Esami di Analisi Matematica

Fabio Ferrario

2022

Indice

Parte I

Introduzione

1 Gli esami

La professoressa Pini ha fornito, tramite E-Learning alcune prove d'esame degli anni precedenti:

	Esame	Crocette	Domande Aperte	Note
Primo Semestre	Febbraio 2019			
	Gennaio 2020			
	Febbraio 2020	✓		
	Gennaio 2021			
	Febbraio 2021	7/8		
	Gennaio 2022			
	Febbraio 2022			

Secondo Semestre

Esame	Crocette	Aperte	Note
Giugno 2019	8/8	3/3	
Giugno 2020	7/8	2/4	
Giugno 2021	6/8	0/3	
Luglio 2019	8/8	1.5/2	
Luglio 2020	8/8	2.5/3	
Luglio 2021	5/7	1.9/2	

Parte II
Esami Primo Semestre

2 Febbraio 2021

2.1 Domande Chiuse

1 EQUIVALENZA ASINTOTICA

Sia $a_n = \frac{n\ln(1-\frac{2}{n^3})}{n\sqrt[3]{n}-n^3}$. Allora, per $n \to +\infty$,

$$a_n \sim \frac{2}{n^5}$$

Spiegazione:

$$a_n = \frac{n\ln(1-\frac{2}{n^3})}{n\sqrt[3]{n}-n^3} \to \frac{\frac{2}{n^2}}{n^3} \to \frac{2}{n^2}\cdot\frac{1}{n^3} = \frac{2}{n^5}$$

Bisogna trovare una successione asintoticamente equivalente sia per il numeratore, che per il denominatore.

2 MASSIMO/MINIMO

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f'(0) = 0, f''(x) = ln(e + x)$.Allora f ha in $x = 0$

Un punto di minimo Relativo

Spiegazione: Qua si può andare a ragionamento.
Se pongo $f''(x) \geq 0 \to \ln(e + x) \geq 0 \to e + x > 0 \to x > -e$, quindi scopro che la funzione è:

- Concava ($\cap$) prima di $-e$

- Convesso ($\cup$) dopo di $-e$

Quindi il punto $x = 0$ è nella zona di convessità. Sappiamo (per definizione) che quando $f'(x) = 0$ quello è un punto di stazionamento. In una zona di convessità un punto di stazionamento è il *minimo relativo*, ovvero il punto subito prima della zona in cui la funzione cresce.

3 PROPRIETÀ DEGLI INTEGRALI

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e dispari. Allora, $\int_{-3}^{4} f(x)dx$ è uguale a

$$\int_3^4 f(x)dx$$

Spiegazione: Una funzione dispari è una funzione che ha il grafico simmetrico rispetto all'origine, quindi ha $f(-a) = -f(a)$. L'integrale è l'area sottesa della funzione *con il segno*, quindi in una $f(x)$ dispari $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ (Spiegazione negli appunti). Di conseguenza è intuibile che in questa funzione l'integrale da -3 a 3 si annulla, e rimane solo l'area da 3 a 4.

4 DERIVATA

La derivata della funzione $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^3}{2} + 1}$ è

$$\frac{x^2}{2\sqrt[3]{(\frac{x^3}{2}+1)^2}}$$

Spiegazione: La derivata di una funzione composta è: $f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$. Per quanto riguarda la radice, è meglio farla a mano trasformandola ($\sqrt[\alpha]{x^\beta} = x^{\frac{\beta}{\alpha}}$). Il resto sono calcoli Algebrici.

5 CONVERGENZA DI UNA SERIE

la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{(\alpha+1)/2} \ln^2 n}$

$$\textit{Converge sse } \alpha \geq 1$$

Spiegazione: Siccome $n^{\cdots}$ si moltiplica al logaritmo, se fosse infinitesimo annullerebbe il denominatore rendendo la serie divergente a infinito. Quindi, l'esponente di alpha deve essere positivo, di conseguenza $\alpha \geq 1$

6 CONTINUITÀ DI UNA FUNZIONE

La funzione $f(x) = \begin{cases} a \sin x - b^2 & -2 \leq x \leq 0 \\ 1 - e^x & 0 < x \leq 3 \end{cases}$ è derivabile in $x = 0$ se e solo se:

$$a = -1, b = 0$$

Spiegazione: Una funzione è derivabile in un punto se è continua e se i limiti destro e sinistro della derivata in quel punto coincidono.
Verificando la continuità, è banale che $b^2 = 0 \to b = 0$.
Verficiando i limiti della derivata invece: $f(x) = asinx \implies f'(x) = acos(x)$, $\lim_{x \to o^-} acos(x) = a$.
$f(x) = 1 - e^x \implies f'(x) = -e^x$, $\lim_{x \to o^+} -e^x = -1$.
Di conseguenza, $a = -1$ per la derivabilità.

7 INTERVALLI

Quali tra questi insiemi è un intervallo?

$$\{x \in \mathbb{R} : 2|x| \geq x^2\}$$

Spiegazione: La domanda chiede quali delle disequazioni proposte genera *un solo intervallo*.
Risolvendo ogni disequazione (usando il metodo per risolvere le disequazioni con il modulo) si trova che solo una genera un intervallo unico, infatti:

$$\{x \in \mathbb{R} : 2|x| \geq x^2\} = [-2, 0] \cup [0, 2] = [-2, 2]$$

8 COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

Date le funzioni $f(x) = \ln(x), g(x) = x^3, h(x) = 2 - x$, la funzione composta $(h \circ g \circ f)(x)$ è:

$$2 - \ln(x)$$

Spiegazione: $(h \circ g \circ f)(x) = h(g(f(x)))$

3 Febbraio 2022

Domande Chiuse

O1

$f(x) = \ln(x^3 - 1)$, $g(x) = |x|$, la funzione $(f \circ g)(x)$ è:

$$ln(|x|^3 - 1)$$

Spiegazione: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

O2

La funzione $f(x) = \begin{cases} 4\frac{e^{2x-1}}{x} & x < 0 \\ x^2 + \frac{a}{2} & x \geq 0 \end{cases}$ ha in $x = 0$ una discontinuità di prima specie sse:

$$a \neq 16$$

Spiegazione: Una discontinuità di prima specie la si ha quando i limiti destro e sinistro di x_0 esistono finiti e non coincidono.
$f(0) = \frac{a}{2}$, quindi basta mettere a in modo che sia diverso dal limite destro.
$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \frac{0}{0}$, che è una forma di indecisione. Usando il limite notevole dell'esponenziale decido di moltiplicare e dividere per $2x$: $4\frac{e^{2x-1}}{2x} \cdot \frac{2x}{x} = 4 \cdot 1 \cdot \frac{2x}{x} = 8$ Di conseguenza $a \neq 16$.

O3

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile e tale che $f(1) = 4$ e $f'(1) = -2$. Se $g(x) = \ln(f^2(x) + 1)$, allora $g'(1)$ vale:

$$-\frac{16}{17}$$

Spiegazione: Si può trovare $g'(1)$ senza sapere f. Basta derivare $g(x)$ mantenendo $f(x)$ come se fosse un incognita: $g'(x) = \frac{1}{f^2(x)+1} \cdot 2f(x) \cdot f'(x) = \frac{2f(x) \cdot f'(x)}{f^2(x)+1}$ Valuto $g'(1)$ sostituendo a $f(x)$ e $f'(x)$ le loro valutazioni in uno e trovo $g'(1) = -\frac{16}{17}$

<u>O4</u>

L'insieme $A = \{\frac{\ln n}{n}, n = 1, 2, ...\}$

Ha minimo 0

<u>O5</u>

Una primitiva della funzione $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$ è:

$\frac{\ln(e^{2x}+1)}{2} + 7$

Spiegazione: Si può notare che l'espressione e^{2x} è ripetuta, si deduce quindi che è conveniente provare per sostituzione.
Pongo $y = e^{2x}$ e isolo la x: $x = \frac{\ln y}{2}$.
Ora derivo a sinistra e destra e "moltiplico" ripsettivamente per dx e dy, quindi: $\frac{d}{dx}[x] = dx$ e $\frac{d}{dx}[\frac{\ln y}{2}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dx}[\ln y] = \frac{1}{2y} dy$
Sostituisco con y e dy nella funzione originale:

$$\int \frac{\cancel{y}}{y+1} \cdot \frac{1}{2\cancel{y}} dy = \frac{1}{2} \int \frac{1}{y+1} dy$$

Sappiamo che $\int \frac{1}{y+1} dy = ln(y+1) + c$, quindi:

$$= \frac{ln(y+1)}{2} + c \rightarrow \text{Sostituisco} \rightarrow \frac{\ln(e^{2x}+1)}{2} + c$$

<u>O6</u>

$\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 \sin(\frac{1}{n+n^2})$ vale

1

Spiegazione: Sappiamo che per $x \to 0, \sin(x) \sim x$, quindi: $\sim n^2 \cdot \frac{1}{n+n^2} = \frac{n^2}{n+n^2} \sim \frac{n^2}{n^2} = 1$

O7
$f(x) = e^{3x-x^3}$ è monotona decrescente sse

$$x \in (-\infty, -1] \vee x \in [1, +\infty)$$

Spiegazione: Per trovare la monotonia faccio la derivata $f'(x) = e^{3x-x^3}(3 - 3x^2)$ e la pongo ≥ 0 $e^{3x-x^3} \geq 0 \forall x$, $3 - 3x^2 \geq 0 \to 3x^2 - 3 \leq 0 \to x \leq \pm 1$ Quindi $x \geq 0$ tra -1 e 1.

O8
La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{2n^{2-a}+4}$ converge sse

$$a < 1$$

Spiegazione: $\sim \frac{1}{n^{2-a}}$, perchè converga il denominatore deve avere esponente > 1, quindi $a < 1$.

3.1 Domande Aperte

1 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = (2 - x^2)e^x$. Allora:

Risposta:

Dominio Tutto $\mathbb{R}$

Limiti $\lim\limits_{x \to +\infty} = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} = \infty \cdot 0$, indecisione DA FARE

Asintoti DA FARE (viene AOr $y = 0$ per $x \to -\infty$)

Derivata $f'(x) = -2xe^x + e^x(2 - x^2) = e^x(-x^2 - 2x + 2)$

Monotonia $f'(x) \geq 0 \to -x^2 - 2x + 2 \geq 0 \to x^2 + 2x - 2 \leq 0$
$x_{12} = \frac{-2\pm\sqrt{12}}{2}$ (Notare che alla prof viene $\pm\sqrt{3} - 1$, che è equivalente)
Dallo studio del segno risulta che la funzione è Monotona Crescente con $x \in [\frac{-2-\sqrt{12}}{2}, \frac{-2+\sqrt{12}}{2}]$

Estremi Dallo studio della mnonotonia notiamo che:
$\frac{-2-\sqrt{12}}{2}$ è Minimo Relativo, dato che la funzione dopo va a meno infinito.
$\frac{-2+\sqrt{12}}{2}$ è Massimo Assoluto, dato che dallo studio della monotonia notiamo che è la "punta" dell'unico intervallo in cui la funzione è crescente.

Derivata Seconda $f''(x) = e^x(-x^2-2x+2)+(-2x-2)e^x = e^x(-x^2-4x)$

Concavità e Convessità $f''(x) \geq 0 \to x^2 + 4x \leq 0 \to -4 \leq x \leq 0$
Dallo studio del segno risulta che la funzione è convessa in $x \in [-4, 0]$

Mclaurin II ordine $P(x) = 2 + 2x$

Retta tangente al grafico al punto $x = 1$.
Trovo $m = f'(1) = -e$, trovo $q = f(1) - f'(1) \cdot 1 = 2e$.
La retta tangente al grafico al punto $x = 1$ ha equazione: $y = -ex + 2e$

2 Data la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} q^n$, dove $q \in \mathbb{R}$, la serie:

Risposta: converge sse $q \in (-1, 1)$, diverge sse $q \in [1, +\infty)$ ed è infefinita sse $q \in (-\infty, 1]$

2b Si consideri la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{2x}{x^2+1}^n$, con $x \in \mathbb{R})$

Risposta: La serie *non converge* sse:
$\frac{2x}{x^2+1} \geq 1 \to 2x \geq x^2 + 1$, $x_{12} = 1$
è indeterminata sse: $\frac{2x}{x^2+1} \leq -1 \to x = -1$.
per $x = -2$ la somma della serie vale: $\frac{5}{9}$

3 Data la funzione funzione $f(x) = x - \frac{\ln^2 x}{x} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$:

- Si scrivano tutte le primitive
- Si determini, se esiste, la primitiva φ tale che $\varphi(e) = 2\varphi(1)$
- Si calcoli $\int_e^{e^2} f(x)dx$.

Risposta: Primitive:

$$\int x - \frac{\ln^2 x}{x}dx = \int xdx - \int \frac{\ln^2 x}{x}dx = \frac{x^2}{2} - \int \frac{\ln^2 x}{x}dx + c$$

Per risolvere il secondo integrale procedo per sostituzione. Pongo: $y = \ln(x)$, $x = e^y$, $dx = e^y dy$.
Sostituisco:

$$\frac{x^2}{2} + c - \int \frac{y}{\cancel{e^y}}\cancel{e^y}dy = \frac{x^2}{2} + c - \int y^2 dy = \frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{3} + c$$

Ritorno con x e ottengo:

$$\frac{x^2}{x} - \frac{\ln^3}{3} + c$$

Risposta: $\varphi(e) = 2\varphi(1)$
Devo trovare i valori di c per cui questi due valori si equivalgono. Valuto quindi le due funzioni e poi isolo la c.

$$\varphi(e) = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{3} + c \wedge 2\varphi(1) = 2(\frac{1}{2} + c)$$

$$2(\frac{1}{2} + c) = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{3} + c \to c - \frac{c}{2} = \frac{e^2}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \to c = \frac{3e^2 - 8}{6}$$

Di conseguenza la primitiva per cui $\varphi(e) = 2\varphi(1)$ è: $\frac{x^2}{x} - \frac{\ln^3}{3} + \frac{3e^2-8}{6}$

Risposta: $\int_e^{e^2} f(x)dx$:
$F(e) = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{3}$

$F(e^2) = \frac{(e^2)^2}{2} - \frac{(2\ln(e))^3}{3} = \frac{e^4}{2} - \frac{8}{3}$

$$F(e^2) - F(e) = \frac{e^4}{2} - \frac{e^2}{2} - \frac{7}{3}$$

Parte III
Esami Secondo Semestre

4 Giugno 2019

4.1 Domande Chiuse

1 CONVERGENZA ASSOLUTA

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n sin(\frac{3}{n^2})$

Converge assolutamente

Spiegazione: Siccome abbiamo sia $(-1)^n$, che una successione $\sin(a_n)$, sappiamo che questa serie è a *segno variabile*.
Usiamo quindi il criterio dell'assoluta convergenza.

$$|\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n sin(\frac{3}{n^2})| = sin(\frac{3}{n^2}) \sim \frac{3}{n^2}$$

la corrispondenza asintotica vale perchè *l'argomento del seno è infinitesimo*.
La successione risultante è una serie armonica di grado > 1, quindi converge.

2 CONFRONTO TRA INFINITI

La Successione $a_n = \frac{\ln(2+n^3)-5\sqrt{n^2-n}+2^{-n^4+5n}}{5n+3\ln n-n\ln n}$ per $n \to +\infty$ ha limite:

$$\lim_{n\to+\infty} = 0$$

Spiegazione: Il denominatore è inequivocabile che sia $\sim 5n$, essendo *l'infinito di ordine maggiore*.
Al numeratore invece sembra più complicata:

a $2^{-n^4+5n} \to 0$

b $-5\sqrt{n^2-n} \to -\infty$

c $\ln(2+n^3) \to +\infty$

Tra i tre termini possiamo ignorare "a", mentre tra "b" e "c" l'infinito più rapido tra *logaritmo e radice è la radice.*
Quindi abbiamo $\sim \frac{-5\sqrt{n^2-n}}{5n}$, ed essndo $\alpha \gg \sqrt{\beta}$, la successione *tende a 0.*

3 ASINTOTO OBLIQUO

La funzione $f(x) = \frac{2x^3+4x}{2-x^2} + e^{-\frac{1}{x}}$, per $x \to +\infty$, ha asintoto obliquo di equazione:

$$y = -2x + 1$$

Spiegazione: Per trovare un asintoto obliquo bisogna trovare m e q che compongono la retta $y = mx + q$:
$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{2x^3+4x}{2-x^2}+e^{-\frac{1}{x}}}{x} = (\frac{2x^3+4x}{2-x^2}+e^{-\frac{1}{x}})\cdot\frac{1}{x} = \frac{2x^3+4x}{2x-x^3}+\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \frac{\cancel{x}(2x^2+4)}{\cancel{x}(2-x^2)}+\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} \sim \frac{2\cancel{x^2}}{-\cancel{x^2}} + \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = -2 + \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$. Siccome $\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$ tende a 0, allora m equivale a -2
Adesso dobbiamo trovare q
$q = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - mx] = \frac{2x^3+4x}{2-x^2} + e^{-\frac{1}{x}} + 2x \sim \frac{2\cancel{x^3}}{-\cancel{x^2}} + e^{-\frac{1}{x}} + 2x = \cancel{-2x} + e^{-\frac{1}{x}} \cancel{+2x} = e^{-\frac{1}{x}} = 1$
Quindi, l'asintoto obliquo esiste e ha equazione $y = -2x + 1$

4 DERIVATA

Sia $f(x) = \sqrt{x^2+2x+3}$. allora $f'(1)$ vale:

$$\frac{2}{\sqrt{6}}$$

Spiegazione: Basti ricordarsi che:
La derivata di una radice è: $f(x) = \sqrt[\alpha]{x} \to f'(x) = \frac{1}{\alpha\sqrt[\alpha]{x}}$
Questa funzione è una funzione composta $(f(x) = \sqrt{g(x)})$, quindi bisogna derivarla come tale: $f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.
Una volta calcolata la derivata e semplificata fino a un punto "comodo", basta

sostituire x con 1.

5 DISEQUAZIONE

L'insieme delle soluzioni della disequazione $e^x \sqrt[3]{x-1} \geq 1$ è del tipo

$$(\alpha, +\infty) \text{ } \textit{con} \text{ } \alpha > 1$$

Spiegazione: Ci si chiede l'intervallo dei valori di x per cui la disequazione è sostanzialmente "corretta", quindi quando il termine sinistro è maggiore di 1. Se si prova un po per esclusione, si vede che per $x = 0$ è "falsa" e rimane così anche per valori minori di 0.
$x = 1$ ci da 0, quindi deve essere per forza un valore maggiore di 1

6 MONOTONIA

la funzione $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 3)$ è monotona crescente se e solo se

$$x \in (-1, +\infty)$$

Spiegazione: Per trovare se una funzione è *monotona crescente* bisogna porre la derivata della funzione ≥ 0. Il risultato è $x \geq -1$, che equivale a $x \in (-1, +\infty)$.

7 ESTREMO SUCCESSIONE

L'estremo inferiore della successione $\{a_n\}_{n\geq 0}$, dove $a_n = 3^{n+(-1)^n n}$ è:

1

Spiegazione: Per vedere l'estremo inferiore di una successione bisognerebbe provare qualche valore di n a partire dal più piccolo (in questo caso 0). Se il termine è infinitesimale, l'estremo inferiore si trova con il limite, altrimenti vedi il valore minore che trovi.

8 INTEGRALE

$\int_{\pi/2}^{\pi} x \sin x dx$ vale:

$$\pi - 1$$

Spiegazione: Integro per parti, quindi abbiamo:
$f(x) = x$ e quindi $f'(x) = 1$
$g'(x) = \sin(x)$ e quindi $g(x) = -\cos(x)$
Risolvo con la formula dell'*integrazione per parti*:

$$x(-\cos(x)) - \int 1(-\cos(x)) = -x\cos(x) + \sin(x) = \sin(x) - x\cos(x)$$

Risolvo l'integrale per gli estremi dati: $F(\pi) = \pi$, $F(\pi/2) = 1$. Quindi l'integrale dato vale $\pi - 1$

4.2 Domande Aperte

1i Data la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{x^2+6}{5x})^n$, Si determino i valori di $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ per cui converge, e se ne calcoli la somma.

Risposta: La serie è di tipo gemoetrico con ragione $q = \frac{x^2+6}{5x}$, e per convergere deve essere $|q| < 1$.

$$|\frac{x^2+6}{5x}| < 1 = \frac{x^2+6}{|5x|} < 1$$

Risolviamo quindi per $x < 0$ e per $x > 0$.

$$\begin{cases} x > 0 \\ \frac{x^2+6}{5x} < 1 = \frac{x^2+6}{5x} - 1 < 0 = \frac{x^2+6-5x}{5x} < 0 \end{cases}$$

Siccome $5x > 0$ è valido sempre per $x > 0$, risolviamo solo il numeratore e troviamo $2 < x < 5$
Facendo la stessa cosa per $x < 0$ (con il denominatore di q invertito di segno) trovo $-2 < x < -3$ Quindi, per i valori di x compresi tra $-2 < x < -3$ e $2 < x < 3$ la somma della serie vale:

$$S = \frac{1}{1 - \frac{x^2+6}{5x}} - 1 = \frac{5x}{5x - x^2 + 6} - 1 = \frac{x^2+6}{5x - x^2 - 6}$$

N.B. il "-1" va messo perchè la formula della serie geometrica si applica solo alle serie che partono da 0, quindi per le serie che partono da 1 la formula diventa $\frac{1}{1-q} - (q)^0$, ovvero si toglie il termine con $n = 0$.

1ii Si studi la funzione $f(x) = \frac{(x+1)^2}{3x(2x-1)}$ (Limiti ai punti di frontiera del dominio, Eventuali asintoti, monotonia, grafico qualitativo. NON è richiesto lo studio della derivata seconda).
Si calcolino l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f relativamente all'intervallo $[1, +\infty)$, specificando se sono anche massimo e/o minimo su tale intervallo.

Risposta:

Dominio della funzione $3x(2x-1) \neq 0 \rightarrow x \neq 0 \wedge x \neq \frac{1}{2}$, quindi la funzione è definita in $\mathbb{R} \backslash \{0, \frac{1}{2}\}$

Limiti agli estremi del dominio

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} \text{ Indecisione!}$$

Riformulo quindi la funzione

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{x^2+1+2x}{6x^2-3x} \sim \frac{\cancel{x^2}}{6\cancel{x^2}} = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{1}{0^+(-1)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \frac{1}{0^-(-1)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{3}{2}(0^+)} = \frac{\frac{9}{4}}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{3}{2}(0^-)} = \frac{\frac{9}{4}}{0^-} = -\infty$$

Asintoti Dai limiti, si deduce che:

- $\frac{1}{6}$ è Asintoto Orizzontale per $x \rightarrow \pm\infty$.
- $x = 0, x = \frac{1}{2}$ sono Asintoti Verticali.

Monotonia Per calcolare la monotonia di una funzione bisogna verificare i punti in cui la derivata della funzione è maggiore o uguale a zero. faccio la *derivata prima* $f(x) = \frac{(x+1)^2}{3x(2x-1)}$, quindi usando le formule base per le derivate ottengo:

$$f'(x) = \frac{2(x+1)(3x(2x-1)) - ((12x-3)(x+1)^2)}{(3x(2x-1))^2}$$

Risolvo alcuni calcoli aritmetici:

$$= \frac{6x(x+1)(2x-1) - ((12x-3)(x+1)^2)}{9x^2(2x-1)^2}$$

Raccolgo $(x+1)$ nel numeratore:

$$= \frac{(x+1)((6x(2x-1)) - ((12x-3)(x+1)))}{9x^2(2x-1)^2}$$

Risolvo alcuni calcoli aritmetici:

$$= \frac{(x+1)((12x^2-6x) - (12x^2+12x-3x+3))}{9x^2(2x-1)^2}$$

$$= \frac{(x+1)(\cancel{12x^2} - 6x - \cancel{12x^2} - 12x + 3x + 3)}{9x^2(2x-1)^2}$$

$$= \frac{(x+1)(-15x+3)}{9x^2(2x-1)^2}$$

Raccolgo il 3 dal secondo membro del numeratore:

$$= \frac{(x+1)3(-5x+1)}{9x^2(2x-1)^2}$$

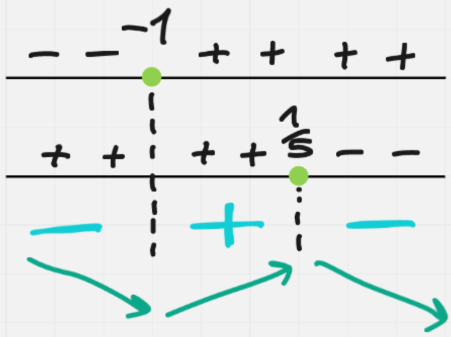
Finisco con un calcolo aritmetico:

$$= \frac{(x+1)(-5x+1)}{3x^2(2x-1)^2}$$

Pongo la derivata ≥ 0 Per trovare gli intervalli in cui la funzione è crescente.

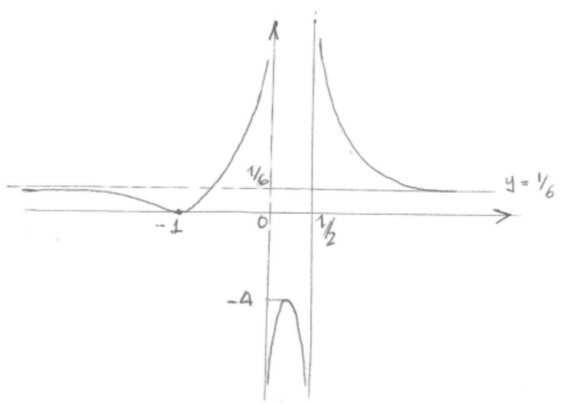
$$\frac{(x+1)(-5x+1)}{3x^2(2x-1)^2} \geq 0$$

Studio il segno dei 4 polinomi della derivata e li unisco:
$x+1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1$,e $-5x+1 \geq 0 \rightarrow x \leq \frac{1}{5}$ per il numeratore,
$3x^2 > 0 \rightarrow \forall x$,e $(2x-1)^2 > 0 \rightarrow \forall x$ per il denominatore.
Unisco i risultati e ottengo:



quindi $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x \in [-1, 0) \cup (0, \frac{1}{5}]$ (nota che zero è escluso perchè è punto di disconitinuità).
In particolare, $x = -1$ è punto di minimo relativo, $x = \frac{1}{5}$ è punto di massimo relativo.

Grafico Qualitativo Per tracciare il grafico, conosco i punti di discontinuità, i limiti e gli asintoti.
Per comodità, trovo: $f(-1) = 0$ e $f(\frac{1}{5}) = -4$ e traccio il grafico:



2 Si enunci il teorema di esistenza del limite per successioni monotone.
Data la successione:

$$a_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln(\frac{n+1}{n}) \text{ con } n \geq 1$$

i. si verifichi, utilizzando la definizione, che è monotona (crescente o decrescente?);
ii. si calcoli $\lim_{n \to +\infty} (\ln(n+1) - \ln n)$
iii. si calcoli la somma della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (\ln(n+1) - \ln n)$

Risposta:

Teorema di esistenza del limite: Se una successione è monotona crescente allora il limite esiste e coincide con l'estremo superiore della successione.
Se invece è monotona decrescente allora il limite esiste e coincide con l'estremo inferiore della successione.

i Si vuole dimostrare che la successione sia monotona (crescente o decrescente).
Notiamo che la successione si può semplificare in: $a_n = \ln(1 + \frac{1}{n})$, il che ci rende le cose molto più facili:
intuitivamente notiamo che $a_{n+1} < a_n$, quindi:

$$a_{n+1} = \ln(1 + \frac{1}{n+1}) < ln(1 + \frac{1}{n}) = a_n$$

e, siccome $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ e la funzione logaritmo è crescente ($\ln(n) < \ln(n+1)$) ne consegue che la serie $\{a_n\}$ è *Monotona Decrescente*.

ii $limiten{+}\infty a_n = \ln(1 + \frac{1}{n}) = \ln(1) = 0$.
Volendo si può dire anche che per un $x \to 0$ il logaritmo di $(1 + x)$ è asintotico ad x, in questo caso quindi sarebbe asintotico a $\frac{1}{n}$, ovvero 0.

iii La serie a_n è a termini positivi e $\ln(n+1) - \ln(n) \sim \frac{1}{n}$ (vedi sopra), pertanto è divergente $(+\infty)$s.

5 Giugno 2020

5.1 Domande Chiuse

1 SURIETTIVITÀ/INIETTIVITÀ

La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} e^x & x > 0 \\ x+2 & x \leq 0 \end{cases}$ è

Suriettiva ma non Iniettiva

Spiegazione: La funzione è *suriettiva* perchè riempie tutto $\mathbb{R}$. Per controllarlo basta vedere i grafici dei due segmenti della funzione.
Non è iniettiva invece perchè ci sono dei punti del codomino "raggiungibili" con due x diverse. Per verificarlo basti vedere che nel grafico della funzione dei due segmenti si accavallano su alcuni valori di y.

2 COMPOSIZIONE

Siano $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ e $g(x) = \ln(1+x)$. Allora $(g \circ f)$

è definita per ogni $x \geq 0$

Spiegazione: $g \circ f = g(f(x)) = ln(1 + e^{\sqrt{x}})$, quindi bisogna vedere dove è definita quella funzione.
Sappiamo che l'argomento di una radice va posto maggiore o uguale a zero, e quello di un logaritmo va posto maggiore di 0

3 SERIE GEOMETRICA

La somma della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{1-2n}$ vale

$\frac{e}{e^2-1}$

Spiegazione: La serie si può riscrivere come:
$\sum_{n=1}^{\infty} e^{1-2n} = e \sum (\frac{1}{e^2})^n$
Essendo una serie geometrica con argomento minore del modulo di 1, si può risolvere con la formula risolutiva. Siccome però la serie parte da 1, bisogna togliere la somma con n=0 (moltiplicata per la costante e), quindi:

$= e\frac{1}{1-\frac{1}{e^2}} - e = \frac{e}{1-\frac{1}{e^2}} - e = \frac{e}{\frac{e^2-1}{e^2}} - e = e\frac{e^2}{e^2-1} - e = \frac{e^3}{e^2-1} - e = \frac{e^3-e^3+e}{e^2-1} = \frac{e}{e^2-1}$
nota che il $-e$ sarebbe $-e \cdot (q)0$

4

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \int_1^x t^2 e^{\sqrt[3]{t}} dt$. Allora:

f è Crescente

↑ DOMANDA IRRISOLTA ↑

5 CONFRONTO TRA INFINITI

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2 \ln^3 n - n^3 \ln^2 n + 4 \arctan n}{n^3 \ln^2 n - n^2 \ln^5 n - e^{-n^2}}$ vale:

-1

Spiegazione: $\frac{n^2 \ln^3 n - n^3 \ln^2 n + 4 \arctan n}{n^3 \ln^2 n - n^2 \ln^5 n - e^{-n^2}} \sim \frac{-n^3 \ln^2 n}{n^3 \ln^2 n} = -1$

6 MASSIMO DI UN INSIEME

Il massimo dell'insime $A = \frac{2+(-1)^n}{2^n+(-1)^{n+1}}$ è

1

Spiegazione: per $n = 2$ l'insieme vale 1, mentre per tutti gli altri valori di n è minore.

7 DERIVATA

sia $f(x) = \arctan(\sqrt{x})$. Allora $f'(1) =$

Nessuna delle precedenti $(\frac{1}{4})$

Spiegazione: Trovo la derivata della funzione:
$f'(x) = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$. La derivata vale in $x = 1$: $f'(1) = \frac{1}{4}$

8

Sia f definita e continua su [a,b]. Allora

Assume il valore $\frac{f(a)+f(b)}{2}$

Spiegazione: Non ho trovato nessuna definizione che giustifichi questa cosa, ma da Telegram mi dicono: Se una funzione è continua in un intervallo ed ho $y_1 = f(a)$ e $y_2 = f(b)$ allora la funzione può assumere tutti i valori tra y_1 e y_2. $\frac{f(a)+f(b)}{2}$ se lo guardi nell'asse delle y è un valore compreso tra $f(a)$ e $f(b)$. Un'altra risposta corretta potrebbe essere: Assume tutti i valori tra $f(a)$ e $f(b)$.

5.2 Domande Aperte

1 Si determinino a e b affinchè la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} a\frac{\ln(x-1)}{x-2} + bx & x > 2 \\ 2x^2 - 2x + 1 & 0 \leq x \leq 2 \\ a(x+1) + 3\frac{e^{bx}-1}{x} & x < 0 \end{cases}$$

Sia continua in $\mathbb{R}$

2 Data la funzione $f(x) = xe^{x-x^2+4}$

a Si calcolino $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

Risposta: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$, perchè $e^{x-x^2+4} \sim e^{-x^2}$, quindi $+\infty \cdot 0 = 0^+$.
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^-$, perchè $e^{x-x^2+4} \sim e^{-x^2}$, quindi $-\infty \cdot 0 = 0^-$.

b Si determini il più ampio intervallo del tipo $(-\infty, k)$ su cui f è monotona e si specifichi se f è crescente o decrescente

Risposta: Per controllare la monotonia, faccio la derivata di $f(x)$ e la pongo ≥ 0:
$f'(x) = e^{x-x^2+4} + xe^{x-x^2+4} - 2x^2e^{x-x^2+4} = e^{x-x^2+4}(1 + x - 2x^2)$.
$f'(x) \geq 0 \rightarrow [-\frac{1}{2}, 1]$
$f'(x) \leq 0 \rightarrow (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [1, +\infty)$, di conseguenza l'intervallo più alto in

cui f è monotona è: $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ in cui è decrescente.

c L'insieme immagine $Im(f)$ è:

Risposta: Per trovare l'insieme immagine della funzione si può guardare il grafico della funzione (che in questo caso sarebbe una menata) oppure procedere un po a ragionamento.
Tramite lo studio della monotonia sappiamo che la funzione ha punto di minimo a $x = -\frac{1}{2}$ e di massimo a $x = 1$. Sappiamo anche che a sinistra la funzione va ad "appoggiarsi" a 0^- e da destra si "appoggia" a 0^+.
Di conseguenza riusciamo a capire che l'immagine della funzione è $[f(-\frac{1}{2}), f(1)]$, quindi $[-\frac{1}{2}e^{\frac{13}{4}}, e^4]$

3 Data la funzione $f(x) = \ln(1 + 2x) - 2\sin x - 6x^3$

a Il polinomio di McLaurin del terzo ordine per f è:

Risposta: Per calcolare il polinomio di McLaurin del terzo ordine devo trovare la derivata prima, seconda e terza di $f(x)$ e il loro valore in $x = 0$:

$$f'(x) = \frac{2}{1+2x} - 2\cos x - 18x^2 \implies f'(0) = 0$$

$$f''(x) = -\frac{4}{(2x+1)^2} + 2\sin x - 36x \implies f''(0) = -4$$

$$f'''(x) = \frac{16}{(2x+1)^3} + 2\cos x - 36 \implies f'''(0) = -18$$

Uso la formula per calcolare il polinomio di McLaurin:

$$P = -2x^2 - 3x^3$$

b $\int_0^2 f(x)dx$ vale:

4 Data la successione $\{a(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, si enunci, con le debite ipotesi, il criterio del rapporto per successioni.

Utilizzando tale criterio, si calcoli:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(2n)!}{(n+4)!}$$

6 Giugno 2021

6.1 Domande Chiuse

O1 CONCAVITÀ/CONVESSITÀ

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3 + 4x$. sull'intervallo $I = (-1, 1)$ la funzione f è:

Ne concava ne convessa

Spiegazione: Per studiare la concavità/convessità di una funzione bisogna fare la derivata seconda:

$$f(x) = x^3 + 4x \to f'(x) = 3x^2 + 4 \to f''(x) = 6x$$

Ora, ponendo la derivata seconda $geq0$ troviamo che $f''(x) \geq 0$ per $x \geq 0$. Da qui si deduce che è Concava $(\cap) \in (-\infty, 0)$, Convessa $(\cup) \in (0, +\infty)$ e 0 è punto di flesso.
Di conseguenza, $f(x)$ non è ne concava ne convessa in I.

O2 SERIE GEOMETRICA

La somma della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{2}{3})^{2n}$ vale

$$\frac{9}{5}$$

Spiegazione: La serie è simile a una geometrica, però c'è quel $2n$ da mandare via, quindi:

$$(\frac{2}{3})^{2n} = [(\frac{2}{3})^2]^n = (\frac{4}{9})^n$$

Ora è una normale serie geometrica con argomento $< |1|$, che risolta con la formula $\sum (q)^n = \frac{1}{1-q}$ ci da $\frac{9}{5}$

O3 COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

Siano $f(x) = \ln(x^2 + 1) - 1$ e $g(x) = |x + 1|$. Allora $(g \circ f)(x) =$

$$ln(x^2 + 1)$$

Spiegazione: Sappiamo che $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, quindi lo svoglimento è banale. Segnalo però che $|ln(x^2 + 1)| = ln(x^2 + 1)$, perchè il logaritmo ha dominio maggiore di 0, e in questo caso il suo argomento è sempre maggiore di 0, quindi le due funzioni si equivalgono.

O4 ESTREMO DI UN INSIEME

L'estremo superiore dell'insieme $A = \frac{1}{n+1} + 2^{1-2n}, n = 1, 2, ...$ è

1

O5 INIETTIVITÀ/SURIETTIVITÀ

La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ x^2 - 1 & x \leq 0 \end{cases}$ è

Nè suriettiva nè iniettiva

Spiegazione: $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, che parte da vicino a uno e tende a 0.
$x^2 - 1$ è invece una funzione che parte da -1 e va verso l'alto.
Essendo la funzione definita in $\mathbb{R}$, ed essendo il minimo -1, la funzione non è suriettiva. Visto che la seconda parte da -1 e va verso l'alto, mentre la prima parte da 1 e va verso 0, si incrociano sicuramente, rendendo la funzione non iniettiva.

O6 INTEGRALE

L'integrale definito $\int_0^2 \frac{x}{x^2+1} dx$ Vale:

$$\frac{ln(5)}{2}$$

Spiegazione: Questa è una funzione razionale che può essere semplicemente trasformata in una del tipo $\frac{f'(x)}{f(x)}$ (che può essere risolta ed equivale a $\ln |f(x)|$) moltiplicando e dividendo per due, quindi:
$\int \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$

$[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)]_0^2 = \frac{ln(5)}{2}$

O7 CONFRONTO TRA INFINITI

$\lim_{n\to+\infty}(\ln n - \sqrt{n} + 3e^{-n} + \sin n^2)$ Vale:

$$-\infty$$

Spiegazione: Bisogna trovare il limite più importante e in questo caso abbiamo:

- $+\sin n^2$ che oscilla tra 0 e 1, quindi ignorabile
- $+3e^{-n}$ che è infinitesimo, quindi ignorabile

Ci restano solo $\ln n - \sqrt{n}$, entrambi infiniti, ma contando che la radice è un infinito di ordine maggiore, vince lei e diventa $-\infty$

O8 DERIVATA DI FUNZIONE COMPOSTA

Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabili. se $f(2) = -2, f'(2) = 4, g'(-2) = -4$, allora $(g \circ f)'(2)$ Vale:

-16

Spiegazione: Avendo queste funzioni valutate, si può cercare di "indovinare" la loro espressione.
Quindi, partendo dalle derivate si cerca il l'espressione più semplice che verifica la sua valutazione, si "antideriva" e si somma/sottrae una costante per avere il risultato desideato:

- $f'(2) = 4 \implies f'(x) = 2x$
- $f(2) = -2 \wedge f'(x) = 2x \implies f(x) = x^2 - 6$
- $g'(-2) = -4 \implies g'(x) = 2x \implies g(x) = x^2$

A questo punto si compone, si deriva (con la formula della derivata di una funzione composta) e si valuta la derivata per ottenere il risultato.

6.2 Domande Aperte

1 Sia $\sum_{n=1}^{+\infty}(n^{\frac{1}{n}}-1)^n$

1. Per studiare la serie uso il criterio:
2. Applicando tale criterio ottengo il limite:
3. Qual'è il valore di tale limite? la serie converge o diverge?

Risposta:

1 Dato che trovo una serie tutta elevata alla n per studiarla uso **il criterio della radice**.

2 Applicando tale criterio:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{(n^{\frac{1}{n}}-1)^n}=n^{\frac{1}{n}}-1$$

3 Sappiamo che $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$, quindi tale limite vale 0. Di conseguenza la Serie Converge

2 Data la funzione $f(x)=x\sin x^2$

1. Si scrivano tutte le primitive
2. Si determini la primitiva ϕ tale che $\phi(\sqrt{3\pi/2})=0$
3. si calcoli $\int_{\sqrt{3\pi/2}}^{\sqrt{2\pi}}f(x)dx$

3 Data la funzione $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}$

1. Il suo dominio è:
2. I limiti ai punti di frontiera del dominio sono:
3. Gli eventuali asintoti verticali sono:
4. I punti stazionari della funzione sono: (è max/min rel/ass?)
5. Se $x>1$ la funzione è crescente o decrescente?

7 Giugno 2022

7.1 Domande Chiuse

1 CONVERGENZA ASSOLUTA

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n\sqrt{n}}$

Converge assolutamente

Spiegazione: Per il criterio della convergenza assoluta

8 Luglio 2019

8.1 Domande Chiuse

1 CONVERGENZA DI UNA SERIE

La serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{n^3 \ln n}$ converge sse:

$$\alpha < 2$$

Spiegazione: Queste serie ipoteticamente potrebbe essere asintotica a $\sim \frac{n^\alpha}{n^3} = \frac{1}{n^{3-\alpha}}$
Siccome per convergere, una serie del tipo $\frac{1}{n^\beta}$ deve avere $\beta > 1$, $3 - \alpha > 1 \rightarrow \alpha - 2$.

2 CONFRONTO TRA INFINITI

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2 - 3\ln^{10} n - n\sqrt{n^3+1}}{2n^2 + e^{\frac{1}{n}} - n\sqrt{n}}$ è

$$-\infty$$

Spiegazione: Bisogna trovare sia al numeratore che al denominatore l'infinito "più forte".
Al denominatore è ovviamente n^2, mentre al numeratore abbiamo:
$-n\sqrt{n^3+1} \sim -n\sqrt{n^3} = -n \cdot n^{\frac{3}{2}} = -n^{\frac{5}{2}} \gg n^2$.
Al numeratore prevale quindi il $n\sqrt{n^3+1}$
Al denominatore è bene notare che $e^{\frac{1}{n}}$ tened a 1 (radice n-esima).
di conseguenza la serie:

$$\sim \frac{-n\sqrt{n^3}}{n^2} = -\infty$$

3 -

La funzione $f(x) = \ln(x^2 + 3x + 4)$ è monotona sull'intervallo

$$(-1, 6)$$

Spiegazione: $f'(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+4}$, $f'(x) \geq 0$:
Numeratore $\geq 0 \rightarrow x \geq -\frac{3}{2}$, Il denominatore ha Δ negativo, quindi è sempre positiva. La funzione è monotona crescente nell'intervallo $[-\frac{3}{2}, +\infty)$. $(-1, 6)$

è contenuto nell'intervallo di monotonia.

4 DERIVATA

Sia $f(x) = xe^{\sqrt{x}}$. Allora $f'(4)$ vale:

$$2e^2$$

Spiegazione: Questa funzione è nella forma $f(x) = g(x) \cdot l(h(x))$. Vedendola in questo modo abbiamo:
$g(x) = x \implies g'(x) = 1$,
$h(x) = \sqrt{x} \implies h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$,
$l(x) = e^{\sqrt{x}} \implies l'(x)$ si calcola con la formula della funzione composta.
Ottenute tutte le derivate, otteniamo $f'(x) = e^{\sqrt{x}} + \frac{xe^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ che in $x = 4$ vale $2e^2$.

5 DISEQUAZIONE

L'insieme delle soluzioni della disequazione $\sqrt{2x^2 - 1} > -1$ è

$$(-\infty, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}] \cup [\tfrac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$$

Spiegazione: Una *radice di indice pari è sempre positiva*, quindi è anche sempre maggiore di -1.
Bisogna però vedere in valori in cui l'argomento della radice è maggiore o uguale a 0 (nei valori in cui l'argomento è *minore di 0* la radice, e quindi la disequazione, *non esiste*).
Quindi $2x^2 - 1 \geq 0$, quindi ottengo l'intervallo della risposta.

6 PUNTI DI FLESSO

Tutti e soli i punti di flesso di $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 3x^2 + 14$ sono:

$$x = \pm\tfrac{1}{\sqrt{2}}$$

Spiegazione: Faccio la derivata seconda (che in questo caso è banale) è la pongo maggiore o uguale a zero. I punti in cui la derivata seconda cambia di segno sono i punti di flesso

7 CONDIZIONE DI INTEGRABILITÀ

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Per l'integrabilità di f su $[a, b]$ la condizione che f sia continua è:

Sufficiente ma non necessaria

Spiegazione: Per definizione esistono tre classi principali di funzioni integrabili. Una di queste sono le funzioni continue in un intervallo, che è condizione sufficiente ma non è necessaria per la derivabilità.

8 INTEGRALE

$\int_1^{e^2} \frac{\ln^2 x}{x} dx$ vale

$$\frac{8}{3}$$

Spiegazione: Integro per sostituzione: $t = \ln x$, $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} dx$.
Sostituisco: $\int t^2 dt$, e applico la regola dell'integrazione con potenze: $\frac{t^3}{3} + c$.
Calcolo $F(e^2) - F(1) = \frac{8}{3}$.

8.2 Domande Aperte

1 Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{x - 4} - \frac{x}{2}$$

1. Si studi la funzione e se ne tracci un grafico qualitativo (dominio, limiti ai punti di frontiera del dominio, asintoti, monotonia, convessità/concavità)

2. Si individuino i punti di estremo relativo e, se esistono, di estremo assoluto, per la funzione f

3. Si calcoli il polinomio di Tayolr di ordine 2 centrato nel punto $x_0 = 8$, per la funzione f

4. Si calcoli l'area della regione piana delimitata dall'asse x, dal grafico di f, e dalle rette di equazione $x = 4$ e $x = 8$

Risposta:

Dominio Argomento della radice ≥ 0, quindi: $x \geq 4$
DOM $= [4, +\infty)$.

Limiti $\lim_{x\to 4^+} f(x) = -\frac{4}{2} = -2$
$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \infty - \infty$, prendo l'infinito "più potente" $= -\infty$.

Asintoti Non ci sono asintoti verticali o orizzontali. Non esiste asintoto Obliquo.

Derivata La funzione è nella forma $f(x) = h(l(x)) - k(x)$, quindi $f'(x) = h'(l(x)) \cdot l'(x) - k'(x)$.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-4}} - \frac{1}{2} = \frac{1-\sqrt{x-4}}{2\sqrt{x-4}}$$

Monotonia Pongo la derivata $geq0$
Numeratore $\geq 0 \to 1 - \sqrt{x-4} \geq 0 \to \sqrt{x-4} \leq 1 \to x \leq 5$
Denominatore $> 0 \to x > 4$
Studiando il segno: $f'(x) \geq 0$ sse $4 < x \leq 5$, quindi la funzione è monotona crescente solo tra 4 e 5.

Derivata Seconda La derivata seconda di questa funzione è un po meno diretta del previsto.
Se prendiamo la forma della derivata $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-4}} - \frac{1}{2}$ si può operare così:

$$\frac{d}{dx}[\frac{1}{2\sqrt{x-4}}] - \frac{d}{dx}[\frac{1}{2}] = \frac{d}{dx}[\frac{1}{2\sqrt{x-4}}] - 0$$

, così abbiamo eliminato il secondo elemento.

$$\frac{d}{dx}[\frac{1}{2\sqrt{x-4}}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dx}[\frac{1}{\sqrt{x-4}}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dx}[(x-4)^{-\frac{1}{2}}]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2}(x-4)^{-\frac{1}{2}-1} = ... = -\frac{1}{4(x-4)^{\frac{3}{2}}}$$

Convessità/Concavità Pongo la derivata seconda ≥ 0.
Il Numeratore (-1) non è mai maggiore di 0
Il Denominatore invece è maggiore di zero con $x > 4$. Facendo lo studio del segno (con $x > 4$ invertito grazie al numeratore) scopriamo che la funzione è *Sempre concava*

Grafico Devo allegarlo

Risposta: Polinomio di Taylor:

$$P''(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

Quindi con la funzione e $x_0 = 8$:

$$P''(x) = -2 - \frac{1}{4}(x - 8) - \frac{1}{64}(x - 8)^2 = -2 - \frac{x - 8}{4} - \frac{(x - 8)^2}{64}$$

2 Si enunci il criterio del rapporto per una successione $\{a_n\}_n$, con $a_n \geq 0$. Si applichi tale criterio per lo studio del limite della successione definita per ricorrenza da:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n\sqrt{4 + n^2}(e^{\frac{1}{3n^2}} - 1) \end{cases}$$

Cosa accade se pi pone $a_1 = 0$?

Risposta: Enunciato criterio del rapporto: Sia $a_n > 0$ Definitivamente, e supponiamo che $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{n} = l$ allora:

- Se $l < 1$ allora $\sum a_n$ Converge
- Se $l > 1$ allora $\sum a_n$ Diverge
- Se $l = 1$ il criterio è inconclusivo

9 Luglio 2020

9.1 Domande Chiuse

1 CRESCENZA/DECRESCENZA

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3 - 3x$, sull'intervallo I = (-1,1) f è

Decrescente

Spiegazione: Guardando i punti $f(-1), f(0), f(1)$ si nota che la funzione non è Suriettiva (in quell'intervallo) ed è decrescente

2 DOMINIO

Il dominio della funzione $f(x) = ln(4 - x^2)$ è

(-2,2)

Spiegazione: Gli argomenti dei logaritmi devono essere > 0

3 SERIE GEOMETRICA

La somma della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} 4^{-n}$ vale

$$\frac{1}{3}$$

4 -

$\int_1^2 (\frac{1}{x} + 2x)dx =$

$$\ln(2) + 3$$

Spiegazione: $F(x) = \int \frac{1}{x}dx + 2\int xdx = ln|x| + \frac{2x^2}{2} + c$, Calcolo poi $F(2) - F(1)$ e trovo il risultato.

5 CONFRONTO TRA INFINITI

$\lim_{n \to +\infty} (n^2 - n^3 + 3e^{-n} + \cos n^2)$ vale

$$-\infty$$

Spiegazione: $a_n \sim -n^3$

6 LIMITE DI UN INSIEME

SUP $A = \{\frac{2}{2n^2+1} + e^{1-n}, n = 1, 2, ...\}$ è

$$\frac{2}{3}$$

7 DERIVATA DELL'INVERSA

Detta g funzione inversa di $f(x) = x^3 + x + 1$, allora $g'(3) =$

$$g'(3) = \frac{1}{4}$$

Spiegazione: Siccome la funzione $f(x) = x^3+x+1$ non è facilmente invertibile (è impossibile ottenere l'espressione di $f^{-1}(x)$) bisogna usare il *teorema della derivata della funzione inversa.*
Da questo teorema sappiamo che $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$, e sappiamo anche che $y = x^3 + x + 1$ (formula dell'inversa). Avendo $y = 3$ possiamo metterla a sistema per trovare x:

$$\begin{cases} y = 3 \\ y = x^3 + x + 1 \end{cases} \rightarrow ... \rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Quindi abbiamo $g'(3) = \frac{1}{f'(1)}$.
$f'(x) = 3x^2 + 1 \implies f'(1) = 4$.
Riempiendo i valori della formula troviamo $g'(3) = \frac{1}{4}$.

8 CONTINUITÀ DI UNA FUNZIONE

La funzione $f(x) = \begin{cases} \sin x^2 + a & x \leq 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{x+x^3} & x > 0 \end{cases}$ è continua se:

$$a = 1$$

Spiegazione: Perchè una funzione sia continua in un punto, i limiti destro e sinsitro di quel punto devono coincidere.
$f(0) = a$, quindi a deve essere uguale al limite destro di 0.
Sappiamo che $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (limite notevole del logaritmo), quindi moltiplico e divido per x in modo da ottenere il limite notevole:
$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x+x^3} = \frac{\ln(1-x)}{x} \cdot \frac{x}{x+x^3} \sim 1 \cdot \frac{x}{x+x^3}$.

Raccolgo la x: $= \frac{x(1)}{x(1-x^2)} = \frac{1}{1+x^2} = 1$

9.2 Domande Aperte

1 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = (x^2 - x)e^{-x}$, Allora:

i. f ha asintoto orizzontale di equazione ... per $x \to$...

Risposta: Il dominio di f è tutto $\mathbb{R}$, perchè non ci sono punti in cui non è definita. Quindi per trovare gli astintoti faccio i limiti per $x \to \pm\infty$:
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty \cdot 0$, che è una forma di indecisione. Provo quindi a rimodellare: $f(x) = (x^2 - x) \cdot \frac{1}{e^x} = \frac{(x^2-x)}{e^x} \sim \frac{x^2}{e^x}$. Essendo e^x un infinito di ordine superiore a x^2, il limite tende a 0.
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = ... = \frac{x^2}{e^x}$, siccome $e^{-\infty}$ tende a 0, il limite tente a $+\infty$.
Da questi limiti capiamo che f ha un *asintoto orizzontale di equazione* $y = 0$ *per* $x \to \infty$

ii. Ha punto di minimo per $x =$... e punto di massimo per $x =$ ...

Risposta: Per trovvare massimo e minimo devo calcolare la derivata: $f'(x) = e^{-}x(-x^2 + 3x - 1)$ (il calcolo è sufficientemente banale) e porla maggiore di zero:
$f'(x) > 0$: $e^{-x} > 0 \to \forall x$, $-x^2 + 3x - 1 > 0 \to x^2 - 3x + 1 < 0 \to x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \wedge x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Siccome $a > 0$ abbiamo una concavità verso l'alto, quindi $f'(x) < 0$ con x compreso tra $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. In questo caso $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ è punto di minimo e $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ è punto di massimo.

iii. l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa -1 è ...

Risposta: Per calcolare la retta tangente al grafico:

- trovo $m = f'(-1) = -5e$
- trovo $q = f'(-1) \cdot -1'f(-1) = -3e$

- trovo l'equazione della retta: $y = -5ex - 3e$

iv. Il più ampio intervallo di convessità del tipo $(k, +\infty)$ si ha per $k =$...

Risposta: Per trovare i punti di convessità/concavità bisogna fare la derivata seconda. $f''(x) = e^{-x}(x^2 - 5x + 4)$ e la pongo > 0 $f''(x) > 0$ con $(-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$. Quindi il più grande intervallo di convessità a più infinito è: $(4, +\infty)$.

v. $\int_0^1 \frac{f(x)}{x} dx =$

Risposta: $\int \frac{(x^2 - x)}{x} \cdot e^{-x} = \int \frac{x(x^2-1)}{x} \cdot e^{-x} = \int (x-1)e^{-x}$
Integro per parti, con: $f(x) = x-1$, $f'(x) = 1$, $g'(x) = e^{-x}$, $g(x) = -e^{-x}$.
Usando la formula ottengo:
$(x-1) - e^{-x} - \int -e^{-x} = (x-1) - e^{-x} - e^{-x} = -xe^{-x} + \cancel{e^{-x}} - \cancel{e^{-x}} + c$

$$F(x) = -xe^{-x}$$

Faccio il calcolo con gli estremi: $F(1) - F(0) = -\frac{1}{e}$

2 Data la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} q^n$, dove $q \in \mathbb{R}$, la serie converge sse $q \in$ ...? e diverge sse $q \in$ ...?

Risposta: Converge se $q \in (-1, 1)$, diverge se $q \in [1, +\infty]$.

i Si consideri la serei $\sum_{n=0}^{\infty} (2e^x - 3)^n$, con $x \in \mathbb{R}$. Per quali valori di x converge? E per quali invece diverge a $+\infty$?

Risposta: La serie converge se $q \in (-1, 1)$, quindi converge se $2e^x - 3 < |1|$, quindi deve essere minore di 1 e maggiore di meno 1:
$2e^x - 3 < 1 \rightarrow e^x < 2 \rightarrow x < \ln 2$ (per fare sparire un esponenziale bisogna fare il logaritmo naturale di tutto.)
$2e^x - 3 > -1 \rightarrow e^x > 1 \rightarrow x > \ln 1 \rightarrow x > 0$
Quindi converge sse $x \in (0, \ln 2)$

Di conseguenza, diverge se $x \in [\ln 2, +\infty)$

3 Siano $\{a_n\}, \{b_n\}$ due successioni positive. Che cosa significa la scrittura $a_n = o(b_n)$, per $n \to +\infty$?

Risposta: $a_n = o(b_n)$ se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

3a Date le successioni $a_n = \frac{n^2+\ln n}{n\sqrt{n}+e^{-n}}$ e $b_n = \frac{n\sqrt{n}-\ln n}{n+e^n}$, si stabilisca se $a_n = o(b_n)$, oppure $b_n = o(a_n)$, oppure nessuna delle due.

Risposta: Per controllare se una delle due successioni è o-piccolo dell'altra bisogna vedere se un limite di uno dei rapporti tende a 0.
Si può andare a tentativi, ma guardando subito il rapporto di $\frac{b_n}{a_n}$ si nota che:

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{\frac{n\sqrt{n}-\ln n}{n+e^n}}{\frac{n^2+\ln n}{n\sqrt{n}+e^{-n}}} = \frac{n\sqrt{n}-\ln n}{n+e^n} \cdot \frac{n\sqrt{n}+e^{-n}}{n^2+\ln n}$$

. Da qui si può vedere che nel limite di $n \to +\infty$ il denominatore di b_n tende fortemente a $+\infty$ (grazie a e^n). Questo porta l'intera successione a tendere a 0, quindi $b_n = o(a_n)$

10 Luglio 2021

10.1 Domande Chiuse

O1 CONTINUITÀ DI UNA FUNZIONE

La funzione $f(x) = \begin{cases} \sin x^2 + a & x \le 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{2x} + \frac{3}{2} & x > 0 \end{cases}$ è continua se:

$$a = 2$$

Spiegazione: Calcolo il limite per x che tende a 0^+:
$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{2x} + \frac{3}{2} \sim \frac{\cancel{x}}{2\cancel{x}} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2$
Siccome $f(0) = a$, perchè la funzione sia continua $a = 2$

O2 DERIVATA

Sia $f(x) = x^2 + 2x + 2$. allora $\frac{d}{dx}\ln(f(x))$ per $x = 1$ è

$$\frac{4}{5}$$

Spiegazione: la derivata di $\ln(f(x)) = \frac{2x+2}{x^2+2x+2}$, che per $x = 1$ vale $\frac{4}{5}$

O3 PUNTI DI FLESSO

La funzione $f(x) = x^5 + x^3 - 1$ ha quanti flessi?

1 flesso

Spiegazione: Calcolo la derivata seconda, che è banale $f''(x) = 20x^3 + 6x$ e la pongo maggiore di 0:
$f''(x) > 0 = 20x^3 + 6x > 0 \to x(20x^2 + 6)$

- $x > 0$
- $20x^2 + 6 > 0$ non ha soluzioni perchè ha $\Delta < 0$

Di conseguenza $f''(x) > 0$ per $x > 0$, quindi ha 1 flesso.

O4 INTEGRALE

$\int_0^1 xe^x dx =$

1

Spiegazione: Integro per parti:
$f = x \implies f' = 1,\ g' = e^x \implies g = e^x$
con la formula ottengo: $F(x) = xe^x - \int e^x = xe^x - e^x + c$
Risolvo l'integrale definito: $F(1) - F(0) = (e - e) + 1 = 1$

O5 -

La funzione $f(x) = \begin{cases} -|x+3| & -6 < x < -1 \\ -2x^2 & -1 \leq x < 1 \end{cases}$

Ha come immagine un intervallo

↑ DOMANDA IRRISOLTA ↑

O6 -

Sia $f(x) = x\ln(x+1) - x^2$, il rapporto incrementale di f relativo all'intervallo $[0, e-1]$ vale)

$$2 - e$$

↑ DOMANDA IRRISOLTA ↑

O7 CONVERGENZA DI UNA SERIE

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n\ln n + 2n^{\alpha+1}}$

Converge sse $\alpha > 2$

Spiegazione: Con $\alpha > 2$ la serie si può semplificare (asintoticamente e aritmeticamente) in $\frac{1}{n^\alpha}$ con un $\alpha > 1$, quindi converge

10.2 Domande Aperte

1 Data la funzione $f(x) = \ln x - \ln^2 x$, si studi:

1. Dominio
2. Limiti ai punti di frontiera del dominio
3. Eventuali asintoti
4. Estremanti (specificando se relativi o assoluti)
5. Monotonia
6. Punti di flesso
7. Tangente di flesso

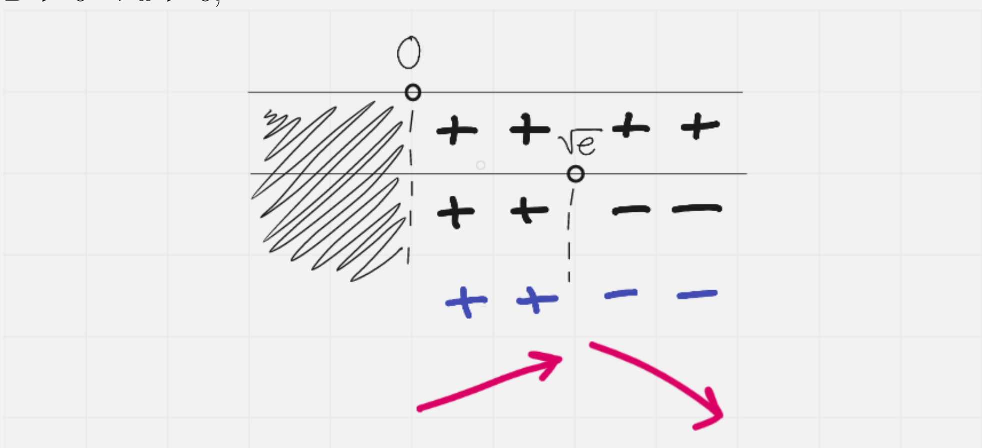
Risposta:

1 Dominio: $x > 0$ (argomenti dei logaritmi maggiori di 0)

2 Limiti: $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x - \ln^2 x \sim -\ln^2 x = -\infty$
$limitex0^+ = \infty$ (so che il limite di un log che tende a 0 è $-\infty$)

3 Asintoti: $x = 0$ è asintoto verticale per $x \to 0^+$.

4 Estremanti: $f'(x) = \frac{1}{x} - 2\ln x(\frac{1}{x}) \to \frac{1-2\ln x}{x}$.
Pongo $f'(x) \geq 0$. Quindi:
$N > 0 \to 1 - 2\ln x > 0 \to \ln x < \frac{1}{2} \to x < \sqrt{e}$
$D > 0 \to x > 0,$



studiando il segno noto che: $\sqrt{e}$ è punto di massimo assoluto.

5 Monotonia: Studiando il segno notiamo che la funzione è crescente in $(0, \sqrt{e})$ e decrescente in $[\sqrt{e}, +\infty)$.

6 Punti di flesso: Studio la derivata seconda $f''(x) = \frac{2\ln(x)-3}{x^2}$.
$f''(x) \geq 0$, $D > 0 \forall x$,
$N \geq 0 \to \ln(x) \geq \frac{3}{2} \to x \geq e^{\frac{3}{2}}$.
$e^{\frac{3}{2}}$ è un punto di flesso.

7 Tangente di flesso:
$m = f'(e^{\frac{3}{2}}) = -\frac{2}{e^{\frac{3}{2}}}$

$q = f(e^{\frac{3}{2}}) - f'(e^{\frac{3}{2}}) \cdot e^{\frac{3}{2}} = \frac{5}{4}$.
Quindi la retta tangente ha equazione : $y = -\frac{2}{e^{\frac{3}{2}}} + \frac{5}{4}$.

2 data la funzione $f(x) = x \sin x$

1. Si scrivano tutte le primitive
2. Si determini,se esiste, la primitiva ϕ tale che $\phi(\pi) = 2\phi(0)$
3. si calcoli $\int_0^\pi f(x)dx$

Risposta:

1 Integrando per parti (banale) trovo $F(x) = \sin x - x \cos x + C$

2 DA FARE

3 $\int_0^\pi f(x)dx = F(\pi) - F(0) = \pi$

11 Settembre 2019

Domande Chiuse

1 CONVERGENZA ASSOLUTA

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n^3}$

(a) [=]converge asolutamente
(b) converge, ma non assolutamente
(c) diverge
(d) è irregolare

2 CONFRONTO TRA INFINITI

$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+5ln^2n-n^2\sqrt{n^3+1}}{-n^3+e^{1/n}-n^2\sqrt{n}}$ è

(a) $-\infty$
(b) [=]$+\infty$
(c) 1
(d) 0

3
La funzione $f(x) = x^2 + 2\ln x$ è convessa se e solo se

(a) $x \in (-1, 1)$
(b) $x \in (0, 1)$
(c) [=]$x \in (1, +\infty)$
(d) $x \in (0, +\infty)$

Spiegazione: Attenzione al Dominio della funzione!

4
La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{ln(1+x^2)}{x} & x > 0 \\ 1 + k\cos x & x \leq 0 \end{cases}$ è continua in $x = 0$ se e solo se

(a) k=0
(b) k=1
(c) [=]k=-1
(d) per nessun valore di k

5
L'insieme delle soluzioni della disequazione $\sqrt{4 - x^2} \leq \sqrt{3}$ è

(a) [=]$[-2, -1] \cup [1, 2]$
(b) $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty]$
(c) $[-1, 1]$
(d) $(-2, -1] \cup [1, 2)$

6
la funzione $f(x) = xe^x - 3e^x$ ha

(a) un punto di massimo globale
(b) [=]un punto di minimo globale
(c) un punto di minimo locale ma non globale
(d) un punto di massimo locale ma non globale

7
Sia $a_n = \frac{1}{n^2+n}$ e $b_n = \frac{1}{n}$. Allora

(a) $a_n \sim b_n$
(b) [=]$a_n = o(b_n)$
(c) $b_n = o(a_n)$
(d) nessuna delle alternative proposte

Spiegazione: Mettere spiegazione

8

L'integrale $\int_{-2}^{5} \sqrt[3]{x+3}dx$ vale

(a) 3
(b) 315/4
(c) [=]45/4
(d) 7/8

11.1 Domande Aperte

1 Data la funzione

$$f(x) = \frac{lnx}{4x^2}$$

1. Si studi f e se ne tracci un grafico qualitativo (dominio, limiti ai punti di frontiera del dominio, eventuali asintoti, monotonia, punti di estremo relativo e/o assoluto, convessità/concavità);
2. si scriva l'equazione della retta tangente al grafico di f nel upnto di ascissa $x = e$;
3. si calcoli $\int_1^4 f(x)dx$

Risposta: 1.1

Dominio Denominatori $\neq 0$ e argomento dei logaritmi > 0, quindi:

- $4x^2 \neq 0 \rightarrow x \neq 0$
- $x > 0$

$$DOM(0, +\infty)$$

Limiti ai Punti di frontiera del dominio:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\infty\lll}{\infty\ggg} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \frac{-\infty}{0} = -\infty$

Asintoti

- $y = 0^+$ è Asintoto Orizzontale per $x \rightarrow +\infty$
- $x = 0$ è Asintoto Verticale

Derivata

$$f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2xln(x)}{x^4} = ... = \frac{1 - 2\ln(x)}{4x^3}$$

Monotonia $f'(x) > 0$ Il denominatore è *Sempre maggiore di 0*, mentre il numeratore:

$$N > 0 \to ... \to \ln(x) < \frac{1}{2} \to x < e^{\frac{1}{2}} \to x < \sqrt{e}$$

Quindi $f'(x) >$ solo per $x < \sqrt{e}$. $\sqrt{e}$ è anche punto di MASSIMO GLOBALE.

Derivata Seconda $f''(x) =$ ometto il calcolo (da mettere)

$$f''(x) = \frac{6\ln(x) - 5}{x^4}$$

Concavità/Convessità $f''(x) > 0$

- $N > 0 \to 6ln(x) > 5 \to ln(x) > \frac{5}{6} \to x > e^{\frac{5}{6}}$
- Il denominatore è sempre positivo

Quindi $f''(x) > 0$ per $x > \sqrt[6]{e^5}$. è concava tra 0 e $\sqrt[6]{e^5}$, convessa fino a $+\infty$.
$\sqrt[6]{e^5}$ è anche Punto di Flesso.

grafico La funzione segue l'asse delle y a 0^+, sale fino a sopra $\sqrt{e}$ poi scende e si appogga sopra all'asse delle x.

Risposta: 1.2
Per calcolare la retta tangente ad f in $x = e$, calcolo $m = f'(e)$, e poi $q = f(e) - f'(e) \cdot e$.

- $f(e) = \frac{1}{4e^2}$
- $f'(e) = -\frac{1}{4e^3}$

- $m = -\frac{1}{4e^3}$
- $q = \frac{1}{4e^2} - \frac{1}{4e^3} \cdot e = \frac{1}{2e^2}$

Quindi l'equazione della retta è $y = \frac{x}{4e^3} + \frac{1}{2e^2}$.

Risposta: 1.3
Trovo una primitiva di $f(x)$ integrando per parti: $\int \frac{\ln x}{4x^2} = \frac{1}{4} \int \frac{\ln x}{x^2}$.
Ho $f = \ln x \rightarrow f' = \frac{1}{x}$ e $g' = x^{-1} \rightarrow g = -\frac{x-1}{-1} = -x^{-1}$.
Applicando la formula ho $\frac{1}{4} \cdot -\frac{\ln x}{x} - \int \frac{1}{x} \cdot -\frac{1}{x} = -\frac{\ln x}{4x}$. Calcolando $F(4) - F(1) = \frac{-ln(4)-3}{16}$.

2 Data la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (\frac{1}{x-1})^n$$

1. Si determinino i valori di $x \in \mathbb{R}\{1\}$ per cui la serie converge;
2. per i valori determinati al punto 1, si calcoli la somma della serie.

Risposta: 2.1
Perchè la serie, che è di tipo geometrica, converga abbiamo bisogno che il suo "argomento" q sia compreso tra -1 e 1.
Quindi $|\frac{1}{x-1}| < 1 \implies x > 2 \wedge x < 0$.

Risposta: 2.2
La serie parte da $n = 2$, quindi alla formula risolutiva bisogna togliere q^1 e q^0.

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (\frac{1}{x-1})^n = \frac{1}{1-q} - q - q^0 = \frac{1}{(x-2)(x-1)}$$