

Exercises: Master Solution

Felix Breuer, Manuel Di Sabatino

FS 2024

Bestimme folgende Integrale:

1

$$\int \frac{1}{x \ln(x) + 2x} dx$$

wobei $x \geq 1$

Lösung: $\ln(\ln(x) + 2) + C$ für ein $C \in \mathbb{R}$.

(Bemerkung: Falls wir $x \in (0, 1)$ auch zulassen: $\ln(|\ln(x) + 2|) + C$ (da $\ln(x) + 2$ negativ sein könnte))

Quelle

2

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 - 4x + 2}{(x-1)(x+3)} dx$$

Lösung: $\frac{x^2}{2} + \frac{\ln|x-1|}{4} - \frac{5\ln|x+3|}{4} + C$

p.68, ex.2.4(a)

Quelle

3

$$\int_0^1 x \ln(x^2 + 1) dx$$

Lösung: $\ln(2) - \frac{1}{2}$

Quelle

4

$$\int \frac{\cos y}{\sin^2 y + \sin y - 6} dy$$

Lösung: $\frac{1}{5}(\ln |\sin y - 2| - \ln |\sin y + 3|) + C$

Quelle

5

$$\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

Lösung: $\frac{8}{5}(1 + \sqrt[4]{x})^{5/2} - \frac{8}{3}(1 + \sqrt[4]{x})^{3/2} + C$

Thomas Michaels Analysis I Beispiel 16.7.9

6

$$\int x \ln^2(x) dx$$

Lösung: $\frac{x^2}{2} \ln^2(x) - \frac{x^2}{2} \ln(x) + \frac{x^2}{4} + C$

p.71, ex 2.5(c), here

7

Finde $g'(\pi/4)$, wobei

$$g(x) = \int_x^{x+\pi/2} \sin(t) \cos(t) dt$$

Lösung: -1

p.67, ex. 2.1(b)

Quelle

8

Berechne das Taylorpolynom der dritten Ordnung von $f(x) = \cos(\pi\sqrt{x})$ bei $x_0 = 1$

Lösung: $-1 + \frac{\pi^2}{8}(x-1)^2 - \frac{\pi^2}{16}(x-1)^3$

Quelle

9

Seien $(a_k)_{k \geq 1}$, $(b_k)_{k \geq 1}$ und $(c_k)_{k \geq 1}$ drei Folgen. Sei $(d_k)_{k \geq 1}$ definiert durch

$$d_k = \frac{(a_k)^2 + \sin(b_k)}{1 + \exp(c_k)}$$

Wahr oder Falsch?

- (i) Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ absolut konvergieren, gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} d_k = 0$.
(ii) wenn $(d_k)_{k \geq 1}$ beschränkt ist, muss mindestens eine der Folgen $(a_k)_{k \geq 1}$, $(b_k)_{k \geq 1}$ und $(c_k)_{k \geq 1}$ beschränkt sein.

Lösung: (i) Wahr; (ii) Falsch

Quelle

10

Konvergiert folgende Reihe?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt[3]{n^8 + n^3 - 1}}$$

Lösung: Wahr

P. 14, ex.3.1(c)

11

Bestimme $a, b \in \mathbb{R}$, sodass $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - (a+bx)}{x^2}$ in \mathbb{R} existiert und den Grenzwert in diesem Fall

Lösung: $a = 1, b = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - (a+bx)}{x^2} = -1/2$

Ex. 15.28(c)

12

Bestimme den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(|x|^{\sin(x)})$$

Lösung: 0

Thomas Michaels Analysis I Kapitel 7 Aufgabe 31

13

Seien $\sum_{n \geq 0} a_n$, $\sum_{n \geq 0} b_n$ zwei konvergente Reihen mit reellem Grenzwert.

Welche der folgenden Reihen konvergieren?

1. $\sum_{n \geq 0} a_n^k \quad \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

2. $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{a_n}$
3. $\sum_{n \geq 0} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$
4. $\sum_{n \geq 0} p(a_n + b_n) \quad \forall p \in \mathbb{R}$

Lösung: 1, 4

Thomas Michaels Analysis I Kapitel 15 Aufgabe 3

14

Finde **alle** $x, y \in \mathbb{N}, x \neq y$, sodass $x^y = y^x$

Lösung: (2, 4), (4, 2) Note: simply one of the two pairs (e.g 2 and 4) is also a correct answer.

<https://math.stackexchange.com/a/10996>

15

Bestimme den Konvergenzradius von

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{((n-1)!)^3} x^n$$

Lösung: $\frac{1}{27}$

Quelle

16

Konvergiert folgende Reihe?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{\ln(n)^n}$$

Lösung: Wahr

Quelle

17 ★

Bestimme den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (n+k)}$$

Hint: Riemann-Summen

Lösung: $4/e$

Quelle (s/o Nicolas)