Отчёт вычмат лаб3

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Лабораторная работа №3
по дисциплине

«Вычислительная математика»

Вариант №7

Выполнил: Студент группы P3213
Молчанов Фёдор Денисович

Проверила: Машина Е.А.

г. Санкт-Петербург

2025 г.

Вычислительная реализация задачи

исходный интеграл

$$\int_0^2 (4x^3 - 5x^2 + 6x - 7)dx$$

Метод Ньютона-Котеса

$$I_{cotes} = \sum_{i=0}^{n} c_i^n f(x_i)$$

Используем шаг $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ и коэффициенты из таблицы.

$$a = 0, \quad b = 2, \quad n = 6, \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Узлы:

$$x_i = a + i \cdot h$$

Подставим значения:

$$I_{cotes} = (0.097619 * -7.000000 + 0.514286* \\ -5.407407 + 0.064286 * -4.037037 + 0.647619* \\ -2.000000 + 0.064286 * 1.592593 + 0.514286* \\ 7.629630 + 0.097619 * 17.000000) \\ \approx 0.66667$$

Метод средних прямоугольников

Вычислим интеграл численно методом средних прямоугольников при $n = 10$ ($h = \frac{b-a}{n} = 0.2$):

$$I_{square} = h \sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right)$$

Точки:

$$x_i = a + \left(i + \frac{1}{2}\right)h$$

Подставим значения функции:

$$I_{square} = 0.2 \cdot (-6.44600 + -5.54200+ \\ -4.75000 + -3.87800 + -2.73400 + -1.12600 + 1.13800+ \\ 4.25000 + 8.40200 + 13.78600) \\ \approx 0.62000$$

Оценка погрешности метода:

$$f'(x) = 212 \cdot x - 10 \cdot x + 6$$

$$f''(x) = 24 \cdot x - 10 = 24x - 10$$

$$\max_{x \in [0;2]} |f''(x)| \approx 38.0000$$

$$|R| \leq \max_{x \in [a;b]} |f''(x)| \cdot \frac{(b-a)^3}{24n^2} = \frac{38.00 \cdot 8}{24 \cdot 100} \approx 0.12667$$

Вычислим саму погрешность:

$$|I - I_{square}| = |0.66667 - 0.62000| = 0.04667 \leq 0.12667(7.00\%)$$

Метод трапеций

Вычислим интеграл численно методом трапеций при $n = 10$ ($h = \frac{b-a}{n} = 0.2$):

$$I_{trapezoid} = \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$$

$$= \frac{0.2}{2}(-7.00000 + 17.00000+$$
$$2(-5.96800 + -5.14400 + -4.33600$$
$$+ - 3.35200 + -2.00000 + -0.08800$$
$$+2.57600 + 6.18400 + 10.92800))$$
$$\approx 0.76000$$

Оценка погрешности метода:

$$|R| \le \max_{x\in[a;b]} |f''(x)| \cdot \frac{(b-a)^3}{12n^2} = \frac{38.00 \cdot 8}{12 \cdot 100} \approx 0.25333$$

Вычислим саму погрешность:

$$|I - I_{trapezoid}| = |0.66667 - 0.76000| = 0.09333 \le 0.25333(14.00\%)$$

Метод Симпсона

Вычислим интеграл численно методом Симпсона при $n = 10$ ($h = \frac{b-a}{n} = 0.2$):

$$I_{simpson} = \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 4\sum_{i=1,3,\ldots}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{i=2,4,\ldots}^{n-2} f(x_i)\right)$$

$$I = \frac{0.2}{3}(-7.00000 + 17.00000+$$
$$4(-5.96800 + -4.33600 + -2.00000 + 2.57600 + 10.92800)$$
$$+2(-5.14400 + -3.35200 + -0.08800 + 6.18400))$$
$$\approx 0.66667$$

Оценка погрешности метода:

$$f'''(x) = 24, \quad f''''(x) = 0$$

$$\max|f''''(x)| \approx 0.0000$$

$$|R| \le \frac{(b-a)^5}{180n^4} \cdot \max|f''''(x)| = \frac{0.00 \cdot 32}{180 \cdot 10000} \approx 0.00000$$

Вычислим саму погрешность:

$$|I - I_{simpson}| = |0.66667 - 0.66667| = 0.00000 \le 0.00000(0.00\%)$$