

Exercise Session 7

Felix Breuer

FS 2024

1 Quiz

For statements (where no prompt like "Find ..." is given), determine if they are true or false (and why).

1. Let f_n converge uniformly to f .

$$\exists N \forall n \geq N : f_n \text{ is bounded} \iff f \text{ is bounded}$$

True. Proof of direction \Rightarrow : We have that $|f_n(x)| \leq C$ for all $x \in D, n \geq 1$.
Let $\varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}$ such that $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

$|f(x)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x)| \leq \varepsilon + C$. The other direction follows analogously.

2. Let $f_n \rightarrow f, g_n \rightarrow g$ pointwise. Then $f_n g_n \rightarrow fg$ pointwise

True, follows from limit rules of sequences.

3. Let $f_n \rightarrow f, g_n \rightarrow g$ uniformly. Then $f_n g_n \rightarrow fg$ uniformly

False. Counterexample: $f_n(x) = x \rightarrow x$ uniformly, $g_n(x) = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ uniformly. However, $f_n(x)g_n(x) = \frac{x}{n}$ does not converge uniformly.

The statement is true however if we additionally demand that f_n and g_n are bounded.

Let $\varepsilon > 0$ be arbitrary. $|f_n(x)| \leq C, |g_n(x)| \leq C$ for some $C > 0$.

$|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| = |f_n(x)g_n(x) - f_n(x)g(x) + f_n(x)g(x) - f(x)g(x)| \leq |f_n(x)g_n(x) - f_n(x)g(x)| + |f_n(x)g(x) - f(x)g(x)| = |f_n(x)||g_n(x) - g(x)| + |g(x)||f_n(x) - f(x)| < C\varepsilon' + C\varepsilon'$ for any $\varepsilon' > 0$. Choosing $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2C}$ yields the desired result.

4. $(f_n \rightarrow f \text{ uniformly}, f_p \text{ continuous} \iff p \text{ prime}) \implies f \text{ continuous}$

True. f_p for p prime is a subsequence of f_n that also converges to f . f is continuous using the result that if $f_n \rightarrow f$ uniformly and f_n continuous $\forall n \geq 1$, f is also continuous.

2 Gleichmässige Konvergenz continued

Beweis von Charakterisierung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)|) = 0$$

Aufgaben:

1. Begründe auf drei verschiedene Arten, warum $f_n(x) = x^n$ auf $[0, 1]$ nicht gleichmässig konvergiert
2. Zeige, dass $f_n(x) = 1 + x^n(1-x)^n$ gleichmässig gegen 1 konvergiert ($D = [0, 1]$)

$$0 \leq x(1-x) = x - x^2 = -(x - 1/2)^2 + 1/4 \leq 1/4$$

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,1]} |1 + (x(1-x))^n - 1| = \sup_{x \in [0,1]} |(x(1-x))^n| \leq \sup_{x \in [0,1]} |(1/4)^n| = (1/4)^n \rightarrow 0.$$

3 Potenzreihen: Gleichmässige Konvergenz und Stetigkeit

Recap: Siehe Woche 4.

Wir betrachten die Potenzreihe $S_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$ mit Konvergenzradius ρ .

1. $S_n(x)$ konvergiert gleichmässig auf $[-r, r]$ für r mit $0 \leq r < \rho$
Wichtig: $S_n(x)$ ist nicht unbedingt auf $(-\rho, \rho)$ gleichmässig konvergent. Intuitiv kann es zu einem Problem führen, wenn x sehr nahe an ρ ist und $S_n(x)$ für $x = \rho$ nicht konvergiert. Aufgabe 7.3 a) fragt hierzu nach einem Gegenbeispiel.
2. $S_n(x)$ ist stetig auf $(-\rho, \rho)$

Aufgabe: Bestimme den Konvergenzradius ρ von $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1})^n}{n^2} x^n$ und zeige Konvergenz bei $-\rho, +\rho$.

4 Trigonometrische Funktionen

In der Vorlesung wurden $\sin(x)$ und $\cos(x)$ als Funktionen von \mathbb{C} nach \mathbb{C} als Potenzreihen definiert.

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k)!}$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^k$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} (-1)^k$$

Wichtigste Resultate/Identitäten

Als Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind cos und sin stetig.

1. $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ (Eulersche Formel)

Zusammenhang zu geometrischer Definition: e^{ix} ist eine komplexe Zahl am Rand des Einheitskreises, Rotation gegen den Uhrzeigersinn um x . $\cos(x)$ ist Projektion auf reelle Achse, $\sin(x)$ auf die komplexe Achse.

2. $\cos(x) = \cos(-x)$ (gerade Funktion)

$\sin(-x) = -\sin(x)$ (ungerade Funktion)

3.

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Leiten sich aus der Eulerschen Formel ab, oft hilfreich, um Identitäten herzuleiten.

4. $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ (intuitiv am Einheitskreis mit Satz von Pythagoras)

5. $\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$

$$\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$$

(Additionsformeln; kann man mit (3) zeigen)

Zwei typische Aufgabentypen sind, Linearkombinationen von $\sin(kx), \cos(kx)$ zu Linearkombinationen von Produkten von $\sin^k(x), \cos^k(x)$ umzuschreiben (und andersherum, diese Richtung wird beim Bestimmen von Integralen hilfreich sein).

Linearkomb. von $\sin(kx), \cos(kx) \longleftrightarrow$ Linearkomb. von Produkten von $\sin^k(x), \cos^k(x)$

\longrightarrow :

- Additionsformeln wiederholt anwenden, siehe hier

- $\sin(kx) = \operatorname{Im}(e^{ikx}) = \operatorname{Im}((e^{ix})^k) = \operatorname{Im}((\cos(x) + i \sin(x))^k)$ ausmultiplizieren mit Binomischer Formel

←:

- $\sin^k(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^k$
 $\cos^k(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^k$

Ausmultiplizieren mit Binomischer Formel, dann vereinfachen mit $\sin(kx) = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$

- 1) Schreibe $\cos^4(x)$ als Linearkombination von $\cos(kx), \sin(kx), k \in \mathbb{N}$ (keine Potenzen!)

$$\cos^4(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}(e^{4ix} + 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} + 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix}) = \\ \frac{1}{8}\frac{e^{4ix} + e^{-4ix}}{2} + \frac{1}{2}\frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} + \frac{3}{8} = \frac{\cos(4x)}{8} + \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{3}{8}$$

- 2) Schreibe $\sin(3x)$ als Linearkombination von Produkten von Potenzen $\sin^k(x), \cos^k(x)$

$$\sin(3x) = \operatorname{Im}(e^{i3x}) = \operatorname{Im}((e^{ix})^3) = \operatorname{Im}((\cos(x) + i \sin(x))^3) = \operatorname{Im}(\cos^3(x) + 3\cos^2(x)i \sin(x) + 3\cos(x)i^2 \sin^2(x) + i^3 \sin^3(x)) = \operatorname{Im}(\cos^3(x) + i3\cos^2(x)\sin(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) - i\sin^3(x)) = 3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x)$$

5 Hints

7.2.: Hier ist entscheidend, dass gleichmässige Konvergenz vorausgesetzt wird. Versuche, mit dem Cauchy-Kriterium für gleichmässige Konvergenz von $S_n = \sum_{k=0}^n c_k x^k$ mit $m = n - 1$ einen Widerspruch herzuleiten (durch Wahl eines x , das zu einem Widerspruch zur Aussage des Cauchy-Kriteriums führt).

7.3.: Versuche es mit Potenzreihen, die durch möglichst einfache Folgen c_k definiert sind

Extraaufgabe: Finde eine Potenzreihe, die gleichmässig in $[-r, \rho)$ konvergiert für $0 \leq r < \rho$, aber nicht in $(-\rho, \rho)$ gleichmässig konvergiert.

7.4.: Hier ist die Idee, die Werte analytisch (nicht geometrisch) mit Resultaten aus der Vorlesung (insbesondere Korollar 3.8.3, double angle formulas) und schon bekannten Werten von \sin / \cos zu bestimmen.

7.5.: Siehe 4

7.6.: Verwende Additionsformeln