# Algebra Lineare e Geometria

Fabio Ferrario
@fefabo

2023/2024

# Indice

# Introduzione

Questi appunti di Algebra Lineare e Geometria sono stati fatti con l'obiettivo di riassumere tutti (o quasi) gli argomenti utili per l'esame di Algebra Lineare e Geometria del corso di Informatica dell'Università degli Studi di Milano Bicocca.

## Il Corso

Gli appunti fanno riferimento alle lezioni di GAL erogate nel secondo semestre dell'anno accademico 22/23.

### Programma del corso

Il programma si sviluppa come segue:

1. **Algebra Lineare**
   - Spazi Vettoriali
   - Dipendenza Lineare
   - Basi
   - Prodotto scalare euclideo
   - Prodotto vettoriale
2. **Matrici**
   - Operazioni
   - Rango
   - Invertibilità
   - Determinante
   - Trasformazioni elementari e riduzione a scala

3. **Sistemi di equazioni lineari**
    - Risultati di base
    - Teoremi di Rouché-Capelli e Cramer
    - Cenni alla regressione lineare semplice
4. **Applicazioni lineari**
    - Matrice associata
    - Proprietà
5. **Diagonalizzabilità di Matrici**
    - Autovalori
    - Autovettori
    - Molteplicità algebrica e geometrica
    - Teorema Spettrale
6. **Geometria Analitica nel Piano**
    - Sottospazi lineari affini
    - Classificazione delle coniche
7. **Geometria Analitica nello spazio**
    - Sottospazi lineari Affini

### Prerequisiti

I prerequisiti per questo corso sono: Teoria di insiemi di base. Insiemi con strutture (monoidi e gruppi). Dimostrazioni per assurdo e per induzione.

## 0.1 Ripasso concetti base

- Insieme
- Sottoinsieme

La definizione matematica di insieme è complessa, verrà quindi data una definizione intuitiva. Si tratta di un gruppo di elementi distinti (l'ordine non conta).

**Esempio** $A = \{1, 2, 3\}$ è un insieme, mentre $B = \{1, 1, 2\}$, NON è un insieme.

### 0.1.1 Sottoinsieme

Dato $A = 1, 2, 3, 4$ $B = 2, 3$ è un sottoinsieme di A e si indica con $A \subset B$. Si tratta quindi di un insieme contenuto all'interno dell'insieme di partenza (definizione assolutamente non formale).

### 0.1.2 Operazioni su insiemi

- Unione - Siano A e B due insiemi, $A \cup B$ è definito come l'insieme che contiene gli elementi di A e B.
- Intersezione - Siano A e B due insiemi, $A\cap$ è l'insieme degli elementi comuni tra A e B.
- Complemento - Siano $A \subset B$ due insiemi. L'insieme complemento $B \backslash A$ oppure $B - A = \{x \in B : x \notin A\}$
- Prodotto Cartesiano - $A, B$ insiemi. $A \times B$:
  $A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$
  $B \times A = \{(x, y) : x \in B, y \in A\}$

**Osservazione notazione** Scrivere $(x, y)$ è diverso che scrivere $\{x, y\}$, perchè nel primo caso sto considerando la coppia di elementi $x, y$, mentre nel secondo caso sto considerando l'insieme contenente gli elementi $x, y$.
Quindi $(x, y) \neq (y, x)$, mentre $\{x, y\} = \{y, x\}$.

**Osservazioni Prodotto cartesiano**

- Non gode della proprietà commutativa
- Gode della proprietà distributiva

### 0.1.3 Insiemi di numeri

- $\mathbb{N}$ - Insieme numeri naturali
- $\mathbb{Z}$ - Insieme numeri interi - $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
- $\mathbb{Q}$ - Insieme numeri razionali - $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ - Numeri $\frac{n}{m}$, $n \in \mathbb{Z}$, $m \in Z$
- $\mathbb{R}$ - Insieme numeri reali - $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ - Numeri come $\pi, \sqrt{q}, e$

### 0.1.4 Funzioni

Dati due insiemi A e B, una funzione è una relazione che associa ogni elemento di A a uno e un solo elemento di B. L'insieme A viene chiamato **Dominio**, mentre B è il **Codominio**.

# Insiemistica e Funzioni

In questo capitolo ripassiamo i concetti di insiemistica e funzioni e fissiamo le notazioni che verranno usate durante il corso.

## Insiemi

Fissiamo le **Notazioni** che useremo nell'insiemistica.
Voglio considerare degli oggetti e distinguerli da altri oggetti. In genere si utilizza la notazione classica disegnando un insieme, ma questo metodo è scomodo. Quindi, per rappresentiamo un insieme usiamo le **Parentesi Graffe**

$$\mathrm{I} = \{\ \mathrm{x},\ \Delta,\ 3,\ \odot\ \}$$

Teniamo a mente due cose:

- L'ordine degli elementi <u>non è sensibile</u>.
- Se un valore viene ripetuto, allora questo <u>non è un insieme</u>.

#### Sottoinsieme

Un sottoinsieme è un insieme contenuto in un altro insieme e si indica con il simbolo $\subset$.
Considerando l'insieme I sopra avremo che:

$$\mathrm{S} \subset \mathrm{I} = \{\Delta,3\} \text{ è un sottoinsieme di I}$$

## Operazioni sugli insiemi

Esistono diverse operazioni che ci permettono di ottenere degli insiemi partendo da altri insiemi.
In questo corso useremo le seguenti:

- **Unione** $A \cup B$ Contiene gli elementi contenuti sia in A che in B (Senza ripetizioni).
  - **Unione Disgiunta** $A \sqcup U$ come l'unione, ma se ci sono degli elementi condivisi vengono entrambi rappresentati con indicato a pedice l'insieme di provenienza.
- **Intersezione** $A \cap B$ Contiene gli elementi comuni tra A e B.
- **Complemento** $B \backslash A$ (oppure $B - A$) è l'insieme contenente gli elementi di B che non sono presenti in A.
- **Prodotto Cartesiano** $A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$
  Ovvero l'insieme delle coppie di ogni alemento di A con ogni elemento di B. Nota che il prodotto cartesiano NON è commutativo.

## Insiemi Numerici

Esistono diversi insiemi numerici:

- Naturali $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} = \{0, 1, 2, ...\}$
- Interi $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$
- Razionali $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}\}$
- Reali $\mathbb{R} = \{Q, \sqrt{q}, \pi, e : q > 0 \in Q\}$
- Complessi $\mathbb{C}$, che non faremo in questo corso

### Spazi Multidimensionali

Esistono spazi numerici multidimensionali, che sono semplicemente il prodotto cartesiano di più spazi:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

# Funzioni

Una funzione definita su due insiemi A e B lega un elemento di A ad un elemento di B.