

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Лабораторная работа №2
по дисциплине

«Моделирование»

Вариант №42

Выполнили: Студенты группы Р3313

Молчанов Фёдор Денисович

Пышкин Никита Сергеевич

Проверил: Тропченко Андрей Александрович

г. Санкт-Петербург

2025 г.

Задание

- Получить вариант работы.
- Построить графы переходов для заданных СИСТЕМЫ_1 и СИСТЕМЫ_2.
- С использованием программы MARK рассчитать характеристики марковского процесса для СИСТЕМЫ_1 и СИСТЕМЫ_2.
- Проанализировать характеристики функционирования системы.
- Выбрать и обосновать наилучший способ организации системы в соответствии с заданным критерием эффективности.

Вариант	СИСТЕМА_1		СИСТЕМА_2	
	П	ЕН	П	ЕН
42	3	1/1/0	2(H_{2,6})	1/2

Интенсивность потока: $\lambda = 0,8$

Средняя длительность обслуживания: $b = 5$

Вероятности занятия прибора:

$$P1 = 0,3 \quad P2 = 0,45 \quad P3 = 0,25$$

P – число обслуживающих Приборов в системе;

$P(E_k)$ – в одном из Приборов (любом) длительность обслуживания распределена по закону Эрланга k -го порядка;

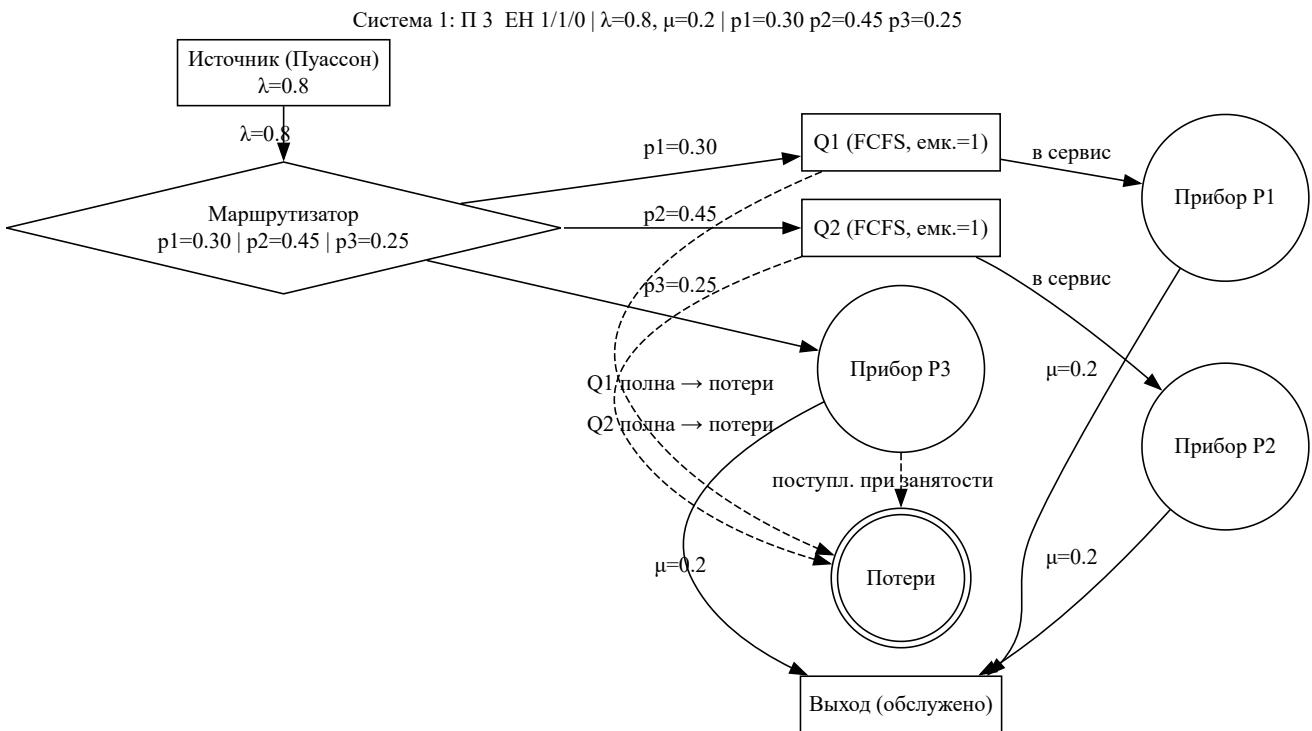
$P(H_v)$ – в одном из Приборов (любом) длительность обслуживания распределена по гиперэкспоненциальному закону с коэффициентом вариации, равным v ;

EH - Емкости Накопителей: X/Y/Z (X - перед первым прибором, Y - перед вторым прибором и Z - перед третьим прибором);

Система 1

Описание исследуемой системы

Рисунок 1. Схематическое представление системы 1

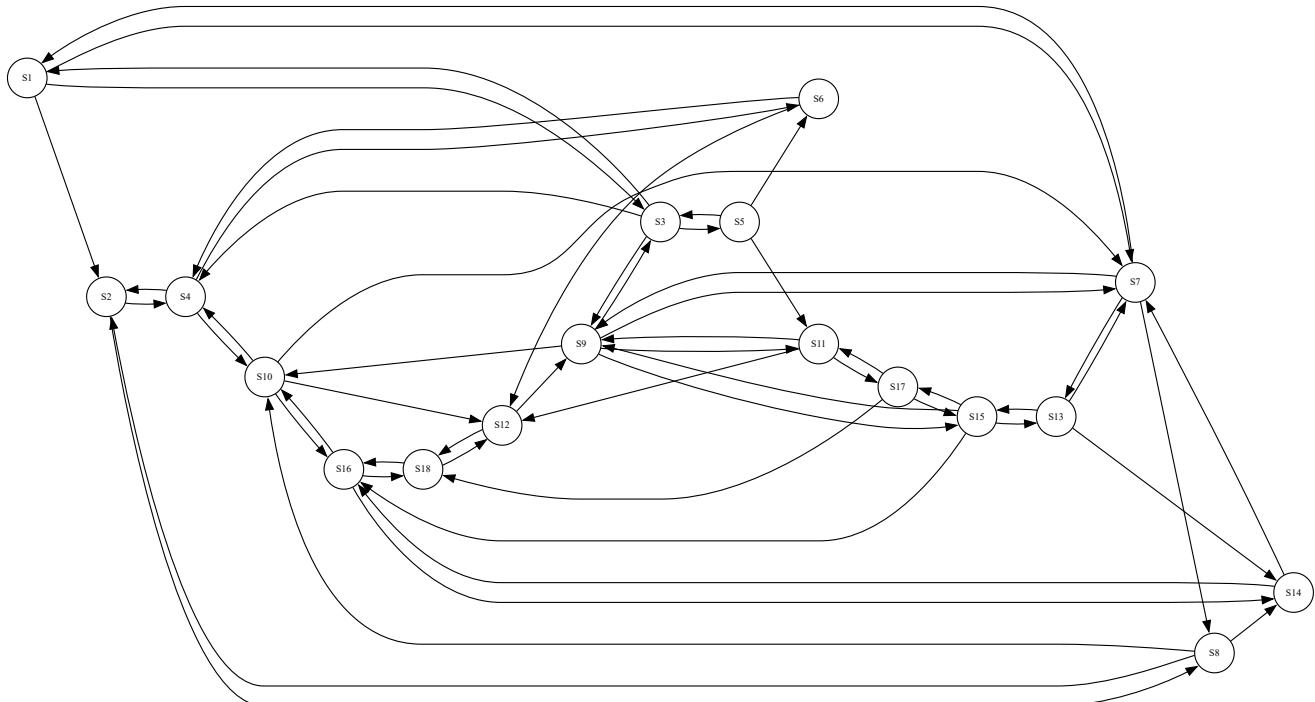


- Тип: **П 3 ЕН 1/1/0** — три параллельных прибора P_1, P_2, P_3 ; общий вход; перед P_1 и P_2 по одному месту ожидания; перед P_3 ожидания нет (потери).
- Вход: однородный пуассонов поток с интенсивностью $\lambda = 0,8 \text{ с}^{-1}$.
- Маршрутизация: заявка направляется в P_i с вероятностью $p_1 = 0,3, ; p_2 = 0,45, ; p_3 = 0,25$ (независимо и мгновенно при поступлении).
- Обслуживание: экспоненциальное в каждом приборе с одинаковой средней длительностью $b = 5 \text{ с}$, т.е.
 $\mu = \frac{1}{b} = 0,2 \text{ с}^{-1}$ для P_1, P_2, P_3 .
- Буферизация: с потерями — если соответствующий накопитель полон (или отсутствует), заявка **теряется**.

- Дисциплина обслуживания: **FCFS** в каждом накопителе.
- Эффективные интенсивности входа до потерь:
 $\lambda_1 = p_1\lambda = 0,24$, ; $\lambda_2 = 0,36$, ; $\lambda_3 = 0,20 \text{ с}^{-1}$.
- Нагрузки по приборам (до учёта потерь):
 $\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu} = 4p_i \Rightarrow \rho_1 = 1,2$, $\rho_2 = 1,8$, $\rho_3 = 1,0$
(при конечных буферах система устойчива, но будут ненулевые потери).

Правила переходов

Рисунок 2. Граф переходов системы 1



- Поступление (интенсивность λ):
с вероятностью p_i заявка направляется к P_i .
 - Для P_1 и P_2 : если $n_i = 0$ — сразу в обслуживание ($n_i! \leftarrow !1$);
если $n_i = 1$ и $q_i = 0$ — занимает единственное место ожидания ($q_i! \leftarrow !1$);
если $n_i = 1$ и $q_i = 1$ — потеря (состояние не меняется).
 - Для P_3 : если $n_3 = 0$ — сразу в обслуживание ($n_3! \leftarrow !1$);
если $n_3 = 1$ — потеря.
- Завершение обслуживания (интенсивность μ для каждого занятого прибора):
 - Для P_1 и P_2 : если $q_i = 1$, то $q_i! \leftarrow !0$, n_i остаётся 1 (к обслуживанию переходит ожидавшая заявка);
если $q_i = 0$, то $n_i! \leftarrow !0$.
 - Для P_3 : $n_3! \leftarrow !0$.

Перечень состояний (Система 1: П 3, ЕН 1/1/0)

Обозначим состояние как $n1/q1/n2/q2/n3$, где

$n1$ — число заявок, обслуживаемых на П1 (0 или 1), $q1$ — число заявок в очереди на П1 (0 или 1);

n_2 — число заявок, обслуживаемых на П2 (0 или 1), q_2 — число заявок в очереди на П2 (0 или 1);

n_3 — число заявок на П3 (0 или 1), очередь на П3 отсутствует.

Допустимы только сочетания, где очередь есть лишь при занятости прибора: если $q_1 = 1$, то $n_1 = 1$; если $q_2 = 1$, то $n_2 = 1$.

Таблица. Перечень возможных состояний Системы 1

№	Обозначение	Описание
S0	0/0/0/0/0	В системе нет заявок
S1	1/0/0/0/0	Одна заявка на П1
S2	0/0/1/0/0	Одна заявка на П2
S3	0/0/0/0/1	Одна заявка на П3
S4	1/0/1/0/0	Две заявки: на П1 и П2
S5	1/0/0/0/1	Две заявки: на П1 и П3
S6	0/0/1/0/1	Две заявки: на П2 и П3
S7	1/1/0/0/0	Две заявки: одна на П1, одна в очереди П1
S8	0/0/1/1/0	Две заявки: одна на П2, одна в очереди П2
S9	1/0/1/0/1	Три заявки: на П1, П2 и П3
S10	1/1/0/0/1	Три заявки: на П1, П3 и в очереди П1
S11	0/0/1/1/1	Три заявки: на П2, П3 и в очереди П2
S12	1/1/1/0/0	Три заявки: на П1, П2 и в очереди П1
S13	1/0/1/1/0	Три заявки: на П1, П2 и в очереди П2
S14	1/1/1/0/1	Четыре заявки: П1, П2, П3 и очередь П1
S15	1/0/1/1/1	Четыре заявки: П1, П2, П3 и очередь П2
S16	1/1/1/1/0	Четыре заявки: П1, П2 и очереди П1, П2
S17	1/1/1/1/1	Пять заявок: П1, П2, П3 и очереди П1, П2

Стационарные вероятности событий

Номер состояния	Система_1	
1	π_0 (S1)	0.022742
2	π_1 (S2)	0.027291
3	π_2 (S3)	0.040936
4	π_3 (S4)	0.022742

Номер состояния	Система_1	
5	$\pi_4 (S5)$	0.049123
6	$\pi_5 (S6)$	0.027291
7	$\pi_6 (S7)$	0.040936
8	$\pi_7 (S8)$	0.032749
9	$\pi_8 (S9)$	0.073685
10	$\pi_9 (S10)$	0.049123
11	$\pi_{10} (S11)$	0.032749
12	$\pi_{11} (S12)$	0.073685
13	$\pi_{12} (S13)$	0.058948
14	$\pi_{13} (S14)$	0.088422
15	$\pi_{14} (S15)$	0.058948
16	$\pi_{15} (S16)$	0.088422
17	$\pi_{16} (S17)$	0.106106
18	$\pi_{17} (S18)$	0.106106

Матрица интенсивностей переходов

	S0	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S
S0	-0.80	0.24	0.36	0.20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0
S1	0.20	-1.00	0.00	0.00	0.36	0.20	0.00	0.24	0.00	0.00	0.00	0
S2	0.20	0.00	-1.00	0.00	0.24	0.00	0.20	0.00	0.36	0.00	0.00	0
S3	0.20	0.00	0.00	-0.80	0.00	0.24	0.36	0.00	0.00	0.00	0.00	0
S4	0.00	0.20	0.20	0.00	-1.20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.20	0.00	0
S5	0.00	0.20	0.00	0.20	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	0.36	0.24	0
S6	0.00	0.00	0.20	0.20	0.00	0.00	-1.00	0.00	0.00	0.24	0.00	0
S7	0.00	0.20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.76	0.00	0.00	0.20	0
S8	0.00	0.00	0.20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.64	0.00	0.00	0
S9	0.00	0.00	0.00	0.00	0.20	0.20	0.20	0.00	0.00	-1.20	0.00	0
S10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.20	0.00	0.20	0.00	0.00	-0.76	0
S11	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.20	0.00	0.20	0.00	0.00	-1
S12	0.00	0.00	0.00	0.00	0.20	0.00	0.00	0.20	0.00	0.00	0.00	0
S13	0.00	0.00	0.00	0.00	0.20	0.00	0.00	0.00	0.20	0.00	0.00	0
S14	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.20	0.20	0
S15	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.20	0.00	0

	S0	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S
S16	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0
S17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0

Таблица характеристик системы

Нагрузка ρ показывает, сколько времени в среднем требуется на обработку входящего потока относительно возможности системы (отношение скоростей);

Загрузка Z показывает долю времени, в течение которого прибор находится в работе.

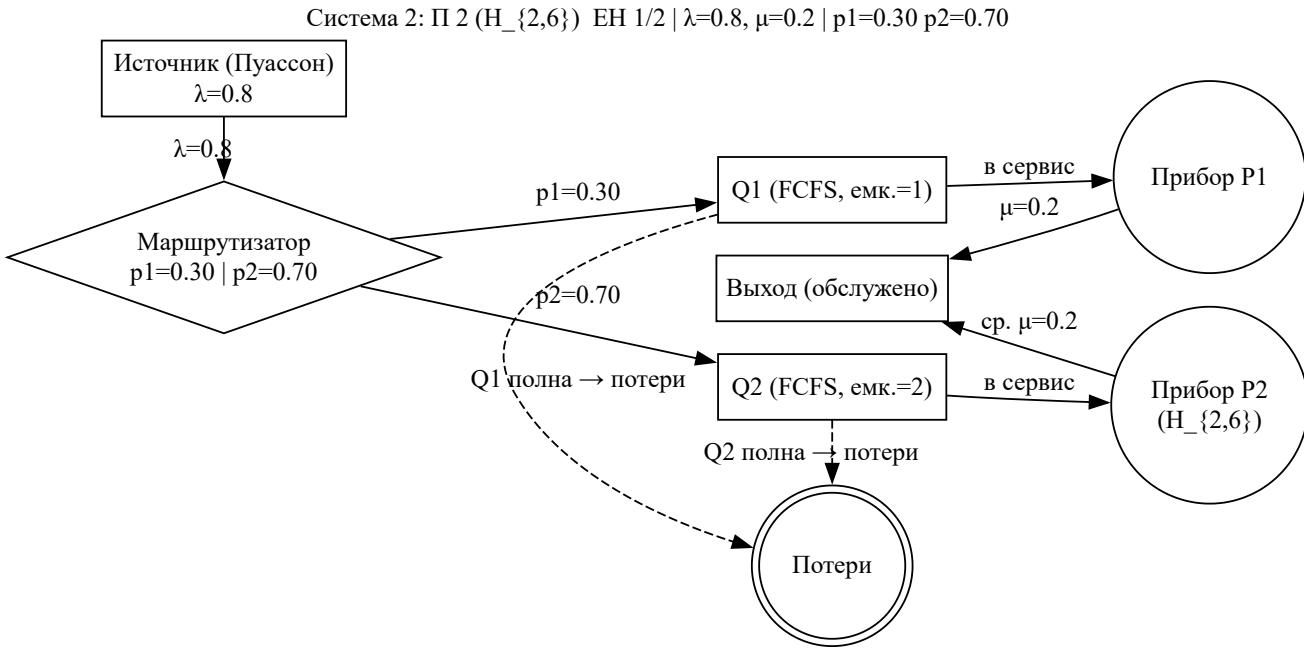
Характеристика	Прибор	Формула	Значение
Нагрузка	P1	$\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu}$	1.2000
Нагрузка	P2	$\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu}$	1.8000
Нагрузка	P3	$\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu}$	1.0000
Нагрузка	Суммарно	$\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu}$	4.0000
Разгрузка	P1	$1 - \rho_i$	-0.2000
Разгрузка	P2	$1 - \rho_i$	-0.8000
Разгрузка	P3	$1 - \rho_i$	0.0000
Разгрузка	Суммарно	$1 - \rho_i$	-3.0000
Вероятность потери	P1	$P_{\text{пот},i} = \sum \pi_j$ (состояния с полной очередью)	0.3956
Вероятность потери	P2	$P_{\text{пот},i} = \sum \pi_j$ (состояния с полной очередью)	0.5364
Вероятность потери	P3	$P_{\text{пот},i} = \sum \pi_j$ (состояния с полной очередью)	0.5000
Вероятность потери	Суммарно	$P_{\text{пот},i} = \sum \pi_j$ (состояния с полной очередью)	0.4851
Длина очереди	P1	$L_{q,i} = \sum q_i^{(j)} \cdot \pi_j$	0.3956
Длина очереди	P2	$L_{q,i} = \sum q_i^{(j)} \cdot \pi_j$	0.5364
Длина очереди	P3	$L_{q,i} = \sum q_i^{(j)} \cdot \pi_j$	0.0000
Длина очереди	Суммарно	$L_{q,i} = \sum q_i^{(j)} \cdot \pi_j$	0.9320
Число заявок в системе	P1	$L_i = \sum (n_i^{(j)} + q_i^{(j)}) \cdot \pi_j$	1.1209
Число заявок в системе	P2	$L_i = \sum (n_i^{(j)} + q_i^{(j)}) \cdot \pi_j$	1.3709
Число заявок в системе	P3	$L_i = \sum (n_i^{(j)} + q_i^{(j)}) \cdot \pi_j$	0.5000

Характеристика	Прибор	Формула	Значение
Число заявок в системе	Суммарно	$L_i = \sum(n_i^{(j)} + q_i^{(j)}) \cdot \pi_j$	2.9917
Производительность	P1	$\lambda_{\text{эф},i} = \lambda_i \cdot (1 - P_{\text{пот},i})$	0.1451
Производительность	P2	$\lambda_{\text{эф},i} = \lambda_i \cdot (1 - P_{\text{пот},i})$	0.1669
Производительность	P3	$\lambda_{\text{эф},i} = \lambda_i \cdot (1 - P_{\text{пот},i})$	0.1000
Производительность	Суммарно	$\lambda_{\text{эф},i} = \lambda_i \cdot (1 - P_{\text{пот},i})$	0.4119
Коэффициент простоя	P1	$P_0 = \pi_0$	-
Коэффициент простоя	P2	$P_0 = \pi_0$	-
Коэффициент простоя	P3	$P_0 = \pi_0$	-
Коэффициент простоя	Суммарно	$P_0 = \pi_0$	0.0227
Время ожидания	P1	$W_{q,i} = \frac{L_{q,i}}{\lambda_{\text{эф},i}}$	2.7273
Время ожидания	P2	$W_{q,i} = \frac{L_{q,i}}{\lambda_{\text{эф},i}}$	3.2143
Время ожидания	P3	$W_{q,i} = \frac{L_{q,i}}{\lambda_{\text{эф},i}}$	0.0000
Время ожидания	Суммарно	$W_{q,i} = \frac{L_{q,i}}{\lambda_{\text{эф},i}}$	2.2625
Время пребывания	P1	$W_i = \frac{L_i}{\lambda_{\text{эф},i}}$	7.7273
Время пребывания	P2	$W_i = \frac{L_i}{\lambda_{\text{эф},i}}$	8.2143
Время пребывания	P3	$W_i = \frac{L_i}{\lambda_{\text{эф},i}}$	5.0000
Время пребывания	Суммарно	$W_i = \frac{L_i}{\lambda_{\text{эф},i}}$	7.2625

Система 2

Описание исследуемой системы

Рисунок 3. Схематическое представление системы 2



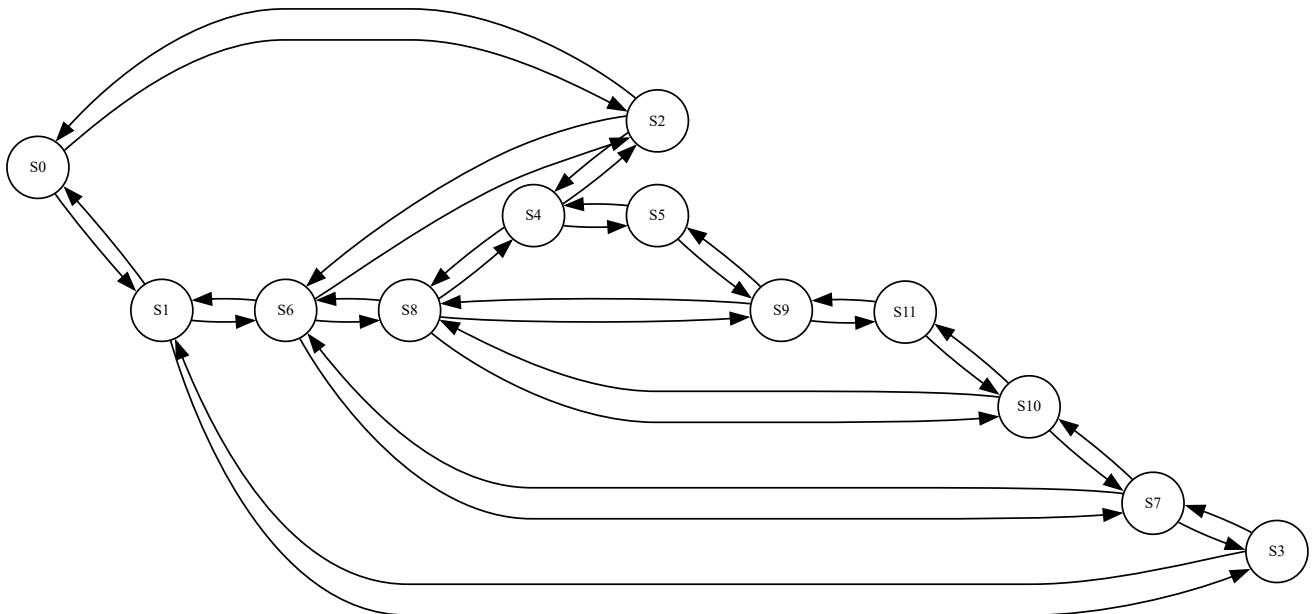
- **Тип:** П 2 ($H_{2,6}$) ЕН 1/2 — два параллельных прибора P_1, P_2 ; общий вход; перед P_1 одно место ожидания, перед P_2 два.
- **Вход:** однородный пуассонов поток с интенсивностью $\lambda = 0.8 \text{ c}^{-1}$.
- **Маршрутизация:** заявка направляется к P_1 с вероятностью $p_1 = 0.3$,
 P_2 с вероятностью $p_2 = 0.7$
(объединили доли $0.45 + 0.25$ из Системы 1). Эффективные интенсивности потоков:
 $\lambda_1 = p_1\lambda = 0.24$,
 $\lambda_2 = p_2\lambda = 0.56 \text{ c}^{-1}$.
- **Обслуживание:** средняя длительность $b = 5 \text{ с}$, то есть
 $\mu = 1/b = 0.2 \text{ c}^{-1}$.
 - Прибор P_1 : экспоненциальное распределение обслуживания $M/M/1/K$.
 - Прибор P_2 : гиперэкспоненциальное распределение $H_{2,6}$
с тем же средним $b = 5 \text{ с}$ и коэффициентом вариации $v = 2.6$.
(В программе MARK указывается тип обслуживания $H_{2,6}$.)
- **Буферизация:**
 P_1 имеет очередь вместимостью 1;
 P_2 имеет очередь вместимостью 2.
 При попытке поступления в полный накопитель заявка **теряется**.
- **Дисциплина обслуживания:** FCFS (первым пришёл — первым обслуживается).
- **Нагрузки (до учёта потерь):**

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu} = 1.2,$$

$$\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu} = 2.8,$$
 суммарно $\rho_\Sigma = 4.0$.
- При конечных буферах система устойчива, но ожидаются заметные потери, особенно на P_2 .

Правила переходов

Рисунок 4. Граф переходов системы 2



Состояние обозначается как $n_1/q_1 // n_2/q_2$, где

- $n_1 \in 0, 1$ — занятость прибора P_1 ;
- $q_1 \in 0, 1$ — число заявок в очереди к P_1 ;
- $n_2 \in 0, 1$ — занятость прибора P_2 ;
- $q_2 \in 0, 1, 2$ — число заявок в очереди к P_2 .

Допустимые комбинации:

если $q_1 = 1 \Rightarrow n_1 = 1$,

если $q_2 > 0 \Rightarrow n_2 = 1$.

1. Поступление заявок (интенсивность $\lambda = 0.8$)

- Для P_1 (вероятность $p_1 = 0.3$):
 - если $n_1 = 0$, то заявка сразу поступает в обслуживание ($n_1 \leftarrow 1$);
 - если $n_1 = 1$ и $q_1 = 0$, то заявка становится в очередь ($q_1 \leftarrow 1$);
 - если $n_1 = 1$ и $q_1 = 1$, то потеря.
- Для P_2 (вероятность $p_2 = 0.7$):
 - если $n_2 = 0$, то заявка сразу поступает в обслуживание ($n_2 \leftarrow 1$);
 - если $n_2 = 1$ и $q_2 < 2$, то заявка встает в очередь ($q_2 \leftarrow q_2 + 1$);
 - если $n_2 = 1$ и $q_2 = 2$, то потеря.

2. Завершение обслуживания

- Прибор P_1 (экспоненциальное распределение):
 - интенсивность $\mu = 0.2$ при $n_1 = 1$.
 - если $q_1 = 1$, то заявка из очереди переходит в обслуживание ($q_1 \leftarrow 0$, n_1 остаётся 1);

- если $q_1 = 0$, то прибор освобождается ($n_1 \leftarrow 0$).
- Прибор P_2 (гиперэкспоненциальное распределение $H_{2,6}$):
интенсивность обслуживания зависит от фазы; в макромодели переход:
 - если $q_2 > 0$, то одна заявка из очереди переходит в обслуживание ($q_2 \leftarrow q_2 - 1$, $n_2 = 1$);
 - если $q_2 = 0$, то прибор освобождается ($n_2 \leftarrow 0$).

Перечень возможных состояний

Всего допустимых состояний — 12.

№	Обозначение	Описание состояния
S0	0/0 // 0/0	Система пуста
S1	1/0 // 0/0	Занят P_1
S2	0/0 // 1/0	Занят P_2
S3	1/1 // 0/0	P_1 занят, одна заявка ждёт в очереди
S4	0/0 // 1/1	P_2 занят, одна заявка ждёт в очереди
S5	0/0 // 1/2	P_2 занят, две заявки ждут (очередь полна)
S6	1/0 // 1/0	Оба прибора заняты
S7	1/1 // 1/0	P_1 занят + очередь 1; P_2 занят
S8	1/0 // 1/1	P_1 занят; P_2 занят + очередь 1
S9	1/0 // 1/2	P_1 занят; P_2 занят + очередь 2
S10	1/1 // 1/1	Оба заняты; очереди $q_1 = 1$, $q_2 = 1$
S11	1/1 // 1/2	Оба заняты; очереди $q_1 = 1$, $q_2 = 2$ (полная загрузка)

Потери происходят при попытках поступления в P_1 из состояния S3, в P_2 — из S5, S9, S11, а также в смешанных состояниях, где соответствующая очередь уже полна.

Стационарные вероятности событий

Номер состояния	Система_2	
1	π_0 (S0)	0.008178
2	π_1 (S1)	0.009814
3	π_2 (S2)	0.022899
4	π_3 (S3)	0.011777
5	π_4 (S4)	0.064118

Номер состояния	Система_2	
6	$\pi_5 (S5)$	0.179530
7	$\pi_6 (S6)$	0.027479
8	$\pi_7 (S7)$	0.032975
9	$\pi_8 (S8)$	0.076941
10	$\pi_9 (S9)$	0.215436
11	$\pi_{10} (S10)$	0.092330
12	$\pi_{11} (S11)$	0.258523

Матрица интенсивностей переходов

Состояние	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_{11}
S_1	-0.80	0.24	0.56	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.0
S_2	0.20	-1.00	0.00	0.24	0.00	0.00	0.56	0.00	0.00	0.00	0.0
S_3	0.20	0.00	-1.00	0.00	0.56	0.00	0.24	0.00	0.00	0.00	0.0
S_4	0.00	0.20	0.00	-0.76	0.00	0.00	0.00	0.56	0.00	0.00	0.0
S_5	0.00	0.00	0.20	0.00	-1.00	0.56	0.00	0.00	0.24	0.00	0.0
S_6	0.00	0.00	0.00	0.00	0.20	-0.44	0.00	0.00	0.00	0.24	0.0
S_7	0.00	0.20	0.20	0.00	0.00	0.00	-1.20	0.24	0.56	0.00	0.0
S_8	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.20	-0.76	0.00	0.00	0.5
S_9	0.00	0.00	0.00	0.00	0.20	0.00	0.20	0.00	-1.20	0.56	0.2
S_{10}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.20	0.00	0.00	0.20	-0.64	0.0
S_{11}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.20	0.20	0.00	-0.
S_{12}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.20	0.2

Таблица характеристик системы

Характеристики системы:

Характеристика	Прибор	Формула	Значение
Нагрузка	P1	$\rho_1 = \sum \pi_i \cdot p_1$	0.7253
Нагрузка	P2	$\rho_2 = \sum \pi_i \cdot p_2$	0.9824
Нагрузка	Суммарно	$\rho = \rho_1 + \rho_2$	1.7077
Разгрузка	P1	$1 - \rho_1$	0.2747
Разгрузка	P2	$1 - \rho_2$	0.0176

Характеристика	Прибор	Формула	Значение
Разгрузка	Суммарно	$2 - (\rho_1 + \rho_2)$	0.2923
Вероятность потери	P1	$P_{\text{пот},1}$	0.0000
Вероятность потери	P2	$P_{\text{пот},2} = \sum \pi_i, q_2 = 2$	0.6617
Вероятность потери	Суммарно	$P_{\text{пот}} = P_{\text{пот},1} + P_{\text{пот},2}$	0.6617
Длина очереди	P1	$L_{q1} = \sum \pi_i \cdot q_1$	0.3956
Длина очереди	P2	$L_{q2} = \sum \pi_i \cdot q_2$	1.5597
Длина очереди	Суммарно	$L_q = L_{q1} + L_{q2}$	1.9553
Число заявок в системе	P1	$L_1 = \sum \pi_i \cdot (p_1 + q_1)$	1.1209
Число заявок в системе	P2	$L_2 = \sum \pi_i \cdot (p_2 + q_2)$	2.5421
Число заявок в системе	Суммарно	$L = L_1 + L_2$	3.6630
Производительность	P1	λ'_1	0.1149
Производительность	P2	λ'_2	0.1557
Производительность	Суммарно	$\lambda' = \lambda \cdot (1 - P_{\text{пот}})$	0.2706
Коэффициент простоя	P1	$1 - \rho_1$	0.2747
Коэффициент простоя	P2	$1 - \rho_2$	0.0176
Коэффициент простоя	Суммарно	$\frac{(1-\rho_1)+(1-\rho_2)}{2}$	0.1462
Время ожидания	P1	$W_{q1} = \frac{L_{q1}}{\lambda'_1}$	3.4417
Время ожидания	P2	$W_{q2} = \frac{L_{q2}}{\lambda'_2}$	10.0177
Время ожидания	Суммарно	$W_q = \frac{L_q}{\lambda'}$	7.2248
Время пребывания	P1	$W_1 = \frac{L_1}{\lambda'_1}$	9.7515
Время пребывания	P2	$W_2 = \frac{L_2}{\lambda'_2}$	16.3275
Время пребывания	Суммарно	$W = \frac{L}{\lambda'}$	13.5346