CheatSheet di Analisi Matematica

Fabio Ferrario

@fefabo

2022/2023

Indice

Insiemistica

Dati un elemento m e un insieme A:

- **Massimo/Minimo**: m si dice massimo/minimo di A se esso *Appartiene ad* A ed é il piú grande/piccolo elemento di A.
- **Maggiorante/Minorante**: m si dice maggiorante/minorante di A se é *Maggiore/Minore o uguale* di ogni elemento di A.

Capitolo 1

Studio di Funzione

Nello studio di funzione bisogna fare:

- Definizione del Dominio
- Intersezione con gli Assi (Segno di $f(x)$)
- Limiti ai punti di frontiera e Asintoti
- Derivata, Monotonia e Estremanti
- Derivata Seconda, Concavià/Convessità

In particolare:

1.1 Definizione del Dominio

In una funzione il dominio ha i seguenti limiti:

Denominatore	$\neq 0$
Logaritmo	Argomento > 0
Radice^n	Argomento ≥ 0 (*sse n pari*)
$[f(x)]^{g(x)}$	$f(x) > 0$

1.2 Limiti ai punti di frontiera e Asintoti

Trovato il dominio, bisogna trovare *i limiti ai punti di frontiera*, quindi trovare i limiti in ogni punto in cui il dominio si interrompe (sia da destra che da sinistra) e eventualmente a $\pm\infty$.

1.2.1 Asintoti

Trovati tutti i limiti, se trovi:

- $\lim_{x \to \alpha^{\pm}} f(x) = \pm\infty \implies$ Asintoto *Verticale.*
- $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l \implies$ Asintoto *Orizzontale* (di equazione $y = l$)

Bisogna anche controllare la presenza di **Asintoti Obliqui**:

- $m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \implies$ se m *esiste e non è nullo* trovo q:
- $q = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] \implies$ se q esiste allora $y = mx + q$ è *asintoto obliquo*

1.3 Derivata, Monotonia e Estremanti

La monotonia di una funzione si calcola *ponendo* $f'(x) > 0$. Nei punti in cui la derivata è positiva, la funzione è **Crescente**, nei punti in cui è negativa la funzione è **Decrescente**

1.3.1 Punti di estremo

I punti in cui la derivata cambia direzione sono punti di estremo (max/min). Se il punto di estremo è il più grande/piccolo di tutta la funzione, allora sono Assoluti.

1.4 Derivata Seconda, Concavià/Convessità

- $-$ conc$\mathcal{A}$va $\cap \implies f''(x)$ positiva
- $+$ con$\mathcal{V}$essa $\cup \implies f''(x)$ negativa

1.5 Altri elmenti di studio di una funzione

1.5.1 Retta Tangente al grafico

Se viene chiesta la retta tangente al grafico in x_0:
trova $y = mx + q$ ponendo:

- $m = f'(x_0)$
- $q = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$

1.5.2 Punti di Discontinuità

I punti in cui una funzione non é continua si classificano nel seguente modo:

1. Prima specie (Salto): i limiti dx e sx di x_0 esistono finiti ma sono diversi.
2. Seconda spece (Essenziale): Almeno uno dei limiti è inifinito o non esiste.
3. Terza Spece (Eliminabile): il limite di x_0 esiste finito ma è diverso da $f(x_0)$ o non esiste.

1.5.3 Funzioni Pari/Dispari

(serve solo per le crocette)

- $-$ Dispari $\implies f(-x) = -f(x)$
- $+$ Pari $\implies f(-x) = f(x)$

Paritá e disparitá di funzioni note $\sin(x)$ è *Pari*, *Decrescente* in $[0, \pi]$ e *Crescente* in $[\pi, 2\pi]$.
$\cos(x)$ è *Pari*, *Crescente* in $[0, \pi]$ e *Decrescente* in $[\pi, 2\pi]$.

Capitolo 2

Studio dei Limiti

2.1 Limiti Notevoli

É importante ricordarsi questi limiti notevoli, visto che sono generalmente il modo piú rapido di risolvere i limiti

Logaritmo naturale	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
Logaritmo con base a	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln(a)}$
f Esponenziale	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
f Esponenziale base a	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$
Costante e Frazione	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{ax - 1}{x} = \ln(a)$
Seno	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
Coseno	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$
$\ln(x)$	$\lim\limits_{x \to 0} ln(x) = -\infty$

2.2 Equivalenze Asintotiche

DEFINIZIONE

Equivalenza Asintotica tra funzioni: Se il limite del rapporto di $f(x)$ e $g(x)$ é uguale a 1 allora f e g sono asintoticamente equivalenti per $x \to x_0$.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \implies f(x) \sim g(x) \text{ per } x \to x_0$$

In particolare, alcune equivalenze note sono:

con $x \to 0$			
$\lim_{x\to 0}$	$\sin x$	$\sim$	x
$\lim_{x\to 0}$	$1 - \cos x$	$\sim$	$\frac{1}{2}x^2$
$\lim_{x\to 0}$	$\tan x$	$\sim$	x
$\lim_{x\to 0}$	$\ln(1 + x)$	$\sim$	x
$\lim_{x\to 0}$	$(1 + x)^\alpha - 1$	$\sim$	αx

2.2.1 O-Piccolo

Una funzione puó essere un 'o-piccolo' di un'altra.

DEFINIZIONE

***o*-piccolo**: Se il limite del rapporto di $f(x)$ su $g(x)$ è uguale a 0 allora $f(x)$ è o-piccolo di $g(x)$ per $x \to x_0$.

$$lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \implies f(x) = og(x) \text{ per } x \to x_0$$

Questa proprietá NON é commutativa.

Nota che per x_0 si intende un valore arbitrario che può essere anche 0 o $\pm\infty$.

2.3 Gerarchie di Infiniti

In situazioni di indecisione del tipo $[\infty \pm \infty]$ 'vince' l'infinito piú forte.
In generale, la scala é la seguente:

$$\log_a x \ll x^b \ll c^x \ll x! \ll x^x$$

N.B.

- $\sqrt{x} \gg \ln(x)$
- $x\ln(x) \gg \sqrt{x}$

Forme di indecisione .

$[\frac{0}{0}]$ $[\frac{\infty}{\infty}]$ $[1^\infty]$ $[\infty - \infty]$ $[\infty \cdot 0]$ $[0^0]$ $[\infty^0]$	
Tutte le forme possono essere risolte usando **Limiti Notevoli** e **Trucchi algebrici** per ricondursi ad essi. In particolare però, questi si risolvono usando anche:	
$[\frac{0}{0}]$	Conf. infinitesmi — Scomp/Racc/Semp — De l'Hopital
$[\frac{\infty}{\infty}]$	Conf. infinti — Scomp/Racc/Semp — De l'Hopital
$[1^\infty]$	Identità Logaritmo-Esponenziale
$[\infty - \infty]$	Riconduzione a $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$
$[\infty \cdot 0]$	Razionalizzazione inversa — Prodotti notevoli al contrario
$[0^0]$ / $[\infty^0]$	Conf. infiniti/infinitesimi—Identità Logaritmo-Esponenziale

Teoremi Limiti utili per esercizi

Teorema del Confronto Se ho $x \to +\infty$ e ho sin o cos potrei dover usare il teorema del confronto dato che sin e cos (NB solo per $x \to +\infty$) sono delle costanti che oscillano tra -1 e 1.

Capitolo 3

Serie

3.1 Serie Note

Serie Telescopica

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - a_{n+k}) \text{ Oppure: } \sum_{n=1}^{+\infty}(a_{n+k} - a_n)$$

Come si risolve una serie telescopica É necessario applicare la definzione di serie, cioè la successione delle somme parziali. Devo quindi manualmente sostituire n=1, n=2, n=3, ... fino a quando non riconosco il pattern della serie. *Ricordati di non semplificare Numeratore e Denominatore!*, mantenendo i numeri sostituiti sarà più facile scrivere il carattere della serie.

Serie Geometrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n \begin{cases} \text{Diverge} & q \geq 1 \\ \text{Converge} & -1 < q < 1 \\ \text{Irregolare} & q \leq -1 \end{cases}$$

Se una serie geometrica converge ($-1 < q < 1$), la somma si calcola:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Serie Armonica Generalizzata

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{Diverge} & \alpha \leq 1 \\ \text{Converge} & \alpha > 1 \end{cases}$$

Serie Armonica Logaritmica

$$\sum \frac{1}{n^\alpha \log^\beta(n)} \begin{cases} \text{Converge} & \alpha > 1 \wedge \forall\beta \\ \text{Converge} & \alpha = 1 \wedge \beta > 1 \\ \text{Diverge} & \alpha = 1 \wedge \beta \leq 1 \\ \text{Diverge} & \alpha < 1 \wedge \forall\beta \end{cases}$$

3.2 Criteri di Convergenza

DEFINIZIONE

Condizione **Necessaria non Sufficiente** per la convergenza:
Il Limite della successione del termine generale a_n deve essere *Inifinitesimo.*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge} \implies \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

Serie Positive def $\underline{\text{nte}}$

Se a_n è def $\underline{\text{nte}}$ ≥ 0 uso:

Criterio del Rapporto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \begin{cases} \text{Converge} & l < 1 \\ \text{Diverge} & l > 1 \\ \text{Criterio inconclusivo} & l = 1 \end{cases}$$

Criterio della Radice

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \begin{cases} \text{Converge} & l < 1 \\ \text{Diverge} & l > 1 \\ \text{Criterio inconclusivo} & l = 1 \end{cases}$$

Criterio del Confronto $a_n \leq b_n$ definitivamente $\implies$

- se b_n Converge $\implies$ a_n Converge
- se a_n Diverge $+\infty$ $\implies$ b_n Diverge $+\infty$

Serie con Segno Alterno

Se a_n è a segno **Alterno**:

Criterio della Assoluta Convergenza .
$\sum a_n$ **converge assolutamente** se converge $\sum |a_n|$.
Se una serie converge assolutamente, allora converge.

Criterio di Leibniz DA SCRIVERE

Calcolo Differenziale

Derivate "note"

Nome	Funzione	Derivata
Seno	$\sin x$	$\cos x$
Coseno	$\cos x$	$-\sin x$
Arcotangente	arctan	$\frac{1}{1+x^2}$
Logaritmo	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
Radice		
Esponenziale	e^x	e^x
Esponenziale (negativo)	e^{-x}	$-e^{-x}$
1 su x^2	$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{2}{x^3}$
x alla α	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$

Derivate Composte .

Composizione	$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$
Prodotto	$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$
Divisione	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}$

Derivata dell'inversa di una funzione Dati:
y_o e $f(x)$, avendo $g(x) = f^{-1}(x)$ allora: Per calcolare $g'(y_0)$

1. trovo x_0 ponendo $y_0 = f(x)$

2. trovo $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

Formula di Taylor di grado k e centrato in x_0:

$$P_k(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + ... + \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

Formula di Mclaurin di grado k:

$$P_k(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + ... + \frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k$$

Mclaurin = Taylor con $x_0 = 0$

Rapporto incrementale

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Calcolo Integrale

Condizione di integrabilità Per l'integrabilità di una funzione su un intervallo la condizione che essa sia *continua è sufficiente ma non necessaria*

Primitive elementari Funzioni il cui integrale è immediatamente calcolabile.

Funzione	**Primitiva**
k	kx
x^a,$a \neq -1$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$
$\frac{1}{x}$	$\log \lvert x \rvert$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
a^x	$\frac{a^x}{\log a}$
e^{-x}	$-e^{-x}$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan(c)$

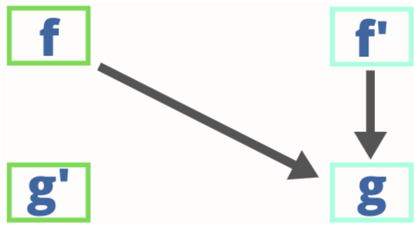
Proprietà degli integrali

- Somma di integrali: $\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
- Costante moltiplicativa $\int k \cdot f(x) = k \int f(x)$

I metodi di risoluzione

Integrazione per Parti

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$



Integrazione per Sostituzione

Metodo Generale e Semplificato per itnegrali generali $f(x)$: Trovo una funzione $g(x)$ *Derivabile e Invertibile* da sostituire ad x.

1. decido che $y = g(x)$
2. Inverto $g(x)$ per isolare la x, ottenendo $x = g^{-1}(y)$
3. Derivo entrambi i membri e aggiungo dx e dy: $\rightarrow dx = (g^{-1})'(y)dy$
4. all'interno di $f(x)$ sosdtituisco $g(x) \rightarrow y$ e $dx \rightarrow (g^{-1})'(y)dy$
5. Risolvo l'integrale
6. Sostiuisco $y \rightarrow g(x)$

Metodo dalla definizione : Abbiamo un integrale nella forma

$$\int f(g(x))g'(x)dx$$

1. $y = g(x) \rightarrow dy = g'(y)dx$
2. Sostituiamo per ottenere $\int f(y)dy$
3. Calcolo l'integrale nella nuova variabile
4. Sostituisco $y \rightarrow g(x)$

Formula Media Integrale Considerata f limitata e integrabile su un intervallo $[a, b]$

$$M(f, [a, b]) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Dimostrazioni per induzione

Le due casistiche principali sono:

- Dimostrazioni con la sommatoria $\sum$
- Dimostrazioni con disequazioni

Ricorda Devi sempre dimostrare che la formula è vera per $n + 1$, quindi devi ricondurti a ciò che hai a destra dell'equazione.

Dimostrazioni con la sommatoria

In questo caso devo ricordarmi di ricondurmi al caso base estrando dalla sommatoria (n+1) per ricondurmi alla sommatoria $\sum^n$ e poi sostituendo l'ipotesi induttiva (la sommatoria che supponiamo vera). Così facendo posso ottenere ciò che ho a sinistra della formula $\sum^{n+1}$.

Dimostrazioni con le disequazioni

In questo caso devo ricordarmi che oltre a dover sostituire l'ipotesi induttiva nella disequazione possono aggiungere numeri che mi possono servire a patto che abbia la certezza che questi numeri non vadano in contraddizione con il segno della disequazione, quindi se ho $a > b$, aggiungendo numeri non deve succedere che b diventi maggiore di a.

Ricorda Nell'ipotesi avrai una condizione (per esempio per $n > 1$), ricordati che puoi e spesso devi usarla per poter aggiungere numeri utili alla dimostrazione.