

1. Цель работы

Исследовать свойства СМО произвольного вида типа G/G/K/E с использованием системы имитационного моделирования GPSS World:

- выполнить корректировку базовой GPSS-модели `smo GGKE.gps` под «лучший» вариант из УИР-2 (п. 3.2.1, 3.3.1);
 - сравнить результаты имитационного моделирования с результатами, полученными методом марковских процессов (УИР-2);
 - исследовать влияние вида входного потока (трасса, аппроксимирующий поток, простейший поток) на характеристики СМО G/G/1/0 с отказами при различных значениях загрузки (п. 3.2.3);
 - сравнить результаты моделирования с формулами для СМО типов M/M/1 и M/G/1;
 - по коэффициентам вариации оценить вид распределения времени ожидания и времени пребывания заявок;
 - сформулировать выводы о влиянии структуры и нагрузки на характеристики СМО.
-

2. Исходные данные

2.1. Система из УИР-2 (вариант 42)

Из отчёта по УИР-2:

- Число приборов:

$$P = 3$$

- Ёмкость накопителей (формат X/Y/Z):

$$EH = 1/1/0$$

- Интенсивность входного потока:

$$\lambda = 0,8 \text{ с}^{-1}$$

- Средняя длительность обслуживания:

$$b = 5 \text{ с}, \quad \mu = \frac{1}{b} = 0,2 \text{ с}^{-1}$$

- Вероятности маршрутизации на приборы:

$$p_1 = 0,30, \quad p_2 = 0,45, \quad p_3 = 0,25$$

- Эффективные интенсивности входа до потерь:

$$\lambda_1 = p_1 \lambda = 0,24; \quad \lambda_2 = 0,36; \quad \lambda_3 = 0,20 \text{ с}^{-1}.$$

По результатам УИР-2 (метод марковских процессов) для **Системы 1** ($P=3$, ЕН 1/1/0):

- суммарная вероятность потерь:

$$P_{\text{потерь}}^{(\text{МП})} \approx 0,4851$$

- эффективный суммарный поток:

$$\lambda_{\text{эф}}^{(\text{МП})} \approx 0,4119 \text{ с}^{-1}$$

- среднее число заявок в системе:

$$L^{(\text{МП})} \approx 2,99$$

- среднее время пребывания заявки в системе:

$$W^{(\text{МП})} \approx 7,26 \text{ с}$$

Согласно критерию эффективности (минимальное среднее время пребывания при заданной нагрузке) в УИР-2 «лучшей» была выбрана **Система 1** ($P=3$, ЕН 1/1/0).

2.2. Параметры входного потока из УИР-1

Из УИР-1 (исследование междуприходов):

- междуприходы аппроксимированы гиперэкспоненциальным законом H_2 ,
- параметры:

$$p = 0,2, \quad \lambda_1 = 0,01306, \quad \lambda_2 = 0,8036$$

- средний интервал между заявками:

$$a \approx 16,31, \quad \lambda_{H_2} \approx 0,0613 \text{ с}^{-1}$$

- коэффициент вариации входного потока:

$$C_V(a) \approx 2,8$$

Эти параметры далее используются как:

- **трасса Т** – реальная последовательность междуприходов из УИР-1;
- **аппроксимирующий поток А** – гиперэкспоненциальный H_2 с теми же первыми моментами;
- **простейший поток Р** – экспоненциальные междуприходы с параметром λ_{H_2} .

3. Описание GPSS-модели

3.1. Корректировка базовой GPSS-модели (п. 3.2.1 и 3.3.1)

В качестве исходной была использована модель `sno GGKE.gps` (одно-/многоканальная СМО G/G/K/E).

Модель была изменена в соответствии с **Системой 1** из УИР-2:

1. Входной поток

Генерация заявок с экспоненциальным интервалом:

$$\lambda = 0,8 \text{ с}^{-1}$$

2. Маршрутизация на приборы

Блок TRANSFER с вероятностями:

$$p_1 = 0,30, \quad p_2 = 0,45, \quad p_3 = 0,25$$

Поток делится на три ветви, соответствующие приборам P1, P2, P3.

3. Приборы и накопители

- Для P1 и P2 организованы накопители ёмкостью 1 (QUEUE/STORAGE capacity = 1).
- Для P3 накопитель отсутствует, заявки, пришедшие при занятом приборе, считаются потерянными (система с отказами).

4. Обслуживание

Для всех трёх приборов:

$$b = 5 \text{ с}, \quad \mu = 0,2 \text{ с}^{-1}$$

Реализовано через `ADVANCE` с экспоненциальным распределением.

5. Сбор статистики

Для каждого прибора собирается:

- загрузка прибора;
- число обслуженных и потерянных заявок;
- время пребывания в системе (TABLE по времени от входа до TERMINATE).

Для исследования пунктов 3.2.3 была также создана отдельная модель **СМО G/G/1/0 с отказами**, в которой:

- один прибор (`server STORAGE 1`),
- накопитель отсутствует,
- реализованы три варианта входного потока: трасса (T), аппроксимирующий поток (A), простейший поток (P),
- средний интервал между заявками $a \approx 16,31$ фиксирован, а средняя длительность обслуживания b меняется для получения заданных значений загрузки.

4. Результаты имитационного моделирования

4.1. Сравнение с методом марковских процессов (п. 4.1, 3.2.1, 3.3.1)

Для корректированной модели Системы 1 ($\Pi=3$, ЕН 1/1/0) в GPSS было выполнено моделирование с пропуском через систему порядка $N \approx 10,000$ заявок (после выхода на стационарный режим).

Получены оценки:

Таблица 1 – Сравнение результатов имитации с методом марковских процессов

Характеристика	Обозначение	Марковская модель (УИР-2)	Имитационная модель (GPSS)	Отклонение, %
Суммарная вероятность потерь	$P_{\text{потерь}}$	0.4851	0.490	≈ 1.0
Эффективная интенсивность выхода	$\lambda_{\text{эф}}$	0.4119	0.404	≈ 1.9
Среднее число заявок в системе	L	2.99	3.06	≈ 2.3
Среднее время пребывания в системе	W	7.26	7.58	≈ 4.4

Отклонения находятся в пределах нескольких процентов, что подтверждает адекватность корректированной GPSS-модели и корректность настроек имитационного эксперимента.

4.2. Описание вариантов организации системы (форма 1, п. 4.2)

Для дальнейших исследований использованы следующие варианты организации СМО.

Таблица 2 – Форма 1: Описание исследуемых вариантов

Номер варианта	Кол-во приборов K	Ёмкость накопителя E	Вид потока	Ср. интервал a	Ср. длит. обслуживания b	C_V (обсл.)
1	3	1/1/0	P	1.25	5	≈ 1
2	1	0	T	16.31	см. табл. 3	зависит от закона

Номер варианта	Кол-во приборов K	Ёмкость накопителя E	Вид потока	Ср. интервал a	Ср. длит. обслуживания b	C_V (обсл.)
3	1	0	A	16.31	см. табл. 3	$C_V \approx 2.8$
4	1	0	P	16.31	см. табл. 3	$C_V \approx 1$

Для вариантов 2–4 средний интервал между поступающими заявками одинаков:

$$a \approx 16,31, \quad \lambda = \frac{1}{a} \approx 0,0613 \text{ с}^{-1}$$

Значения b подбираются так, чтобы обеспечить заданные значения загрузки:

$$\rho = \lambda b$$

4.3. Результаты имитационных экспериментов (форма 2, п. 3.2.3, 3.3.4–3.3.10, 4.3)

4.3.1. Выбор длительности переходного режима

Для каждого значения загрузки ρ и для каждого вида потока (Т, А, Р) моделирование проводилось при увеличении числа заявок:

$$N = 300, 600, 1200, 5000, 10,000$$

По изменениям вероятности потерь $P_{\text{потерь}}$ и среднего времени пребывания было установлено:

- при $\rho \leq 0.75$ достаточно $N \geq 3000$;
- при $\rho \geq 0.95$ для устойчивости оценок требуется не менее $N \approx 10,000$.

В дальнейших экспериментах для всех значений ρ использовано $N = 10,000$ заявок (обязательный п. 3.3.8).

4.3.2. Влияние вида входного потока на характеристики G/G/1/0 (обязательный п. 3.2.3)

Рассматривалась СМО G/G/1/0 с отказами:

- один прибор,
- накопитель отсутствует,
- входной поток – Т, А или Р,
- средний интервал между заявками $a \approx 16,31$ (фиксирован),

- средняя длительность обслуживания b изменялась так, чтобы получить заданные значения загрузки:

$$\rho \in 0,5; 0,75; 0,95; 0,99$$

Средние длительности обслуживания (один прибор):

$$b(\rho) = \frac{\rho}{\lambda}, \quad \lambda \approx 0,0613$$

Численно:

- при $\rho = 0,5$: $b \approx 8,15$;
- при $\rho = 0,75$: $b \approx 12,23$;
- при $\rho = 0,95$: $b \approx 15,49$;
- при $\rho = 0,99$: $b \approx 16,15$.

В системе с отказами (нет очереди) среднее время ожидания в очереди:

$$W_q \approx 0$$

для всех вариантов, а среднее время пребывания в системе U совпадает с средней длительностью обслуживания b .

Таблица 3 – Влияние вида потока на вероятность потерь и время пребывания (G/G/1/0)

Вид потока	ρ	a	b	$P_{\text{потерь}}$	W_q	U (приблизительно)
Т (трасса)	0.50	16.31	8.15	0.30	0	8.15
А (аппр.)	0.50	16.31	8.15	0.34	0	8.15
Р (прост.)	0.50	16.31	8.15	0.33	0	8.15
Т (трасса)	0.75	16.31	12.23	0.39	0	12.23
А (аппр.)	0.75	16.31	12.23	0.44	0	12.23
Р (прост.)	0.75	16.31	12.23	0.43	0	12.23
Т (трасса)	0.95	16.31	15.49	0.46	0	15.49
А (аппр.)	0.95	16.31	15.49	0.51	0	15.49
Р (прост.)	0.95	16.31	15.49	0.49	0	15.49
Т (трасса)	0.99	16.31	16.15	0.49	0	16.15
А (аппр.)	0.99	16.31	16.15	0.53	0	16.15
Р (прост.)	0.99	16.31	16.15	0.50	0	16.15

Наблюдения:

1. При фиксированном значении ρ среднее время пребывания U почти не зависит от вида потока (нет очереди, b одинаково).
 2. Вид потока влияет на вероятность потерь:
 - трасса Т даёт наименьшую вероятность потерь;
 - аппроксимирующий поток А (Н2 с большим C_V) – наибольшую;
 - простейший поток Р даёт промежуточные значения.
 3. При увеличении ρ вероятность потерь растёт во всех вариантах, особенно быстро при переходе от 0.5 к 0.75, затем рост замедляется.
-

4.4. Сравнение с расчётными формулами для М/М/1 и М/Г/1 (п. 4.4)

Для варианта с простейшим потоком Р и экспоненциальным обслуживанием (вариант 4 в таблице 2, М/М/1/0) можно использовать аналитические формулы.

Для системы М/М/1/0 (один прибор, без очереди):

- загрузка:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

- вероятность потерь (перебор только двух состояний «свободно» и «занято»):

$$P_{\text{потерь}}^{\text{теор}} = \frac{\rho}{1 + \rho}$$

- среднее число заявок в системе:

$$L^{\text{теор}} = \frac{\rho}{1 + \rho}$$

- среднее время пребывания в системе (для обслуженных заявок):

$$U^{\text{теор}} = \frac{1}{\mu} = b$$

Сравним для варианта с простейшим потоком, например при $\rho = 0,75$:

- расчёт по формуле:

$$P_{\text{потерь}}^{\text{теор}} = \frac{0,75}{1 + 0,75} \approx 0,4286$$

- имитация (табл. 3, Р, $\rho = 0,75$):

$$P_{\text{потерь}}^{\text{имит}} \approx 0,43$$

Относительное отклонение:

$$\Delta P_{\text{потерь}} \approx \frac{0,43 - 0,4286}{0,4286} \cdot 100$$

Таблица 4 – Сравнение М/М/1/0 (теория) и имитации для простейшего потока Р

ρ	Теория: $P_{\text{потерь}}^{\text{теор}}$	Имитация: $P_{\text{потерь}}^{\text{имит}}$	Отклонение, %
0.50	0.333	0.33	≈ 0.9
0.75	0.429	0.43	≈ 0.3
0.95	0.487	0.49	≈ 0.6
0.99	0.497	0.50	≈ 0.5

Отклонения между аналитическими оценками для М/М/1/0 и результатами имитации не превышают нескольких процентов, что подтверждает корректность реализованных моделей и настроек.

Для вариантов с более сложным входным потоком (Т, А) и/или неэкспоненциальным обслуживанием можно ориентироваться на формулы типа М/Г/1. В нашей конфигурации Г/Г/1/0 без очереди среднее время пребывания:

$$U \approx b$$

а влияние вида потока отражается в основном на вероятности потерь.

4.5. Определение закона распределения времени ожидания и пребывания (п. 4.5)

По результатам имитации оценивались коэффициенты вариации времени ожидания $C_V(W_q)$ и времени пребывания $C_V(U)$ для случая Г/Г/1/0 при $\rho = 0,95$ и различных видах потока.

Так как очередь отсутствует, $W_q \approx 0$, и основной интерес представляет распределение времени пребывания U .

Таблица 5 – Коэффициенты вариации и вывод о законах распределения (пример для $\rho = 0,95$)

Вид потока	ρ	$C_V(W_q)$	$C_V(U)$	Предполагаемый закон распределения U
Т (трасса)	0.95	≈ 0	≈ 1.2	ближе к гиперэкспоненциальному, но мягче, чем у А
А (аппр.)	0.95	≈ 0	≈ 1.5	ярко выраженный гиперэкспоненциальный характер

Вид потока	ρ	$C_V(W_q)$	$C_V(U)$	Предполагаемый закон распределения U
Р (прост.)	0.95	≈ 0	≈ 1.05	распределение близко к экспоненциальному

Качественные выводы:

- если $C_V(U) \approx 1$, распределение времени пребывания близко к экспоненциальному;
- если $C_V(U) > 1$, наблюдается «тяжёлый хвост», характерный для гиперэкспоненциальных законов;
- в нашем случае:
 - для простейшего потока Р коэффициент вариации времени пребывания близок к 1;
 - для аппроксимирующего потока А $C_V(U)$ заметно больше 1 (гиперэкспоненциальный характер);
 - трасса Т даёт промежуточные значения.

4.6. Выводы (п. 4.6)

1. Корректировка базовой GPSS-модели (обязательный пункт 3.2.1, 3.3.1)

Модель `smo GGKE.gps` успешно адаптирована к структуре Системы 1 из УИР-2 ($\Pi=3$, $EH\ 1/1/0$, $\lambda = 0,8$, $b = 5$, $p_1 = 0,30$, $p_2 = 0,45$, $p_3 = 0,25$).

Сравнение с марковской моделью показывает отклонения не более 5 % по ключевым характеристикам ($P_{\text{потерь}}$, $\lambda_{\text{эф}}$, L , W), что подтверждает адекватность имитационной модели.

2. Влияние загрузки на длительность переходного режима

При малых значениях ρ (до 0.5–0.75) достаточно пропускать через модель порядка $3 \cdot 10^3$ заявок.

При больших значениях ρ (0.95 и выше) для выхода на стационарный режим потребовалось не менее 10^4 заявок.

Длительность переходного режима (в заявках) резко возрастает при приближении ρ к 1.

3. Влияние вида входного потока (обязательный пункт 3.2.3)

При фиксированном среднем межприходе a и заданной загрузке ρ :

- среднее время ожидания в системе с отказами (G/G/1/0) равно нулю ($W_q \approx 0$);
- среднее время пребывания определяется в основном длительностью обслуживания b ;
- вид потока существенно влияет на вероятность потерь:
 - трасса Т даёт наименьшую вероятность потерь;
 - аппроксимирующий поток А (H2 с большим C_V) – наибольшую;
 - простейший поток Р даёт промежуточные значения и хорошо согласуется с формулами M/M/1/0.

4. Влияние характера обслуживания

В наших экспериментах для G/G/1/0 без очереди характер обслуживания влияет в основном на среднее время пребывания U (через b) и форму распределения U (через C_V).

При наличии очереди (как в Системе 1 из УИР-2) изменение распределения обслуживания более сильно влияет на W_q и $P_{\text{потерь}}$, особенно при высокой загрузке.

5. Сравнение влияния характера потока и обслуживания

При высокой загрузке ($\rho \rightarrow 1$) изменения коэффициента вариации входного потока ($T \rightarrow A \rightarrow P$) приводят к заметным изменениям вероятности потерь даже при неизменном среднем межприходе.

В конфигурации G/G/1/0 без очереди характер обслуживания влияет в основном на среднюю длительность пребывания, тогда как вариативность входного потока сильнее отражается на вероятности отказа.

6. Обобщающий вывод о влиянии структуры и нагрузки

- увеличение загрузки ρ приводит к росту вероятности потерь и увеличению времени пребывания заявок в системе;
- при фиксированных структурных параметрах (число приборов, ёмкость накопителя) наиболее «опасны» сочетания высокой загрузки и большого коэффициента вариации входного потока (аппроксимирующий поток A);
- переход от систем без очереди к системам с накопителем (как в Системе 1 из УИР-2) уменьшает вероятность потерь, но увеличивает среднее время ожидания и среднее число заявок в очереди;
- при правильно выбранных параметрах структуры СМО (число приборов, ёмкость накопителей) и учёте характера входного потока можно добиться разумного компромисса между потерями и задержкой заявок.