

Отчёт вычисл. лаб5

1. Таблица конечных разностей

Построим таблицу конечных разностей для функции $y = f(x)$, заданной в таблице:

x_i	y_i	$\Delta^1 y_i$	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$
0.50	1.5320	1.0036	0.0014	-0.0008	-0.0012	0.0059	-0.0166
0.55	2.5356	1.005	0.0006	-0.002	0.0047	-0.0107	
0.60	3.5406	1.0056	-0.0014	0.0027	-0.006		
0.65	4.5462	1.0042	0.0013	-0.0033			
0.70	5.5504	1.0055	-0.002				
0.75	6.5559	1.0035					
0.80	7.5594						

2. Вычисление значения функции в точке $X_1 = 0.502$

Поскольку точка $X_1 = 0.502$ находится в **левой части отрезка**, используем **первую интерполяционную формулу Ньютона для интерполирования вперёд**:

Шаг интерполяции:

Берём первые два значения узлов:

$$h = 0.55 - 0.50 = 0.05$$

Определим параметр t :

Берём $x_0 = 0.50$, ближайшее левое значение:

$$t = \frac{X_1 - x_0}{h} = \frac{0.502 - 0.50}{0.05} = 0.04$$

Значения из таблицы конечных разностей:

$$\begin{aligned} y_0 &= 1.5320 \\ \Delta y_0 &= 1.0036 \\ \Delta^2 y_0 &= 0.0014 \\ \Delta^3 y_0 &= -0.0008 \\ \Delta^4 y_0 &= -0.0012 \\ \Delta^5 y_0 &= 0.0059 \\ \Delta^6 y_0 &= -0.0166 \end{aligned}$$

Подставим в формулу Ньютона вперёд:

$$N(X) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \dots$$

Первый член:

$$y_0 = 1.5320$$

Второй член:

$$t \cdot \Delta y_0 = 0.04 \cdot 1.0036 = 0.040144$$

Третий член:

$$\begin{aligned} \frac{t(t-1)}{2!} \cdot \Delta^2 y_0 &= \frac{0.04 \cdot (0.04 - 1)}{2} \cdot 0.0014 = \frac{0.04 \cdot (-0.96)}{2} \cdot 0.0014 \\ &= (-0.0192/2) \cdot 0.0014 = -0.0096 \cdot 0.0014 = -0.00001344 \end{aligned}$$

Четвёртый член:

$$\begin{aligned} \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} \cdot \Delta^3 y_0 &= \frac{0.04 \cdot (-0.96) \cdot (-1.96)}{6} \cdot (-0.0008) \\ &= \frac{0.04 \cdot 0.96 \cdot 1.96}{6} \cdot (-0.0008) = \frac{0.075264}{6} \cdot (-0.0008) \\ &= 0.012544 \cdot (-0.0008) = -0.00001003 \end{aligned}$$

Пятый член:

$$\begin{aligned} \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!} \cdot \Delta^4 y_0 &= \frac{0.04 \cdot (-0.96) \cdot (-1.96) \cdot (-2.96)}{24} \cdot (-0.0012) \\ &= \frac{-0.222779}{24} \cdot (-0.0012) = -0.009282 \cdot (-0.0012) = 0.00001114 \end{aligned}$$

Шестой член:

$$\begin{aligned} \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)}{5!} \cdot \Delta^5 y_0 &= \frac{0.04 \cdot (-0.96) \cdot (-1.96) \cdot (-2.96) \cdot (-3.96)}{120} \cdot 0.0059 \\ &= \frac{0.8812}{120} \cdot 0.0059 = 0.007343 \cdot 0.0059 = 0.00004333 \end{aligned}$$

Седьмой член:

$$\begin{aligned} \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)(t-5)}{6!} \cdot \Delta^6 y_0 &= \\ &= \frac{0.04 \cdot (-0.96) \cdot (-1.96) \cdot (-2.96) \cdot (-3.96) \cdot (-4.96)}{720} \cdot (-0.0166) \\ &= \frac{-4.3747}{720} \cdot (-0.0166) = -0.006076 \cdot (-0.0166) = 0.00010086 \end{aligned}$$

Складываем все члены:

$$\begin{aligned} N(X_1) &\approx 1.5320 + 0.040144 - 0.000013 - 0.000010 + 0.000011 + 0.000043 \\ &\quad + 0.000101 = \boxed{1.5723} \end{aligned}$$

Ответ: Значение функции в точке $X_1 = 0.502$ приближённо равно:

$$f(0.502) \approx 1.572$$

3. Вычисление значения функции в точке $X_2 = 0.645$

Так как $X_2 = 0.645$ находится ближе к центру интервала, применим первую интерполяционную формулу Гаусса (так как $x > x_{\text{центр}}$).

Шаг интерполяции:

$$h = 0.05$$

Берём центральный узел $x_3 = 0.65$, соответствующий $y_0 = 4.5462$

Вычислим параметр t :

$$t = \frac{X_2 - x_3}{h} = \frac{0.645 - 0.65}{0.05} = -0.1$$

Используем формулу Гаусса (первая):

$$P_n(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(t+1)t(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \dots$$

Подставим значения из таблицы разностей:

- $y_0 = y_3 = 4.5462$
- $\Delta y_0 = \Delta y_3 = 1.0042$
- $\Delta^2 y_{-1} = \Delta^2 y_2 = -0.0014$
- $\Delta^3 y_{-1} = \Delta^3 y_2 = 0.0027$
- $\Delta^4 y_{-2} = \Delta^4 y_1 = -0.0060$
- $\Delta^5 y_{-2} = \Delta^5 y_1 = 0.0059$
- $\Delta^6 y_{-3} = \Delta^6 y_0 = -0.0166$

Теперь вычислим каждый член:

1. $y_0 = 4.5462$
2. $t \cdot \Delta y_0 = -0.1 \cdot 1.0042 = -0.10042$
3. $\frac{t(t-1)}{2!} \cdot \Delta^2 y_{-1} = \frac{-0.1 \cdot (-1.1)}{2} \cdot (-0.0014) = \frac{0.11}{2} \cdot (-0.0014) = 0.055 \cdot (-0.0014) = -0.000077$
4. $\frac{(t+1)t(t-1)}{3!} \cdot \Delta^3 y_{-1} = \frac{0.9 \cdot -0.1 \cdot -1.1}{6} \cdot 0.0027 = \frac{0.099}{6} \cdot 0.0027 = 0.0165 \cdot 0.0027 = 0.0000446$
5. $\frac{(t+1)t(t-1)(t-2)}{4!} \cdot \Delta^4 y_{-2} = \frac{0.9 \cdot -0.1 \cdot -1.1 \cdot -2.1}{24} \cdot (-0.0060) \approx -0.0000407$
6. $\frac{(t+2)(t+1)t(t-1)(t-2)}{5!} \cdot \Delta^5 y_{-2} \approx 0.0000352$
7. $\frac{(t+2)(t+1)t(t-1)(t-2)(t-3)}{6!} \cdot \Delta^6 y_{-3} \approx -0.0000282$

Складываем всё:

$$P(X_2) \approx 4.5462 - 0.10042 - 0.000077 + 0.000045 - 0.000041 + 0.000035 - 0.000028$$

$$= \boxed{4.4457}$$

Ответ: Значение функции в точке $X_2 = 0.645$ приближённо равно:

$$f(0.645) \approx 4.446$$