CheatSheet di Analisi Matematica

Fabio Ferrario

2022

Studio di Funzione

Per lo studio di una funzione bisogna trovare:

Dominio della funzione, poni:

Denominatore	$\neq 0$
Logaritmo	Argomento > 0
Radice^n	Argomento ≥ 0 (*sse n pari*)
$[f(x)]^{g(x)}$	$f(x) > 0$

Limiti ai punti di frontiera del dominio Trovato il dominio, trova *i limiti ai punti di frontiera*, quindi porre i limiti ad ogni punto in cui il dominio si interrompe (sia da destra che da sinistra) e eventualmente a $\pm\infty$.

Asintoti Trovati tutti i limiti, se trovi:
- $\lim_{x\to\alpha^\pm} f(x) = \pm\infty \implies$ Asintoto *Verticale.*
- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = l \implies$ Asintoto *Orizzontale* (di equazione $y = l$)

Bisogna anche controllare la presenza di **Asintoti Obliqui**:
- $m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \implies$ se m *esiste e non è nullo* trovo q:
- $q = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] \implies$ se q esiste allora $y = mx + q$ è *asintoto obliquo*

Monotonia La monotonia di una funzione si calcola *ponendo* $f'(x) > 0$. Nei punti in cui la derivata è positiva, la funzione è **Crescente**, nei punti in cui è negativa la funzione è **Decrescente**

Punti di estremo I punti in cui la derivata cambia direzione sono punti di estremo (max/min). Se il punto di estremo è il più grande/piccolo di tutta la funzione, allora sono Assoluti.

Convessità/Concavità
- $-$ conc$\mathcal{A}$va $\cap \implies f''(x)$ positiva
- $+$ con$\mathcal{V}$essa $\cup \implies f''(x)$ negativa

Retta Tangente al grafico in x_0:
trova $y = mx + q$ ponendo:
- $m = f'(x_0)$
- $q = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$

Punti di Discontinuità
1. Prima specie (Salto): i limiti dx e sx di x_0 esistono finiti ma sono diversi.
2. Seconda spece (Essenziale): Almeno uno dei limiti è inifinito o non esiste.
3. Terza Spece (Eliminabile): il limite di x_0 esiste finito ma è diverso da $f(x_0)$ o non esiste.

Pari/Dispari (per le crocette)

- $-$ Dispari $\implies f(-x) = -f(x)$
- $+$ Pari $\implies f(-x) = f(x)$

Funzioni note $\sin(x)$ è *Pari* e *Decrescente* in $[0, \pi]$ e *Crescente* in $[\pi, 2\pi]$. $\cos(x)$ è *Pari* e *Crescente* in $[0, \pi]$ e *Decrescente* in $[\pi, 2\pi]$.

1 Serie

DEFINIZIONE

Condizione **Necessaria non Sufficiente** per la convergenza:
Il Limite della successione del termine generale a_n deve essere *Inifinite-*

simo.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge} \implies \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

Serie Notevoli

Serie Telescopica

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - a_{n+k})$$

oppure

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_{n+k} - a_n)$$

Serie Geometrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n \begin{cases} \text{Diverge} & q \geq 1 \\ \text{Converge} & -1 < q < 1 \\ \text{Irregolare} & q \leq -1 \end{cases}$$

Serie Armonica Generalizzata

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{Diverge} & \alpha \leq 1 \\ \text{Converge} & \alpha > 1 \end{cases}$$

Serie Armonica Logaritmica

$$\sum \frac{1}{n^\alpha \log^\beta(n)} \begin{cases} \text{Converge} & \alpha > 1 \wedge \forall\beta \\ \text{Converge} & \alpha = 1 \wedge \beta > 1 \\ \text{Diverge} & \alpha = 1 \wedge \beta \leq 1 \\ \text{Diverge} & \alpha < 1 \wedge \forall\beta \end{cases}$$

I Criteri di Convergenza

Se a_n è def$^{\underline{\text{nte}}}$ ≥ 0 uso:

Criterio del Rapporto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \begin{cases} \text{Converge} & l < 1 \\ \text{Diverge} & l > 1 \\ \text{Criterio inconclusivo} & l = 1 \end{cases}$$

Criterio della Radice

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=l\begin{cases}\text{Converge} & l<1\\ \text{Diverge} & l>1\\ \text{Criterio inconclusivo} & l=1\end{cases}$$

Criterio del Confronto $a_n \leq b_n$ definitivamente $\implies$
- se b_n Converge $\implies$ a_n Converge
- se a_n Diverge $+\infty$ $\implies$ b_n Diverge $+\infty$

Se a_n è a segno **Alterno**:

Criterio della Assoluta Convergenza .
$\sum a_n$ **converge assolutamente** se converge $\sum |a_n|$.
Se una serie converge assolutamente, allora converge.

Serie Telescopica risoluzione In questo caso è necessario applicare la definzione di serie, cioè la successione delle somme parziali. Devo quindi manualmente sostituire n=1, n=2, n=3, ... fino a quando non riconosco il pattern della serie.
Ricordati di non semplificare Numeratore e Denominatore!, mantenendo i numeri sostituiti sarà più facile scrivere il carattere della serie.

Limiti

Equivalenza asintotica tra funzioni Se il limite ($\to x_0$) di $\frac{f(x)}{g(x)}=1$ allora f e g sono asintoticamente equivalenti

***o*-piccolo** Se il limite ($\to x_0$) del rapporto di $f(x)$ su $g(x)$ è uguale a 0 allora $f(x)$ è o-piccolo di $g(x)$. Nota, che per x_0 si intende un valore arbitrario che può essere anche 0 o $\pm\infty$

$$lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0 \implies f(x)=og(x) \text{ per } x\to x_0$$

Limiti Notevoli

Logaritmo naturale	$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
Logaritmo con base a	$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln(a)}$
f Esponenziale	$\lim_{x \to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
f Esponenziale base a	$\lim_{x \to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln(a)$
Costante e Frazione	$\lim_{x \to 0} \frac{ax-1}{x} = \ln(a)$
Seno	$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
Coseno	$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$
$\ln(x)$	$\lim_{x \to 0} ln(x) = -\infty$

Equivalenze Asintotiche

con $x \to 0$		
$\sin x$	$\sim$	x
$1 - \cos x$	$\sim$	$\frac{1}{2}x^2$
$\tan x$	$\sim$	x
$\ln(1+x)$	$\sim$	x
$(1+x)^\alpha - 1$	$\sim$	αx

Ordine degli infiniti ∞ In generale:

$$\log_a x \ll x^b \ll x^c \ll d^x \ll g^x \ll x^x$$

N.B.

- $\sqrt{x} \gg \ln(x)$
- $x \ln(x) \gg \sqrt{x}$

Forme di indecisione .

$[\frac{0}{0}]$ $[\frac{\infty}{\infty}]$ $[1^\infty]$ $[\infty - \infty]$ $[\infty \cdot 0]$ $[0^0]$ $[\infty^0]$	
Tutte le forme possono essere risolte usando **Limiti Notevoli** e **Trucchi algebrici** per ricondursi ad essi. In particolare però, questi si risolvono usando anche:	
$[\frac{0}{0}]$	Conf. infinitesmi — Scomp/Racc/Semp — De l'Hopital
$[\frac{\infty}{\infty}]$	Conf. infinti — Scomp/Racc/Semp — De l'Hopital
$[1^\infty]$	Identità Logaritmo-Esponenziale
$[\infty - \infty]$	Riconduzione a $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$
$[\infty \cdot 0]$	Razionalizzazione inversa — Prodotti notevoli al contrario
$[0^0]$ / $[\infty^0]$	Conf. infiniti/infinitesimi—Identità Logaritmo-Esponenziale

Teoremi Limiti utili per esercizi

Teorema del Confronto Se ho $x \to +\infty$ e ho sin o cos potrei dover usare il teorema del confronto dato che sin e cos (NB solo per $x \to +\infty$) sono delle costanti che oscillano tra -1 e 1.

Calcolo Differenziale

Derivate "note"

Nome	**Funzione**	**Derivata**
Seno	$\sin x$	$\cos x$
Coseno	$\cos x$	$-\sin x$
Arcotangente	arctan	$\frac{1}{1+x^2}$
Logaritmo	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
Radice		
Esponenziale	e^x	e^x
Esponenziale (negativo)	e^{-x}	$-e^{-x}$
1 su x^2	$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{2}{x^3}$
x alla α	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$

Derivate Composte .

Composizione	$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$
Prodotto	$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$
Divisione	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}$

Derivata dell'inversa di una funzione Dati:
y_o e $f(x)$, avendo $g(x) = f^{-1}(x)$ allora: Per calcolare $g'(y_0)$
1. trovo x_0 ponendo $y_0 = f(x)$
2. trovo $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

Formula di Taylor di grado k e centrato in x_0:

$$P_k(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + ... + \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

Formula di Mclaurin di grado k:

$$P_k(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + ... + \frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k$$

Mclaurin = Taylor con $x_0 = 0$

Rapporto incrementale

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Calcolo Integrale

Condizione di integrabilità Per l'integrabilità di una funzione su un intervallo la condizione che essa sia *continua è sufficiente ma non necessaria*

Primitive elementari
Funzioni il cui integrale è immediatamente calcolabile.

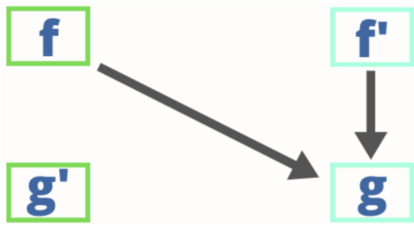
Funzione	Primitiva
k	kx
x^a,$a \neq -1$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$
$\frac{1}{x}$	$\log\|x\|$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
a^x	$\frac{a^x}{\log a}$
e^{-x}	$-e^{-x}$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan(c)$

Proprietà degli integrali
- Somma di integrali: $\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
- Costante moltiplicativa $\int k \cdot f(x) = k \int f(x)$

I metodi di risoluzione

Integrazione per Parti

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$



Integrazione per Sostituzione

Metodo Generale e Semplificato per itnegrali generali $f(x)$:
Trovo una funzione $g(x)$ *Derivabile e Invertibile* da sostituire ad x.
1. decido che $y = g(x)$
2. Inverto $g(x)$ per isolare la x, ottenendo $x = g^{-1}(y)$
3. Derivo entrambi i membri e aggiungo dx e dy: $\rightarrow dx = (g^{-1})'(y)dy$
4. all'interno di $f(x)$ sosdtituisco $g(x) \rightarrow y$ e $dx \rightarrow (g^{-1})'(y)dy$
5. Risolvo l'integrale
6. Sostiuisco $y \rightarrow g(x)$

Metodo dalla definizione : Abbiamo un integrale nella forma

$$\int f(g(x))g'(x)dx$$

1. $y = g(x) \rightarrow dy = g'(y)dx$
2. Sostituiamo per ottenere $\int f(y)dy$
3. Calcolo l'integrale nella nuova variabile
4. Sostituisco $y \rightarrow g(x)$

Formula Media Integrale Considerata f limitata e integrabile su un intervallo $[a, b]$

$$M(f, [a, b]) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Dimostrazioni per induzione

Le due casistiche principali sono:
- Dimostrazioni con la sommatoria $\sum$
- Dimostrazioni con disequazioni

Ricorda Devi sempre dimostrare che la formula è vera per $n + 1$, quindi devi ricondurti a ciò che hai a destra dell'equazione.

Dimostrazioni con la sommatoria

In questo caso devo ricordarmi di ricondurmi al caso base estrando dalla sommatoria (n+1) per ricondurmi alla sommatoria $\sum^{n}$ e poi sostituendo l'ipotesi induttiva (la sommatoria che supponiamo vera). Così facendo posso ottenere ciò che ho a sinistra della formula $\sum^{n+1}$.

Dimostrazioni con le disequazioni

In questo caso devo ricordarmi che oltre a dover sostituire l'ipotesi induttiva nella disequazione possono aggiungere numeri che mi possono servire a patto che abbia la certezza che questi numeri non vadano in contraddizione con il segno della disequazione, quindi se ho $a > b$, aggiungendo numeri non deve succedere che b diventi maggiore di a.

Ricorda Nell'ipotesi avrai una condizione (per esempio per $n > 1$), ricordati che puoi e spesso devi usarla per poter aggiungere numeri utili alla dimostrazione.