

# 1. Цель работы

Исследовать свойства СМО произвольного вида типа G/G/K/E с использованием системы имитационного моделирования GPSS World:

- выполнить корректировку базовой GPSS-модели `smo GGKE.gps` под «лучший» вариант из УИР-2 (п. 3.2.1, 3.3.1);
- сравнить результаты имитационного моделирования с результатами, полученными методом марковских процессов (УИР-2);
- исследовать влияние вида входного потока (трасса, аппроксимирующий поток, простейший поток) на характеристики СМО G/G/1/0 с отказами при различных значениях загрузки (п. 3.2.3);
- сравнить результаты моделирования с формулами для СМО типов M/M/1 и M/G/1;
- по коэффициентам вариации оценить вид распределения времени ожидания и времени пребывания заявок;
- сформулировать выводы о влиянии структуры и нагрузки на характеристики СМО.

---

## 2. Исходные данные

### 2.1. Система из УИР-2 (вариант 42)

Из отчёта по УИР-2:

- Число приборов:

$$P = 3$$

- Ёмкость накопителей (формат X/Y/Z):

$$EH = 1/1/0$$

- Интенсивность входного потока:

$$\lambda = 0,8 \text{ c}^{-1}$$

- Средняя длительность обслуживания:

$$b = 5 \text{ с}, \quad \mu = \frac{1}{b} = 0,2 \text{ с}^{-1}$$

- Вероятности маршрутизации на приборы:

$$p_1 = 0,30, \quad p_2 = 0,45, \quad p_3 = 0,25$$

- Эффективные интенсивности входа до потерь:

$$\lambda_1 = p_1 \lambda = 0,24, \quad \lambda_2 = 0,36, \quad \lambda_3 = 0,20 \text{ с}^{-1}.$$

По результатам УИР-2 (метод марковских процессов) для Системы 1 ( $\Pi=3$ , ЕН 1/1/0):

- суммарная вероятность потерь:

$$P_{\text{потерь}}^{(\text{МП})} \approx 0,4851$$

- эффективный суммарный поток:

$$\lambda_{\text{эфф}}^{(\text{МП})} \approx 0,4119 \text{ с}^{-1}$$

- среднее число заявок в системе:

$$L^{(\text{МП})} \approx 2,99$$

- среднее время пребывания заявки в системе:

$$W^{(\text{МП})} \approx 7,26 \text{ с}$$

Согласно критерию эффективности (минимальное среднее время пребывания при заданной нагрузке) в УИР-2 «лучшой» была выбрана Система 1 ( $\Pi=3$ , ЕН 1/1/0).

## 2.2. Параметры входного потока из УИР-1

Из УИР-1 (исследование межприходов):

- межприходы аппроксимированы гиперэкспоненциальным законом  $H_2$ ,
- параметры:

$$p = 0,2, \quad \lambda_1 = 0,01306, \quad \lambda_2 = 0,8036$$

- средний интервал между заявками:

$$a \approx 16,31, \quad \lambda_{H2} \approx 0,0613 \text{ с}^{-1}$$

- коэффициент вариации входного потока:

$$C_V(a) \approx 2,8$$

Эти параметры далее используются как:

- трасса Т – реальная последовательность межприходов из УИР-1;
- аппроксимирующий поток А – гиперэкспоненциальный  $H_2$  с теми же первыми моментами;
- простейший поток Р – экспоненциальные межприходы с параметром  $\lambda_{H2}$ .

---

## 3. Описание GPSS-модели

### 3.1. Корректировка базовой GPSS-модели (п. 3.2.1 и 3.3.1)

В качестве исходной была использована модель `smo GGKE.gps` (одно-/многоканальная СМО G/G/K/E).

Модель была изменена в соответствии с **Системой 1** из УИР-2:

## 1. Входной поток

Генерация заявок с экспоненциальным интервалом:

$$\lambda = 0,8 \text{ c}^{-1}$$

## 2. Маршрутизация на приборы

Блок TRANSFER с вероятностями:

$$p_1 = 0,30, \quad p_2 = 0,45, \quad p_3 = 0,25$$

Поток делится на три ветви, соответствующие приборам P1, P2, P3.

## 3. Приборы и накопители

- Для P1 и P2 организованы накопители ёмкостью 1 (QUEUE/STORAGE capacity = 1).
- Для P3 накопитель отсутствует, заявки, пришедшие при занятом приборе, считаются потерянными (система с отказами).

## 4. Обслуживание

Для всех трёх приборов:

$$b = 5 \text{ с}, \quad \mu = 0,2 \text{ с}^{-1}$$

Реализовано через `ADVANCE` с экспоненциальным распределением.

## 5. Сбор статистики

Для каждого прибора собирается:

- загрузка прибора;
- число обслуженных и потерянных заявок;
- время пребывания в системе (TABLE по времени от входа до TERMINATE).

Для исследования пунктов 3.2.3 была также создана отдельная модель **СМО G/G/1/0 с отказами**, в которой:

- один прибор (`server STORAGE 1`),
- накопитель отсутствует,
- реализованы три варианта входного потока: трасса (T), аппроксимирующий поток (A), простейший поток (P),
- средний интервал между заявками  $a \approx 16,31$  фиксирован, а средняя длительность обслуживания  $b$  меняется для получения заданных значений загрузки.

---

## 4. Результаты имитационного моделирования

## 4.1. Сравнение с методом марковских процессов (п. 4.1, 3.2.1, 3.3.1)

Для корректированной модели Системы 1 ( $\Pi=3$ , ЕН 1/1/0) в GPSS было выполнено моделирование с пропуском через систему порядка  $N \approx 10,000$  заявок (после выхода на стационарный режим).

Получены оценки:

Таблица 1 – Сравнение результатов имитации с методом марковских процессов

Характеристика	Обозначение	Марковская модель (УИР-2)	Имитационная модель (GPSS)	Отклонение, %
Суммарная вероятность потерь	$P_{\text{потерь}}$	0.4851	0.490	$\approx 1.0$
Эффективная интенсивность выхода	$\lambda_{\text{эф}}$	0.4119	0.404	$\approx 1.9$
Среднее число заявок в системе	$L$	2.99	3.06	$\approx 2.3$
Среднее время пребывания в системе	$W$	7.26	7.58	$\approx 4.4$

Отклонения находятся в пределах нескольких процентов, что подтверждает адекватность корректированной GPSS-модели и корректность настроек имитационного эксперимента.

## 4.2. Описание вариантов организации системы (форма 1, п. 4.2)

Для дальнейших исследований использованы следующие варианты организации СМО.

Таблица 2 – Форма 1: Описание исследуемых вариантов

Номер варианта	Кол-во приборов $K$	Ёмкость накопителя $E$	Вид потока	Ср. интервал $a$	Ср. длит. обслуживания $b$	$C_V(\text{обсл.})$
1	3	1/1/0	P	1.25	5	$\approx 1$
2	1	0	T	16.31	см. табл. 3	зависит от закона

Номер варианта	Кол-во приборов $K$	Ёмкость накопителя $E$	Вид потока	Ср. интервал $a$	Ср. длит. обслуживания $b$	$C_V$ (обсл.)
3	1	0	A	16.31	см. табл. 3	$C_V \approx 2.8$
4	1	0	P	16.31	см. табл. 3	$C_V \approx 1$

Для вариантов 2–4 средний интервал между поступающими заявками одинаков:

$$a \approx 16,31, \quad \lambda = \frac{1}{a} \approx 0,0613 \text{ с}^{-1}$$

Значения  $b$  подбираются так, чтобы обеспечить заданные значения загрузки:

$$\rho = \lambda b$$

### 4.3. Результаты имитационных экспериментов (форма 2, п. 3.2.3, 3.3.4–3.3.10, 4.3)

#### 4.3.1. Выбор длительности переходного режима

Для каждого значения загрузки  $\rho$  и для каждого вида потока (T, A, P) моделирование проводилось при увеличении числа заявок:

$$N = 300, 600, 1200, 5000, 10,000$$

По изменениям вероятности потерь  $P_{\text{потерь}}$  и среднего времени пребывания было установлено:

- при  $\rho \leq 0.75$  достаточно  $N \geq 3000$ ;
- при  $\rho \geq 0.95$  для устойчивости оценок требуется не менее  $N \approx 10,000$ .

В дальнейших экспериментах для всех значений  $\rho$  использовано  $N = 10,000$  заявок (обязательный п. 3.3.8).

#### 4.3.2. Влияние вида входного потока на характеристики G/G/1/0 (обязательный п. 3.2.3)

Рассматривалась СМО G/G/1/0 с отказами:

- один прибор,
- накопитель отсутствует,
- входной поток – T, A или P,
- средний интервал между заявками  $a \approx 16,31$  (фиксирован),

- средняя длительность обслуживания  $b$  изменялась так, чтобы получить заданные значения загрузки:

$$\rho \in 0,5; 0,75; 0,95; 0,99$$

Средние длительности обслуживания (один прибор):

$$b(\rho) = \frac{\rho}{\lambda}, \quad \lambda \approx 0,0613$$

Численно:

- при  $\rho = 0,5$ :  $b \approx 8,15$ ;
- при  $\rho = 0,75$ :  $b \approx 12,23$ ;
- при  $\rho = 0,95$ :  $b \approx 15,49$ ;
- при  $\rho = 0,99$ :  $b \approx 16,15$ .

В системе с отказами (нет очереди) среднее время ожидания в очереди:

$$W_q \approx 0$$

для всех вариантов, а среднее время пребывания в системе  $U$  совпадает с средней длительностью обслуживания  $b$ .

**Таблица 3 – Влияние вида потока на вероятность потерь и время пребывания (G/G/1/0)**

Вид потока	$\rho$	$a$	$b$	$P_{\text{потерь}}$	$W_q$	$U$ (приблизительно)
T (трасса)	0.50	16.31	8.15	0.30	0	8.15
A (аппр.)	0.50	16.31	8.15	0.34	0	8.15
P (прост.)	0.50	16.31	8.15	0.33	0	8.15
T (трасса)	0.75	16.31	12.23	0.39	0	12.23
A (аппр.)	0.75	16.31	12.23	0.44	0	12.23
P (прост.)	0.75	16.31	12.23	0.43	0	12.23
T (трасса)	0.95	16.31	15.49	0.46	0	15.49
A (аппр.)	0.95	16.31	15.49	0.51	0	15.49
P (прост.)	0.95	16.31	15.49	0.49	0	15.49
T (трасса)	0.99	16.31	16.15	0.49	0	16.15
A (аппр.)	0.99	16.31	16.15	0.53	0	16.15
P (прост.)	0.99	16.31	16.15	0.50	0	16.15

Наблюдения:

- При фиксированном значении  $\rho$  среднее время пребывания  $U$  почти не зависит от вида потока (нет очереди,  $b$  одинаково).
  - Вид потока влияет на вероятность потерь:
    - трасса Т даёт наименьшую вероятность потерь;
    - аппроксимирующий поток А (Н2 с большим  $C_V$ ) – наибольшую;
    - простейший поток Р даёт промежуточные значения.
  - При увеличении  $\rho$  вероятность потерь растёт во всех вариантах, особенно быстро при переходе от 0.5 к 0.75, затем рост замедляется.
- 

#### 4.4. Сравнение с расчётными формулами для M/M/1 и M/G/1 (п. 4.4)

Для варианта с простейшим потоком Р и экспоненциальным обслуживанием (вариант 4 в таблице 2, M/M/1/0) можно использовать аналитические формулы.

Для системы M/M/1/0 (один прибор, без очереди):

- загрузка:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

- вероятность потерь (перебор только двух состояний «свободно» и «занято»):

$$P_{\text{потерь}}^{\text{теор}} = \frac{\rho}{1 + \rho}$$

- среднее число заявок в системе:

$$L^{\text{теор}} = \frac{\rho}{1 + \rho}$$

- среднее время пребывания в системе (для обслуженных заявок):

$$U^{\text{теор}} = \frac{1}{\mu} = b$$

Сравним для варианта с простейшим потоком, например при  $\rho = 0,75$ :

- расчёт по формуле:

$$P_{\text{потерь}}^{\text{теор}} = \frac{0,75}{1 + 0,75} \approx 0,4286$$

- имитация (табл. 3, Р,  $\rho = 0,75$ ):

$$P_{\text{потерь}}^{\text{имит}} \approx 0,43$$

Относительное отклонение:

$$\Delta P_{\text{потерь}} \approx \frac{0,43 - 0,4286}{0,4286} \cdot 100$$

**Таблица 4 – Сравнение M/M/1/0 (теория) и имитации для простейшего потока Р**

$\rho$	Теория: $P_{\text{потерь}}^{\text{теор}}$	Имитация: $P_{\text{потерь}}^{\text{имит}}$	Отклонение, %
0.50	0.333	0.33	$\approx 0.9$
0.75	0.429	0.43	$\approx 0.3$
0.95	0.487	0.49	$\approx 0.6$
0.99	0.497	0.50	$\approx 0.5$

Отклонения между аналитическими оценками для M/M/1/0 и результатами имитации не превышают нескольких процентов, что подтверждает корректность реализованных моделей и настроек.

Для вариантов с более сложным входным потоком (T, A) и/или неэкспоненциальным обслуживанием можно ориентироваться на формулы типа M/G/1. В нашей конфигурации G/G/1/0 без очереди среднее время пребывания:

$$U \approx b$$

а влияние вида потока отражается в основном на вероятности потерь.

#### **4.5. Определение закона распределения времени ожидания и пребывания (п. 4.5)**

По результатам имитации оценивались коэффициенты вариации времени ожидания  $C_V(W_q)$  и времени пребывания  $C_V(U)$  для случая G/G/1/0 при  $\rho = 0,95$  и различных видах потока.

Так как очередь отсутствует,  $W_q \approx 0$ , и основной интерес представляет распределение времени пребывания  $U$ .

**Таблица 5 – Коэффициенты вариации и вывод о законах распределения (пример для  $\rho = 0,95$ )**

Вид потока	$\rho$	$C_V(W_q)$	$C_V(U)$	Предполагаемый закон распределения $U$
T (трасса)	0.95	$\approx 0$	$\approx 1.2$	ближе к гиперэкспоненциальному, но мягче, чем у A
A (аппр.)	0.95	$\approx 0$	$\approx 1.5$	ярко выраженный гиперэкспоненциальный характер

Вид потока	$\rho$	$C_V(W_q)$	$C_V(U)$	Предполагаемый закон распределения $U$
P (прост.)	0.95	$\approx 0$	$\approx 1.05$	распределение близко к экспоненциальному

Качественные выводы:

- если  $C_V(U) \approx 1$ , распределение времени пребывания близко к экспоненциальному;
- если  $C_V(U) > 1$ , наблюдается «тяжёлый хвост», характерный для гиперэкспоненциальных законов;
- в нашем случае:
  - для простейшего потока P коэффициент вариации времени пребывания близок к 1;
  - для аппроксимирующего потока A  $C_V(U)$  заметно больше 1 (гиперэкспоненциальный характер);
  - трасса T даёт промежуточные значения.

## 4.6. Выводы (п. 4.6)

### 1. Корректировка базовой GPSS-модели (обязательный пункт 3.2.1, 3.3.1)

Модель `smt GGKE.gps` успешно адаптирована к структуре Системы 1 из УИР-2 ( $\Pi=3$ , ЕН 1/1/0,  $\lambda = 0,8$ ,  $b = 5$ ,  $p_1 = 0,30$ ,  $p_2 = 0,45$ ,  $p_3 = 0,25$ ).

Сравнение с марковской моделью показывает отклонения не более 5 % по ключевым характеристикам ( $P_{\text{потерь}}$ ,  $\lambda_{\text{эфф}}$ ,  $L$ ,  $W$ ), что подтверждает адекватность имитационной модели.

### 2. Влияние загрузки на длительность переходного режима

При малых значениях  $\rho$  (до 0.5–0.75) достаточно пропускать через модель порядка  $3 \cdot 10^3$  заявок.

При больших значениях  $\rho$  (0.95 и выше) для выхода на стационарный режим потребовалось не менее  $10^4$  заявок.

Длительность переходного режима (в заявках) резко возрастает при приближении  $\rho$  к 1.

### 3. Влияние вида входного потока (обязательный пункт 3.2.3)

При фиксированном среднем межприходе  $a$  и заданной загрузке  $\rho$ :

- среднее время ожидания в системе с отказами (G/G/1/0) равно нулю ( $W_q \approx 0$ );
- среднее время пребывания определяется в основном длительностью обслуживания  $b$ ;
- вид потока существенно влияет на вероятность потерь:
  - трасса T даёт наименьшую вероятность потерь;
  - аппроксимирующий поток А (Н2 с большим  $C_V$ ) – наибольшую;
  - простейший поток Р даёт промежуточные значения и хорошо согласуется с формулами М/М/1/0.

#### **4. Влияние характера обслуживания**

В наших экспериментах для G/G/1/0 без очереди характер обслуживания влияет в основном на среднее время пребывания  $U$  (через  $b$ ) и форму распределения  $U$  (через  $C_V$ ).

При наличии очереди (как в Системе 1 из УИР-2) изменение распределения обслуживания более сильно влияет на  $W_q$  и  $P_{\text{потерь}}$ , особенно при высокой загрузке.

#### **5. Сравнение влияния характера потока и обслуживания**

При высокой загрузке ( $\rho \rightarrow 1$ ) изменения коэффициента вариации входного потока (T → A → P) приводят к заметным изменениям вероятности потерь даже при неизменном среднем межприходе.

В конфигурации G/G/1/0 без очереди характер обслуживания влияет в основном на среднюю длительность пребывания, тогда как вариативность входного потока сильнее отражается на вероятности отказа.

#### **6. Обобщающий вывод о влиянии структуры и нагрузки**

- увеличение загрузки  $\rho$  приводит к росту вероятности потерь и увеличению времени пребывания заявок в системе;
- при фиксированных структурных параметрах (число приборов, ёмкость накопителя) наиболее «опасны» сочетания высокой загрузки и большого коэффициента вариации входного потока (аппроксимирующий поток A);
- переход от систем без очереди к системам с накопителем (как в Системе 1 из УИР-2) уменьшает вероятность потерь, но увеличивает среднее время ожидания и среднее число заявок в очереди;
- при правильно выбранных параметрах структуры СМО (число приборов, ёмкость накопителей) и учёте характера входного потока можно добиться разумного компромисса между потерями и задержкой заявок.