esiste una sola soluzione ottima, questa sará un vertice ammissibile. Se esistono piú soluzioni con regione ammissibile limitata, allora almeno due di queste sono vertici ammissibili tra loro adiacenti.

2. Il numero di vertici ammissibili é finito e dipende da n vincoli di non negativitá e m vincoli funzionali. il numero di combinazioni di m + n vincoli presi a gruppi di n é pari $\frac{(m+n)!}{m!n!}$. Questa quantitá (finita) rappresenta un limite superiore al numero di vertici ammissibili.

3. Se un vertice ammissibile non ha vertici adiacenti migliori, allora non ci sono vertici migliori. Quindi se il problema ha una soluzione otttima, questo vertice é la soluzione ottima.

4 PROPRIETÁ DI UNA SOLUZIONE DI BASE

Si elenchino le proprietá di una Soluzione di Base

Risposta:

1. Una variabile puó essere una variabile di base o una variabile non

di base.

2. Il numero delle variabili di base eguaglia il numero dei vincoli funzionali.

3. La variabili non di base vengono poste a zero.

4. I valori delle variabili di base sono ottenuti come risoluzione simultanea del sistema di equazioni lineari.

5. Se le variabili di base soddisfano i vincoli di non negativitá, la soluzione di base é una soluzione ammissibile di base.

5 DUALITÁ DEBOLE E FORTE

Si dia una defninizione di Dualitá Debole e Forte

Risposta:

- Dualitá Debole: Il valore della funzione obiettivo per una qualsiasi soluzione ammissibile del problema primale (max) non puó eccedere il valore della funzione obiettivo per una qualisasi soluzione ammissibile del problema duale. il valore del problema duale fornisce quindi un limite superiore del problema primale. Detto breve: se il primale ha soluzione illimitata allora il duale non ha soluzione.

- Dualitá forte: Se esiste una soluzione ottima (finita), il valore ottimo della funzione obiettivo del problema primale è uguale al valore ottimo della funzione obiettivo del problema duale.

DUALITÁ E LE PROPRIETÀ

Descrivere la proprietá di dualitá debole, di dualitá forte, la proprietá delle soluzioni complementari e la proprietá delle soluzioni ottimali complementare. Infine si presenti il teorema di dualitá

Risposta:

Dualitá Debole Dualitá Debole: Il valore della funzione obiettivo per una qualsiasi soluzione ammissibile del problema primale (max) non puó eccedere il valore della funzione obiettivo per una qualisasi soluzione ammissibile del problema duale.

Dualitá Forte Se esiste una soluzione ottima (finita), il valore ottimo della funzione obiettivo del problema primale è uguale al valore ottimo della funzione obiettivo del problema duale.

Proprietá delle soluzioni Complementari Ad ogni iterazione del metodo del simplesso, l'algoritmo calcola contemporaneamente una soluzione ammissibile per il primale e una soluzione per il duale (dato dai valori delle variabili di slack nella riga 0) i cui valori della funzione obiettivo si eguagliano. La soluzione del duale é ammissibile (e ottima) solo all'ultima iterazione del simplesso.

Proprietá delle soluzioni Ottime Complementari All'ultima iterazione il metodo del simplesso calcola contermporaneamente una soluzione ottima per il primale, e ottima per il duale, in cui vale la dualitá forte quindi i valori delle funizoni obiettivo si eguagliano.

Teorema della dualitá Se il primale é ammissibile e ha funzione obiettivo limitata, quindi ha ottimo, lo stesso vale per il duale. Se il primale ha soluzioni ammissibili, ma funzione obiettivo illimitata, il duale non ha soluzioni ammissibili. Se il primale non ha soluzioni ammissibili, il duale o non ha soluzioni ammissibili o ha funzione obiettivo illimitata.

9 PROPRIETÁ DI COMPLEMENTARIETÁ

Si definisca la Proprietá di Complementarietá in PL. Si diano due esempi reali in cui é utilizzabile e cosa permette di concludere.

Risposta: La complementarietá in un problema di Programmazione Lineare si evince dalla relazione tra problmea primale e duale. In particolare, la complementarietá afferma che ogni soluzione primale ha una soluzione complementare duale tale che $W = Z$ Se un problema lineare in forma primale ha soluzione ottimale x* allora anche il problema