

Algebra Lineare e Geometria

Fabio Ferrario

@fefabo

2023/2024

Indice

0.1	Ripasso concetti base	4
0.1.1	Sottoinsieme	5
0.1.2	Operazioni su insiemi	5
0.1.3	Insiemi di numeri	5
0.1.4	Funzioni	6

Introduzione

Questi appunti di Algebra Lineare e Geometria sono stati fatti con l'obiettivo di riassumere tutti (o quasi) gli argomenti utili per l'esame di Algebra Lineare e Geometria del corso di Informatica dell'Università degli Studi di Milano Bicocca.

Il Corso

Gli appunti fanno riferimento alle lezioni di GAL erogate nel secondo semestre dell'anno accademico 22/23.

Programma del corso

Il programma si sviluppa come segue:

1. Algebra Lineare

- Spazi Vettoriali
- Dipendenza Lineare
- Basi
- Prodotto scalare euclideo
- Prodotto vettoriale

2. Matrici

- Operazioni
- Rango
- Invertibilità
- Determinante
- Trasformazioni elementari e riduzione a scala

3. Sistemi di equazioni lineari

- Risultati di base
- Teoremi di Rouché-Capelli e Cramer
- Cenni alla regressione lineare semplice

4. Applicazioni lineari

- Matrice associata
- Proprietà

5. Diagonalizzabilità di Matrici

- Autovalori
- Autovettori
- Molteplicità algebrica e geometrica
- Teorema Spettrale

6. Geometria Analitica nel Piano

- Sottospazi lineari affini
- Classificazione delle coniche

7. Geometria Analitica nello spazio

- Sottospazi lineari Affini

Prerequisiti

I prerequisiti per questo corso sono: Teoria di insiemi di base. Insiemi con strutture (monoidi e gruppi). Dimostrazioni per assurdo e per induzione.

0.1 Ripasso concetti base

- Insieme
- Sottoinsieme

La definizione matematica di insieme è complessa, verrà quindi data una definizione intuitiva. Si tratta di un gruppo di elementi distinti (l'ordine non conta).

Esempio $A = \{1, 2, 3\}$ è un insieme, mentre $B = \{1, 1, 2\}$, NON è un insieme.

0.1.1 Sottoinsieme

Dato $A = 1, 2, 3, 4$ $B = 2, 3$ è un sottoinsieme di A e si indica con $A \subset B$. Si tratta quindi di un insieme contenuto all'interno dell'insieme di partenza (definizione assolutamente non formale).

0.1.2 Operazioni su insiemi

- Unione - Siano A e B due insiemi, $A \cup B$ è definito come l'insieme che contiene gli elementi di A e B .
- Intersezione - Siano A e B due insiemi, $A \cap B$ è l'insieme degli elementi comuni tra A e B .
- Complemento - Siano $A \subset B$ due insiemi. L'insieme complemento $B \setminus A$ oppure $B - A = \{x \in B : x \notin A\}$
- Prodotto Cartesiano - A, B insiemi. $A \times B$:
 $A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$
 $B \times A = \{(x, y) : x \in B, y \in A\}$

Osservazione notazione Scrivere (x, y) è diverso che scrivere $\{x, y\}$, perchè nel primo caso sto considerando la coppia di elementi x, y , mentre nel secondo caso sto considerando l'insieme contenente gli elementi x, y . Quindi $(x, y) \neq (y, x)$, mentre $\{x, y\} = \{y, x\}$.

Osservazioni Prodotto cartesiano

- Non gode della proprietà commutativa
- Gode della proprietà distributiva

0.1.3 Insiemi di numeri

- \mathbb{N} - Insieme numeri naturali
- \mathbb{Z} - Insieme numeri interi - $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
- \mathbb{Q} - Insieme numeri razionali - $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ - Numeri $\frac{n}{m}$, $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$
- \mathbb{R} - Insieme numeri reali - $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ - Numeri come π, \sqrt{q}, e

0.1.4 Funzioni

Dati due insiemi A e B , una funzione è una relazione che associa ogni elemento di A a uno e un solo elemento di B . L'insieme A viene chiamato **Dominio**, mentre B è il **Codominio**.

Insiemistica e Funzioni

In questo capitolo ripassiamo i concetti di insiemistica e funzioni e fissiamo le notazioni che verranno usate durante il corso.

Insiemi

Fissiamo le **Notazioni** che useremo nell'insiemistica.

Voglio considerare degli oggetti e distinguerli da altri oggetti. In genere si utilizza la notazione classica disegnando un insieme, ma questo metodo è scomodo. Quindi, per rappresentiamo un insieme usiamo le **Parentesi Graffe**

$$I = \{ x, \Delta, 3, \odot \}$$

Teniamo a mente due cose:

- L'ordine degli elementi non è sensibile.
- Se un valore viene ripetuto, allora questo non è un insieme.

Sottoinsieme

Un sottoinsieme è un insieme contenuto in un altro insieme e si indica con il simbolo \subset .

Considerando l'insieme I sopra avremo che:

$$S \subset I = \{\Delta, 3\} \text{ è un sottoinsieme di } I$$

Operazioni sugli insiemi

Esistono diverse operazioni che ci permettono di ottenere degli insiemi partendo da altri insiemi.

In questo corso useremo le seguenti:

- **Unione** $A \cup B$ Contiene gli elementi contenuti sia in A che in B (Senza ripetizioni).
 - **Unione Disgiunta** $A \sqcup U$ come l'unione, ma se ci sono degli elementi condivisi vengono entrambi rappresentati con indicato a pedice l'insieme di provenienza.
- **Intersezione** $A \cap B$ Contiene gli elementi comuni tra A e B.
- **Complemento** $B \setminus A$ (oppure $B - A$) è l'insieme contenente gli elementi di B che non sono presenti in A.
- **Prodotto Cartesiano** $A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$
Ovvero l'insieme delle coppie di ogni elemento di A con ogni elemento di B. Nota che il prodotto cartesiano NON è commutativo.

Insiemi Numerici

Esistono diversi insiemi numerici:

- Naturali $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} = \{0, 1, 2, \dots\}$
- Interi $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- Razionali $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}\}$
- Reali $\mathbb{R} = \{Q, \sqrt{q}, \pi, e : q > 0 \in \mathbb{Q}\}$
- Complessi \mathbb{C} , che non faremo in questo corso

Spazi Multidimensionali

Esistono spazi numerici multidimensionali, che sono semplicemente il prodotto cartesiano di più spazi:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

Funzioni

Una funzione definita su due insiemi A e B lega un elemento di A ad un elemento di B.