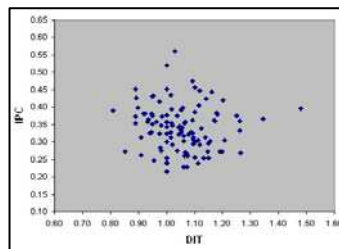
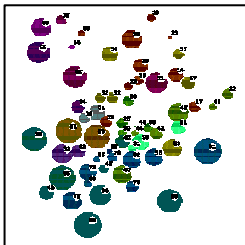


Probabilidad y Estadística II



**COLEGIO DE BACHILLERES
DEL ESTADO DE SONORA**

Director General

Lic. Eusebio Pillado Hernández

Director Académico

Lic. Jorge Alberto Ponce Salazar

Director de Administración y Finanzas

Lic. Oscar Rascón Acuña

Director de Planeación

Dr. Jorge Ángel Gastélum Islas

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA II

Módulo de Aprendizaje.

Copyright ©, 2008 por Colegio de Bachilleres
del Estado de Sonora.

Todos los derechos reservados.

Segunda edición 2010. Impreso en México.

DIRECCIÓN ACADÉMICA

Departamento de Desarrollo Curricular

Blvd. Agustín de Vildósola, Sector Sur

Hermosillo, Sonora. México. C.P. 83280

Registro ISBN, en trámite.

COMISIÓN ELABORADORA:

Elaboración:

Sonia Patricia Ramírez Cuadra

Luis Alberto Gutiérrez Valderrama

Revisión de Contenido:

María Elena Raya Godoy

Adán Durazo Armenta

Corrección de Estilo:

Antonia Sánchez Primero

Supervisión Académica:

Nancy Vianey Morales Luna

Edición:

Ana Isabel Ramírez Vásquez

Coordinación Técnica:

Martha Elizabeth García Pérez

Coordinación General:

Lic. Jorge Alberto Ponce Salazar

Esta publicación se terminó de imprimir durante el mes de diciembre de 2009.

Diseñada en Dirección Académica del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora

Blvd. Agustín de Vildósola; Sector Sur. Hermosillo, Sonora, México

La edición consta de 2,358 ejemplares.

Ubicación Curricular

**COMPONENTE:
FORMACIÓN
PROPEDÉUTICA**

**GRUPOS 3 Y 4:
ECONÓMICO
ADMINISTRATIVO Y
HUMANIDADES Y CIENCIAS
SOCIALES**

Esta asignatura se imparte en el sexto semestre; tiene como antecedente Probabilidad y Estadística I, no tiene asignatura consecuente y se relaciona con Matemáticas I, II, III y IV.

HORAS SEMANALES: 3

CRÉDITOS: 6

DATOS DEL ALUMNO

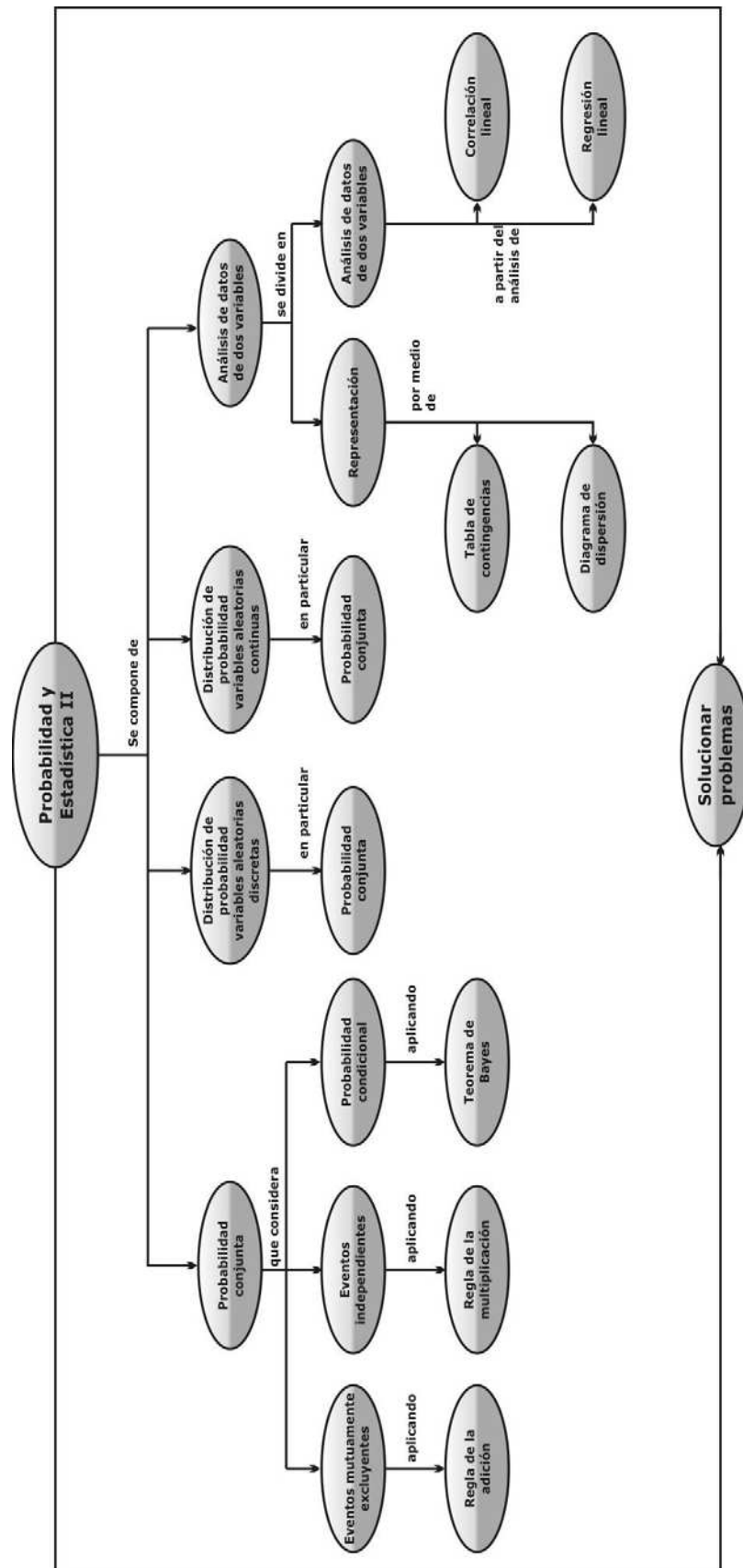
Nombre: _____

Plantel: _____

Grupo: _____ Turno: _____ Teléfono: _____

Domicilio: _____

Mapa Conceptual de la Asignatura



Índice

<i>Recomendaciones para el alumno</i>	8
<i>Presentación</i>	8
UNIDAD 1. PROBABILIDAD CONJUNTA	9
1.1. Combinatoria	11
1.2. Conceptos básicos de probabilidad	24
1.3. Probabilidad conjunta	28
1.4. Regla de adición	35
1.5. Probabilidad condicional e independencia	38
1.6. Regla de la multiplicación	42
1.7. Teorema de Bayes	28
<i>Sección de tareas</i>	49
<i>Autoevaluación</i>	53
<i>Ejercicio de reforzamiento</i>	55
UNIDAD 2. DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DE VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS	59
2.1. Distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta	61
2.2. Distribución de probabilidad binomial	64
<i>Sección de tareas</i>	69
<i>Autoevaluación</i>	77
<i>Ejercicio de reforzamiento</i>	79
UNIDAD 3. DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD CON VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS	85
3.1. Distribución de probabilidad con variables aleatorias continuas	87
3.2. Distribución de probabilidad normal estandarizada	95
<i>Sección de tareas</i>	121
<i>Autoevaluación</i>	127
<i>Ejercicio de reforzamiento</i>	131
UNIDAD 4. ANÁLISIS DE DATOS DE DOS VARIABLES	135
4.1. Representación de datos de dos variables	137
4.2. Correlación lineal	140
4.3. Regresión lineal	144
<i>Sección de tareas</i>	149
<i>Autoevaluación</i>	155
<i>Ejercicio de reforzamiento</i>	157
<i>Claves de respuestas</i>	161
<i>Glosario</i>	162
<i>Bibliografía</i>	176



RIEMS

Introducción

El Colegio de Bachilleres del estado de Sonora, en atención a los programas de estudio emitidos por la Dirección General de Bachillerato (DGB), ha venido realizando la elaboración del material didáctico de apoyo para nuestros estudiantes, con el fin de establecer en ellos los contenidos académicos a desarrollar día a día en aula, así como el enfoque educativo de nuestra Institución.

Es por ello, que actualmente, se cuenta con los módulos y guías de aprendizaje para todos los semestres, basados en los contenidos establecidos en la Reforma Curricular 2005. Sin embargo, de acuerdo a la reciente Reforma Integral de Educación Media Superior, la cual establece un enfoque educativo basado en competencias, es necesario conocer los fines de esta reforma, la cual se dirige a la totalidad del sistema educativo, pero orienta sus esfuerzos a los perfiles del alumno y profesor, siendo entonces el camino a seguir el desarrollo de las competencias listadas a continuación y aunque éstas deberán promoverse en todos los semestres, de manera más precisa entrará a partir de Agosto 2009, en el primer semestre.

Competencias Genéricas

CATEGORIAS	COMPETENCIAS GENÉRICA
I. Se autodetermina y cuida de sí.	1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.
	2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.
	3. Elige y practica estilos de vida saludables.
II. Se expresa y comunica	4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
III. Piensa crítica y reflexivamente	5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
	6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.
IV. Aprende de forma autónoma	7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.
V. Trabaja en forma colaborativa	8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
VI. Participa con responsabilidad en la sociedad	9. Participa con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad, región, México y el mundo.
	10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.
	11. Contribuye al desarrollo sustentable de manera crítica, con acciones responsables.

Competencias Disciplinarias Básicas

Matemáticas

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Competencias docentes:

1. Organiza su formación continua a lo largo de su trayectoria profesional.
2. Domina y estructura los saberes para facilitar experiencias de aprendizaje significativo.
3. Planifica los procesos de enseñanza y de aprendizaje atendiendo al enfoque por competencias, y los ubica en contextos disciplinares, curriculares y sociales amplios.
4. Lleva a la práctica procesos de enseñanza y de aprendizaje de manera efectiva, creativa e innovadora a su contexto institucional.
5. Evalúa los procesos de enseñanza y de aprendizaje con un enfoque formativo.
6. Construye ambientes para el aprendizaje autónomo y colaborativo.
7. Contribuye a la generación de un ambiente que facilite el desarrollo sano e integral de los estudiantes.
8. Participa en los proyectos de mejora continua de su escuela y apoya la gestión institucional.



Recomendaciones para el alumno

El presente Módulo de Aprendizaje constituye un importante apoyo para ti; en él se manejan los contenidos mínimos de la asignatura Probabilidad y Estadística II.

No debes perder de vista que el Modelo Académico del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora propone un aprendizaje activo, mediante la investigación, el análisis y la discusión, así como el aprovechamiento de materiales de lectura complementarios; de ahí la importancia de atender las siguientes recomendaciones:

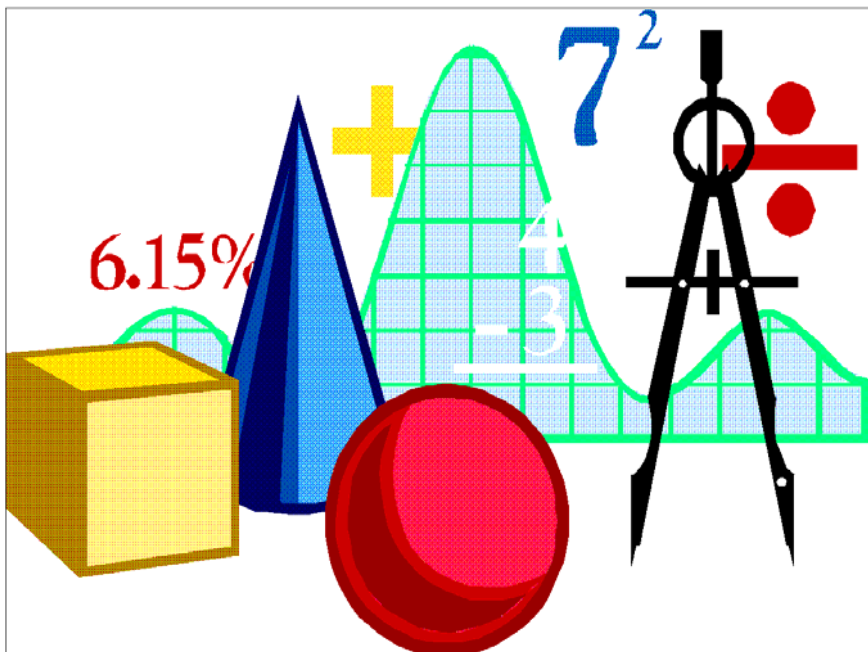
- Maneja el Módulo de Aprendizaje como texto orientador de los contenidos temáticos a revisar en clase.
- Utiliza el Módulo de Aprendizaje como lectura previa a cada sesión de clase.
- Al término de cada unidad, resuelve la autoevaluación, consulta la escala de medición del aprendizaje y realiza las actividades que en ésta se indican.
- Realiza los ejercicios de reforzamiento del aprendizaje para estimular y/o reafirmar los conocimientos sobre los temas ahí tratados.
- Utiliza la bibliografía recomendada para apoyar los temas desarrollados en cada unidad.
- Para comprender algunos términos o conceptos nuevos, consulta el glosario que aparece al final del módulo.
- Para el Colegio de Bachilleres es importante tu opinión sobre los módulos de aprendizaje. Si quieres hacer llegar tus comentarios, utiliza el portal del Colegio: www.cobachsonora.edu.mx

Presentación

La asignatura de **Probabilidad y Estadística II** que pertenece al Grupo Disciplinario Económico–Administrativo, tiene como propósito formar al alumno en el manejo de los datos y el cálculo de las probabilidades de ocurrencia como un fundamento para comprender los diversos fenómenos o situaciones que existen en la economía, la administración e inclusive otros campos profesionales tales como: la Sociología, la Medicina, la Ingeniería, el Diseño, la Química, la Física y en general en cualquier otra actividad humana.

Esta asignatura proporciona los conocimientos necesarios para el cálculo de probabilidades y el análisis descriptivo de datos de dos variables; es decir, conocer las probabilidades de ocurrencia e identificar el comportamiento de una variable con base en el conocimiento que se tiene, desarrollar en el alumno una capacidad de análisis al interpretar los datos y tomar decisiones con esta base, generar actitudes de responsabilidad, tolerancia, honestidad y la capacidad de trabajo en equipo. Por otra parte, el alumno obtendrá bases sólidas que le permitan continuar su conocimiento a la estadística inferencial.

El enfoque disciplinario de Probabilidad y Estadística II es instrumental, dado que es una herramienta para el manejo de los datos, pues se centra en la descripción y solución de situaciones problemáticas o toma de decisiones; y científico, ya que aplica los conocimientos teóricos necesarios.



Unidad 1

Probabilidad Conjunta.

Objetivos:

El alumno:

Resolverá problemas de probabilidad conjunta y condicional en situaciones de su propio interés en el ámbito escolar o personal, a partir de la identificación del tipo de evento y de las reglas de probabilidad, mediante la aplicación de las operaciones básicas: suma, resta, multiplicación y división; mostrando interés, tolerancia, respeto y capacidad de análisis.

Organizador anticipado:

La probabilidad se basa en el estudio de poblaciones y muestras, mismas que se ven involucradas en diferentes eventos.

Esta unidad, te ayudará a comprender la probabilidad y su aplicación en la vida cotidiana.

Temario:

- Conceptos básicos de probabilidad.
- Probabilidad conjunta.
- Regla de la adición.
- Probabilidad condicional e independencia.
- Regla de la multiplicación
- Teorema de Bayes.

Mapa Conceptual de Unidad



1.1. TEORÍA COMBINATORIA.

La Combinatoria es una rama de las Matemáticas cuyo objetivo es estudiar las posibles agrupaciones de objetos que podemos llevar a cabo de un modo rápido, teniendo en cuenta las relaciones que deben existir entre ellas.

Con las cifras 1, 2, 3, 4, 5 y 6 ¿Cuántos números de tres cifras, diferentes, por supuesto, puedo formar? Un número es diferente de otro si tiene una cifra distinta o el orden de sus cifras es diferente. 321 y 123 son números distintos aunque tengan las mismas cifras. Con los datos anteriores podríamos formar 20 números diferentes.

La Teoría Combinatoria es la parte de las Matemáticas que se encarga de crear grupos de datos, objetos, etc., además de llevar a cabo los cálculos necesarios. Entre las diferentes formas que hay para llevar a cabo estos agrupamientos tenemos las: *variaciones, permutaciones y combinaciones*.

FÓRMULA GENERAL DE LAS VARIACIONES V_m^n

Para saber el valor de V_5^2 multiplicamos 5×4 , es decir, dos factores decrecientes de unidad en unidad, que generalizando podemos escribir:

$$m(m-1)$$

Para saber el valor de V_5^3 multiplicamos $5 \times 4 \times 3$, es decir, tres factores decrecientes de unidad en unidad, que generalizando podemos escribir:

$$m(m-1)(m-2)$$

Para saber el valor de V_5^4 multiplicamos $5 \times 4 \times 3 \times 2$, es decir, cuatro factores decrecientes de unidad en unidad, que generalizando podemos escribir:

$$m(m-1)(m-2)(m-3)$$

En estos tres ejemplos puedes ver que el número de elementos (m) es el primer factor, cada uno de los que le siguen van decreciendo de unidad en unidad. En último factor observamos que el valor *que se le resta a m* equivale al valor de n *menos 1*.

¿Cuál es el último factor de V_{10}^8 ?

Representando con puntos los valores de los factores intermedios será:

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times \dots \times (10 - (8 - 1)) = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times \dots \times (10 - 8 + 1) = \\ = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times \dots \times 3$$

Comprobamos:

V_{10}^8 será igual a 8 factores decrecientes de unidad en unidad a partir de 10:

$$V_{10}^8 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$$

Como ves, 8 factores decrecientes de unidad en unidad a partir de 10.

La fórmula de V_m^n será:

$$V_m^n = m(m-1)(m-2)(m-3) \times \dots \times (m-(n-1))$$

$$V_m^n = m(m-1)(m-2)(m-3) \times \dots \times (m-n+1)$$

18.4 ¿Cuántas formas diferentes pueden ocupar una fila de 10 sillones, 5 personas?

Respuesta: 5040 posiciones

18.5 ¿Cuántos partidos de fútbol de la primera división del fútbol del español se juegan en una temporada?. Por si no lo sabes, por ahora, la primera división la componen 20 equipos.

Respuesta: 380 partidos

VARIACIONES CON REPETICIÓN (VR) $\Rightarrow VR_m^n$

Se trata de variaciones de m elementos de orden n en las que los grupos se diferencian uno de otro, en tener un elemento distinto o en el orden de colocación pero que podamos repetir los elementos, por ejemplo: *aab aba baa* son grupos diferentes porque se diferencian en el orden de colocación de sus elementos.

Si tomamos las cinco vocales de dos, en dos veamos cuantas variaciones con repetición podemos hacer:

	A	E	I	O	U
1	aa	ea	ia	Oa	ua
2	ae	ee	ie	Oe	ue
3	ai	ei	ii	Oi	ui
4	ao	eo	io	Oo	uo
5	au	eu	iu	Ou	uu

Si tenemos unos cartones, cada uno con una vocal, podemos extraer dos veces la misma vocal. Cada grupo ves que se diferencia en tener un elemento distinto o en el orden de colocación. Por cada vocal conseguimos 5 grupos de 2 vocales

cada grupo. En total la $VR_5^2 = 25$ Los grupos que podemos obtener en el

caso de $VR_5^2 = 25$

Combinaciones y permutaciones

¿Qué diferencia hay?

Normalmente usamos la palabra "combinación" descuidadamente, sin pensar en si el **orden** de las cosas es importante. Ejemplo:



"Mi ensalada de frutas es una combinación de manzanas, uvas y bananas": no importa en qué orden pusimos las frutas, podría ser "bananas, uvas y manzanas" o "uvas, manzanas y bananas", es la misma ensalada.



"La combinación de la cerradura es 472": ahora **sí** importa el orden. "724" no funcionaría, ni "247". Tiene que ser exactamente **4-7-2**.

Así que en matemáticas usamos un lenguaje más *preciso*:

- Si el orden no importa, es una **combinación**.
- Si el orden **sí** importa es una **permutación**.



¡Así que lo de arriba se podría llamar "cerradura de permutación"!

Con otras palabras:

Una permutación es una combinación **ordenada**.

Permutaciones

Hay dos tipos de permutaciones:

- **Se permite repetir:** como la cerradura de arriba, podría ser "333".
- **Sin repetición:** por ejemplo los tres primeros en una carrera. No puedes quedar primero y segundo a la vez.

1. Permutaciones con repetición

Son las más fáciles de calcular. Si tienes n cosas para elegir y eliges r de ellas, las permutaciones posibles son:

$$n \times n \times \dots (r \text{ veces}) = n^r$$

(Porque hay n posibilidades para la primera elección, después hay n posibilidades para la segunda elección, y así.)

Por ejemplo en la cerradura de arriba, hay 10 números para elegir (0,1,...,9) y eliges 3 de ellos:

$$10 \times 10 \times \dots (3 \text{ veces}) = 10^3 = 1000 \text{ permutaciones}$$

Así que la fórmula es simplemente:

$$n^r$$

donde n es el número de cosas que puedes elegir, y eliges r de ellas
(Se puede repetir, el orden importa)

2. Permutaciones sin repetición

En este caso, se **reduce** el número de opciones en cada paso.



Por ejemplo, ¿Cómo podrías ordenar 16 bolas de billar?

Después de elegir por ejemplo la "14" no puedes elegirla otra vez.

Así que tu primera elección tiene 16 posibilidades, y tu siguiente elección tiene 15 posibilidades, después 14, 13, etc. Y el total de permutaciones sería:


$$16 \times 15 \times 14 \times 13 \dots = 20,922,789,888,000$$

Pero a lo mejor no quieres elegir las todas, sólo 3 de ellas, así que sería solamente:

$$16 \times 15 \times 14 = 3360$$

Es decir, hay 3,360 maneras diferentes de elegir 3 bolas de billar de entre 16.

¿Pero cómo lo escribimos matemáticamente? Respuesta: usamos la "función factorial"



La **función factorial** (símbolo: $!$) significa que se multiplican números descendentes. Ejemplos:

- $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$
- $7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$
- $1! = 1$

Nota: en general se está de acuerdo en que $0! = 1$. Puede que parezca curioso que no multiplicar ningún número dé 1, pero ayuda a simplificar muchas ecuaciones.

Así que si quieres elegir **todas** las bolas de billar las permutaciones serían:

$$16! = 20,922,789,888,000$$

Pero si sólo quieres elegir 3, tienes que dejar de multiplicar después de 14.
¿Cómo lo escribimos? Hay un buen truco... dividimos entre $13!$...

$$\frac{16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12 \dots}{13 \times 12 \dots} = 16 \times 15 \times 14 = 3360$$

¿Lo ves? $16! / 13! = 16 \times 15 \times 14$

La fórmula se escribe:

$$\frac{n!}{(n - r)!}$$

donde n es el número de cosas que puedes elegir, y eliges r de ellas
(No se puede repetir, el orden importa)

Ejemplos:

Nuestro "ejemplo de elegir en orden 3 bolas de 16" sería:

$$\frac{16!}{(16-3)!} = \frac{16!}{13!} = \frac{20,922,789,888,000}{6,227,020,800} = 3360$$

¿De cuántas maneras se pueden dar primer y segundo premio entre 10 personas?

$$\frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10!}{8!} = \frac{3,628,800}{40,320} = 90$$

(que es lo mismo que: $10 \times 9 = 90$)

Notación

En lugar de escribir toda la fórmula, la gente usa otras notaciones como:

$$P(n, r) = {}^n P_r = {}_n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Combinaciones

También hay dos tipos de combinaciones (recuerda que ahora el orden **no** importa):

- **Se puede repetir:** como monedas en tu bolsillo (5,5,5,10,10)
- **Sin repetición:** como números de lotería (2,14,15,27,30,33)

1. Combinaciones con repetición

Son las más difíciles de explicar, se estudiarán más adelante.

2. Combinaciones sin repetición

Así funciona la lotería. Los números se eligen de uno en uno, y si tienes los números de la suerte (da igual el orden) ¡entonces has ganado!

La manera más fácil de explicarlo es:

- imaginemos que el orden sí importa (permutaciones),
- después lo cambiamos para que el orden **no** importe.

Volviendo a las bolas de billar, digamos que queremos saber cuáles se eligieron, no el orden.

Ya sabemos que 3 de 16 dan 3360 permutaciones.

Pero muchas de ellas son iguales para nosotros, porque no nos importa el orden.

Por ejemplo, digamos que se tomaron las bolas 1, 2 y 3. Las posibilidades son:

El orden importa El orden no importa

1 2 3

1 3 2

2 1 3

2 3 1

3 1 2

3 2 1

1 2 3

Así que las permutaciones son 6 veces más posibilidades.

De hecho hay una manera fácil de saber de cuántas maneras "1 2 3" se pueden ordenar, y ya la sabemos. La respuesta es:

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

(Otro ejemplo: 4 cosas se pueden ordenar de $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ maneras distintas, ¡prueba tú mismo!)

Así que sólo tenemos que ajustar nuestra fórmula de permutaciones para **reducir** por las maneras de ordenar los objetos elegidos (porque no nos interesa ordenarlos):

$$\frac{n!}{(n-r)!} \times \frac{1}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Esta fórmula es tan importante que normalmente se la escribe con grandes paréntesis, así:

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

donde n es el número de cosas que puedes elegir, y eliges r de ellas
(No se puede repetir, el orden no importa)

Y se la llama "coeficiente binomial".

Notación

Además de los "grandes paréntesis", la gente también usa estas notaciones:

$$C(n, r) = {}^nC_r = {}_nC_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Ejemplo

Entonces, nuestro ejemplo de bolas de billar (ahora sin orden) es:

$$\frac{16!}{3!(16-3)!} = \frac{16!}{3! \times 13!} = \frac{20,922,789,888,000}{6 \times 6,227,020,800} = 560$$

O lo puedes hacer así:

$$\frac{16 \times 15 \times 14}{3 \times 2 \times 1} = \frac{3360}{6} = 560$$

Así que recuerda, haz las permutaciones, después reduce entre "r!"

... o mejor todavía...

¡Recuerda la fórmula!

Es interesante darse cuenta de que la fórmula es bonita y **simétrica**:

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Con otras palabras, elegir 3 bolas de 16 da las mismas combinaciones que elegir 13 bolas de 16.

$$\frac{16!}{3!(16-3)!} = \frac{16!}{13!(16-13)!} = \frac{16!}{3! \times 13!} = 560$$

Triángulo de Pascal

Puedes usar el triángulo de Pascal para calcular valores. Baja a la fila "n" (la de arriba es n=0), y ve a la derecha "r" posiciones, ese valor es la respuesta. Aquí tienes un trozo de la fila 16:

			1	14	91	364	...
	1	15	105	455	1365	...	
1	16	120	560	1820	4368	...	

1. Combinaciones con repetición

Digamos que tenemos cinco sabores de helado: **banana, chocolate, limón, fresa y vainilla**. Puedes tomar 3 paladas. ¿Cuántas variaciones hay?



Vamos a usar letras para los sabores: {b, c, l, f, v}. Algunos ejemplos son

- {c, c, c} (3 de chocolate)
- {b, l, v} (uno de banana, uno de limón y uno de vainilla)
- {b, v, v} (uno de banana, dos de vainilla)

(Y para dejarlo claro: hay **n=5** cosas para elegir, y eliges **r=3** de ellas.

El orden no importa, ¡y **sí** puedes repetir!)

Bien, no puedo decirte directamente cómo se calcula, pero te voy a enseñar una **técnica especial** para que lo averigües tú mismo.



Imagina que el helado está en contenedores, podrías decir "sáltate el primero, después 3 paladas, después sáltate los 3 contenedores siguientes" ¡y acabarás con 3 paladas de chocolate!

Entonces es como si ordenaras a un robot que te trajera helado, pero no cambia nada, tendrás lo que quieres.

Ahora puedes escribirlo como $\rightarrow \bigcirc \bigcirc \bigcirc \rightarrow \rightarrow \rightarrow$ (la flecha es saltar, el círculo es tomar)

Entonces los tres ejemplos de arriba se pueden escribir así:

$\{c, c, c\}$ (3 de chocolate): $\rightarrow \bigcirc \bigcirc \bigcirc \rightarrow \rightarrow \rightarrow$
 $\{b, l, v\}$ (uno de banana, uno de limón y uno de vainilla): $\bigcirc \rightarrow \rightarrow \bigcirc \rightarrow \rightarrow \bigcirc$
 $\{b, v, v\}$ (uno de banana, dos de vainilla): $\bigcirc \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \bigcirc \bigcirc$

Entonces ya no nos tenemos que preocupar por diferentes sabores, ahora tenemos un problema **más simple** para resolver: "de cuántas maneras puedes ordenar flechas y círculos"

Fíjate en que siempre hay 3 círculos (3 paladas de helado) y 4 flechas (tenemos que movernos 4 veces para ir del contenedor 1º al 5º).

Así que (en general) hay $r + (n-1)$ posiciones, y queremos que r de ellas tengan círculos.

Esto es como decir "tenemos $r + (n-1)$ bolas de billar y queremos elegir r de ellas". Es decir, es como el problema de elegir bolas de billar, pero con números un poco distintos. Lo podrías escribir así:

$$\binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

donde n es el número de cosas que puedes elegir, y eliges r de ellas
(Se puede repetir, el orden no importa)

Es interesante pensar que podríamos habernos fijado en flechas en vez de círculos, y entonces habríamos dicho "tenemos $r + (n-1)$ posiciones y queremos que $(n-1)$ tengan flechas", y la respuesta sería la misma...

$$\binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

¿Qué pasa con nuestro ejemplo, cuál es la respuesta?

$$\frac{(5+3-1)!}{3!(5-1)!} = \frac{7!}{3! \times 4!} = \frac{5040}{6 \times 24} = 35$$

1.2. CONCEPTOS BÁSICOS DE PROBABILIDAD.

Utilizar la Estadística para la toma de decisiones y para llegar a ciertas conclusiones, implica manejar algunas funciones medibles fundamentales para el análisis estadístico, particularmente las que se refieren a la probabilidad. En efecto, cualquier enfoque analítico de los problemas estadísticos supone la evaluación de “la medida en que es posible” que ocurran ciertos eventos o fenómenos.

Muchos autores presentan tres enfoques de la probabilidad y a través de los cuales surgen tres definiciones de probabilidad.

Probabilidad clásica a priori: en la cual la probabilidad de un evento se basa en el conocimiento del proceso involucrado. Desde este enfoque, y cuando existe igual probabilidad para todos los posibles resultados del proceso, la **probabilidad de ocurrencia** de un resultado o un evento de interés, se define como:

Número de veces que puede ocurrir el evento de interés **Fórmula (1)**
Número total de resultados posibles

Por ejemplo: Cuando se arroja un dado y el interés se centra en el número de puntos que muestra la cara superior, el espacio muestral está constituido por seis eventos elementales $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Si se sabe o se supone que todas las caras tienen la misma oportunidad de presentarse, entonces usando la fórmula (1) se puede calcular la probabilidad del evento

$A =$ “la cara muestra un número par”; esta probabilidad se representará con $P(A) = \frac{1}{2}$

Actividad 1:

1. Propón otros dos ejemplos donde sea posible usar este enfoque.

Probabilidad clásica empírica: en la cual la asignación de las probabilidades de los sucesos o eventos de interés se basan en la información observada y no en el conocimiento previo del proceso. De manera similar que el enfoque clásico a priori, la **probabilidad de ocurrencia** de un evento en este caso viene dada por:

Número de veces que ocurre el evento de interés **Fórmula (2)**
Número total de resultados posibles

Ejemplo 1.1 . En un estudio se hace una encuesta a 800 alumnos de una universidad sobre el grado de satisfacción con la carrera y el grado de satisfacción con el progreso en la misma. Los resultados de la encuesta se muestran en la Tabla 3.1. La probabilidad de que un alumno se encuentre satisfecho con la carrera, es decir, la probabilidad de que ocurra el evento $A = \{\text{“satisfecho con la carrera elegida”}\}$ será igual al número de alumnos que están satisfechos (712) dividido por el número total de alumnos encuestados (800), es decir, $P(A) = 712/800 = 0.89$.

Tabla 1.1: Resultados de la encuesta a alumnos

Satisfecho con la carrera	Satisfecho con su progreso		TOTAL
	Si	No	
Si	362	350	712
No	18	70	88
Total	380	420	800

Probabilidad subjetiva: se refiere a la probabilidad asignada por una persona en particular basada generalmente en su experiencia, opinión personal y análisis que él hace de la situación específica que se evalúa. Se usa generalmente en aquellas situaciones donde, en el momento que se la requiere, la probabilidad no puede determinarse empíricamente.

Actividad 2:

1. Menciona a cuál de los enfoques corresponderían las probabilidades asignadas al evento “mañana lloverá”, si la información proviene de: (a) el Servicio Meteorológico Nacional, (b) de su proveedor de revistas.
2. A partir de los datos de la Tabla 1.3, donde se muestran los resultados de una encuesta de alumnos, calcula cuál es la probabilidad empírica de que un alumno no se encuentre satisfecho con su progreso.
3. Si se lee cuidadosamente, se puede ver que en el único caso en que es posible establecer de manera correcta la probabilidad de un evento, es cuando se conoce el número exacto de éxitos y el número total de resultados posibles (probabilidad clásica a priori) ¿Por qué?

TAREA 1



Página 49.

1.2.1. Espacios muestrales y eventos.

Los elementos básicos de la teoría de probabilidad son los resultados del fenómeno bajo estudio. Cada posible resultado se denomina un evento, en particular se denomina evento simple a cada posible acontecimiento que se puede describir mediante una sola característica.

Por otra parte, otro concepto importante en la teoría de la probabilidad es el denominado **espacio muestral** que representa **la colección o conjunto de todos los eventos simples**.

A los eventos en general se los denota con letras mayúsculas y al espacio muestral se denota con **S**.

Ejemplo:

En el ejemplo de la encuesta un evento simple sería $A = \{\text{“No está satisfecho con la carrera”}\}$.

Actividad 3:

1. Propón otros cinco ejemplos diferentes utilizando dados y define en cada uno los eventos simples.
2. A partir de las definiciones de evento y espacio muestral ¿Qué similitudes se podrían establecer entre ellas y los conceptos de variable, muestra y población.

Para el cálculo de las probabilidades de algunos eventos a partir del conocimiento de las probabilidades de otros pertenecientes al mismo espacio muestral, se hace necesario definir algunos conceptos previos a saber:

Complemento de un evento: dado un evento cualquiera A , el **evento complemento de A** incluye a todos los eventos simples que no formen parte del evento A , y se denota con A' , A^c o $\sim A$.

Por ejemplo, si $A = \{\text{"No está satisfecho con su carrera"}\}$, el evento complemento de A , es decir $A' = \{\text{"Está satisfecho con su carrera"}\}$

Evento conjunto: el cual se define por dos o más características. En el ejemplo de la encuesta a los alumnos el evento $M = \{\text{"Está satisfecho con su carrera y no está satisfecho con su progreso"}\}$ es un evento conjunto definido por las características "Satisfacción con la carrera" y "Satisfacción con su progreso en la carrera"

Actividad 4:

1. En los ejemplos propuestos por tí en la Actividad 1. 2, define tres eventos y determina el complemento para cada uno.
2. En el ejemplo de la encuesta define todos los posibles eventos conjuntos.

Existen distintas formas de presentar el espacio muestral y sus eventos. Uno de ellos es a través de lo que se conoce como **tabla de contingencia** (ver tabla 1.1), donde se registra el número de individuos que cumplen con cada característica considerada, esto es, lo que correspondería a una tabla de distribución de frecuencia.

Una segunda forma de presentar el espacio muestral y sus eventos es usando un **diagrama de Venn Euler**.

Para construir el diagrama se necesita definir previamente cada evento y denotarlo con alguna letra mayúscula.

Ejemplo 1.2. Con la información de la encuesta a los alumnos (tabla 1.1), designamos con:

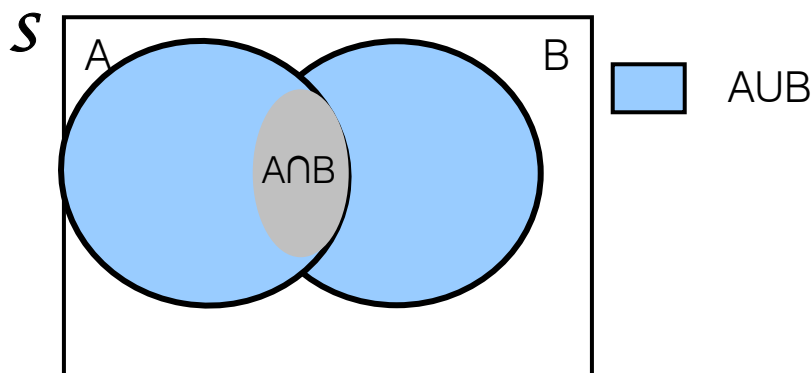
$A = \{\text{"Está satisfecho con su carrera"}\}$

$A' = \{\text{"No está satisfecho con su carrera"}\}$

$B = \{\text{"Está satisfecho con su progreso en la carrera"}\}$

$B' = \{\text{"No está satisfecho con su progreso en la carrera"}\}$

Luego, cada evento se representa con un círculo dentro del espacio muestral S para el cual se usa un rectángulo para representarlo.



El diagrama de Venn permite visualizar y comprender mejor los conceptos de unión e intersección de eventos, así como diferentes operaciones entre ellos.

Actividad 5:

1. En el último año las compañías de teléfonos han hecho grandes esfuerzos para atraer nuevos clientes. Supón que en una muestra de 400 familias una compañía telefónica obtuvo información sobre el interés de planes de larga distancia y sobre las necesidades semanales de realizar llamadas de larga distancia internacional.

Los datos de esta encuesta se presentan en la siguiente tabla.

Tabla 3.2: Resultados de la encuesta a familias.

Necesidad de llamar semanalmente al exterior	ADHERIDO A ALGÚN PLAN DE LARGA DISTANCIA		TOTAL
	Si	No	
Sí	120	120	240
No	30	130	160
TOTAL	150	250	400

Actividades: A partir de la información de la tabla:

- (a) Da un ejemplo de evento simple.
- (b) Da un ejemplo de evento conjunto.
- (c) ¿Cuál es el evento complemento de tener necesidad de llamar semanalmente al exterior?
- (d) Construye un diagrama de Venn.
- (e) Representa gráficamente el evento "Tiene necesidad de llamar al exterior y está adherido a un plan de larga distancia".

Probabilidad. Rama de la matemáticas que trata del estudio de los fenómenos de los que no estamos seguros de su ocurrencia.

Fenómeno. Es la ocurrencia de un hecho o suceso.

Experimento. Es un fenómeno observable perfectamente definido.

Los fenómenos observables se pueden clasificar en:

Determinísticos. Se puede predecir el resultado.

Aleatorios. No se puede predecir el resultado.

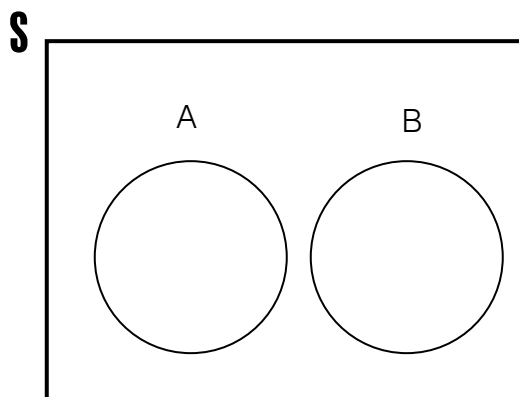
Espacio Muestral (Resultados). Es el conjunto de todos los posibles resultados que hay en un fenómeno aleatorio. El espacio muestral se clasifica en:

- Espacio muestral Discreto. Es aquél donde se puede contar el número de posibles resultados.
- Espacio muestral Continuo. No se pueden enumerar los posibles resultados, debido a que el espacio muestral continuo está definido sobre la recta de los números reales.

Evento. Es un conjunto de resultados que tienen ciertas características en común.

Los eventos pueden ser:

- Evento **seguro**. Es aquél que tiene todos los posibles resultados.
- Evento **imposible**. Es aquél que no tiene ningún posible resultado.
- Evento **complementario**. Es aquel evento que está compuesto por los eventos que no están en éste.
- Eventos **mutuamente excluyentes**. Para que dos eventos sean mutuamente excluyentes debe cumplirse que $A \cap B = \emptyset$. En un diagrama de Venn Euler se puede representar así:



1.3. PROBABILIDAD CONJUNTA.

1.3.1. Probabilidad total.

Si quisiéramos saber cuál es la probabilidad de sacar un dos o un cinco al tirar un dado, estamos hablando de sucesos mutuamente excluyentes; pues sólo al tirar el dado puedes sacar uno de ellos dos, es decir, un evento (sacar dos) imposibilita el otro (sacar un cinco) ya que no puedes sacar los dos al mismo tiempo.

Para sacar la probabilidad total de dos o más sucesos mutuamente excluyentes se suman las probabilidades de cada uno de los sucesos.

$$P(M \cup N) = P(M \cup N) = P(M) + P(N)$$

Para nuestro ejemplo la respuesta sería:

$$P(\text{sacar 2 o sacar 5}) = P(\text{sacar 2}) + P(\text{sacar 5}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.3333 = 33.33\%$$

Veamos otro ejemplo: la madrina de recuerdos en una boda ha comprado de dos tipos: 50 velas y 50 centros de mesas para los invitados ¿Cuál es la probabilidad de que a un invitado le toque como recuerdo vela o centro de mesa, si es que llegaron 150 invitados y a cada uno sólo le obsequian un recuerdo?

Primero calculemos la probabilidad de obtener una vela. 150 invitados es el número de casos posibles, mientras que 50 es el número de casos favorables pues son 50 velas.

$$P(\text{vela}) = \frac{50}{150} = \frac{1}{3} = 0.33 = 33\%$$

La probabilidad de obtener un centro de mesa es exactamente la misma pues hay el mismo número de centros de mesa.

$$P(\text{centros de mesa}) = \frac{50}{150} = \frac{1}{3} = 0.33 = 33\%$$

La probabilidad total será la suma de cada una de las probabilidades obtenidas, es decir:

$$p(\text{vela o centro de mesa}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = 0.66 = 66\%$$

1.3.2. Probabilidad Conjunta.

Antes de definir los conceptos de probabilidad conjunta y marginal, se hace necesario formalizar dos propiedades básicas para definir la probabilidad de un evento. Si un evento A es un subconjunto de un espacio muestral S, entonces deben cumplirse las dos propiedades siguientes:

1. La probabilidad de cualquier evento A varía entre 0 y 1, es decir, $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. La probabilidad de todo el espacio muestral S (evento cierto) es igual a uno, es decir,
 $P(S) = 1$. De aquí, que la probabilidad de un evento imposible es cero.
3. La probabilidad del complemento de un evento A, $P(A') = 1 - P(A)$

Marginal: Probabilidad individual significa que sólo puede tener lugar un evento.

$$P(\text{SOL}) = \frac{1}{2}$$

Conjunta: la probabilidad de que 2 ó más eventos independientes ocurran junto o en sucesión, es el producto de sus probabilidades marginales.

Una manera muy usada en la práctica, de nombrar la probabilidad un evento simple de un espacio muestral es como **probabilidad simple o marginal**, la cual hace referencia a la probabilidad de un evento simple, y se denota con $P(A)$, siendo A el evento simple en cuestión. El nombre de probabilidad marginal se debe a que esta medida se puede obtener a partir de los totales marginales de una tabla de contingencia.

Por ejemplo, si se usan los datos de la Tabla 1.1, la probabilidad del evento A = “el alumno está satisfecho con su carrera” se calcula como $P(A) = 712/800 = 0.89$.

La denominación de **probabilidad conjunta** se usa para referirse a la probabilidad de ocurrencia de dos o más eventos simples simultáneamente. Por ejemplo, si se usa los datos de la Tabla 1.1, la probabilidad de que ocurran simultáneamente los siguientes eventos simples A = “el alumno está satisfecho con su carrera” y B = “el alumno está satisfecho con su avance en la carrera” se calcula como el número de alumnos que se encuentran satisfechos tanto con la

carrera como con sus avances en la misma (362) dividido por el número total de alumnos encuestados (800), y se denota con $P(A \text{ y } B)$ o con $P(A \cap B)$ y en este caso es igual a $362/800 = 0.4525$.

Observaciones:

1. Las definiciones dadas hasta ahora, son aplicables a situaciones donde el espacio muestral S se considera formado por n puntos. Por ejemplo, en la encuesta de alumnos $n = 800$. Cada uno de estos puntos (empleados) tiene probabilidad $1/n = 1/800$ de ser elegido al azar.
2. Si el espacio muestral es dividido en r eventos, A_1, A_2, \dots, A_r , que definen una característica, como por ejemplo "Satisfacción con la carrera"; y si en este mismo espacio se considera otra partición generada por s eventos B_1, B_2, \dots, B_s , que definen otra característica como ser "Satisfacción con su progreso en la carrera", entonces el espacio muestral S queda particionado en rs subconjuntos. En el ejemplo de la encuesta, $r = s = 2$, y donde $A_1 =$ "Si está satisfecho con la carrera", $A_2 =$ "No está satisfecho con la carrera", $B_1 =$ "Si está con su progreso" y $B_2 =$ "No está satisfecho con su progreso", luego el espacio muestral queda dividido en 4 subconjuntos a saber $A_1 \cap B_1, A_2 \cap B_1, A_1 \cap B_2, A_2 \cap B_2$, y sus respectivas probabilidades $P[A_i \cap B_j] = P[A_i \text{ y } B_j]$, son las ya definidas **probabilidades conjuntas**, mientras que las probabilidades de los eventos determinados por cada partición, es decir, $P[A_i]$ y $P[B_j]$ son las **probabilidades marginales** correspondientes a la primera y segunda partición respectivamente.
3. Si dos eventos no tienen puntos comunes, es decir, no pueden ocurrir simultáneamente, entonces se dice que son **mutuamente excluyentes**. Por otra parte, un conjunto de eventos se dice que son **colectivamente exhaustivos**, si uno de ellos debe ocurrir necesariamente. Por ejemplo, A_1 y A_2 son mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos ¿Por qué? ¿Lo son también A_1 y B_2 ?

Si quisiéramos conocer cuál es la probabilidad de sacar 5 al tirar dos veces un dado, estamos hablando de sucesos independientes; pues los tiros son distintos.

Para estos casos la probabilidad de ocurrencia de ambos sucesos simultáneamente será igual al producto de las probabilidades individuales.

Fórmula de probabilidad marginal:

$$P(\text{EVENTO}) = \frac{\text{NÚMERO DE CASOS FAVORABLES PARA EL EVENTO}}{\text{NÚMERO TOTAL DE RESULTADOS DEL EXPERIMENTO.}}$$

Ejemplo: ¿Cuál es la probabilidad que en el lanzamiento de una moneda aparezca águila?

$$P(\text{águila}) = 1 \text{ (¿Cuántas águilas pueden caer en ese lanzamiento?) } / 2 \text{ (¿Cuántos lados o caras tiene la moneda?).}$$

$P(\text{águila}) = 1/2 = 0.5 = 50\%$ la probabilidad se puede expresar en decimales, porcentajes o fracciones.

Veamos el ejemplo en un dado.

El espacio muestral será de:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

¿Cuál es la probabilidad de que caiga un número par al lanzar ese dado?

Seleccionemos los pares.

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Tenemos que la probabilidad es:

$P(\text{caiga par}) = 3$ (tres número que son pares, por lo tanto hay tres posibilidades de que sea par) / 6 (el número de elementos de mi espacio)

$$P(\text{caiga par}) = 3/6 = 0.5 = 50\%$$

¿Cuál es la probabilidad de que caiga el número 3 de ese dado?

$P(\# 3) = 1$ (en el dado sólo existe un número 3) / 6 (total de elementos de mi espacio)

$$P(\# 3) = 1/6 = 0.16 = 16\%.$$

$$P(M \text{ y } N) = P(M \cap N) = P(M) * P(N)$$

Para nuestro ejemplo la respuesta sería:

Si lanzamos dos dados ¿Cuál es la probabilidad de que caiga el número 5 en ambos?

$$P(\text{sacar dos veces } 5) = P(\text{sacar } 5) * P(\text{sacar } 5) = \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{36} = 0.027 = 2.7\%$$

Nota: Aplicamos la misma fórmula para eventos dependientes siempre y cuando estemos buscando la probabilidad simultánea de los sucesos. Por ejemplo, al buscar la probabilidad de sacar dos reinas en una baraja de 52 cartas sin devolver la primera carta, se tomará en cuenta para la segunda extracción que ya hay 51 cartas y sólo 3 reinas. Es decir:

$$\begin{aligned} P(\text{sacar 2 reinas}) &= P(\text{sacar 1 reina}) * P(\text{sacar otra reina}) = \left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{3}{51}\right) \\ &= \frac{12}{2652} = \frac{1}{221} = 0.0045 = 0.45\% \end{aligned}$$

Veamos otro ejemplo: En una clase universitaria de Ciencias hay 30 alumnos, de los cuales 5 estudian Física, 15 Matemáticas y 10 Biología. De estos mismos 22 son mujeres y el resto hombres ¿Cuál sería la probabilidad de que al escoger un estudiante al azar para pasar al pizarrón, éste fuera hombre y estudiante de Matemáticas?

Primero calculemos la probabilidad de ser hombre. Para esto sabemos que son 30 alumnos (casos posibles) y que de ellos 22 son mujeres. Si a 30 le quitamos 22 nos quedan 8 que son los hombres (casos favorables). Al sustituir tenemos:

$$P(\text{hombre}) = \frac{8}{30}$$

Ahora calculemos la probabilidad de ser estudiante de Matemáticas. Recordemos que 30 son nuestros casos posibles (pues sólo hay 30 alumnos), y que de estos 15 estudian Matemáticas (casos favorables). Así tenemos que:

$$P(\text{matemáticas}) = \frac{15}{30}$$

Hemos dicho que la probabilidad conjunta (simultánea) será el producto de las probabilidades de cada suceso; es decir;

$$\begin{aligned} P(\text{hombre y matemáticas}) &= \\ P(\text{hombre}) &\quad * \quad \left(\frac{8}{30} \right) \left(\frac{15}{30} \right) = \frac{120}{900} = \frac{2}{15} = 0.1333 = 13.33\% \\ P(\text{matemáticas}) & \end{aligned}$$

$$P(\text{hombre y matemáticas}) =$$

Evento **colectivamente exhaustivo**. Un conjunto de eventos E_1, E_2, \dots, E_n son colectivamente exhaustivos cuando $E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n = S$, donde S es el espacio muestral.

Si dos o más eventos no pueden ocurrir simultáneamente, se llaman **eventos mutuamente excluyentes**, es decir, que la intersección de ambos eventos es vacía.

Por otro lado, en ocasiones un evento o más eventos dependen de otro evento previo, es decir, un evento A ocurre *dado* que ocurrió un evento B . Si existe este tipo de relación entre eventos se dice que son **eventos dependientes o condicionados** (el evento A *depende* del evento B , o el resultado del evento A está *condicionado* al resultado del evento B). Por otro lado, si no existe tal relación entre eventos, se dice que son **eventos independientes**.

Propiedad 1. Si A y B son dos eventos, la probabilidad de que ocurra A o B es igual a la suma de las probabilidades de ocurrencia de A y de B , menos la probabilidad de que ocurran A y B simultáneamente. Es decir,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ahora, si el caso es que los eventos sean mutuamente excluyentes se tiene:

Propiedad 2. Si dos eventos, A y B , son mutuamente excluyentes entonces la probabilidad de que ocurra A o B es igual a la suma de las probabilidades de ocurrencia de A y de B . Es decir

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Otra propiedad que se deriva de las anteriores es cuando se busca la probabilidad del complemento de un evento E , que denotaremos como E^c :

Propiedad 3. Si E es un evento y E^c su complemento, entonces
 $P(E^c) = 1 - P(E)$

Ejemplos

Una persona tiene una moneda y en unos momentos va a lanzarla al aire y por supuesto existe la incertidumbre sobre el resultado de tal acción, veamos la interpretación de cada uno de los términos.

Experimento: lanzar una moneda.

Evento: Cada una de las respuestas de esta actividad, el evento uno será sello y el evento dos será Águila.

El conjunto de todos los resultados posibles de un experimento se llama espacio muestral.

Se representa con la letra S .

$S = \text{Águila, Sol.}$

Pregunta: ¿Águila y sello son eventos mutuamente excluyentes?

Sí, porque sólo puede salir una cara de la moneda, ya sea sello o sea águila pero no ambas.

1.3.3. Probabilidad marginal y conjunta.

A partir de la definición de probabilidad conjunta, y considerando que el número de alumnos que presentan la característica $A1 = \text{"están satisfechos con la carrera"}$ se obtiene sumando el número de alumnos que pertenecen al evento $(A1 \text{ y } B1)$ y al evento $(A1 \text{ y } B2)$, entonces se verifica que: $P[A1] = P[A1 \cap B1] + P[A1 \cap B2]$. Verifica esta igualdad.

5. En general si $B1, B2, \dots, Bk$ son eventos mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos y A es cualquier evento definido en el mismo espacio muestral, se verifica que:

$$P(A) = P[A \cap B1] + P[A \cap B2] + \dots + P[A \cap Bk] \text{-----}(3)$$

Actividad 1.6:

1. Usando los datos del problema dado en la actividad 1.4, si una familia es seleccionada al azar, (a) ¿Cuál es la probabilidad que la familia seleccionada no se haya adherido a ningún plan de larga distancia?
- (b) Usando la expresión (3) determina la probabilidad del evento definido en el apartado (a). Sugerencias: Define los eventos B_i usando la información sobre necesidad de llamar al exterior semanalmente.
- (c) Determina la probabilidad de que la familia seleccionada se haya adherido a algún plan de larga distancia usando la probabilidad calculada en el apartado (a) y la relación entre las probabilidades de un evento y su complemento.
- (d) Di si los eventos $A = \text{Está adherido a un plan de larga distancia}$ y $B = \text{Tiene necesidad de llamar al exterior semanalmente}$, son mutuamente excluyentes. Justifica la respuesta.

1.4. REGLA DE LA ADICIÓN.

En la sección anterior se vio cómo se pueden calcular las probabilidades de cualquier evento definido en el espacio muestral, por ejemplo $P(A \cup B)$, cuando se conoce el número de puntos del espacio muestral favorables a dicho evento. Sin embargo, si sólo se conocen las probabilidades de algunos eventos y no se tiene información sobre cuáles son los puntos del espacio que componen dicho evento, se necesita del manejo de ciertas leyes básicas para la teoría de probabilidad, que relacionan las probabilidades de los eventos entre sí. Una de ellas es la llamada **Regla de la adición**, la cual permite obtener la probabilidad del evento A o B a partir del conocimiento de las probabilidades de los eventos " A ", " B " y " $A \cap B$ " y que se puede enunciar como.

Dados dos eventos A y B cualesquiera, el cálculo de la probabilidad del evento $A \cup B$ o probabilidad del evento A o B , puede expresarse como:

$$P[A \cup B] = P[A \text{ o } B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] \dots\dots\dots(4)$$

Si los eventos A y B no pueden ocurrir simultáneamente, es decir, ellos son *mutuamente excluyentes*, entonces su intersección es **evento nulo** y entonces se verifica que:

$P[A \cap B] = P[A \text{ y } B] = 0$. Luego, la probabilidad de la unión es igual a la suma de las probabilidades, es decir,

Si A y B son mutuamente excluyentes

$$P[A \cup B] = P[A \text{ o } B] = P[A] + P[B] \dots\dots\dots(5)$$

Actividad 1.7:

1. Verifique la regla de la adición usando los datos de la Tabla 3.1 considerando como

A = "Está satisfecho con su carrera" y B = "Está satisfecho con su progreso en la carrera"

2. Calcule $P[A \cup B]$, $p[A \cup A']$ y $p(A \cap B)$, y explique el resultado obtenido en el contexto del problema.

TAREA 2



Página 51.

1.5. PROBABILIDAD CONDICIONAL E INDEPENDENCIA.

El concepto de *Probabilidad Condicional* surge cuando se quiere obtener la probabilidad de un evento A, y se tiene conocimiento que ya ocurrió otro evento B relacionado al primero y se denota con $P[A|B]$, la cual se lee como “*probabilidad de A dado B*”. Una pregunta que podría hacerse el lector es sobre la necesidad de introducir este concepto. Para obtener una respuesta a este interrogante, al menos intuitivamente, supongamos se quiere conocer la probabilidad del evento A = “lloverá” y se sabe que se presentó el evento B = “está nublado”.

Intuitivamente se percibe que la $P[A]$ aumentará si se sabe que ocurrió B ya que ambos eventos están relacionados.

Ejemplo 1.3: Antes de dar la definición de probabilidad condicional considérese los datos de la encuesta a los 800 estudiantes (Tabla 1.1) y siguiendo la notación dada, se quiere calcular:

$$P[\text{está satisfecho con la carrera} \mid \text{está satisfecho con su progreso en la misma}] = P[A|B]$$

El número de estudiantes satisfechos con la carrera dentro de los 380 estudiantes no satisfechos con su progreso es 362, entonces se verifica que $P[A|B] = 362/380 = 0.9526$

Tres cosas deben observarse en esta igualdad:

- Si no se dispone de la información sobre B', entonces $P[A] = 712/800 = 0.89$ es decir, la probabilidad de A sin el conocimiento de que ocurrió B es menor que $P[A|B]$.
- El numerador (362) es el número de estudiantes que están satisfechos con la carrera y con su progreso en la misma, es decir, pertenecen al conjunto “A y B”.
- El denominador (380) es el número de empleados que pertenecen al evento “B”, esto equivale a considerar un nuevo espacio muestral donde el número de puntos se redujo de 800 a 380.
- Si se divide numerador y denominador de la igualdad por 800, es decir, el número total de estudiantes, se tiene que:

$$P[A|B] = \frac{362 / 800}{380 / 800} = \frac{0.4525}{0.4750} = 0.9526,$$

y entonces se debe observar que el numerador es la $P[A \text{ y } B] = P[A \cap B]$ y el denominador es $P[B]$.

Propiedad 4. La probabilidad de que ocurra un evento A dado que ocurrió el evento B (el evento A depende del evento B), denotado $P(A|B)$, es:

$$p(A/B) = \frac{p(A \text{ ó } B)}{p(B)} = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \dots\dots\dots(6)$$

Hay que notar que esta propiedad no es conmutativa, situación que sí ocurre con la probabilidad de unión o la intersección de eventos, por lo que no hay que confundir $P(A|B)$ y $P(B|A)$.

A partir de esta última observación surge naturalmente la definición formal del concepto de **Probabilidad Condicional** para dos eventos cualesquiera A y B, como:

$$p(A|B) = \frac{p(A \text{ ó } B)}{p(B)} = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \dots\dots\dots(6)$$

La comparación de los valores obtenidos de $P[A|B]$ con $P[A]$ en el ejemplo revela cierta información importante: *el conocimiento del progreso en la carrera afecta la predicción de la satisfacción con la carrera elegida*. Por lo tanto, desde una perspectiva estadística se puede establecer que estos eventos están asociados de alguna manera. Esto lleva a definir uno de los conceptos más importantes de la estadística y que es el concepto de **Independencia Estadística** de la siguiente manera:

Dos eventos A y B se dice que son independientes si

$$P[A|B] = P[A] \dots\dots\dots (7)$$

Es decir, que el conocimiento de la ocurrencia de B no afecta a la $P[A]$.

Retomando los conceptos de eventos dependientes o condicionales, se va a definir la **probabilidad condicional** como sigue:

Probabilidad condicionada es la probabilidad de que ocurra un evento A, sabiendo que también sucede otro evento B. La probabilidad condicional se escribe $P(A|B)$, y se lee «la probabilidad de A dado B».

No tiene por qué haber una relación causal o temporal entre A y B. A puede preceder en el tiempo a B, sucederlo o pueden ocurrir simultáneamente. A puede causar B, viceversa o pueden no tener relación causal. Las relaciones causales o temporales son nociones que no pertenecen al ámbito de la probabilidad. Pueden desempeñar un papel o no, dependiendo de la interpretación que se le dé a los eventos.

1. En un supermercado el 70% de las compras las realizan las mujeres; de las compras realizadas por estas, el 80% supera las 2000 PTA, mientras que de las compras realizadas por hombres sólo el 30% supera esa cantidad.
 - a) Elegido un ticket de compra al azar ¿Cuál es la probabilidad de que supere las 2000 PTA?
 - b) Si se sabe que el ticket de compra no supera las 2000 PTA ¿Cuál es la probabilidad de que la compra haya sido hecha por una mujer?

Primer procedimiento:

M	H
14	
Más de 2000 pts 56	9
	21

Supuesta la muestra de 100 personas, 70 son mujeres y 30 hombres. Como el 80% de las mujeres realizan compras por más de 2000 pta. Las mujeres que realizan compras por más de 2000 pta. son 56 (simple regla de tres) y los hombres que realizan compras por más de 2000 pta. son 9 (simple regla de tres). De la figura sigue que:

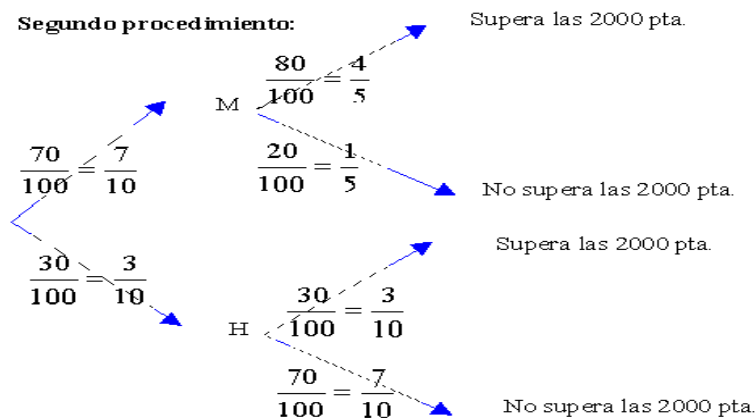
$$a) \quad P(\text{superar 2000 pta}) = \frac{65}{100} = 0,65$$

b) Debemos calcular la probabilidad de que la compra la haya realizado una mujer sabiendo que no supera las 2000 pta.

$$P(\text{no superar 2000 pta}) = 1 - P(\text{superar 2000 pta}) = \frac{35}{100}$$

$$P(M / \text{no superar 2000 pta}) = \frac{P(M \cap \text{no superar 2000 pta})}{P(\text{no superar 2000 pta})} = \frac{\frac{14}{100}}{\frac{35}{100}} = \frac{14}{35} = 0,4$$

Segundo procedimiento:



$$a) \quad P(\text{Supera las 2000 pta.}) = \frac{7}{10} \cdot \frac{4}{5} + \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{65}{100} = 0.65$$

b) Probabilidad de que la compra la haya realizado una mujer, sabiendo que no ha superado las 2000 pta.

$$P(\text{No superar 2000 pta.}) = \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{14 + 21}{100} = \frac{35}{100}$$

$$P(M \cap \text{No superar 2000 pta.}) = \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{5} = \frac{7}{50}$$

$$P(M / \text{No superar 2000 pta}) = \frac{P(M \cap \text{No superar 2000 pta})}{P(\text{No superar 2000 pta})} = \frac{\frac{7}{50}}{\frac{35}{100}} = \frac{14}{35} = 0,4$$

Actividad 1.8:

1. Con los datos de la Tabla 3.2 define dos eventos A y B no mutuamente excluyentes y calcula $P[B|A]$ usando la expresión (6).
2. Da un ejemplo de eventos independientes y verifica (7).

1.6. REGLA DE LA MULTIPLICACIÓN.

Usando la definición de la probabilidad condicional y con algún manejo algebraico se llega a otra regla básica de la teoría de probabilidad denominada **Regla de la multiplicación** y la cual permite el cálculo de la $P[A \text{ y } B]$ conociendo la $P[A|B]$ y la $P[B]$, en efecto,

$$P[A \text{ y } B] = P[A \cap B] = P[A|B] P[B] \dots \dots \dots (8)$$

Finalmente, el criterio para la independencia de eventos queda como sigue:

Propiedad 5. Dos eventos A y B son independientes si y sólo si

$$P(A/B) = P(A).P(B/A), \text{ y } P(B/A) = P(B)$$

o, que es lo mismo:

$$P(A/B) = P(A) \cdot P(B) \dots \dots \dots (8)$$

Ejemplos:

Ejemplo 1.4: Usando los datos del ejemplo anterior, es decir, $P[A|B] = 0.9526$ y a partir de los de la Tabla 1.1 se tiene que $P[B] = 380/800 = 0.4750$ y la expresión (8) se obtiene que

$$P[A \text{ y } B] = P[A \cap B] = P[A/B] P[B] = 0.9526 \times 0.4750 = 0.4525$$

Ejemplo 1.5. En un lote de producción hay 25 productos, 5 de los cuales tienen defectos menores y 9 tienen defectos mayores. Si se toman de este lote tres productos uno tras otro, determina la probabilidad de que:

- El primer producto no tenga defectos y que el segundo y tercero tengan defectos mayores.
- El primer producto tenga defectos menores, el segundo tenga defectos mayores y que el tercero no tenga defectos.
- El primer producto y el tercero no tengan defectos.

Solución:

a) Definiremos algunos eventos;

B_1 = evento de que el primer producto seleccionado no tenga defectos

DM_2 = evento de que el segundo producto seleccionado tenga defectos mayores

DM_3 = evento de que el tercer producto seleccionado tenga defectos mayores

$$\begin{aligned}
 p(B_1/DM_2/DM_3) &= p(B_1)p(DM_2/B_1)p(DM_3/B_1/DM_2) \\
 &= (11/25)*(9/24)*(8/23) \\
 &= 0.44*0.375*0.347826 \\
 &= 0.05739
 \end{aligned}$$

b) Dm_1 = evento de que el primer producto seleccionado tenga defectos menores

DM_2 = evento de que el segundo producto seleccionado tenga defectos mayores

B_3 = evento de que el tercer producto seleccionado no tenga defectos

$$\begin{aligned}
 P(Dm_1/DM_2/B_3) &= p(Dm_1)p(DM_2/Dm_1)p(B_3/Dm_1/DM_2) \\
 &= (5/25)*(9/24)*(11/23) = \\
 &= 0.2*0.375*0.4782608 = 0.03587
 \end{aligned}$$

c) B_1 = evento de que el primer producto seleccionado no tenga defectos

B_2 = evento de que el segundo producto seleccionado no tenga defectos

Dm_2 = evento de que el segundo producto seleccionado tenga defectos menores

DM_2 = evento de que el segundo producto seleccionado tenga defectos mayores

B_3 = evento de que el tercer producto seleccionado no tenga defectos

En este caso como no se especifica de qué tipo debe ser el segundo producto, se considera que éste puede ser no defectuoso, con defectos menores o con defectos mayores; por lo tanto;

$$\begin{aligned}
 &p(B_1/B_2/B_3) + p(B_1/Dm_2/B_3) + p(B_1/DM_2/B_3) \\
 &= p(B_1)p(B_2/B_1)p(B_3/B_1/B_2) + P(B_1)p(Dm_2/B_1)p(B_3/B_1/Dm_2) + p(B_1)p(DM_2/B_1)p(B_3/B_1/DM_2) \\
 &= (11/25)*(10/24)*(9/23) + (11/25)*(5/24)*(10/23) + (11/25)*(9/24)*(10/23) \\
 &= (0.44)(0.41666)(0.39130) + (0.44)(0.20833)(0.43478) + (0.44)(0.375)(0.43478) \\
 &= 0.07173 + 0.03985 + 0.07174 \\
 &= 0.18332
 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.6. Doce personas (6 mujeres, 4 hombres y dos niños) realizan un paseo en un pequeño autobús. Al llegar a cierto lugar, bajan del autobús cuatro personas una tras otra, determina la probabilidad de que; a). La primera y segunda persona que bajen sean mujeres, el tercero sea un niño y por último baje un hombre, b). Que baje un niño, luego un hombre, luego otro niño y por último que baje una mujer, c). Que baje una mujer, luego un hombre, después otra mujer y por último otro hombre.

Solución:

- a) M_1 = evento de que baje del autobús primero una mujer
 M_2 = evento de que baje en segundo lugar una mujer
 N_3 = evento de que baje en tercer lugar un niño
 H_4 = evento de que baje en cuarto lugar un hombre

$$\begin{aligned} P(M_1/M_2/N_3/H_4) &= p(M_1)p(M_2|M_1)p(N_3|M_1 \cap M_2)p(H_4|M_1 \cap M_2 \cap N_3) \\ &= (6/12) * (5/11) * (2/10) * (4/9) \\ &= 240/11,880 = 0.0202 \end{aligned}$$

- b) N_1 = evento de que baje en primer lugar un niño
 H_2 = evento de que baje en segundo lugar un hombre
 N_3 = evento de que baje en tercer lugar un niño
 M_4 = evento de que baje en cuarto lugar una mujer

$$\begin{aligned} p(N_1/H_2/N_3/M_4) &= p(N_1)p(H_2/N_1)p(N_3/N_1/H_2)p(M_4/N_1/H_2/N_3) = \\ &= (2/12) * (4/11) * (1/10) * (6/9) \\ &= 48/11,880 \\ &= 0.00404 \end{aligned}$$

- c) M_1 = evento de que baje en primer lugar una mujer
 H_2 = evento de que baje en segundo lugar un hombre
 M_3 = evento de que en tercer lugar baje una mujer
 H_4 = evento de que en cuarto lugar baje un hombre

$$\begin{aligned} p(M_1/H_2/M_3/H_4) &= p(M_1)p(H_2/M_1)p(M_3/M_1/H_2)p(H_4/M_1/H_2/M_3) \\ &= (6/12) * (4/11) * (5/10) * (3/9) \\ &= 360/11,880 \\ &= 0.0303 \end{aligned}$$

Observación:

- 1 A partir de la expresión (8) si A y B son independientes entonces $P[A/B] = P[A]$ y entonces se verifica que $P[A \text{ y } B] = P[A] P[B]$

Que es la definición formal de independencia estadística, aunque ella tiene una interpretación práctica menos clara que la dada por la expresión (7).

Actividad 1.9:

- Verifica el resultado del ejemplo 1.4 usando los datos de la Tabla 1.1.
- Escribe la definición de $P[A \text{ y } B]$ si se conoce $P[B/A]$.

EQUIPROBABILIDAD:

El concepto de equiprobabilidad sugiere que si no hay razón para favorecer a ninguno de los posibles resultados de un experimento, entonces los resultados deben ser considerados IGUALMENTE PROBABLES de ocurrir.

$$P(\text{águila}) = P(\text{sello})$$

PROBABILIDAD BAJO CONDICIONES DE INDEPENDENCIA ESTADÍSTICA.

Cuando ocurren dos eventos el resultado del primero PUEDE O NO tener un efecto en el resultado del segundo evento, es decir, los eventos pueden ser tanto dependientes o independientes.

EVENTOS ESTADÍSTICAMENTE INDEPENDIENTES.

Son aquellos en los cuales la ocurrencia de un evento NO tiene efecto en la probabilidad de la ocurrencia de cualquier otro.

Existen 3 tipos de probabilidad bajo la condición de independencia estadística:

Marginal: Probabilidad individual significa que sólo puede tener lugar un evento.
 $P(\text{sello}) = \frac{1}{2}$

Conjunta: Es la probabilidad de que 2 o más eventos independientes ocurran junto o en sucesión, es el producto de sus probabilidades marginales.

Fórmula:

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

$P(A \cap B)$ = PROBABILIDAD DE QUE LOS EVENTOS A Y B OCURRAN JUNTOS O EN SUCESIÓN.

$P(A)$ = PROBABILIDAD MARGINAL DE A.

$P(B)$ = PROBABILIDAD MARGINAL DE B.

Ejemplo: Si lanzamos 2 veces una moneda, ¿Cuál es la probabilidad de obtener 2 águilas (águila y águila)?

S= Moneda 1 águila, sello.
 Moneda 2 águila, sello.

$$P(2 \text{ águilas}) = P(\text{águila}) * P(\text{águila}) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Condicional: Es aquella en la cual la probabilidad de un evento se encuentra condicionada a la ocurrencia de otro evento.

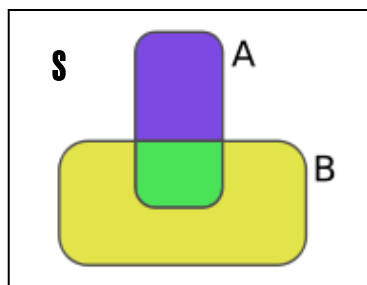
$$P(B/A) = P(B)$$

Se lee: " la probabilidad del evento B si el evento A ha ocurrido".

1.7. TEOREMA DE BAYES.

El **condicionamiento** de probabilidades puede lograrse aplicando el Teorema de Bayes.

1.7.1. Definición:



Dado un espacio de probabilidad (Ω, F, P) y dos eventos (o sucesos) $A, B \in F$ con $P(B) > 0$, la probabilidad condicional de A dado B está definida como:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$P(A/B)$ se puede interpretar como, tomando la región en la que se cumple, la fracción en la que también se cumple A. La parte o fracción de A supeditada al evento B.

1.7.2. Interpretación.

$P(A/B)$ La parte de A que es afectada por la ocurrencia de B. Si el evento B es, por ejemplo, tener gripe, y el evento A es tener dolor de cabeza, $P(A/B)$ sería la probabilidad de tener dolor de cabeza cuando se está enfermo de gripe.

Gráficamente, si se interpreta el espacio de la ilustración como el espacio de todos los mundos posibles, A serían los mundos en los que se tiene dolor de cabeza y B el espacio en el que se tiene gripe. La zona verde de la intersección representaría los mundos en los que se tiene gripe y dolor de cabeza $P(A \cap B)$. En este caso $P(A/B)$, es decir, la probabilidad de que alguien tenga dolor de cabeza sabiendo que tiene gripe, sería la proporción de las regiones con gripe y dolor de cabeza (intersección) de todos los mundos con gripe.

1.7.3. Propiedades.

$$1. P(A/B) + P(\bar{A}/B) = 1$$

$$2. A \subseteq B \rightarrow P(A/B) = 1$$

Pero **NO** es cierto que $A \subseteq B \rightarrow P(A/B) = 1$

1.7.4. Independencia de sucesos.

Dos sucesos aleatorios A y B son independientes si y sólo si:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

O sea que si A y B son independientes, su probabilidad conjunta, $P(A \cap B)$, puede ser expresada como el producto de las probabilidades individuales. Equivalentemente: en particular, si A y B son eventos independientes, entonces se cumple.

$$P(A/B) = P(A)$$

$$P(B/A) = P(B)$$

En otras palabras, si A y B son independientes, la probabilidad condicional de A dado B es simplemente la probabilidad de A y viceversa.

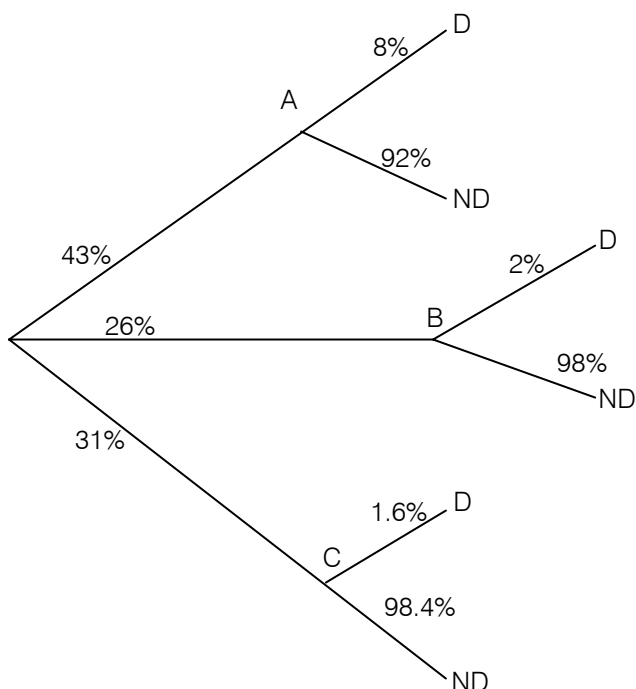
EJEMPLOS

Ejemplo 1.7. Tres máquinas denominadas A , B y C , producen un 43%, 26% y 31% de la producción total de una empresa respectivamente, se ha detectado que un 8%, 2% y 1.6% del producto manufacturado por cada una de estas máquinas es defectuoso.

a. Se selecciona un producto al azar y se encuentra que es defectuoso ¿Cuál es la probabilidad de que el producto haya sido fabricado en la máquina B ?

b. Si el producto seleccionado resulta que no es defectuoso ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado en la máquina C ?

Solución: Para resolver este problema nos ayudaremos con un diagrama de árbol;



Definiremos los eventos;

D = evento de que el producto seleccionado sea defectuoso (evento que condiciona).

A = evento de que el producto sea fabricado en la máquina A .

B = evento de que el producto sea fabricado por la máquina B .

C = evento de que el producto sea fabricado por la máquina C .

$$P(B/D) = p(B/D)/p(D) = p(B)p(D/B)/p(A)p(D/A) + p(B)p(D/B) + p(C)p(D/C)$$

$$P(B|D) = (0.26*0.02)/(0.43*0.08 + 0.26*0.02 + 0.31*0.016)$$

$$= 0.0052/0.04456$$

$$= 0.116697$$

b). ND = evento de que el producto seleccionado no sea defectuoso (evento que condiciona).

A = evento de que el producto sea fabricado en la máquina A

B = evento de que el producto sea fabricado por la máquina B

C = evento de que el producto sea fabricado por la máquina C

$$P(C/ND) = p(C/ND)/p(ND) = p(C)p(ND/C)/p(A)p(ND/A) + p(B)p(ND/B) + p(C)p(ND/C)$$

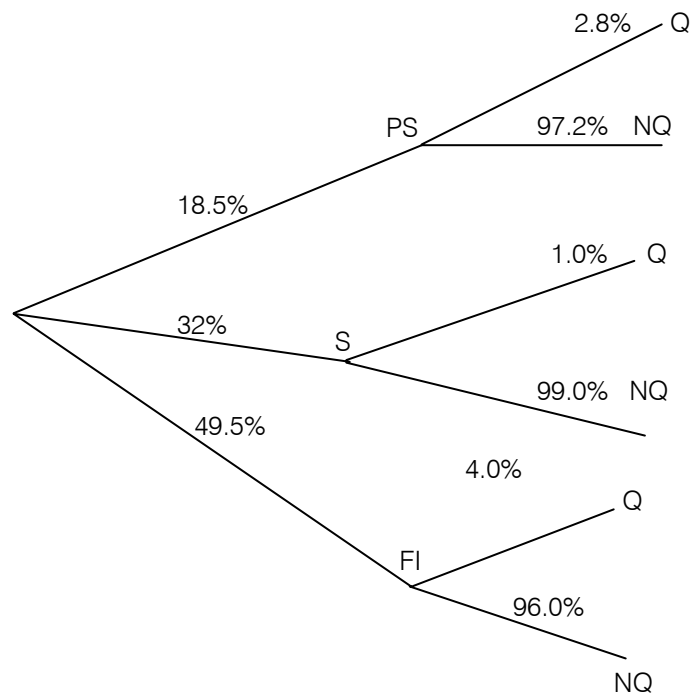
$$= 0.31*0.984/(0.43*0.92 + 0.26*0.98 + 0.31*0.984)$$

$$= 0.30504/0.95544$$

$$= 0.31927$$

Ejemplo 1.8. Una empresa recibe visitantes en sus instalaciones y los hospeda en cualquiera de tres hoteles de la ciudad; Palacio del Sol, Sicomoros o Fiesta Inn, en una proporción de 18.5%, 32% y 49.5% respectivamente, de los cuales se ha tenido información de que se les ha dado un mal servicio en un 2.8%, 1% y 4% respectivamente. A). Si se selecciona a un visitante al azar ¿Cuál es la probabilidad de que no se le haya dado un mal servicio? B). Si se selecciona a un visitante al azar y se encuentra que el no se quejó del servicio prestado ¿Cuál es la probabilidad de que se haya hospedado en el Palacio del Sol? C). Si el visitante seleccionado se quejó del servicio prestado ¿Cuál es la probabilidad de que se haya hospedado en el hotel Fiesta Inn?

Solución: Haciendo uso de un diagrama de árbol;



a). NQ = evento de que un visitante no se queje del servicio

PS = evento de que un visitante haya sido hospedado en el hotel Palacio del Sol

S = evento de que un visitante haya sido hospedado en el hotel Sicómoro

FI = evento de que un visitante haya sido hospedado en el hotel Fiesta Inn

$$\begin{aligned}
 P(NQ) &= p(PS)p(NQ/PS) + p(S)p(NQ/S) + p(FI)p(NQ/FI) = \\
 &= 0.185 \cdot 0.972 + 0.32 \cdot 0.99 + 0.495 \cdot 0.96 \\
 &= 0.17982 + 0.3168 + 0.4752 \\
 &= 0.97182
 \end{aligned}$$

b). NQ = evento de que un visitante no se queje del servicio

PS = evento de que un visitante haya sido hospedado en el hotel Palacio del Sol

S = evento de que un visitante haya sido hospedado en el hotel Sicómoro

FI = evento de que un visitante haya sido hospedado en el hotel Fiesta Inn

$$P(PS/NQ) = p(PS/NQ)/p(NQ)$$

$$\begin{aligned} &= (0.185 \cdot 0.972) / (0.185 \cdot 0.972 + 0.32 \cdot 0.99 + 0.495 \cdot 0.96) = \\ &= 0.17982 / (0.17982 + 0.3168 + 0.4752) \\ &= 0.17982 / 0.97182 \\ &= 0.1850342 \end{aligned}$$

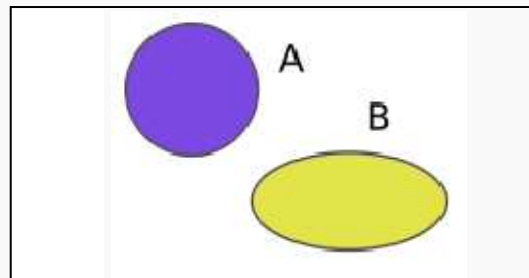
c). Q = evento de que un visitante se queje del servicio

FI = evento de que un visitante haya sido hospedado en el hotel Fiesta Inn

$$\begin{aligned} P(FI/Q) &= p(FI/Q)/p(Q) \\ &= 0.495 \cdot 0.04 / (0.185 \cdot 0.028 + 0.32 \cdot 0.01 + 0.495 \cdot 0.04) \\ &= 0.0198 / (0.00518 + 0.0032 + 0.0198) \\ &= 0.0198 / 0.02818 \\ &= 0.7026 \end{aligned}$$

1.7.5. Exclusividad mutua.

S



Los conjuntos A y B no intersecan. Son mutuamente excluyentes.

Dos sucesos A y B son mutuamente excluyentes si y sólo si $A \cap B = \emptyset$.

Entonces: $A \cap B = \emptyset$.

Además, si $P(B) > 0$ entonces $P(A/B)$ es igual a 0.

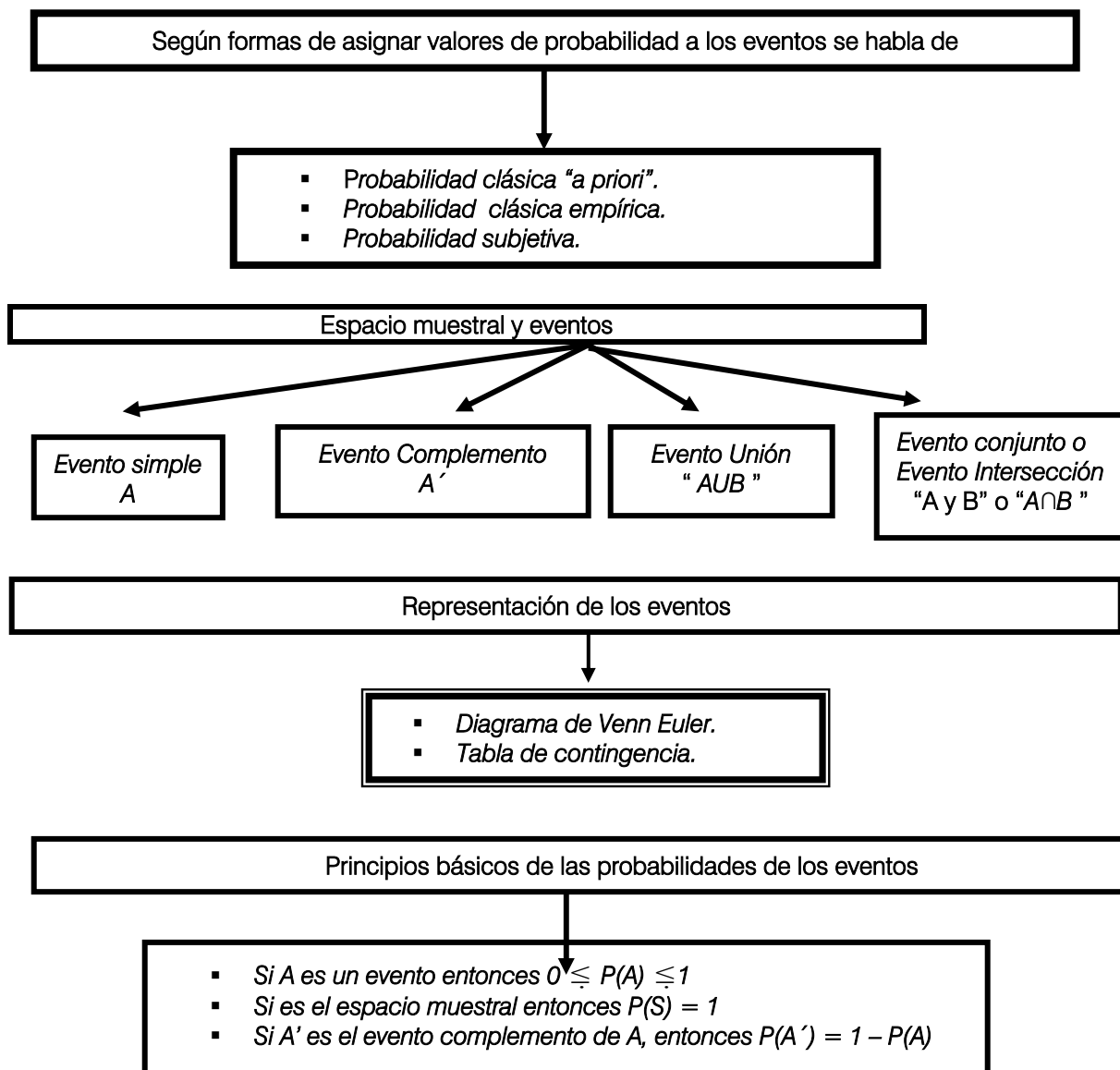
1.7.6. La falacia de la probabilidad condicional.

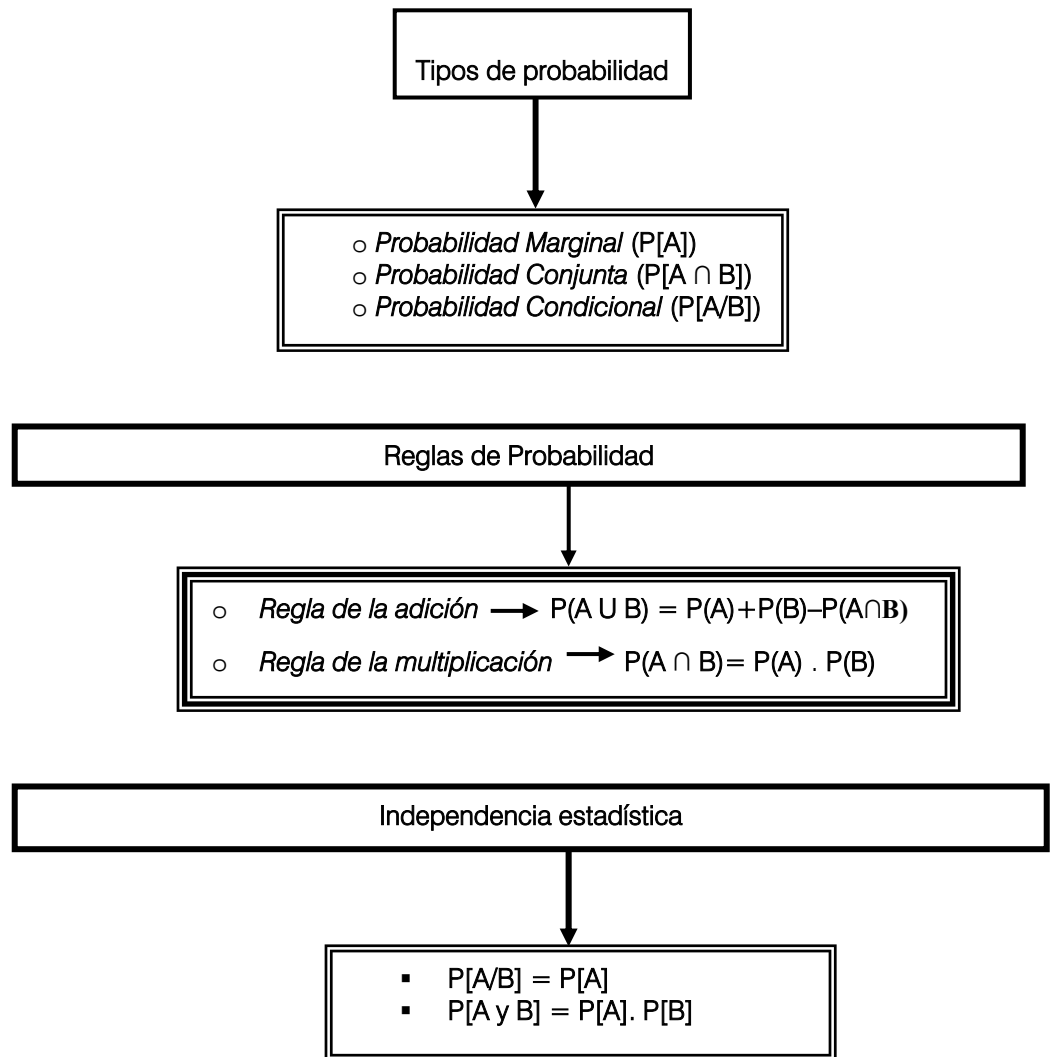
La falacia de la probabilidad condicional se basa en asumir que $P(A/B)$ es casi igual a $P(B/A)$. El matemático John Allen Paulos analiza en su libro “El hombre anumérico” este error muy común cometido por doctores, abogados y otras personas que desconocen la Teoría de la probabilidad.

La verdadera relación entre $P(A/B)$ y $P(B/A)$ es la siguiente:

$$P(B/A) = P(A/B) \cdot \frac{P(B)}{P(A)} \quad (\text{Teorema de Bayes})$$

RESUMEN





¡Ojo! Recuerda que debes resolver la autoevaluación y los ejercicios de reforzamiento; esto te ayudará a enriquecer los temas vistos en clase.





TAREA 1

Nombre _____

Núm. de lista _____ Grupo _____ Turno _____

Núm. de Expediente _____ Fecha _____

INSTRUCCIONES: Realiza una investigación sobre la probabilidad clásica a priori, clásica empírica y subjetiva.

Realiza un cuadro comparativo donde muestres ejemplos, analízala y entrega conclusiones a tu profesor.

PROBABILIDAD	EJEMPLO	SEMEJANZAS	DIFERENCIAS
Clásica a priori			
Clásica empírica			
Subjetiva			

CONCLUSIONES:



Revisión: _____

Observaciones: _____



TAREA 2

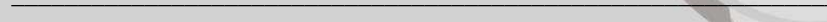
Nombre _____

Núm. de lista _____ Grupo _____ Turno _____

Núm. de Expediente _____ Fecha _____

INSTRUCCIONES: Realiza una investigación sobre ejemplos de eventos mutuamente excluyentes, identifica las características principales y entrega un reporte a tu profesor.

[illegible]




AUTOEVALUACIÓN

Nombre _____

Núm. de lista _____ Grupo _____ Turno _____

Núm. de Expediente _____ Fecha _____

INSTRUCCIONES: Lee cuidadosamente y responde los siguientes cuestionamientos, rellenando el círculo de la opción que consideres correcta.

1. En este tipo de probabilidad, un evento se basa en el conocimiento del proceso involucrado.
 - ☐ A Clásica empírica.
 - ☐ B Clásica a priori.
 - ☐ C Subjetiva.
 - ☐ D Estadística.

2. En esta probabilidad, la asignación de los sucesos o eventos de interés se basan en la información observada y no en el conocimiento previo del proceso.
 - ☐ A Estadística.
 - ☐ B Clásica a priori.
 - ☐ C Clásica empírica.
 - ☐ D Subjetiva.

3. Se refiere a la probabilidad asignada por una persona en particular basada generalmente en su experiencia, opinión personal y análisis que él hace de la situación particular que se evalúa.
 - ☐ A Estadística.
 - ☐ B Clásica a priori.
 - ☐ C Clásica empírica.
 - ☐ D Subjetiva.

4. Se denomina así a cada posible acontecimiento que se puede describir mediante una sola característica.
 - ☐ A Espacio muestral.
 - ☐ B Evento.
 - ☐ C Complemento.
 - ☐ D Contingencia.

5. Es la probabilidad que significa que sólo puede tener lugar un evento.
 - ☐ A Marginal.
 - ☐ B Conjunta.
 - ☐ C Condicional.
 - ☐ D Condicionada.

6. En esta probabilidad dos o más eventos independientes ocurren junto con la sucesión.
 - ☐ A Marginal.
 - ☐ B Condicionada.
 - ☐ C Condicional.
 - ☐ D Conjunta.

7. Esta probabilidad surge cuando se quiere obtener $P[A|B]$.
- Ⓐ Marginal.
 - Ⓑ Condicionada.
 - Ⓒ Condicional.
 - Ⓓ Conjunta.
8. Es la probabilidad de que ocurra $P(A|B)$.
- Ⓐ Marginal.
 - Ⓑ Condicionada.
 - Ⓒ Condicional.
 - Ⓓ Conjunta.
9. Es la regla “Dados dos eventos A y B, cualesquiera, el cálculo de la probabilidad del evento AUB o probabilidad del evento A o B”.
- Ⓐ Independencia.
 - Ⓑ Adición.
 - Ⓒ Teorema de Bayes.
 - Ⓓ Multiplicación.
10. Se refiere a la regla: “ $P[A \text{ y } B] = P[A \cap B] = P[A|B] P[B]$ ”.
- Ⓐ Independencia.
 - Ⓑ Adición.
 - Ⓒ Teorema de Bayes.
 - Ⓓ Multiplicación.
11. Está definida como: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- Ⓐ Independencia.
 - Ⓑ Adición.
 - Ⓒ Teorema de Bayes.
 - Ⓓ Multiplicación.

ESCALA DE MEDICIÓN DEL APRENDIZAJE

- Si todas tus respuestas fueron correctas: **excelente**, por lo que te invitamos a continuar con esa dedicación.
- Si tienes de 8 a 9 aciertos, tu aprendizaje es **bueno**, pero es necesario que repases los temas.
- Si contestaste correctamente 7 ó menos reactivos, tu aprendizaje es **insuficiente**, por lo que te recomendamos solicitar asesoría a tu profesor.

*Consulta las
claves de
respuestas en la
página 161.*


**EJERCICIO DE
REFORZAMIENTO 1**

Nombre _____

Núm. de lista _____ Grupo _____ Turno _____

Núm. de Expediente _____ Fecha _____

INSTRUCCIONES: Forma equipo con un máximo de cinco compañeros de clase y hagan los siguientes ejercicios. Discútanlos en clase.

1. En una ciudad el 55% de los habitantes consume pan integral, el 30% consume pan de multicereales y el 20% consume ambos. Se pide:
 - I) Sabiendo que un habitante consume pan integral ¿Cuál es la probabilidad de que coma pan de multicereales?
 - II) Sabiendo que un habitante consume pan de multicereales ¿Cuál es la probabilidad de que no consuma pan integral?
 - III) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de esa ciudad no consuma ninguno de los dos tipos de pan?

2. El equipo directivo de cierta empresa del sector de hotelería está constituido por 25 personas de las que un 60% son mujeres. El gerente tiene que seleccionar a una persona de dicho equipo para que represente a la empresa en un certamen internacional. Decide lanzar una moneda: si sale cara, selecciona a una mujer y si sale cruz, a un hombre.

Sabiendo que 5 mujeres y 3 hombres del equipo directivo no hablan inglés, determina, justificando la respuesta, la probabilidad de que la persona seleccionada hable inglés.

3. Dos personas piensan cada una de ellas un número del 0 al 9. Calcula la probabilidad de que las dos personas no piensen el mismo número.
4. En una Universidad existen tres facultades: A, B y C. En A hay matriculadas 150 chicas y 50 chicos; en B, 300 chicas y 200 chicos; y en C, 150 chicas y 150 chicos.
 - a. Calcula la probabilidad de que un estudiante, elegido al azar, sea chico.
 - b. Si un estudiante elegido al azar resultara ser chico ¿Cuál es su facultad más probable?
5. Se escuchan tres discos y se vuelven a guardar en un estuche elegido al azar ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los discos haya sido guardado en el envoltorio que le correspondía?
6. Se considera una célula en el instante $t=0$. En el instante $t=1$ la célula puede: bien reproducirse, dividiéndose en dos, con probabilidad $3/4$, o bien morir con probabilidad $1/4$.

Si la célula se divide, entonces en el tiempo $t=2$ cada uno de sus dos descendientes puede también subdividirse o morir, con las mismas probabilidades que antes, independientemente uno de otro.

- a. ¿Cuántas células es posible que haya en el tiempo $t=2$?
- b. ¿Con qué probabilidad?

7. Una caja contiene 10 bolas blancas, 5 negras y 5 rojas. Se extraen dos bolas consecutivamente de la caja. Calcula la probabilidad de que las dos sean blancas si:
 - a) Antes de extraer la segunda bola se vuelve a meter la primera en la caja.
 - b) La segunda bola se extrae sin haber metido la primera en la caja.
8. Un monedero contiene 2 monedas de plata y 3 de cobre, y otro contiene 4 de plata y 3 de cobre. Si se elige un monedero al azar y se extrae una moneda ¿Cuál es la probabilidad de que sea de plata?
9. En una oficina el 70% de los empleados son asturianos. De entre los asturianos, el 50% son hombres, mientras que de los no asturianos, sólo son hombres el 20%.
 - a) ¿Qué porcentaje de empleados no asturianos son mujeres?
 - b) Calcula la probabilidad de que un empleado de la oficina sea mujer.
 - c) Fernando trabaja en dicha oficina ¿Cuál es la probabilidad de que sea asturiano?
10. El 12% de los habitantes de un país padece cierta enfermedad. Para el diagnóstico de ésta, se dispone de un procedimiento que no es completamente fiable ya que da positivo en el 90% de los casos de personas realmente enfermas, pero también da positivo en el 5% de personas sanas ¿Cuál es la probabilidad de que esté sana una persona a la que el procedimiento le ha dado positivo?
11. En un ayuntamiento hay 5 concejales del partido A, 4 del B y 1 del C. Si se eligen al azar y sucesivamente tres concejales ¿Cuál es la probabilidad de que los tres sean del partido A? ¿Y la de que pertenezcan a partidos distintos?
12. Un dado ha sido trucado de manera que la probabilidad de sacar un número par es el doble que la de sacar un número impar. Se lanza el dado y se pide:
 - a) La probabilidad de obtener un número par.
 - b) Si, a la vez, se lanza un dado no trucado, la probabilidad de obtener un número par y un número impar.
 - c) Si, a la vez, se lanza un dado no trucado, la probabilidad de obtener, al menos, un número impar.
13. Tengo dos urnas, dos bolas blancas y dos bolas negras. Se desea saber como debo distribuir las bolas en las urnas para que, al elegir una urna al azar, sea máxima la probabilidad de obtener una bola blanca. La única condición exigida es que cada una tenga al menos una bola.
14. Consideremos el tipo de secadora de ropa (de gas o eléctrica) comprada por cinco clientes de una tienda.
 - a) Si la probabilidad de que a lo más uno compre eléctrica es de 0.087 ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 2 compren eléctrica?
 - b) Si $P(\text{los 5 compren de gas}) = 0.0768$ y $P(\text{los 5 compren eléctrica}) = 0.0102$ ¿Cuál es la probabilidad de que al menos compren una de cada tipo?

15. El evento A es que el próximo préstamo de una biblioteca sea un libro que no es de ficción y B que sea de ficción. Supongamos que $P(A) = 0.35$ y $P(B) = 0.50$

- a) ¿Por qué es posible que $P(A) + P(B)$ no sea 1?
- b) Calcule $P(A')$
- c) Calcule $P(A \text{ ó } B)$
- d) Calcule $P(A' \text{ y } B')$

16. Las tres opciones preferidas en cierto automóvil nuevo son:

- a) transmisión automática (A).
- b) dirección hidráulica (B).
- c) radio (C).

Se sabe que: el 70% de los compradores piden A; 80% B; 75% C; 85% A ó B; 90% A ó C; 95% B Ó C; 98% A, B ó C.

Hagan un diagrama de Venn Euler para representar los tres eventos, determinando la probabilidad de que el siguiente comprador:

- a) escoja al menos una de las tres opciones.
- b) no seleccione ninguna de las tres opciones.
- c) sólo seleccione transmisión automática y ninguna de las otras.
- d) seleccione sólo una de las tres opciones.

17. Inventen un juego con dos dados. Como ejemplos:

- a) tirar dos dados y el resultado es el producto de los números de las caras superiores.
- b) tirar dos dados y el resultado es 1000 si la suma de los dos es par y 5000 si la suma es non.

Escriban el espacio muestral y, teniendo en cuenta que las 36 parejas de posibles resultados con dos dados: $\{ (1,1), (1,2), (1,3), \dots \}$ son igualmente probables.

Elabore una tabla estadística de distribución de probabilidad para cada ejemplo propuesto.



Unidad 2

Distribución de Probabilidad de Variables Aleatorias Discretas.

Objetivos:

El alumno:

Resolverá problemas de probabilidad con variables aleatorias discretas, a partir del conocimiento de una distribución de probabilidad, identificando el tipo de variable y su distribución; empleando el modelo de distribución de probabilidad binomial y los parámetros de media y desviación estándar; con una actitud crítica, de tolerancia y respeto.

Organizador anticipado:

Al participar en juegos de azar, como son el tirar dados, sabemos que está inmersa la probabilidad; pero así también, si profundizamos sobre el tema, podremos realizar estimaciones.

En esta unidad conoceremos acerca de la distribución de la probabilidad, tomando como base el análisis de las variables.

“Saber no es suficiente; tenemos que aplicarlo. Tener voluntad no es suficiente; tenemos que implementarla”.

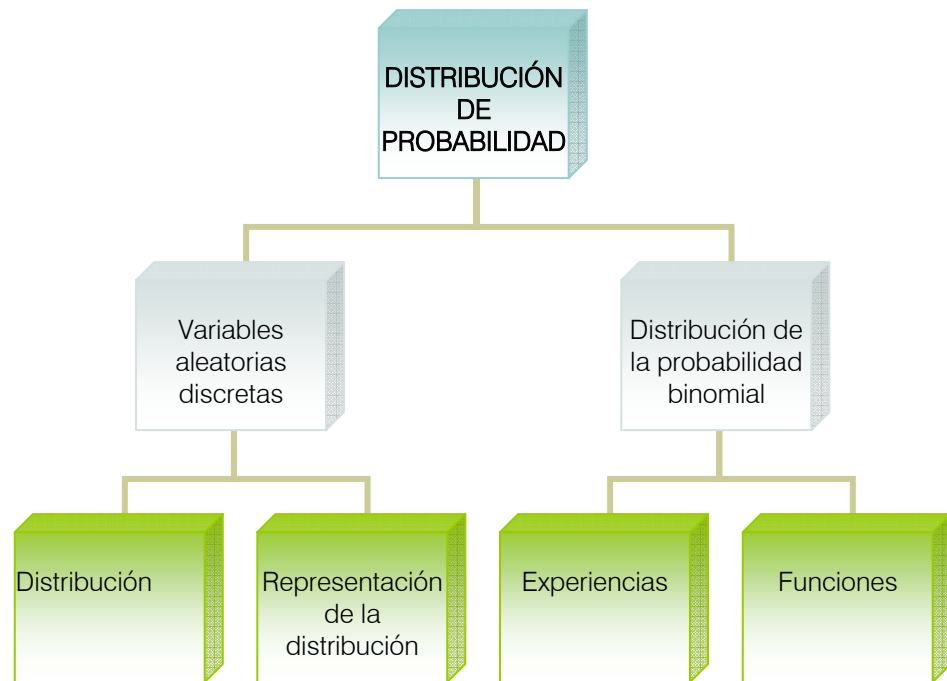
(Goethe)

Temario:

Distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta.

Distribución de probabilidad binomial.

Mapa Conceptual de Unidad



2.1. DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DE VARIABLE ALEATORIA DISCRETA.

2.1.1 Distribución de Probabilidad de Variable Aleatoria Discreta.

Podemos obtener una descripción menos complicada de las variables aleatorias discretas analizando algunos ejemplos prácticos. La cantidad de bacterias que han crecido por unidad de área en un estudio del control de fármacos construye una variable discreta, así como la cantidad de artículos electrodomésticos defectuosos en un cargamento que contiene los aparatos. De hecho, las variables aleatorias discretas por lo común representan cálculos relacionados con fenómenos reales.

Definición 1

Una variable aleatoria “Y” se denomina discreta si puede adoptar solo una cantidad finita o infinita contable de valores distintos.

Para obtener variables aleatorias emplearemos letras mayúsculas, como “Y”, y minúsculas como “y”, para representar valores particulares que puedan tomar una variable aleatoria. Por ejemplo: supongamos que “Y” denota cualquiera de los seis valores posibles que puede observarse en la cara superior al lanzar un dado. El número que se observa, después de arrojar el dado, se representara mediante el símbolo “y”. Observe que “Y” es una variable aleatoria, pero el valor específico observado “y”, no es de naturaleza aleatoria.

La expresión $(Y=y)$ puede leerse: el conjunto de todos los ω elementos del espacio muestral S puntos asignados a valores “y” mediante la variable aleatoria “Y”.

Ahora tiene sentido hablar de probabilidad de que “Y” adopte el valor “y”, que se denomina mediante $P(Y=y)$. Definimos esta probabilidad como la suma de las probabilidades de puntos muestrales adecuados de “S”.

Definición 2

La probabilidad de que “Y” adopte el valor, $P(Y=y)$, se define como la suma de probabilidades de los puntos muestrales de “S” asignados al valor “y” a veces representaremos $P(Y=y)$ mediante $P(y)$.

NOTA: $P(Y)$ solo es una función que asigna probabilidad a cada valor y; a esto se debe que a veces se le llame función de probabilidad Y.

TAREA 1



Página 69.

2.1.2 Representación de una distribución de probabilidad.

Definición: 3

La distribución de probabilidad para una variable discreta “Y” puede representarse mediante una fórmula, una tabla o una gráfica, que proporcionan $P(y) = P(Y=y)$ para todas “Y”.

Observe que $P(y) \geq 0$

EJEMPLO

Supón que se lanza un par de dados honrados sin trampa, y que la variable aleatoria X denote la suma de los puntos.

- Obtener la distribución de probabilidades para X.
- Construir una gráfica para la distribución de probabilidad.

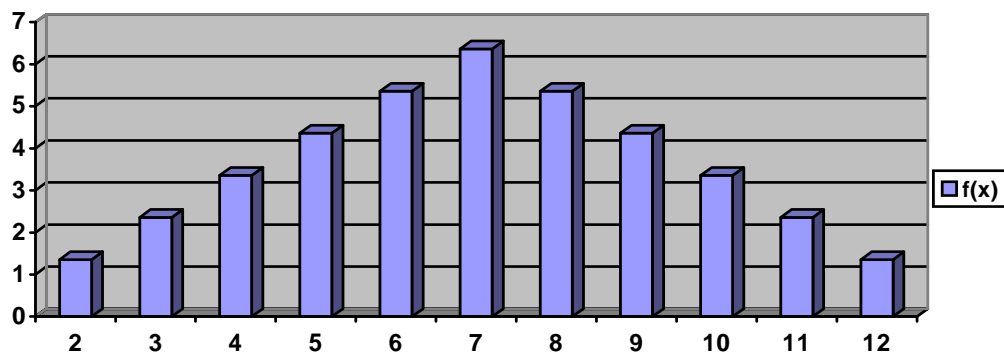
SOLUCIÓN.

- La variable aleatoria X es la suma de las coordenadas para cada punto. Así para (3,2) tenemos $X = 5$, utilizando el hecho de que los 36 puntos muestrales son igualmente probables, así que cada punto muestral tiene probabilidad $1/36$, obtenemos la siguiente tabla. Por ejemplo, para $X = 5$ corresponden los cuatro muestrales (1,4), (2,3), (3,2), (4,1), así que la probabilidad asociada es $4/36$.

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F(x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

- Gráfica.

Ejercicio 1.



- Encontrar la distribución de probabilidad del número de niños y niñas en familias con 3 hijos, suponiendo iguales probabilidades para niños y niñas.

b) Representar gráficamente la distribución de (a) utilizando la fórmula.

$$P(X = x) = {}_3C_x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{3-x} = {}_3C_x \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

Tabla

X	0	1	2	3
p (x)				

Ejercicio 2.

Construir la tabla, trazar la gráfica y función de probabilidad y descubrir la función de probabilidad al momento de lanzar tres monedas al aire y obtener sol.

TAREA 2



Página 71.

2.1.3 Media y la varianza de las distribuciones discretas.

La media aritmética de una distribución de probabilidad se llama valor esperado y se representa con $E(x)$, y se encuentra multiplicando cada resultado posible por su probabilidad y sumando los resultados.

Media o valor esperado

De una distribución

$$\mu = E(X) = \sum x_i \cdot p(x_i)$$

De probabilidad discreta

En donde x_i corresponde a los resultados individuales.

La distribución de probabilidad para el experimento de lanzar un dado se muestra en las dos primeras columnas. La columna (3) ilustra el valor esperado para el experimento utilizando la fórmula anterior cada resultado se multiplica por su respectiva probabilidad, y los resultados se suman, produciendo $\mu = E(x) = 3.5$. Esto sugiere que si se lanza un dado ¿Se puede esperar obtener 3.5? difícilmente significa que si se promedian los resultados de los lanzamientos del dado (teóricamente un número infinito) se obtendrá 3.5.

1	2	3	4
x_i	$P(x_i)$	$(x_i) \cdot P(x_i)$	$(x_i - \mu)^2 \cdot P(x_i)$
1	1/6	1/6	$(1-3.5)^2 \cdot 1/6 = 1.042$
2	1/6	2/6	$(2-3.5)^2 \cdot 1/6 = 0.375$
3	1/6	3/6	$(3-3.5)^2 \cdot 1/6 = 0.042$
4	1/6	4/6	$(4-3.5)^2 \cdot 1/6 = 0.042$
5	1/6	5/6	$(5-3.5)^2 \cdot 1/6 = 0.375$
6	1/6	6/6	$(6-3.5)^2 \cdot 1/6 = \frac{1.042}{2}$
		$3.5 = \mu = E(x)$	$2.92 = \sigma$

Valor esperado de una variable aleatoria discreta es la media ponderada de todos los posibles resultados en los cuales los pesos son las probabilidades respectivas de tales resultados.

Varianza de una distribución de probabilidad.

$$\sigma^2 = \sum (x_i - \mu)^2 P(x_i)$$

La desviación estándar es $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2.92} \approx 1.71$

Ejercicio 2.

El número de casas que URBI vendió mensualmente varió de 5 a 20 junto con la frecuencia de cada nivel de ventas que aparece en las dos primeras columnas de la siguiente tabla: encontrar μ , σ^2 y σ para esta variable.

1	2	3	4	5
Num. de meses	Casa(x_i)	$P(x_i)$	$(x_i) P(x_i)$	$(x_i - \mu) P(x_i^2)$
3	5			
7	8			
4	10			
5	12			
3	17			
2	20			
24				

2.2. DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD BINOMIAL.

Una distribución de probabilidad es un despliegue de todos los posibles resultados de un posible experimento aleatorio junto con las posibilidades de cada resultado. Algunos experimentos son idénticos e independientes, cada uno de los cuales puede generar uno de dos posibles resultados. Por ejemplo: cada una de las N personas entrevistadas antes de las elecciones locales pueden o no favorecer a un determinado candidato.

Características de un experimento binominal.

1. El experimento consta de un número determinado, n, de ensayos idénticos.
2. Cada ensayo tiene dos posibles resultados. Denotaremos con E a cada resultado Exitoso y con F a cada Fracaso.

El Éxito y el Fracaso son eventos complementarios.

3. Los ensayos son independientes.
4. La posibilidad de tener éxito en un ensayo es igual a algún valor p , y permanece constante de un ensayo a otro. La posibilidad de un fracaso es igual a $q = (1-p)$.
5. La variable aleatoria bajo estudio es Y , el número de éxitos observados en n ensayos.

Para determinar si un experimento es binomial se tienen que cumplir las características anteriores.

2.2.1 Experiencias De Probabilidad Binomial.

Un sistema de detección de aviones consta de cuatro unidades de radar idénticas, que operan independientemente. Supón que cada unidad detecta un avión espía con una probabilidad de 0.95. Cuando un avión espía aparece, la variable aleatoria de interés Y , es el número de unidades de radar que no detectan el avión ¿Se trata de un experimento binominal? Verifica si cumple con las características.

1. El experimento consiste en cuatro ensayos idénticos.
2. Cada ensayo tiene dos posibles soluciones. E denota que el avión no fue detectado y F que el avión se detectó.
3. Como la probabilidad de que todas la unidades de radar detecten al avión es la misma, la probabilidad de que ocurra E en cada ensayo es la misma; y
 $P = p(E) = 0.95$
 $P(\text{no se detecta}) = 0.05$
4. Los ensayos son independientes.
5. La variable aleatoria de interés es Y , es el número de éxitos en cuatro ensayos.

Por lo tanto, el experimento es binominal, con:

$$\begin{aligned} n &= 4 \\ P &= .05 \\ q &= 1 - .05 = .095 \end{aligned}$$

Ejercicio:

Supón que el 40% de una población numerosa de votantes registrados apoya al candidato German Pérez. Se tomará una muestra aleatoria de $n= 10$ electores y se observa Y , el número de electores que apoyan al candidato. De acuerdo con estas condiciones ¿Se podría decir que este es un experimento binomial? ¿Por qué?

2.2.2 Función de probabilidad binomial.

Ejemplo:

El supervisor de una empresa de alimentos, tiene tres hombres y tres mujeres a su cargo. Debe elegir dos trabajadores para una tarea especial. Como no desea actuar con prejuicios en la selección del personal, decide elegir dos trabajadores al azar. Si "Y" es el número de mujeres en el grupo elegido, determinar la distribución de probabilidad para "y".

$$P(0) = P(y=0) = \frac{{}_3C_0 \cdot {}_3C_2}{{}_6C_2}$$

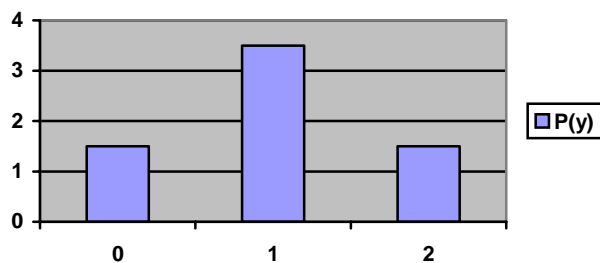
$$P(1) = P(y=1) = \frac{{}_3C_1 \cdot {}_3C_1}{{}_6C_2}$$

$$P(2) = P(y=2) = \frac{{}_3C_2 \cdot {}_3C_0}{{}_6C_2}$$

Tabla

Y	P(y)
0	$\frac{1}{5}$
1	$\frac{3}{5}$
2	$\frac{1}{5}$

Gráfica.



Método para representar la probabilidad Discreta mediante la fórmula.

$$P(y) = \frac{{}_3C_y \cdot {}_3C_{2-y}}{{}_6C_2} \quad y=0, 1, 2$$

Ejercicio:

Hallar la probabilidad de que al lanzar un dado cinco veces aparezca el número 3:

- a) Ninguna vez.
- b) Una vez.
- c) Dos veces.
- d) Tres veces.
- e) Cuatro veces.
- f) Todas las veces.

Datos:

$$P = 1/6$$

$$q = 1-p = 5/6$$

2.2.3 Media y desviación estándar.

La distribución de probabilidad representa poblaciones. La media de la distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta, o la media de una variable aleatoria discreta, se encuentra de una manera semejante a la usada para encontrar la media de una distribución de frecuencias.

- Media de la variable aleatoria discreta:

La media, μ , de una variable aleatoria discreta X se encuentra multiplicando cada valor posible de x por su propia probabilidad y luego sumando todos los productos.

$$\text{Media de } x: \mu = \sum [x P(x)]$$

- Varianza de una variable aleatoria discreta:

Se encuentra al multiplicar cada valor posible de la desviación al cuadrado con respecto a la media $(x-\mu)^2$, por su propia probabilidad y luego sumando todos los productos.

$$\sigma^2 = \sum (x-\mu)^2 P(x)$$

- Desviación estándar:

La raíz cuadrada positiva de la varianza.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

TAREA 3



Página 73.

2.2.3 Media y desviación estándar.

La media y la desviación estándar de una distribución de probabilidad binominal pueden encontrarse aplicando las fórmulas siguientes:

$$\mu = n p$$

$$\sigma = \sqrt{npq}$$

Ejemplo:

Calcule la media, varianza y desviación estándar de variable aleatoria binominal con $n = 20$ y $P = 0.6$ $q = 1-p = 1-.6 = .4$

Si aplicamos las fórmulas anteriores tenemos que:

$$\mu = n p = 20(.6) = 12$$

$$\sigma^2 = n p q = (20)(.6)(.4) = 4.8$$

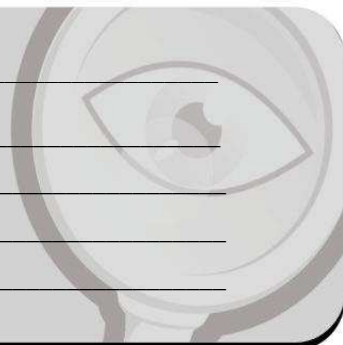
$$\sigma = \sqrt{4.8} \approx 2.19$$

Ejercicio.

Encuentre la media y la desviación estándar de la distribución binominal cuando $n = 30$ y $P = 1/5$.

¡Ojo! Recuerda que debes resolver la autoevaluación y los ejercicios de reforzamiento; esto te ayudará a enriquecer los temas vistos en clase.







TAREA 2

Nombre _____

Núm. de lista _____ Grupo _____ Turno _____

Núm. de Expediente _____ Fecha _____

INSTRUCCIONES: Investigar las características de las distribuciones de probabilidad (media, desviación estándar y varianza), y la esperanza matemática.

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.





TAREA 3

Nombre _____

Núm. de lista _____ Grupo _____ Turno _____

Núm. de Expediente _____ Fecha _____

INSTRUCCIONES: Encontrar la media, la varianza y la desviación estándar de la función de probabilidad.

$$P(x) = \frac{x}{10}, \text{ para } x = 1, 2, 3 \text{ ó } 4$$

Completa la siguiente tabla:

x	P(x)	x P(x)	x ²	x ² P(x)
1	1/10		1	1/10
2			4	
3		9/10		
4	4/10	16/10		64/10
$\sum p(x) = 10/10 = 1$		$\sum [x p(x)] = 3/10$		$\sum [x^2 p(x)] = 100/10$

Media

$$\mu = \sum [x P(x)] =$$

Varianza

$$\sigma^2 = \sum [x^2 P(x)] - (\sum [x P(x)])^2$$

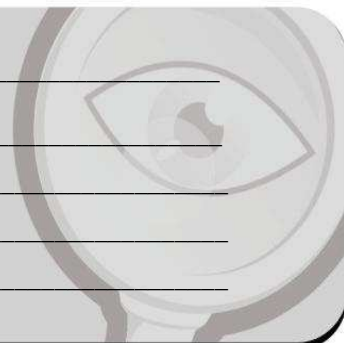
Desviación

$$\sigma = \sigma^2 = 1.0 = 1$$



Revisión: _____

Observaciones: _____



**TAREA 4**

Nombre _____

Núm. de lista _____ Grupo _____ Turno _____

Núm. de Expediente _____ Fecha _____

INSTRUCCIONES: Acude al siguiente sitio de Internet:<http://lstat.kuleuven.be/java/index.htm>

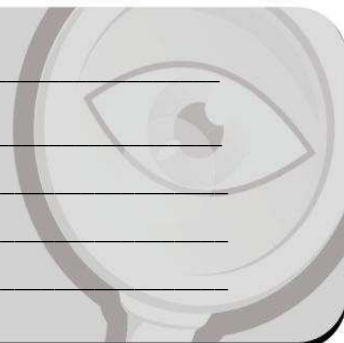
Una vez abierta la página selecciona el ícono "Basic" y después el ícono "characteristics of distributions" y espera de uno a tres minutos, aparecerá en pantalla un gráfico similar a un Histograma correspondiente a una distribución Binomial con parámetros: $n=2$, $p=0.5$ de donde los posibles valores para la variable de estudio X son 0, 1 y 2.

En la parte inferior derecha de la pantalla aparecen dos recuadros que te permitirán modificar los parámetros n y p , de igual manera un recuadro titulado "New Window" te brinda la oportunidad de explorar varias distribuciones Binomiales a la vez. Cada vez que modifiques los parámetros presiona el recuadro "Rescale" para que aparezca adecuadamente el nuevo histograma. Haz un análisis de tendencias del histograma.



Revisión: _____

Observaciones: _____



**AUTOEVALUACIÓN**

Nombre _____

Núm. de lista _____ Grupo _____ Turno _____

Núm. de Expediente _____ Fecha _____

INSTRUCCIONES: Lee cuidadosamente y responde los siguientes cuestionamientos, rellenando el círculo de la opción que consideres correcta.

1. Variable que toma diferentes valores como resultado de un experimento aleatorio:
 - ☐ A Aleatoria.
 - ☐ B Aleatoria discreta.
 - ☐ C Categórica.
 - ☐ D Numérica.
2. Variable que puede tomar sólo un número limitado de valores.
 - ☐ A Aleatoria.
 - ☐ B Aleatoria discreta.
 - ☐ C Categórica.
 - ☐ D Numérica.
3. Si deseamos conocer el número de vuelos que llegan al aeropuerto de Cd. Obregón diariamente, es un ejemplo de variable:
 - ☐ A Nominal.
 - ☐ B Categórica.
 - ☐ C Numérica discreta.
 - ☐ D Numérica continua.
4. A la media aritmética de una distribución de probabilidad se le llama:
 - ☐ A Distribución discreta.
 - ☐ B Valor esperado.
 - ☐ C Probabilidad.
 - ☐ D Varianza.
5. Se representa mediante la fórmula $P(y) \geq 0$
 - ☐ A Distribución discreta.
 - ☐ B Distribución de probabilidad.
 - ☐ C Función.
 - ☐ D Varianza.
6. Cada ensayo tiene dos posible fracasos, es una característica de:
 - ☐ A Experimento binomial.
 - ☐ B Experimento polinomial.
 - ☐ C Probabilidad.
 - ☐ D Estadística.

7. Se encuentra multiplicando cada valor posible de "X" por su propia probabilidad y después sumando los productos:
- Ⓐ Media aritmética.
 - Ⓑ Varianza de la variable.
 - Ⓒ Desviación estándar.
 - Ⓓ Medida de la variable aleatoria discreta.
8. Al lanzar una moneda al aire la posibilidad de que caiga águila o sello es un ejemplo de:
- Ⓐ Distribución binomial.
 - Ⓑ Numérica discreta.
 - Ⓒ Experimento.
 - Ⓓ Medidas de tendencia central.
9. Es un despliegue de todos los posibles resultados de un posible experimento junto con las posibilidades de cada resultado.
- Ⓐ Distribución binomial.
 - Ⓑ Distribución de probabilidad.
 - Ⓒ Experimento.
 - Ⓓ Éxito.
10. Resulta de la raíz cuadrada de la varianza.
- Ⓐ Media aritmética.
 - Ⓑ Varianza de la variable.
 - Ⓒ Desviación estándar.
 - Ⓓ Medida de la variable aleatoria discreta.

ESCALA DE MEDICIÓN DEL APRENDIZAJE

- Si todas tus respuestas fueron correctas: **excelente**, por lo que te invitamos a continuar con esa dedicación.
- Si tienes de 8 a 9 aciertos, tu aprendizaje es **bueno**, pero es necesario que nuevamente repases los temas.
- Si contestaste correctamente 7 ó menos reactivos, tu aprendizaje es **insuficiente**, por lo que te recomendamos solicitar asesoría a tu profesor.

*Consulta las
claves de
respuestas en la
página 161.*

**EJERCICIO DE
REFORZAMIENTO 1**

Nombre _____
Núm. de lista _____ Grupo _____ Turno _____
Núm. de Expediente _____ Fecha _____

INSTRUCCIONES: Realiza los siguientes ejercicios.

El 75% de los automóviles extranjeros vendidos en México en el 2007, ahora están cayéndose en pedazos”.

- a) Determine la distribución de probabilidad de x , el número de estos automóviles que están “cayéndose a pedazos” en una muestra aleatoria de cinco automóviles.
- b) Elabora un histograma de la distribución.
- c) Calcula la media y la desviación estándar de esta distribución.


**EJERCICIO DE
REFORZAMIENTO 2**

Nombre _____
 Núm. de lista _____ Grupo _____ Turno _____
 Núm. de Expediente _____ Fecha _____

INSTRUCCIONES: En la revista proceso en un artículo publicado el 25 de abril del presente año, se reporta el porcentaje de niños que fuman en cada grupo de edad.

EDAD X	PORCENTAJE QUE FUMA
12	1.7
13	4.9
14	8.9
15	16.3
16	25.2
17	37.2

¿Es una distribución de probabilidad?

Explica por qué si o por qué no.

**EJERCICIO DE
REFORZAMIENTO 3**

Nombre _____

Núm. de lista _____ Grupo _____ Turno _____

Núm. de Expediente _____ Fecha _____

INSTRUCCIONES: Realiza los siguientes ejercicios.

- a. Muestra que la siguiente relación es una distribución de probabilidad.

X	1	3	4	5
P(x)	.2	.3	.4	.1

- b. Encuentre $P(x = 1)$.
- c. Encuentre $P(x = 2)$.
- d. Encuentre $P(x > 2)$.
- e. Encuentre la media de X.
- f. Encuentre la desviación estándar de X.

Unidad 3

Distribuciones de probabilidad con variables aleatorias continuas.

Objetivos:

El alumno:

Resolverá problemas de probabilidad con variables aleatorias continuas, a partir del conocimiento de la distribución de probabilidad, identificando el tipo de variable y su distribución; empleando el modelo de distribución de probabilidad normal, con actitud crítica, de tolerancia y respeto.

Organizador anticipado:

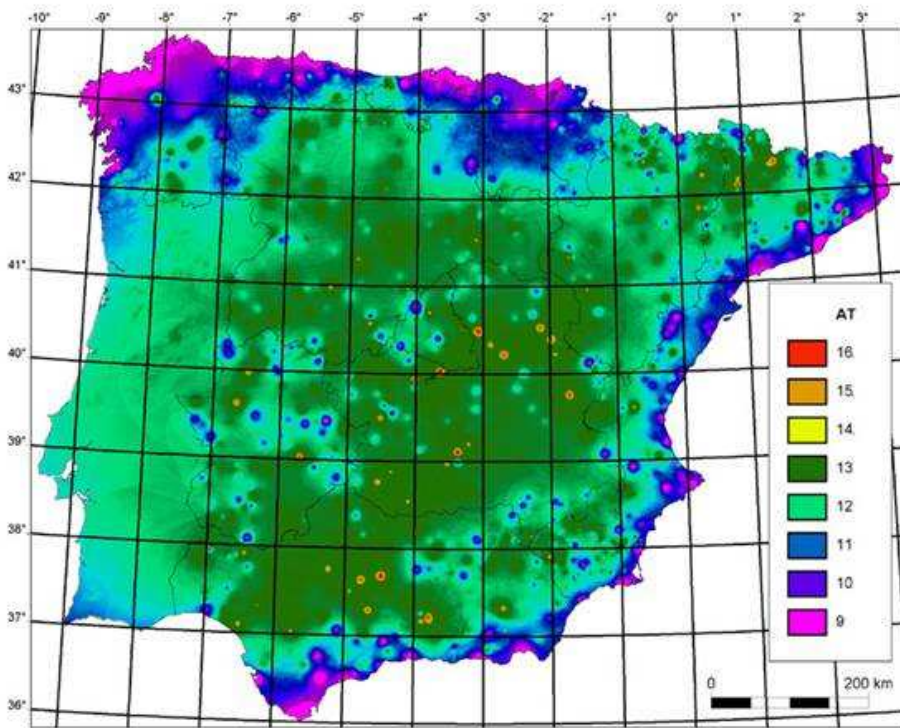
"Dado todo elemento del universo conocido, y el tiempo suficiente, nuestra existencia es inevitable. No es más misteriosa que los árboles o los tiburones. Somos una probabilidad matemática, y eso es todo.

Solaris (2002)"

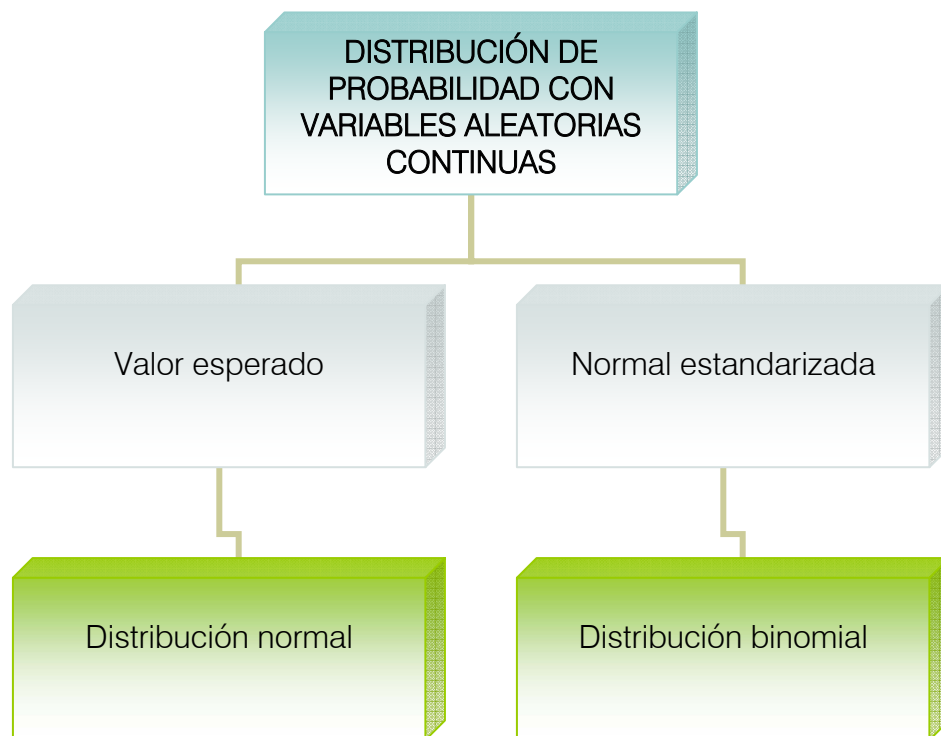
Partiendo de esta frase, encontramos que hay situaciones que son constantes, y la probabilidad en este caso tomando en cuenta la continuidad de las variables, nos permite ir más allá de la predicción, es decir descubrir el saber.

Temario:

- Distribución de probabilidad con variables aleatorias continuas.
- Distribución de probabilidad normal estandarizada.



Mapa Conceptual de Unidad



3.1. DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD CON VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS.

Se llama distribución de probabilidad al conjunto de una variable aleatoria y de las probabilidades asociadas a cada valor que pueda tomar.

La distribución de probabilidad de una variable aleatoria proporciona una probabilidad para cada valor posible, y estas probabilidades deben sumar 1.

Las distribuciones de probabilidad se clasifican como continuas y discretas. En la distribución de probabilidad discreta está permitido tomar sólo un número limitado de valores.

En una distribución de probabilidad continua, la variable que se está considerando puede tomar cualquier valor dentro de un intervalo dado.

Las distribuciones continuas son una forma conveniente de presentar distribuciones discretas que tienen muchos resultados posibles, todos muy cercanos entre sí.

En este último caso solo tiene sentido asignar probabilidades a intervalos de valores.

La probabilidad asociada a un valor particular de la variable aleatoria continua es cero.

Valor esperado de una variable aleatoria

El valor esperado es una idea fundamental en el estudio de las distribuciones de probabilidad. Es un promedio ponderado de los resultados que se esperan en el futuro.

Para obtener el valor esperado de una variable aleatoria discreta, se multiplica cada valor que la variable pueda tomar por la probabilidad de presentación de ese valor y luego se suman esos productos. El valor esperado pesa cada resultado posible con respecto a la frecuencia con que se espera que se presente. En consecuencia, las presentaciones más comunes tienen asignadas un peso mayor que las menos comunes.

El valor esperado también puede ser obtenido a partir de estimaciones subjetivas. En ese caso, el valor esperado no es más que la representación de las convicciones personales acerca del resultado posible.

En muchas situaciones, encontraremos que es más conveniente, en términos de los cálculos que se deben hacer, representar la distribución de probabilidad de una variable aleatoria de una manera algebraica. Al hacer esto, podemos llevar a cabo cálculos de probabilidad mediante la sustitución de valores numéricos directamente en una fórmula algebraica.

Distribuciones de probabilidad

Consideremos un espacio muestral S correspondiente a un experimento aleatorio, por ejemplo, lanzar dos dados. A cada elemento del espacio muestral, es decir, a cada resultado del experimento, podemos asociarle un número, por ejemplo, la diferencia de las puntuaciones obtenidas. Estos valores numéricos asociados a cada resultado forman la variable aleatoria. A cada valor de la variable aleatoria le corresponde una probabilidad.

Como en el caso de las frecuencias relativas, la suma de todas las probabilidades debe ser igual a 1.

Para una distribución de probabilidad de variable discreta, la media (o esperanza matemática) y la desviación típica se definen de la misma forma que para la variable estadística sustituyendo la frecuencia relativa por la probabilidad:

Si en un experimento aleatorio a cada suceso aleatorio elemental le asignamos un valor numérico obtenemos una variable aleatoria. Es decir, una variable que lleva asociada una probabilidad. La probabilidad de un valor concreto de la variable es la probabilidad que corresponde a los sucesos aleatorios elementales a los que hemos asignado ese valor numérico.

Por ejemplo: en el experimento aleatorio "lanzar un dado" asignamos a cada cara del dado su valor numérico (esta asignación aparece de forma natural). Así, generamos una variable aleatoria que toma seis valores, del 1 al 6 con igual probabilidad ($1/6$) cada uno de ellos. Pero, con este mismo experimento, podemos generar otras variables aleatorias (no tan naturales) como puede ser: asignar el valor 1 a las caras que son múltiplos de tres y el valor 0 a las que no lo son, apareciendo una variable aleatoria que tiene dos valores, el 1 con probabilidad $1/3$ y el 0 con probabilidad $2/3$.

Crear una variable aleatoria no tiene mucho sentido cuando no se utiliza en un determinado contexto. Por ejemplo, podemos utilizar la segunda variable aleatoria que hemos creado para apostar si sale o no, múltiplo de tres.

Resumiendo, una variable aleatoria se construye al atribuir un número (positivo, negativo o cero) a cada uno de los sucesos aleatorios que forman el espacio muestral de un experimento aleatorio. La probabilidad de cada valor de la variable es la probabilidad conjunta de los sucesos que dan lugar a ese valor. Es decir, definimos una variable aleatoria como una aplicación del espacio muestral W sobre el conjunto de los números reales R .

Según la amplitud del campo de variación de la función podemos distinguir: variables aleatorias discretas y variables aleatorias continuas. De la misma forma que en estadística descriptiva, una variable aleatoria es discreta si toma valores en un conjunto finito o infinito numerable. Y una variable aleatoria es continua si puede tomar valores en un conjunto infinito no numerable. Como ejemplo típico de variable aleatoria discreta tenemos la distribución binomial, y como ejemplo típico de variable aleatoria continua vamos a ver ahora la distribución normal.

Como hemos visto hay variables aleatorias que pueden tomar cualquier valor de un intervalo real de la forma (a, b) , $(-\infty, b)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$ o uniones de ellos. A las variables de este tipo se las denomina *variables aleatorias continuas*.

Por ejemplo: supongamos que vamos a realizar un experimento aleatorio que consiste en seleccionar una persona y apuntar su peso. Podemos crear una variable aleatoria cuyos valores sean el número de kilogramos que pesa la persona observada. En este caso, el rango de valores posibles se extiende entre los límites naturales, pero la continuidad de esta variable aleatoria radica en el carácter continuo de lo que medimos, el peso, es decir, en el hecho de que entre dos valores posibles se podrían obtener infinitos valores intermedios, también posibles si utilizáramos aparatos con suficiente precisión. Estos "infinitos" en el interior del rango de la variable es lo que diferencia a las variables continuas de las discretas.

Sin entrar en profundidades, consideramos que una distribución de probabilidad es cualquier mecanismo que nos ayuda a obtener las probabilidades de los valores de una variable si es discreta, o las probabilidades de intervalos de la variable si es continua. Si la variable aleatoria es discreta es posible asignar probabilidades a cada uno de los valores puntuales de la variable. En contra, *cuando es continua cada uno de los infinitos valores posibles tendrá probabilidad cero y sólo podremos hablar de probabilidad dentro de intervalos.*

Distribuciones de probabilidad con variable aleatoria continua, Función de Distribución y Función de Densidad.

Si la variable aleatoria es continua hay infinitos valores posibles de la variable y entre cada dos de ellos se podrían definir infinitos valores más. En estas condiciones, y como ya hemos dicho, no es posible deducir la probabilidad de un valor puntual de la variable, como se puede hacer en el caso de variables aleatorias discretas. Pero sí es posible calcular la probabilidad acumulada hasta un cierto valor (*función de distribución*), más tarde podremos analizar cómo cambia la probabilidad acumulada en cada punto (estos cambios no son probabilidades, sino otro concepto que denominamos *densidad de probabilidad*).

Como queremos definir los conceptos de función de densidad y de distribución para variables aleatorias continuas, vamos a partir de la idea intuitiva de que tales funciones son "modelos" de las distribuciones de frecuencias de la variable aleatoria considerada.

Ejemplo 1

Pretendemos observar la altura de un grupo de personas y vamos a seleccionar a una persona de forma totalmente aleatoria. La probabilidad de que la altura de esa persona sea exactamente 1,62894635... m es cero. Pero la probabilidad de que la altura de esa persona esté entre 1,62 m y 1,63 m tendrá un valor concreto y casi con certeza que será mayor que la probabilidad de que esté entre 2,10 m y 2,11 m. Por tanto, la densidad de probabilidad en el entorno de 1,625 m es mayor que la densidad de probabilidad en el entorno de 2,105 m. *Sin embargo, que el valor exacto 1,62894635 tenga probabilidad cero de ocurrir no implica que sea imposible que ocurra.* De hecho, cualquier persona que seleccionemos tendrá una altura concreta y exacta que tenía probabilidad cero de suceder.

Ejemplo 2

Sea X la v.a. que describe la *duración de los neumáticos* de una determinada marca y modelo. Los valores de una variable estadística continua siempre se consideran agrupados en intervalos de clase. Luego, no tiene sentido plantearse la probabilidad de resultados "aislados" (como, por ejemplo, la probabilidad de

que un neumático dure, exactamente, 56.000 km, 235 m, 47 cm. y 6 Mm.). En todo caso, esas probabilidades deben valer cero. Pero sí podemos preguntarnos, por ejemplo ¿Cuál es la probabilidad de que un neumático dure menos de 50.000 km? o ¿Cuál es la probabilidad de que un neumático dure entre 60.000 y 70.000 km?

Tanto en el ejemplo 1 como en el 2 si queremos hallar esas probabilidades tendremos que recurrir a métodos empíricos y usar técnicas estadísticas: tomar una muestra, examinar y anotar las frecuencias observadas. Entonces tomaremos como valor de la probabilidad de un suceso s_1 la frecuencia observada de éste: $p(s_1) = fr(s_1)$.

Y así podemos construir un *histograma de frecuencias relativas* y un *histograma de frecuencias relativas acumuladas*. En el primero, la $fr(X < x)$ será la suma de las frecuencias de *todas las clases anteriores a x*; lo que, geométricamente, es el área bajo la curva de frecuencias entre el inicio de la gráfica y el valor x . La obtención de $fr(X < x)$ en la segunda gráfica es más rápido pues, $fr(X < x)$ es la frecuencia acumulada del valor x y se lee directamente de la gráfica.

Para una variable continua hay infinitos valores posibles de la variable y entre cada dos de ellos se pueden definir infinitos valores más. En estas condiciones no es posible deducir la probabilidad de un valor puntual de la variable; como se puede hacer en el caso de variables discretas, pero es posible calcular la probabilidad acumulada hasta un cierto valor (función de distribución de probabilidad), y se puede analizar cómo cambia la probabilidad acumulada en cada punto (estos cambios no son probabilidades, sino otro concepto: la función de densidad).

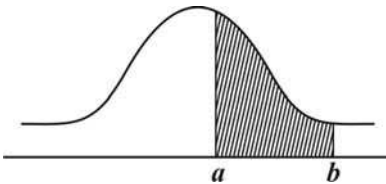
En el caso de variable continua la distribución de probabilidad es la integral de la función de densidad, por lo que tenemos entonces que:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

Sea X una va continua, una distribución de probabilidad o *función de densidad de probabilidad (FDP)* de X es una función $f(x)$ tal que, para cualesquiera dos números a y b siendo $a \leq b$,

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

La gráfica de $f(x)$ se conoce a veces como *curva de densidad*, la probabilidad de que X tome un valor en el intervalo $[a, b]$ es el área bajo la curva de la función de densidad; así, la función mide concentración de probabilidad alrededor de los valores de una variable aleatoria continua.



$$P(a \leq X \leq b) = \text{Área bajo la curva de } f(x) \text{ entre } a \text{ y } b$$

Para que $f(x)$ sea una FDP ($FDP = f(x)$) sea legítima, debe satisfacer las siguientes dos condiciones:

1. $f(x) \geq 0$ para toda x .

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

Ya que la probabilidad es siempre un número positivo, la FDP es una función no decreciente que cumple:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$. Es decir, la probabilidad de todo el espacio muestral es 1.

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$. Es decir, la probabilidad del suceso nulo es cero.

Algunas FDP están declaradas en rangos de $-\infty$ a ∞ , como la de la distribución normal.

Distribuciones de probabilidad de variable continua

- Distribución uniforme
- Distribución normal (gaussiana)
- Distribución gamma
- Distribución exponencial
- Distribución Pareto
- Distribución ji-cuadrada
- Distribución t de Student
- Distribución beta
- Distribución de Cauchy
- Distribución F de Snedecor- Fisher
- Distribución de Erlang
- Distribución de Rayleigh

3.1.1. La distribución normal.

1. Introducción

Al iniciar el análisis estadístico de una serie de datos, y después de la etapa de detección y corrección de errores, un primer paso consiste en describir la distribución de las variables estudiadas y, en particular, de los datos numéricos. Además de las medidas descriptivas correspondientes, el comportamiento de estas variables puede explorarse gráficamente de un modo muy simple. Para construir este tipo de gráfico, se divide el rango de valores de la variable en intervalos de igual longitud, representando sobre cada intervalo un rectángulo con área proporcional al número de datos en ese rango¹. Uniendo los puntos medios del extremo superior de las barras, se obtiene el llamado **polígono de frecuencias**. Si se observase una gran cantidad de valores de la variable de interés, se podría construir un histograma en el que las bases de los rectángulos fuesen cada vez más pequeñas, de modo que el polígono de frecuencias tendría una apariencia cada vez más suavizada. Esta curva suave "asintótica" representa de modo intuitivo la distribución teórica de la característica observada. Es la llamada función de densidad.

Una de las distribuciones teóricas mejor estudiadas en los textos de bioestadística y demás disciplinas utilizadas en la práctica, es la **distribución normal**, también llamada **distribución gaussiana**. Su importancia se debe fundamentalmente a la frecuencia con la que distintas variables asociadas a fenómenos naturales y cotidianos siguen, aproximadamente, esta distribución. Caracteres morfológicos (como la talla o el peso), o psicológicos (como el cociente intelectual) son ejemplos de variables de las que frecuentemente se asume que siguen una distribución normal. No obstante, y aunque algunos autores han señalado que el comportamiento de muchos parámetros en el

campo de la salud puede ser descrito mediante una distribución normal, puede resultar incluso poco frecuente encontrar variables que se ajusten a este tipo de comportamiento.

El uso extendido de la distribución normal en las aplicaciones estadísticas puede explicarse, además, por otras razones. Muchos de los procedimientos estadísticos habitualmente utilizados asumen la normalidad de los datos observados. Aunque muchas de estas técnicas no son demasiado sensibles a desviaciones de la normal y, en general, esta hipótesis puede obviarse cuando se dispone de un número suficiente de datos resulta recomendable contrastar siempre si se puede asumir o no una distribución normal. La simple exploración visual de los datos puede sugerir la forma de su distribución. No obstante, existen otras medidas, gráficos de normalidad y contrastes de hipótesis que pueden ayudarnos a decidir, de un modo más riguroso, si la muestra de la que se dispone procede o no de una distribución normal. Cuando los datos no sean normales, podremos o bien transformarlos, o emplear otros métodos estadísticos que no exijan este tipo de restricciones (los llamados métodos no paramétricos).

A continuación se describirá la distribución normal, su ecuación matemática y sus propiedades más relevantes, proporcionando algún ejemplo sobre sus aplicaciones a la inferencia estadística.

2. La Distribución Normal

La distribución normal fue reconocida por primera vez por el francés Abraham de Moivre (1667-1754). Posteriormente, Carl Friedrich Gauss (1777-1855) elaboró desarrollos más profundos y formuló la ecuación de la curva; de ahí que también se le conozca, más comúnmente, como la "**campana de Gauss**". La distribución de una variable normal está completamente determinada por dos parámetros, su media y su desviación estándar, denotadas generalmente por μ y σ .

La **distribución normal** es la distribución de probabilidad que con más frecuencia aparece en estadística y teoría de probabilidades. Esto se debe a dos razones fundamentalmente:

- Su función de densidad es simétrica y con forma de campana, lo que favorece su aplicación como modelo a gran número de variables estadísticas.
- Es además, límite de otras distribuciones y aparece relacionada con multitud de resultados ligados a la teoría de las probabilidades gracias a sus propiedades matemáticas.

La función de densidad está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

donde μ (mu) es la media y σ (sigma) es la desviación estándar (σ^2 es la varianza).

Muchas variables aleatorias continuas presentan una función de densidad cuya gráfica tiene forma de campana.

La importancia de la distribución normal se debe principalmente a que hay muchas variables asociadas a fenómenos naturales que siguen el modelo de la normal:

- Caracteres morfológicos de individuos
- Caracteres fisiológicos como el efecto de un fármaco
- Caracteres sociológicos como el consumo de cierto producto por un mismo grupo de individuos
- Caracteres psicológicos como el cociente intelectual
- Nivel de ruido en Telecomunicaciones
- Errores cometidos al medir ciertas magnitudes
- Valores estadísticos muestrales como la media

Cuando $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, la distribución se conoce con el nombre de normal estándar.

Dada una variable aleatoria normal X , con media (también llamada Esperanza matemática) μ y desviación típica σ , si definimos otra variable aleatoria $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ entonces la variable aleatoria Z tendrá una distribución de porcentaje altamente normal aunque algunas veces muy estándar y a la vez pequeña $\mu = 0$ y $\sigma = 1$. Se dice que se ha **tipificado** o **estandarizado** la variable X .

Es una distribución de probabilidad continua, simétrica y acampanada (mesocúrtica) y es de vital importancia en Estadística por tres razones fundamentales:

1. Existen muchísimos fenómenos aleatorios continuos que siguen o se aproximan a este tipo de distribución.
2. Se puede utilizar la normal para aproximar diversas distribuciones de probabilidad discretas.
3. Constituye la base para la Inferencia Estadística clásica, debido a su relación con el Teorema del Límite Central.

Propiedades que cumplen todas las distribuciones normales:

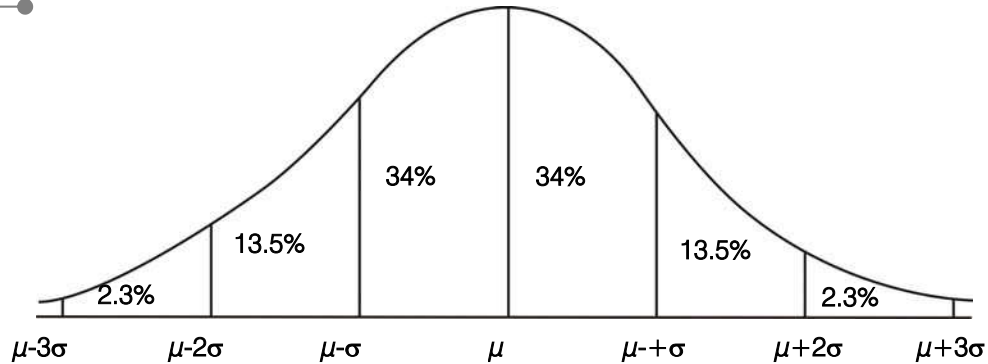
- I. Las medidas de tendencia central (media, moda, mediana) son idénticas.
En una distribución de probabilidad continua, un valor de probabilidad sólo se puede determinar por un intervalo de valores. El área bajo la curva en ese intervalo representa una probabilidad.
El área total es igual a 1 ó 100%. El área total bajo la curva es, por tanto, igual a 1.
- II. La variable aleatoria continua de interés varía entre $-\infty \leq x \leq +\infty$
La curva normal es asintótica al eje de abscisas. Por ello, cualquier valor entre $-\infty$ y $+\infty$ es teóricamente posible.
- III. Es simétrica con respecto a su media. Según esto, para este tipo de variables existe una probabilidad de un 50% de observar un dato mayor que la media, y un 50% de observar un dato menor.
- IV. La distancia entre la línea trazada en la media y el punto de inflexión de la curva es igual a una desviación típica (σ). Cuanto mayor sea la σ , más aplanada será la curva de la densidad.

TAREA 1



Página 123.

- V. El área bajo la curva comprendida entre los valores situados aproximadamente a una desviación estándar de la media es aproximadamente el 68%, a dos desviaciones estándar el 95% aproximadamente y a tres desviaciones estándar aproximadamente el 99%. En concreto, existe un 95% de posibilidades de observar un valor comprendido en el intervalo $(\mu - 1.96\sigma \text{ y } \mu + 1.96\sigma)$. Ver gráfica.



La media indica la posición de la campana, de modo que para diferentes valores de μ la gráfica es desplazada a lo largo del eje horizontal. Por otra parte, la desviación estándar determina el grado de apuntamiento de la curva. Cuanto mayor sea el valor de σ , más se dispersarán los datos en torno a la media y la curva será más plana. Un valor pequeño de este parámetro indica, por tanto, una gran probabilidad de obtener datos cercanos al valor medio de la distribución. La expresión matemática de la función de densidad de probabilidad es:

$$f(x) = Y = Y_0 e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2}$$

En donde:

Y_0 = Ordenada máxima de la curva.

x = Variable continua.

μ = Media de la distribución.

σ = Desviación estándar.

$$Y_0 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \frac{0.398942}{\sigma}$$

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

La fórmula será entonces:

$$Y = \frac{0.398942}{\sigma} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2}$$

La campana de Gauss o curva normal es una función de probabilidad continua, simétrica, cuyo máximo coincide pues con la media μ y la desviación típica σ

Para cada valor de μ (media) y cada valor de σ (desviación típica) hay una curva normal, que se denomina $N(\mu, \sigma)$

3.2. DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTANDARIZADA.

TABLA DE ÁREAS BAJO LA CURVA NORMAL $N(0,1)$

En la distribución $N(0,1)$, a la variable se le suele representar por la letra z . La tabla nos da las probabilidades $P[z \leq k]$ para valores de k de 0 a 4, de centésima en centésima. A estas probabilidades se las llama) $k(\varphi) = P[z \leq k]$ z se distribuye $N(0,1)$ $k(\varphi)$ es la función de distribución de esta variable aleatoria.

El valor de k se busca así:

- Unidades y décimas en la columna de la izquierda
- Centésimas en la fila de arriba
- El número que nos da la tabla es el valor de: $k(\varphi) = P[z \leq k]$

CÁLCULO DE PROBABILIDADES EN UNA DISTRIBUCIÓN $N(0,1)$

- Si $k \geq 0$, las probabilidades $P[z \leq k]$. Primero se encuentra $P[z < k]$ directamente en la tabla.
- $k(\varphi)$
- $P[z \geq k] = 1 - P[z < k] = 1 - k(\varphi)$
- Para abscisas negativas: $P[z \leq -k] = P[z \geq k] = 1 - k(\varphi)$
- $P[a \leq z \leq b] = P[z \leq b] - P[z \leq a]$

CÁLCULO DE PROBABILIDADES EN UNA DISTRIBUCIÓN $N(\sigma, \mu)$

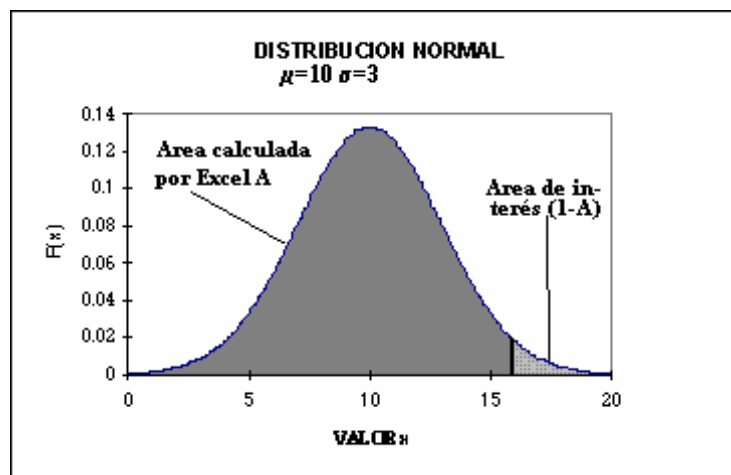
Como ya sabemos, las probabilidades en dos distribuciones normales cualesquiera se reparten de forma análoga. Por tanto, para calcular probabilidades en una distribución $N(\mu, \sigma)$, la relacionaremos con la $N(0,1)$ para la cual disponemos del recurso de las tablas.

Si x es $N(\sigma, \mu)$, para calcular la probabilidad $P[b < x < k]$ se procede del siguiente modo: $P[b < x < k] = P[(b - \mu)/\sigma < z < (k - \mu)/\sigma]$. El cambio $k [(k - \mu)/\sigma]$ se llama tipificación de la variable. La variable ya tipificada sigue una distribución $N(0,1)$

Ejemplo:

Si se tiene una distribución normal con $\mu = 10$ y $\sigma = 3$ y se desea calcular la probabilidad de que la variable en cuestión tome un valor mayor que 16. Ahora bien, como se desea saber la probabilidad de que la variable sea mayor que 16 y lo que arroja la función es la probabilidad de que sea menor que 16, entonces se debe restar esta última de 1.

- | | | |
|--|--|----------|
| 1. x. | 16 | |
| 2. Media. | 10 | |
| 3. Desviación estándar. | 3 | |
| 4. Probabilidad de que x sea menor que | $= \text{DISTR.NORM} (B1; B2; B3; \text{VERDADERO})$ | |
| 16 | | [97,72%] |
| 5. Probabilidad de que x sea mayor que | $= 1-B4$ | |
| 16 | | [2,28%] |



Ejemplo:

Según un estudio, la altura de los varones de cierta ciudad es una variable aleatoria X , que podemos considerar que se distribuye de manera normal con una $\mu = 175 \text{ cm}$ y desviación típica $\sigma = 10 \text{ cm}$. Dar un intervalo para que tengamos asegurado que el 50% de los habitantes de la ciudad estén comprendidos en él.

Solución: Tenemos $X \sim N(\mu = 175, \sigma^2 = 10^2)$ que:

Si buscamos un intervalo donde estar seguros de que el 50% de los habitantes tengan sus alturas comprendidas en él. Hay varias estrategias posibles:

- Podemos tomar el percentil 50, ya que este valor deja por debajo suya a la mitad, 0,5, de la masa de probabilidad. Este valor, $x_{0,5}$, se definiría como:

$$\int_{-\infty}^{x_{0,5}} f(t) dt = 0,5 \iff \mathcal{P}[X \leq x_{0,5}] = 0,5$$

$$\text{tipificando} \iff \mathcal{P}[Z \leq z_{0,5}] = 0,5$$

Donde:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 175}{10} \sim N(0, 1)$$

$$z_{0,5} = \frac{x_{0,5} - \mu}{\sigma} = \frac{x_{0,5} - 175}{10}$$

El valor $z_{0,5}$ lo podemos buscar en la tabla 3 (distribución $N(0,1)$) y se obtiene:

$$z_{0,5} = 0 \Rightarrow x_{0,5} = 175 + 10 \cdot z_{0,5} = 175$$

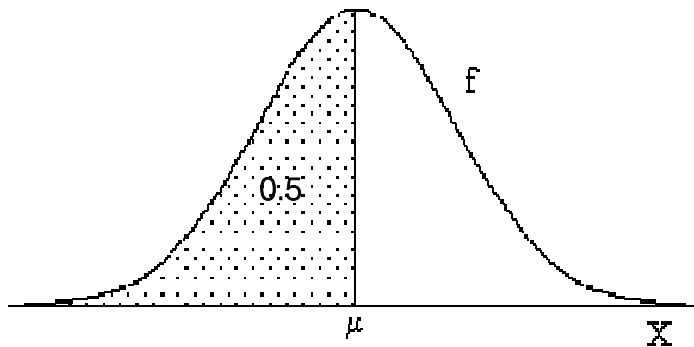
Por tanto podemos decir que la mitad de la población tiene una altura inferior a:

$$x_{0,5} = 175 \text{ cm}$$

Este resultado era de esperar, ya que en la distribución es simétrica y habrá una mitad de individuos con un peso inferior a la media y otro con un peso superior. Esto puede escribirse como:

El 50% de la población tiene un peso comprendido en el intervalo $(0, 175]$

Figura: Intervalo donde tenemos asegurado que el 50% de la población tiene un peso comprendido en él. Como se observa, no es un tamaño óptimo, en el sentido de que el intervalo es demasiado grande (longitud infinita a la izquierda).



- Análogamente podemos considerar el percentil 50, y tomar como intervalo aquellos pesos que lo superan. Por las mismas razones que en el problema anterior, podremos decir:

El 50% de la población tiene un peso comprendido en el intervalo $[175, +\infty]$.

- Los anteriores intervalos, aún dando un resultado correcto, no son satisfactorios en el sentido de que son muy grandes, y no tienen en cuenta la simetría de la distribución normal para tomar un intervalo cuyo centro sea μ . Vamos a utilizar entonces otra técnica que nos permita calcular el intervalo centrado en la media, y que además será el más pequeño posible que contenga al 50% de la población.

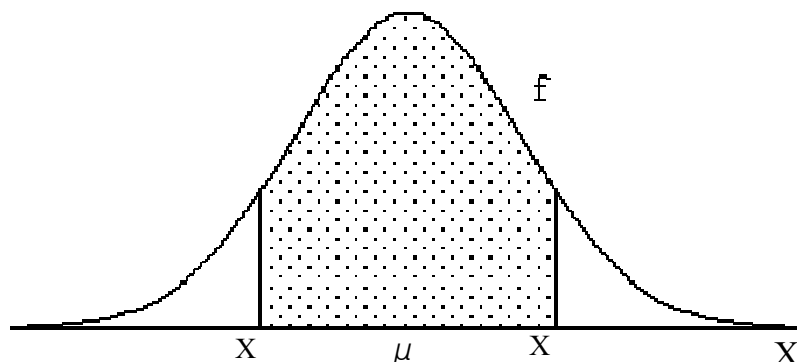
Para ello observamos que la mayor parte de probabilidad está concentrada siempre alrededor de la media en las leyes gaussianas. Entonces podemos tomar un intervalo que contenga un **25%** de probabilidad del lado izquierdo más próximo a la media, y un **25%** del derecho (figura 6.13).

TAREA 2



Página 125.

Figura: Intervalo donde tenemos asegurado que el 50% de la población tiene un peso comprendido en él. En este caso el intervalo es más pequeño que el anterior y está centrado en μ .



Esto se puede describir como el intervalo $[x_{0,25}, x_{0,75}]$ donde $x_{0,25}$ es el valor que deja por debajo de sí al 25% de la masa de probabilidad y $x_{0,75}$ el que lo deja por encima (o lo que es lo mismo, el que deja por debajo al 75% de las observaciones). Del mismo modo que antes estos valores pueden ser buscados en una tabla de la distribución normal, tipificando en primera instancia para destipificar después:

$$\int_{-\infty}^{x_{0,75}} f(t) dt = 0,75 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{P}[X \leq x_{0,75}] = 0,75$$

$$\text{tipificando} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{P}[Z \leq z_{0,75}] = 0,75$$

donde:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 175}{10} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$z_{0,75} = \frac{x_{0,75} - \mu}{\sigma} = \frac{x_{0,75} - 175}{10}$$

En una tabla encontramos el valor $z_{0,75}$, y se destipifica:

$$z_{0,75} = 0,675 \quad \Rightarrow \quad x_{0,75} = 175 + 10 \cdot z_{0,75} = 181,75$$

Análogamente se calcularía

$$\int_{-\infty}^{x_{0,25}} f(t) dt = 0,25 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{P}[X \leq x_{0,25}] = 0,25$$

$$\text{tipificando} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{P}[Z \leq z_{0,25}] = 0,25$$

donde:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 175}{10} \sim N(0, 1)$$

$$z_{0,25} = \frac{x_{0,25} - \mu}{\sigma} = \frac{x_{0,25} - 175}{10}$$

Por la simetría de la distribución normal con respecto al origen, tenemos que $z_{0,25} = -z_{0,75}$. Luego

$$z_{0,25} = -0,675 \Rightarrow x_{0,75} = 175 + 10 \cdot z_{0,25} = 168,25$$

En conclusión:

El 50% de la población tiene un peso comprendido en el intervalo $[168,25, 181,75]$.

De entre los tres intervalos que se han calculado el que tiene más interés es el último, ya que es simétrico con respecto a la media, y es el más pequeño de todos los posibles (más preciso). Este ejemplo es en realidad una introducción a unas técnicas de inferencia estadística que trataremos posteriormente, conocidas con el nombre de “estimación confidencial” o “cálculo de intervalos de confianza”.

AJUSTE DE UN CONJUNTO DE DATOS A UNA DISTRIBUCIÓN NORMAL

Para estudiar si una serie de n datos obtenidos experimentalmente pueden provenir de una distribución normal, procedemos del siguiente modo:

- Calculamos los parámetros; media (\bar{x}) y desviación típica (s) de la distribución empírica.
- Comparamos la distribución empírica con una normal $N(\mu, \sigma)$ (Media con media, $\bar{x} = \mu$; desviación típica con desviación típica $s = \sigma$)
- Para efectuar la comparación, partimos del recorrido de la variable en intervalos, $[x_k, x_{k+1}]$, y averiguamos cómo se repartirían en esos intervalos n individuos de una distribución $N(\mu, \sigma)$.
- Hallamos la diferencia, en cada intervalo, de los números teórico y empírico.
- Si la mayor de las diferencias es suficientemente pequeña, aceptamos la hipótesis de normalidad, pues suponemos que las diferencias son debidas al azar.
- Si la mayor de las diferencias es gran

EJEMPLO DE APLICACIÓN:

Se sabe que la vida útil de un componente electrónico es de 400 horas en promedio y sigue una distribución normal. Se observa una desviación estándar de 20 horas.

TAREA 3



Página 127.

Con esta información trazar su gráfica de distribución.

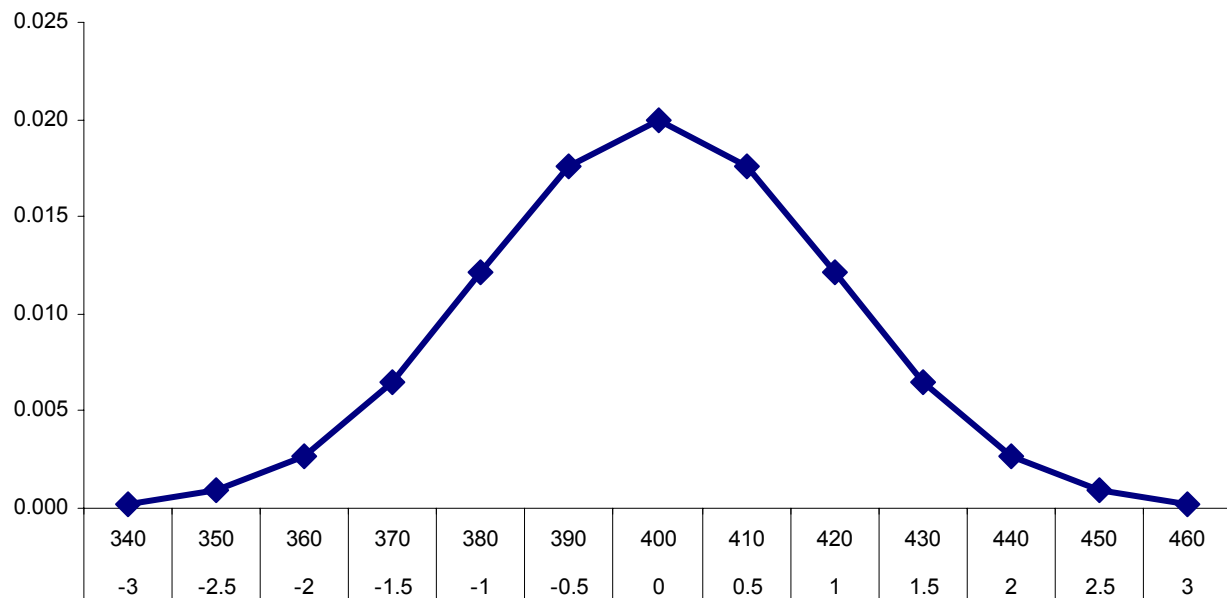
Datos :
 $\mu = 400$ Fórmula: $Y = \frac{0.398942}{400} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$
 $\sigma = 20$

Tabla estadística de datos y resultados:

σ	x	$x - \mu$	Y
-3.0	340	-60	0.0002
-2.5	350	-50	0.0009
-2.0	360	-40	0.0027
-1.5	370	-30	0.0065
-1.0	380	-20	0.0121
-0.5	390	-10	0.0176
0.0	400	0	0.0199
0.5	410	10	0.0176
1.0	420	20	0.0121
1.5	430	30	0.0065
2.0	440	40	0.0027
2.5	450	50	0.0009
3.0	460	60	0.0002

Diagrama de distribución de una curva normal:

DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTANDARIZADA



La distancia de la media a un valor determinado de " x " o sea $(x - \mu)$ se expresa en unidades de desviación estándar y se convierte la variable aleatoria " x " a una variable normal estandarizada " z ":

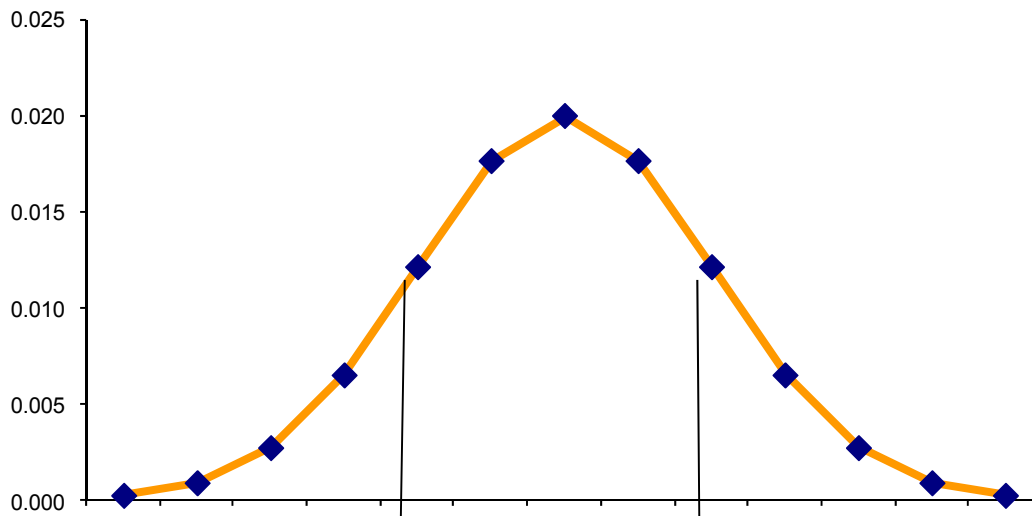
$$z\sigma = x - \mu \text{ o sea } z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Hay una correspondencia uno a uno de " x " y de " z ".

En particular $z = 0$ cuando $x = \mu$

El área bajo la curva normal entre $z = 0$ y otro valor específico de " z " por ejemplo z_1 es la probabilidad de $P(z_1)$ o $P(x_1 - \mu)$

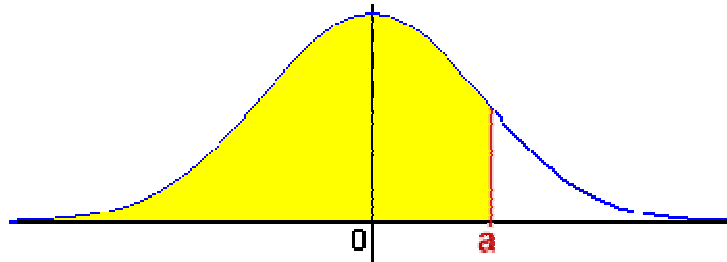
Utilizando la regla empírica se sabe que un 68% aproximadamente del área total está comprendida entre $\mu - 1\sigma$ y $\mu + 1\sigma$; un 95% aproximadamente entre $\mu - 2\sigma$ y $\mu + 2\sigma$ y prácticamente toda el área entre $\mu - 3\sigma$ y $\mu + 3\sigma$



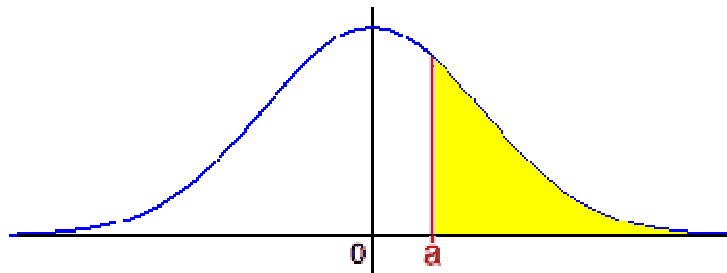
MANEJO DE TABLAS. CASOS MÁS FRECUENTES.

La distribución de la variable Z se encuentra tabulada

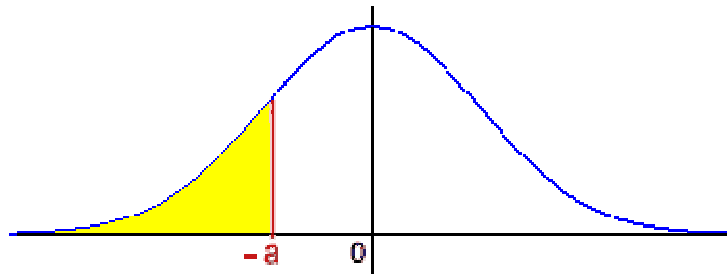
$$P(Z \leq a) \rightarrow \text{Tablas}$$



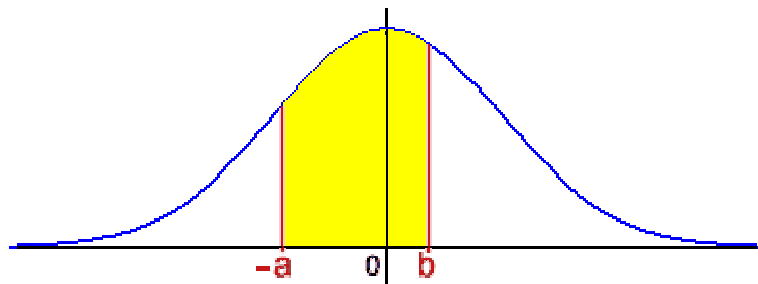
$$P(Z > a) = 1 - P(Z \leq a)$$



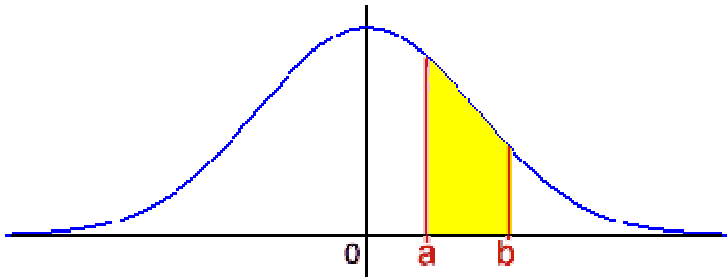
$$P(Z \leq -a) = 1 - P(Z \leq a)$$



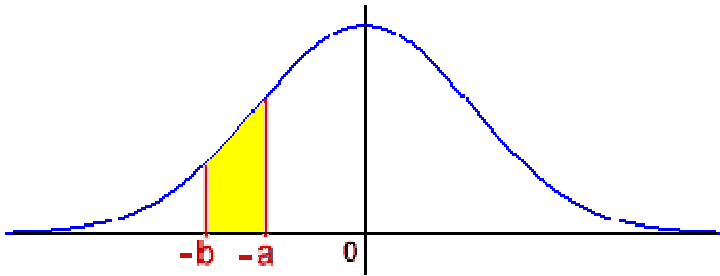
$$P(-a < Z \leq b) = P(Z \leq b) - [1 - P(Z \leq a)]$$



$$P(a < Z \leq b) = P(Z \leq b) - P(Z \leq a)$$



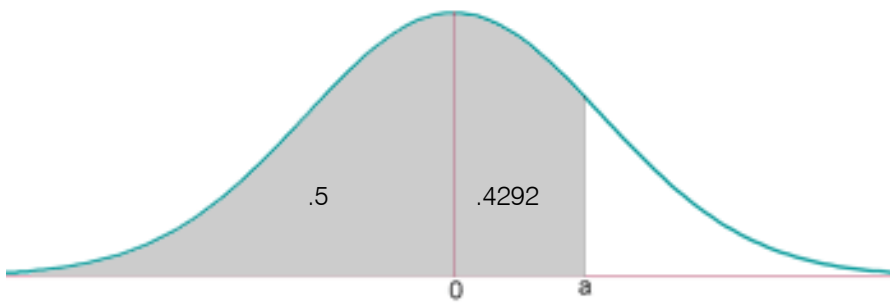
$$P(-b < Z \leq -a) = P(a < Z \leq b)$$



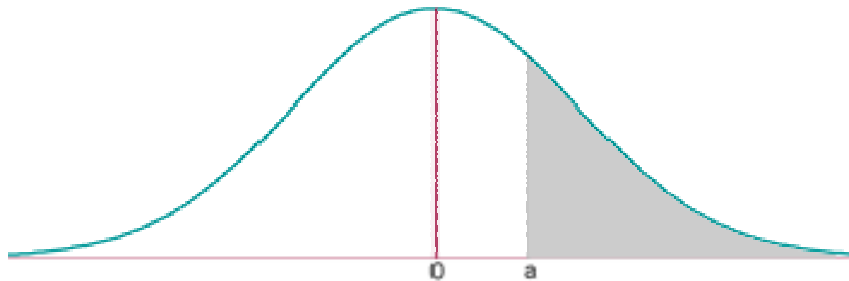
Ejercicios resueltos de la distribución normal aplicando la tabla de probabilidad Z.

- Supongamos que Z es una variable aleatoria que se distribuye según una distribución N (0, 1). Calcular:

- $P(Z \leq 1.47)$
 $P(Z \leq 1.47) = 0.5 + 0.4292 = 0.9292$

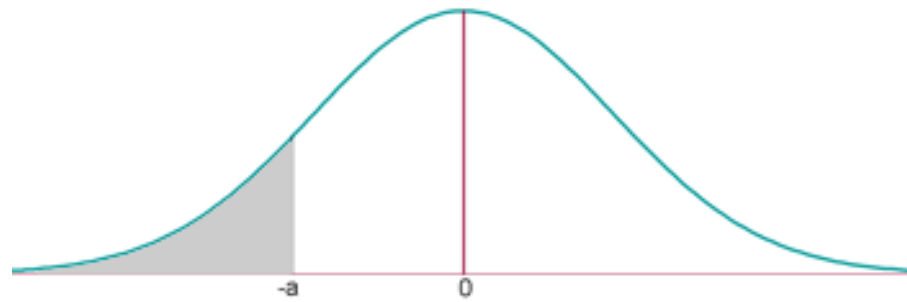


- $P(Z > 1.47)$

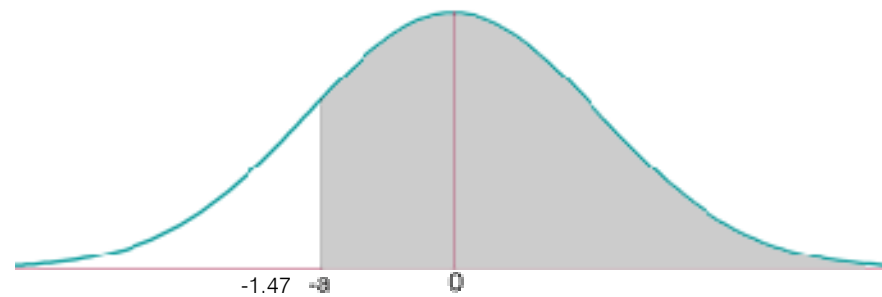


$$P(Z > 1.47) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1.47) = 0.5 - 0.4292 = 0.0708$$

$$\begin{aligned} 3. P(Z \leq -1.47) \\ &= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1.47) \\ &= 0.5 - 0.4292 \\ &= 0.0708 \end{aligned}$$

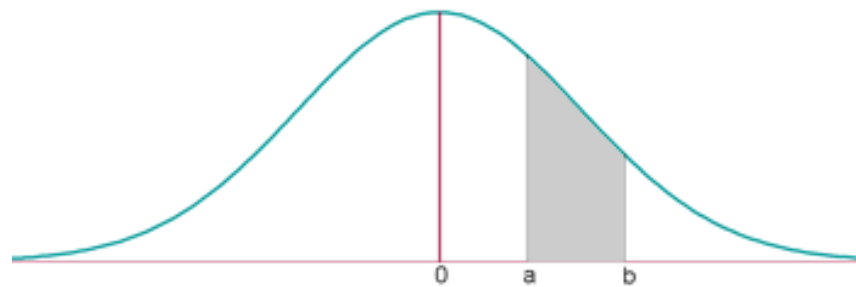


$$4. p(Z > -1.47)$$



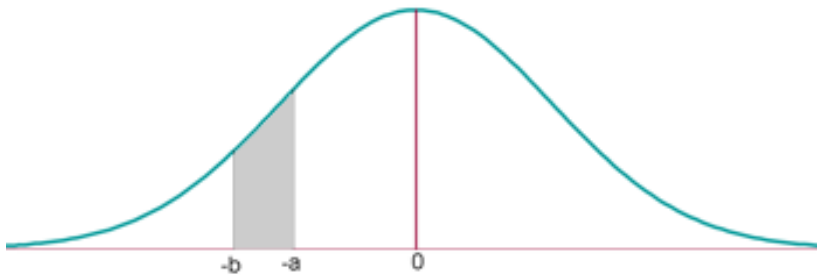
$$P(Z > -1.47) = 0.5 + 0.4292 = 0.9292$$

$$5. P(0.45 < Z \leq 1.47)$$



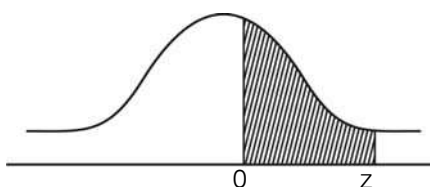
$$\begin{aligned} &= P(0 \leq Z \leq 1.47) - P(0 \leq Z \leq 0.45) \\ &= 0.4292 - 0.1736 = 0.2556 \end{aligned}$$

6. $P(-1.47 < Z \leq -0.45)$



$$\begin{aligned} P(-1.47 < Z \leq -0.45) &= P(0.45 < Z \leq 1.47) = P(0 \leq Z \leq 1.47) - P(0 \leq Z \leq 0.45) \\ &= 0.4292 - 0.1736 \\ &= 0.2556 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7. P(-1.47 < Z \leq 0.45) &= P(-1.47 \leq Z \leq 0) + [P(0 \leq Z \leq 0.45)] \\ &= 0.4292 + 0.1736 = 0.6028 \end{aligned}$$



Áreas bajo la curva normal estándar entre 0 y z.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.9	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000

Ejercicios y problemas resueltos de la distribución normal

2. Si X es una variable aleatoria distribuida según una distribución $N(\mu, \sigma)$, hallar:

$$p(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma)$$

$$\begin{aligned} p(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) &= p\left(\frac{(\mu - 3\sigma) - \mu}{\sigma} \leq z \leq \frac{(\mu + 3\sigma) - \mu}{\sigma}\right) = \\ p(-3 \leq z \leq 3) &= p(z \leq 3) - p(z \leq -3) = \\ &= p(z \leq 3) - (1 - p(z \leq 3)) = \\ &= 0.9987 - 1 + 0.9987 = 0.9974 \end{aligned}$$

Es decir, que aproximadamente el 99.74% de los valores de X están a menos de tres desviaciones típicas de la media.

3. En una distribución normal de media 4 y desviación típica 2, calcular el valor de a para que:

$$P(4 - a \leq x \leq 4 + a) = 0.5934$$

$$\begin{aligned} p\left(\frac{(4 - a) - 4}{2} \leq z \leq \frac{(4 + a) - 4}{2}\right) &= 0.5934 \\ p\left(-\frac{a}{2} \leq z \leq \frac{a}{2}\right) &= p\left(z \leq \frac{a}{2}\right) - p\left(z \leq -\frac{a}{2}\right) = \\ &= p\left(z \leq \frac{a}{2}\right) - p\left(z \geq \frac{a}{2}\right) = p\left(z \leq \frac{a}{2}\right) - p\left(1 - p\left(z \leq \frac{a}{2}\right)\right) \\ 2 \cdot p\left(z \leq \frac{a}{2}\right) - 1 &= 0.5934 \quad p\left(z \leq \frac{a}{2}\right) = 0.7969 \\ \frac{a}{2} &= 0.803 \quad \mathbf{a = 1.606} \end{aligned}$$

4. En una ciudad se estima que la temperatura máxima en el mes de junio si una distribución normal, con media 23° y desviación típica 5° . Calcular el número de días del mes en los que se espera alcanzar máximas entre 21° y 27° .

$$\begin{aligned} p[21 < X \leq 27] &= p\left(\frac{21 - 23}{5} < Z \leq \frac{27 - 23}{5}\right) = \\ &= p(-0.4 < Z \leq 0.8) = p(Z \leq 0.8) - [1 - p(Z \leq 0.4)] = \\ &= 0.7881 - (1 - 0.6554) = 0.4425 \cdot 30 = \mathbf{13} \end{aligned}$$

5. La media y los que de los pesos de 500 estudiantes de un colegio es 70 kg y la desviación típica 3 kg. Suponiendo que los pesos se distribuyen normalmente, hallar cuántos estudiantes pesan:

a). Entre 60 kg y 65 kg.

$$\begin{aligned} p[60 < X \leq 75] &= p\left(\frac{60-70}{3} < Z \leq \frac{75-70}{3}\right) = \\ &= p(-3.33 < Z \leq 1.67) = p(Z \leq 1.67) - [1 - p(Z \leq 3.33)] = \\ &= 0.9525 - (1 - 0.9996) = 0.9521 \cdot 500 = \mathbf{476} \end{aligned}$$

b). Más de 90 kg.

$$\begin{aligned} p(X > 90) &= p\left(Z > \frac{90-70}{3}\right) = p(Z > 6.67) = \\ &= 1 - p(Z < 6.67) = 1 - 1 = 0 \cdot 500 = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Menos de 64 kg.

$$\begin{aligned} p(X < 64) &= p\left(Z < \frac{64-70}{3}\right) = p(Z < -2) = 1 - p(Z \leq 2) = \\ &= 1 - 0.9772 = 0.0228 \cdot 500 = \mathbf{11} \end{aligned}$$

c). 64 kg.

$$p(X = 64) = p\left(Z = \frac{64-70}{3}\right) = p(Z = -2) = 0 \cdot 500 = \mathbf{0}$$

d). 64 kg o menos.

$$p(X \leq 64) = p(X < 64) = \mathbf{11}$$

6. Se supone que los resultados de un examen siguen una distribución normal con media 78 y varianza 36. Se pide:

a. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que se presenta el examen obtenga una calificación superior a 72?

$$\begin{aligned} p(X > 72) &= p\left(Z > \frac{72-78}{\sqrt{36}}\right) = \\ &= p(Z > -1) = p(Z < 1) = \mathbf{0.8413} \end{aligned}$$

- b. Calcular la proporción de estudiantes que tienen puntuaciones que exceden por lo menos en cinco puntos de la puntuación que marca la frontera entre el Apto y el No-Apto (son declarados No-Aptos el 25% de los estudiantes que obtuvieron las puntuaciones más bajas).

$$p(X \leq N) = 0.25 \Rightarrow p\left(Z \leq \frac{N-78}{36}\right) = 0.25$$

$$\frac{N-78}{36} < 0 \quad 1 - p\left(Z \leq \frac{N-78}{36}\right) = 0.25$$

$$p\left(Z \leq \frac{N-78}{36}\right) = 0.75 \Rightarrow \frac{N-78}{36} = 0.68 \quad N = 54$$

$$p(X > 54 + 5) = p(X > 59) = p\left(Z > \frac{59-78}{36}\right) =$$

$$p(Z > -0.53) = p(Z < 0.53) = 0.7019 = \mathbf{70.19\%}$$

- c. Si se sabe que la calificación de un estudiante es mayor que 72 ¿Cuál es la probabilidad de que su calificación sea, de hecho, superior a 84?

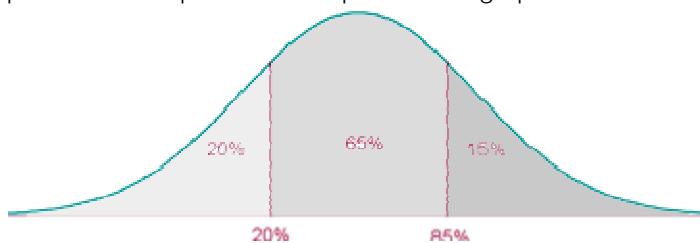
$$p(X > 84) = p\left(Z > \frac{84-78}{36}\right) = p(Z > 0.16) =$$

$$= 1 - p(Z < 0.16) = 1 - 0.5636 = 0.4364$$

$$p(X > 84 / X > 72) = \frac{p[X > 84 \cap X > 72]}{p(X > 72)} =$$

$$= \frac{p(X > 84)}{p(X > 72)} = \frac{0.4364}{0.5636} = \mathbf{0.774}$$

7. Tras un test de cultura general se observa que las puntuaciones obtenidas siguen una distribución una distribución $N(65, 18)$. Se desea clasificar a los examinados en tres grupos (de baja cultura general, de cultura general aceptable, de excelente cultura general) de modo que hay en el primero un 20% la población, un 65% el segundo y un 15% en el tercero ¿Cuáles han de ser las puntuaciones que marcan el paso de un grupo al otro?



$$p(Z \leq z_1) = 0.2$$

$$-z_1 = 0.84$$

$$\frac{X_1 - 65}{18} = -0.84$$

$$p(Z \leq z_2) = 0.2$$

$$\frac{X_2 - 65}{18} = 1.04$$

$$p(Z \leq -z_1) = 0.8$$

$$z = -0.84$$

$$X_1 = 49.88$$

$$z_2 = 1.04$$

$$X_2 = 83.72$$

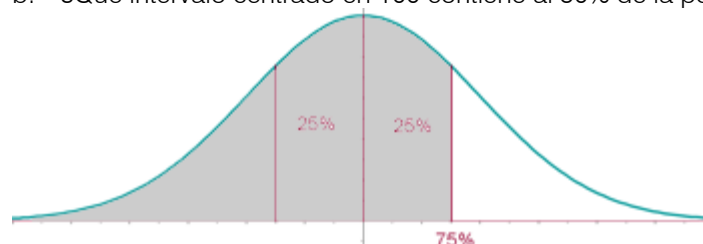
Baja cultura hasta 49 puntos.
Cultura aceptable entre 50 y 83.
Excelente cultura a partir de 84 puntos.

8. Varios test de inteligencia dieron una puntuación que sigue una ley normal con media 100 y desviación típica 15.

Determinar el porcentaje de población que obtendría un coeficiente entre 95 y 110.

$$\begin{aligned}
 p(95 < X \leq 110) &= p\left(\frac{95-100}{15} < Z \leq \frac{110-100}{15}\right) = \\
 &= p(0.33 < Z \leq 0.67) = p(Z \leq 0.67) - [1 - p(Z \leq 0.33)] = \\
 &= 0.7486 - (1 - 0.6293) = \mathbf{0.3779}
 \end{aligned}$$

- b. ¿Qué intervalo centrado en 100 contiene al 50% de la población?



$$\begin{aligned}
 p &= 0.75 & z &= 0.675 \\
 \frac{X-100}{15} &= 0.675 & X &= 110 \\
 \mathbf{(90, 110)}
 \end{aligned}$$

- c. En una población de 2500 individuos ¿Cuántos individuos se esperan que tengan un coeficiente superior a 125?

$$\begin{aligned}
 p(X > 125) &= p\left(Z > \frac{125-100}{15}\right) = p(Z > 1.67) = \\
 &= 1 - p(Z < 1.67) = 1 - 0.9525 = 0.0475 \cdot 2500 = \mathbf{119}
 \end{aligned}$$

9. En una ciudad una de cada tres familias posee teléfono. Si se eligen al azar 90 familias, calcular la probabilidad de que entre ellas haya por lo menos 30 tipos se han teléfono.

$$n = 90 \quad p = \frac{1}{3} \quad q = \frac{2}{3}$$

$$n \cdot p > 5 \quad n \cdot q > 5$$

$$B\left(90, \frac{1}{3}\right) \rightarrow N\left(90 \cdot \frac{1}{3}, \sqrt{90 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}\right) = N(30, 4.47)$$

$$p(X > 30) = p\left(Z > \frac{30-30}{4.47}\right) = p(Z > 0) = 1 - p(Z \leq 0) = \mathbf{0.5}$$

10. En un examen tipo test de 200 preguntas de elección múltiple, cada pregunta tiene una respuesta correcta y una incorrecta. Se aprueba si se contesta a más de 110 respuestas correctas. Suponiendo que se contesta al azar, calcular la probabilidad de aprobar el examen.

$$\begin{aligned}
 n &= 200 & p &= 0.5 & q &= 0.5 \\
 n \cdot p &> 5 & n \cdot q &> 5 \\
 B(200, 0.5) &\rightarrow N(200 \cdot 0.5, \sqrt{200 \cdot 0.5 \cdot 0.5}) = N(100, 7.07) \\
 p(X > 110) &= p\left(Z > \frac{110 - 100}{7.07}\right) = p(Z > 1.41) = \\
 &= 1 - p(Z < 1.41) = 1 - 0.92073 = \mathbf{0.07927}
 \end{aligned}$$

11. Un estudio ha mostrado que, en un cierto barrio, el 60% de los hogares tienen al menos dos televisores. Se elige al azar una muestra de 50 hogares en el citado barrio. Se pide:

¿Cuál es la probabilidad de que al menos 20 de los citados hogares tengan cuando menos dos televisores?

$$\begin{aligned}
 n &= 50 & p &= 0.6 & q &= 0.4 \\
 n \cdot p &> 5 & n \cdot q &> 5 \\
 B(50, 0.6) &\rightarrow N(50 \cdot 0.6, \sqrt{50 \cdot 0.6 \cdot 0.4}) = N(30, 3.46) \\
 p(X > 20) &= p\left(Z > \frac{20 - 30}{3.46}\right) = \\
 p(Z > -2.89) &= p(Z \leq 2.89) = \mathbf{0.9981}
 \end{aligned}$$

¿Cuál es la probabilidad de que entre 35 y 40 hogares tenga cuando menos dos televisores?

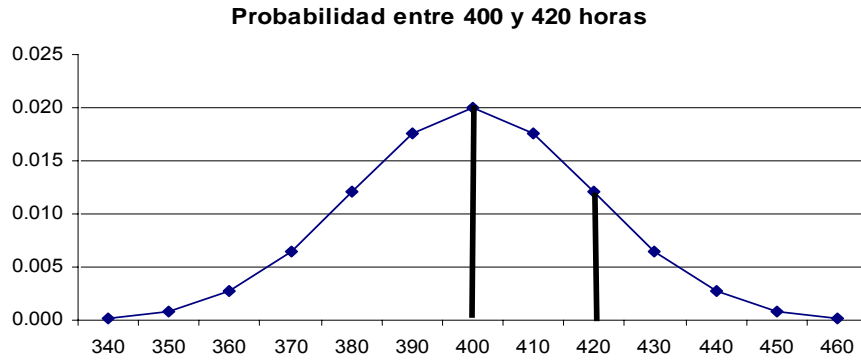
$$\begin{aligned}
 p(35 < X \leq 40) &= p\left(\frac{35 - 30}{3.46} < Z \leq \frac{40 - 30}{3.46}\right) = \\
 &= \mathbf{0.9981 - 0.9265 = 0.0716}
 \end{aligned}$$

EJEMPLOS DE APLICACIÓN DE UNA DISTRIBUCIÓN NORMAL A UNA DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTANDAR Z O TIPIFICADA.

Ejemplo 1. Del ejemplo de los componentes electrónicos calcular la probabilidad de seleccionar uno que pueda durar:

1. Entre 400 y 420 horas.
2. Entre 410 y 430 horas.
3. Más de 415 horas.
4. Interpretar resultados.

a) $P(400 \leq x \leq 420)$



Datos : *Fórmula :*

$\mu = 400$

$\sigma = 20$

$x_1 = 420$

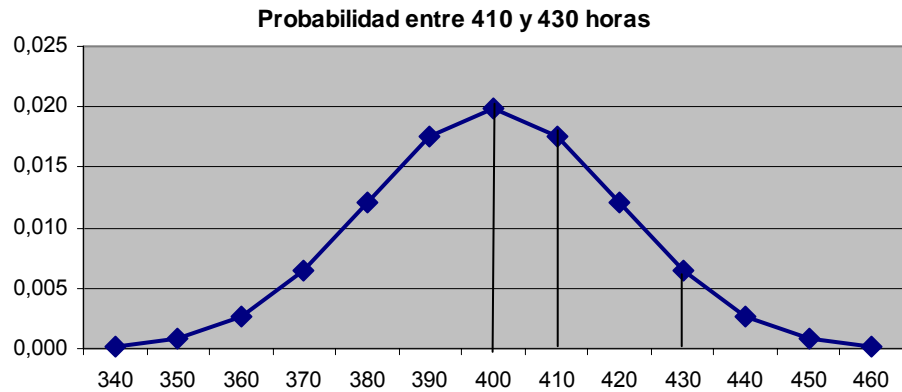
$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad Z_1 = \frac{400 - 400}{20} = \frac{0}{20} = 0$$

$$Z_2 = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{420 - 400}{20} = 1.0$$

$$P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$$

$$\therefore P(400 \leq x \leq 420) = 34.1\%$$

b) $P(410 \leq x \leq 430)$



Datos :

$\mu = 400$

$\sigma = 20$

$x_2 = 410$

$x_3 = 430$

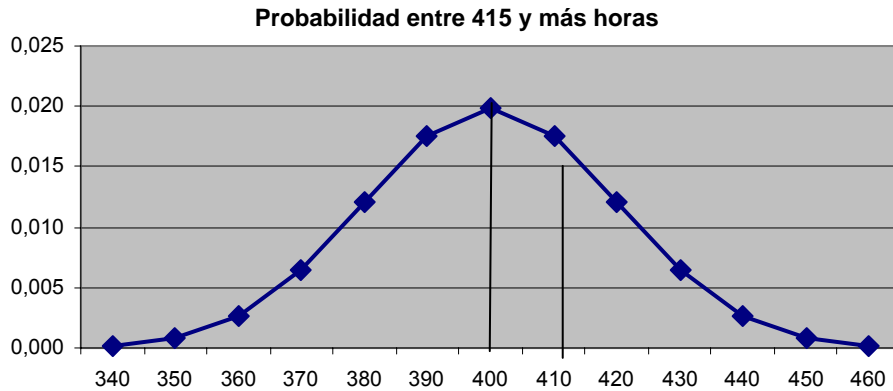
$$z_1 = \frac{400 - 400}{20} = \frac{0}{20} = 0$$

$$z_2 = \frac{410 - 400}{20} = 0.5 \quad P(z_2) = 0.1915$$

$$z_3 = \frac{430 - 400}{20} = 1.5 \quad P(z_3) = 0.4332$$

$$P(410 \leq x \leq 430) = P(z_3) - P(z_2) = 0.4332 - 0.1915 = 0.2417 = 24.2\%$$

c) $P(x > 415)$



$$Z_4 = \frac{415 - 400}{20} = 0.75$$

$$P(Z_4 \geq 0.75) = 0.5 - 0.2734 = 0.2266$$

$$\therefore P(400 \leq x \leq 420) = 34.1\%$$

Datos

$$\mu = 400$$

$$\sigma = 20$$

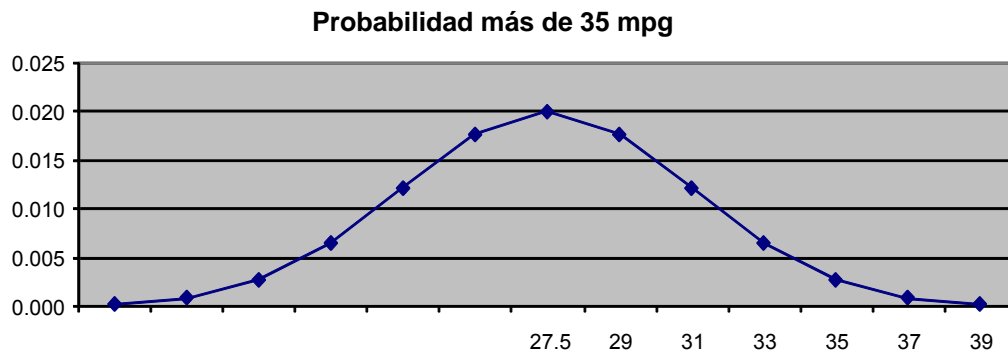
de

$$x_4 = 415$$

o sea que es el 22.66 % de probabilidad

que el componente dure 415 ó más horas

Ejemplo 2.



a)

Datos :

$$\mu = 27.5$$

$$\sigma = 4.9$$

$$x_3 = 35$$

$$z_3 = \frac{35 - 27.5}{4.9} = 1.53 \quad P(z_3) = 0.4370$$

$$\therefore P(x > 35) = 0.5000 - 0.4370 = 0.0630 = 6.3\%$$

b) Cálculo de x_4

Datos :

$$\mu = 27.5$$

$$\sigma = 4.9$$

$$A_4 = 0.95 - 0.50 = 0.45$$

$$P(z_4) = 0.45 \quad \therefore \quad z_4 = 1.645$$

$$x_4 = 1.645 \times 4.9 + 27.5 = 8.06 + 27.5 = 35.6 \text{ mpg}$$

Fórmula :

$$x = z\sigma + \mu$$

c) Interpretación de resultados:

En el caso del inciso a) el rendimiento de los automóviles mayor al 95% requiere una diferencia con respecto a la media de rendimiento de $35.6 - 27.5 = 8.1$ mpg lo que significa que deberán tener un motor que tenga un rendimiento de un 29.5% más.

Ejemplo 3.

Un producto de una empresa tiene un peso promedio de 90 grs. y una desviación estándar de 6.4 grs. Calcular la probabilidad de que un lote de productos seleccionados aleatoriamente tenga:

- Entre 80 y 90 grs.
- Entre 80 y 95 grs.
- Entre 75 y 85 grs.
- Más de 97.5 grs.
- Menos de 77.5 grs.
- Si la probabilidad requerida es de un 92.5% respecto a la media, obtener los valores de x_i y su intervalo (rango).

a) $P(80 \leq x \leq 90)$

Datos :

$$\mu = 90$$

$$\sigma = 6.4$$

$$x_1 = 80$$

Fórmula :

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$z_1 = \frac{80 - 90}{6.4} = -1.56 \quad P(z_1) = 0.4406$$

$$P(80 \leq x \leq 90) = 44.1\%$$

b) $P(80 \leq x \leq 95)$

Datos :

$$\mu = 90$$

$$\sigma = 6.4$$

$$x_1 = 80$$

$$x_2 = 95$$

$$z_1 = \frac{80 - 90}{6.4} = -1.56 \quad P(z_1) = 0.4406$$

$$z_2 = \frac{95 - 90}{6.4} = 0.78 \quad P(z_2) = 0.2823$$

$$P(80 \leq x \leq 95) = 0.4406 + 0.2823 = 0.7229 = 72.3\%$$

c) $P(75 \leq x \leq 85)$

Datos :

$$\mu = 90$$

$$\sigma = 6.4$$

$$x_3 = 75$$

$$x_4 = 85$$

$$z_3 = \frac{75-90}{6.4} = -0.234 \quad P(z_3) = 0.4904$$

$$z_4 = \frac{85-90}{6.4} = -0.78 \quad P(z_4) = 0.2823$$

$$P(75 \leq x \leq 85) = P(z_3) - P(z_4) = 0.4904 - 0.2823 = 0.2081 = 20.8\%$$

d) $P(x > 97.5)$

Datos :

$$\mu = 90$$

$$\sigma = 6.4$$

$$x_5 = 97.5$$

$$z_5 = \frac{97.5-90}{6.4} = 1.17 \quad P(z_5) = 0.3790$$

$$\therefore P(x > 97.5) = 0.5000 - 0.3790 = 0.1210 = 12.1\%$$

e) $P(x < 77.5)$

Datos :

$$\mu = 90$$

$$\sigma = 6.4$$

$$x_6 = 77.5$$

$$z_6 = \frac{77.5-90}{6.4} = -1.95 \quad P(z_6) = 0.4744$$

$$\therefore P(x < 77.5) = 0.5000 - 0.4744 = 0.0256 = 2.6\%$$

f) Cálculo de x_7

Datos :

$$\mu = 90$$

$$\sigma = 6.4$$

$$A_7 = 0.925$$

Fórmula :

$$x = \mu \pm z\sigma$$

$$P(z_7) = \frac{0.925}{2} = 0.4625 \quad \therefore z_7 = \pm 1.78$$

$$x = 90 \pm 1.78 \times 6.4 = 90 \pm 11.4$$

$$x_7 = 90 + 11.4 = 101.4$$

$$x_8 = 90 - 11.4 = 78.6$$

$$\therefore \text{Intervalo : } 78.6 \leq x \leq 101.4 \quad \text{Rango} = 22.8$$

d) Interpretación de resultados:

La diferencia entre el caso a) y el b) es de sólo 5 gramos; sin embargo la probabilidad aumenta de 44.1% a 72.3% o sea una diferencia de 28.2 puntos porcentuales, lo que significa un 64.0% más.

Intervalos de confianza para la media utilizando la distribución normal.

Un intervalo de confianza se calcula con respecto a la media de una muestra determinada y se especifica la probabilidad de que el intervalo incluya el valor de la media de la población.

El grado de confianza es la probabilidad de que un intervalo de confianza contenga el parámetro que se está estimando.

$$\text{Fórmula: } \bar{x} \pm z\hat{\sigma}_{\bar{x}}$$

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

EJEMPLO DE APLICACIÓN.

Durante una semana dada se toma una muestra aleatoria de 50 empleados contratados por hora y que fueron seleccionados entre un gran número de personas. Se obtuvo un salario medio de esta muestra de \$207.75, con una desviación estándar de \$16.32.

Estimar el salario medio de todos los trabajadores contratados por hora con un grado de confianza del 97%.

Datos :

$$\bar{x} = 207.75$$

$$\hat{\sigma} = 16.32$$

$$n = 50$$

$$\text{Fórmula: } \bar{x} \pm z\hat{\sigma}_{\bar{x}}$$

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\text{Fórmula: } \bar{x} \pm z\hat{\sigma}_{\bar{x}}$$

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \frac{16.32}{\sqrt{50}} = \frac{16.32}{7.071} = 2.31$$

$$P(z) = \frac{0.97}{2} = 0.485$$

$$\text{En la tabla: } z = 2.17$$

Intervalo :

$$\bar{x} \pm 2.17 \times 2.31$$

$$\bar{x} \pm 5.01 = 207.75 \pm 5.01$$

$$202.74 \leq \mu \leq 212.76$$

$$\text{Rango} = 10.02$$

Se puede concluir que el salario medio de todos los trabajadores está entre \$202.74 y \$ 212.76, con un grado de confianza del 97%.

3.2.1. Aproximación Normal a la Distribución Binomial.

Para ciertos valores de n y p , las distribuciones binomiales tienen un extraordinario parecido con las correspondientes distribuciones normales.

En general, una binomial $B(n, p)$ se parece a una curva normal tanto más, cuanto mayor es el producto np (o nq si $q < p$). Cuando np y nq son ambos mayores que 3, la aproximación es bastante buena. Y si superan a 5, la aproximación es casi perfecta. Naturalmente, la curva normal a la cual se aproxima tiene la misma media y la misma desviación típica que la binomial, es decir: $np = \mu$, $npq = \sigma$.

REGLA PRÁCTICA PARA CALCULAR PROBABILIDADES MEDIANTE EL PASO DE UNA BINOMIAL A UNA NORMAL

Si x es $B(n, p)$ y se parece mucho a $x' \sim N(np, npq)$, el cálculo de probabilidades de x puede hacerse a partir de x' del siguiente modo:

$$P[x = k] = P[k - 0,5 < x' < k + 0,5]$$

$$P[a \leq x < b] = P[a - 0,5 < x' < b - 0,5]$$

$$P[a < x \leq b] = P[a + 0,5 < x' < b + 0,5]$$

$$P[a < x] = P[a + 0,5 < x']$$

Aproximación a la normal de la ley binomial

Se puede demostrar (**teorema central del límite**) que una variable aleatoria discreta con distribución binomial, $X \sim B(n, p)$ se puede aproximar mediante una distribución normal si n es suficientemente grande y p no está ni muy próximo a 0 ni a 1. Como el valor esperado y la varianza de X son respectivamente np y npq , la aproximación consiste en decir que

$$X \approx N(np, npq)$$

El convenio que se suele utilizar para poder realizar esta aproximación es:

$$X \sim B(n, p) \text{ donde } \begin{cases} n > 30 \\ np > 4 \\ nq > 4 \end{cases} \Rightarrow X \approx N(np, npq)$$

aunque en realidad ésta no da resultados muy precisos a menos que realmente n sea un valor muy grande o $p \approx q \approx 1/2$. Como ilustración obsérvense las figuras 6.10 y 6.11.

Figura: Comparación entre la función de densidad de una v.a. continua con distribución $N(np, npq)$ y el diagrama de barras de una variable aleatoria discreta de distribución $B(n, p)$ para casos en que la aproximación normal de la binomial es válida. Es peor esta aproximación cuando p está próximo a los bordes del intervalo $[0,1]$.

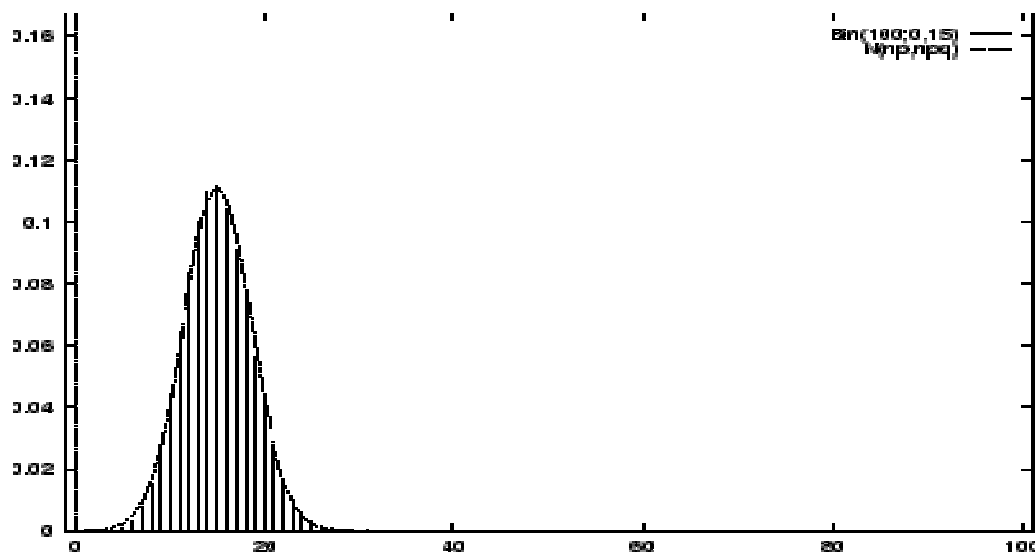
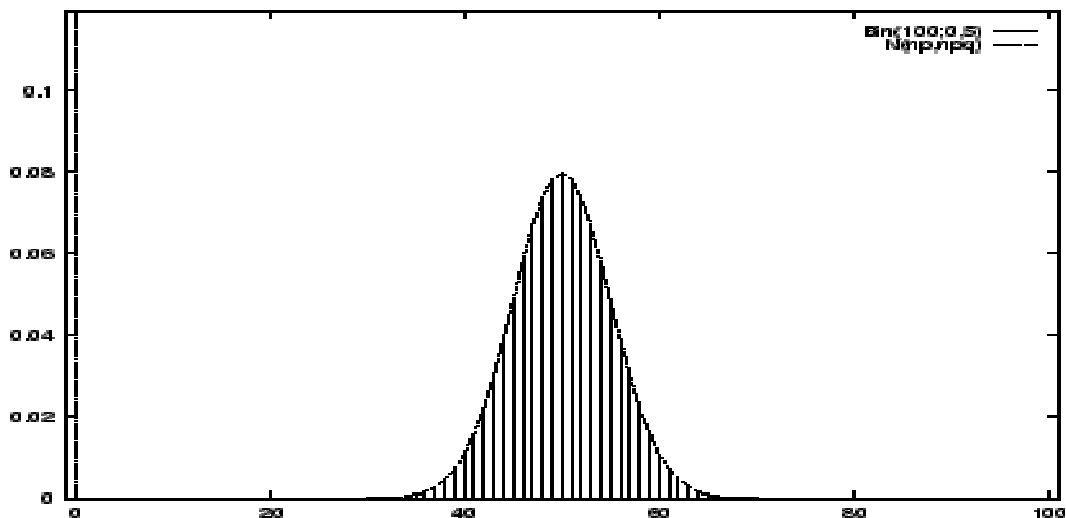


Figura: La misma comparación que en la figura anterior, pero realizada con parámetros con los que la aproximación normal de la binomial es mejor.



Ejemplo:

Durante cierta epidemia de gripe, enferma el 30% de la población. En un aula con 200 estudiantes de Medicina ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 40 padezcan la enfermedad? Calcular la probabilidad de que haya 60 estudiantes con gripe.

Solución: La v.a. que contabiliza el número de alumnos que padece la gripe es

$$X \sim B(n = 200, p = 0,3)$$

cuya media es $\mu = n \cdot p = 60$ y su varianza es $\sigma^2 = npq = 42$. Realizar los cálculos con la ley binomial es muy engorroso, ya que intervienen números combinatorios de gran tamaño, y potencias muy elevadas. Por ello utilizamos la aproximación normal de X , teniendo en cuenta que se verifican las condiciones necesarias para que el error sea aceptable:

$$X \sim \mathbf{B}(n, p) \quad \text{donde} \quad \begin{cases} n = 200 > 30 \\ np = 60 > 4 \\ nq = 140 > 4 \end{cases} \implies X \approx X_N \sim \mathbf{N}(\mu = 60, \sigma^2 = 42)$$

Así aproximando la v.a. discreta binomial X , mediante la v.a. continua normal X_N tenemos:

$$\mathcal{P}[X \leq 40] \approx \mathcal{P}[X_N \leq 40]$$

$$\text{tipificando la aproximación} = \mathcal{P}\left[\underbrace{\frac{X - 60}{\sqrt{42}}}_{Z; N(0,1)} \leq \frac{40 - 60}{\sqrt{42}}\right] \approx \mathcal{P}[Z \leq -3'09]$$

$$\text{por simetría} = \mathcal{P}[Z \geq 3'09]$$

$$\text{por el suceso contrario} = 1 - \mathcal{P}[Z \leq 3'09]$$

$$\text{buscando en la tabla 3} = 0,999$$

También es necesario calcular: $\mathcal{P}[X = 60]$ Esta probabilidad se calcula exactamente como:

$$\mathcal{P}[X = 60] = \binom{200}{60} p^{60} q^{140}$$

Dada la dificultad numérica para calcular esa cantidad, y como la distribución binomial no está habitualmente tabulada hasta valores tan altos, vamos a utilizar su aproximación normal, X_N . Pero hay que prestar atención al hecho de que X_N es una v.a. continua, y por tanto la probabilidad de cualquier punto es cero. En particular,

$$\mathcal{P}[X_N = 60] = 0 \implies \mathcal{P}[X = 60] \approx 0$$

lo que ha de ser interpretado como un error de aproximación. Hay métodos más aproximados para calcular la probabilidad buscada. Por ejemplo, podemos aproximar $\mathcal{P}[X = 60]$ por el valor de la función de densidad de X_N en ese punto (es en el único sentido en que se puede entender la función de densidad de la normal como una aproximación de una probabilidad). Así:

$$\mathcal{P}[X = 60] \approx f_{X_N}(60) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{60-\mu}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^0 = 0,063$$

Por último, otra posibilidad es considerar un intervalo de longitud 1 centrado en el valor 60 del que deseamos hallar su probabilidad y hacer:

$$\mathcal{P}[X = 60] \approx \mathcal{P}[59,5 \leq X_N \leq 60,5] \approx \underbrace{\mathcal{P}[-0,08 \leq Z \leq 0,08]}_{\text{simetría}} = 0,0638$$

¡Ojo! Recuerda que debes resolver la autoevaluación y los ejercicios de reforzamiento; esto te ayudará a enriquecer los temas vistos en clase.





TAREA 1

Nombre _____

Núm. de lista _____ Grupo _____ Turno _____

Núm. de Expediente _____ Fecha _____



Karl Friedrich Gauss

Aplicó la distribución normal

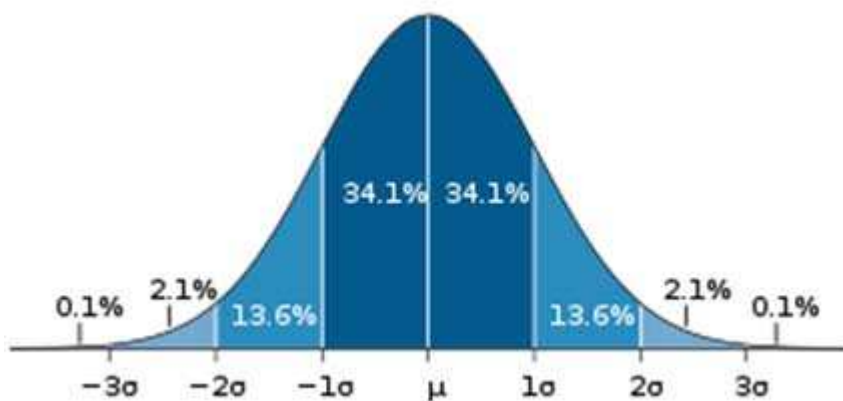


Abraham de Moivre

descubridor de la distribución normal

Escribe 3 propiedades de toda Distribución Normal, utiliza para cada una un gráfico alusivo.

Una de las propiedades de toda distribución normal menciona que los intervalos construidos alrededor de la media al sumarle y restarle la desviación estándar, encierran una probabilidad o área total bajo la curva como se muestra en la siguiente gráfica:



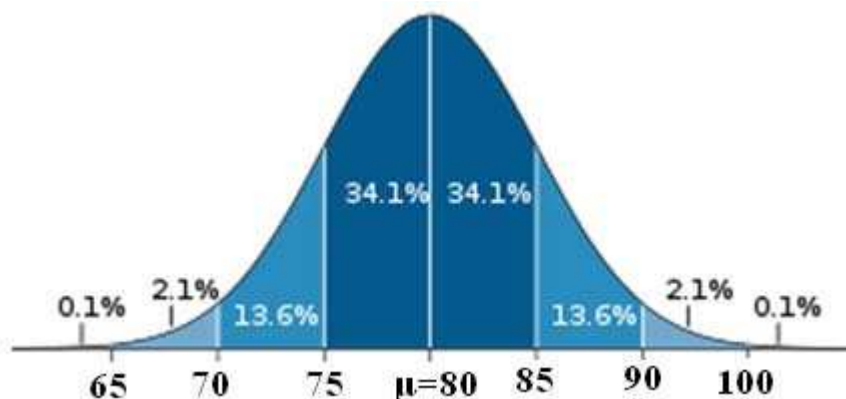
De la gráfica anterior se deduce que el intervalo $\mu \pm \sigma$ contiene aproximadamente el 68.2% del área total, que el intervalo de μ a $\mu + \sigma$ contiene el 34.1% del área total, o también que el intervalo de $\mu \pm 2\sigma$ abarca un área total del 95.4%, o que el intervalo de $\mu - 3\sigma$ a μ contiene el 49.8% del área total, etcétera.

Ejercicio: Construye un intervalo y con ayuda de la gráfica deduce el porcentaje de área que contiene.

Aplicaciones:

1.- Considera que las calificaciones de todos los alumnos de Matemáticas 4 se distribuyen de manera normal, con una media μ de 80 y una desviación estándar σ de 5. Contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Qué porcentaje de alumnos tiene una calificación superior a 70?



Como podemos observar, los porcentajes que satisfacen los requisitos son: 13.6, 34.1, 34.1, 13.6, 2.1 y 0.1 que al sumarlos arrojan un total de 97.6%. ¿De acuerdo?

- b) ¿Qué porcentaje de alumnos tiene una calificación inferior a 85?
- c) Si en total fueron 500 alumnos que cursaron la materia de Matemáticas 4, ¿Cuántos de ellos obtuvieron una calificación que varió de 70 a 100?
- d) ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir al azar a un alumno que cursó esta materia haya tenido una calificación inferior a 75?

2.- Los niveles de hemoglobina en las mujeres adultas se distribuyen de forma normal con una media μ de 12.8 y una desviación estándar σ de 0.4. Utilizando el gráfico anterior, dar respuesta a cada una de las siguientes preguntas:

- a) ¿Qué porcentaje de mujeres tiene niveles de hemoglobina inferiores a 13.6?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir al azar a una mujer a quien le realizaron un estudio sanguíneo, arroje un nivel de hemoglobina que varíe entre 12 y 13.2
- c) Si se eligen al azar 300 mujeres adultas, ¿Cuántas de ellas tienen niveles de hemoglobina superior a 13.2?

Ejercicio: Investiga un ejemplo de variable con distribución normal en la cual se conozcan los valores de los parámetros μ y σ , elabora dos preguntas similares a las anteriores y con ayuda de la gráfica da respuesta.



TAREA 2

Nombre _____

Núm. de lista _____ Grupo _____ Turno _____

Núm. de Expediente _____ Fecha _____

INSTRUCCIONES: Resuelve los siguientes ejercicios.

1. Un investigador reporta que unos ratones vivirán un promedio de 40 meses cuando sus dietas se restrinjan drásticamente y después se enriquezcan con vitaminas y proteínas. Suponga que la vida de tales ratones se distribuye normalmente con una desviación estándar de 6.3 meses, encuentre la probabilidad de que un ratón viva:
 - a) Más de 32 meses.
 - b) Menos de 28 meses.
 - c) Entre 37 y 49 meses.
 - d) Entre 45 y 50 meses.
 - e) Entre 40 y 43 meses.
 - f) ¿Cuál es la probabilidad de que de seis ratones cuatro vivan más de 30 meses?

2. Las barras de centeno que cierta panadería distribuye a las tiendas locales tienen una longitud promedio de 30 centímetros y una desviación estándar de 2 centímetros. Suponiendo que las longitudes se distribuyen normalmente ¿Qué porcentaje de las barras son:
 - a) Más largas de 31.7 cm?
 - b) Entre 29.3 cm. y 33.5 cm de longitud?
 - c) Entre 32 cm. y 35 cm?
 - d) Más cortas de 38 cm?
 - e) Entre 27.5 cm. y 30 cm?
 - f) ¿Cuál es la probabilidad de que de 4 barras, tres midan más de 35 cm?

3. Un abogado va todos los días de su casa a su oficina en el centro de la ciudad. El tiempo promedio del viaje es 24 minutos, con una desviación estándar de 3.8 minutos. Si las duraciones de los viajes están distribuidas normalmente:
 - a) ¿Cuál es la probabilidad de que un viaje tome al menos $\frac{1}{2}$ hora?
 - b) Si la oficina abre a las 9:00 a.m. y él sale de su casa diariamente a las 8:45 a.m. ¿Qué porcentaje de las veces llega tarde al trabajo?
 - c) Si sale de su casa a las 8:35 a.m. y el café se sirve en la oficina de las 8:50 a.m. a las 9:00 a.m. ¿Cuál es la probabilidad de que llegue a la hora del café?
 - d) Encuentre cuál es el tiempo a partir del cual duran el 15% de los viajes más lentos.

Sugerencia: De la expresión $Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ despejar x y obtener Z a partir del porcentaje proporcionado y de la consulta de la tabla de probabilidad.

 - e) Encuentre la probabilidad de que dos de los siguientes tres viajes tomen como máximo $\frac{1}{2}$ hora.

4. Las alturas de 1000 estudiantes se distribuyen normalmente con una media de 174.5 cm y una desviación estándar de 6.9 cm ¿Cuántos de estos estudiantes se esperaría que tuvieran alturas
- Menores de 160 cm?
 - Entre 171.5 cm y 182 cm?
 - Mayores a 165 cm?
 - Entre 174.5 cm y 180 cm?
 - Entre 180 cm y 195 cm?
 - Menores de 185 cm?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que de cinco estudiantes, al menos 3 midan más de 180 cm?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que de tres estudiantes, ninguno mida menos de 160 cm?
5. Una estación de radio encontró que el tiempo promedio que una persona sintoniza esa estación es de 15 minutos con una desviación estándar de 3.5 minutos ¿Cuál es la probabilidad de que un radioescucha sintonice la estación por:
- Más de 20 minutos?
 - Entre 15 y 18 minutos?
 - Entre 10 y 12 minutos?
 - ¿Cuántos minutos como máximo sintonizan la estación el 70% de los radioescuchas?

Sugerencia: De la expresión $Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ despejar x y obtener Z a partir del porcentaje proporcionado y de la consulta de la tabla de probabilidad.

- ¿Cuál es la probabilidad de que de ocho radioescuchas, al menos siete sintonicen la estación por más de cinco minutos?



Revisión: _____

Observaciones: _____



TAREA 3

Nombre _____

Núm. de lista _____ Grupo _____ Turno _____

Núm. de Expediente _____ Fecha _____

INSTRUCCIONES: Resuelve los siguientes ejercicios, aplicando la aproximación Normal a la Distribución Binomial.

1. Investigadores de la Universidad George Washington reportan que aproximadamente 75% de las personas creen que "los tranquilizantes funcionan muy bien para hacer que una persona esté más tranquila y relajada". De las siguientes 80 personas entrevistadas ¿Cuál es la probabilidad de que
 - a) Al menos 50 sean de esa opinión?
 - b) A lo más 56 tengan esta opinión?
 - c) Entre 60 y 70 tengan esta opinión?
 - d) Exactamente 43 tengan esta opinión?

2. Si el 20% de los residentes de una ciudad de Estados Unidos prefiere un teléfono blanco sobre cualquier otro color disponible ¿Cuál es la probabilidad de que entre los siguientes mil teléfonos que se instalen en esta ciudad
 - a) Entre 170 y 200 sean blancos?
 - b) Al menos 210 sean blancos?
 - c) Más de 225 sean blancos?
 - d) Entre 180 y 225 sean blancos?

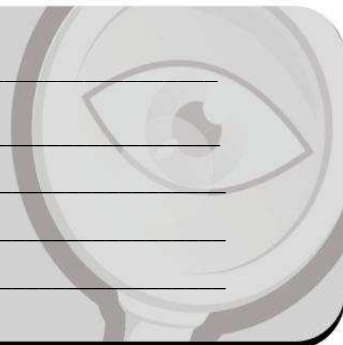
3. Un fabricante de medicamentos sostiene que cierto medicamento cura una enfermedad de la sangre en promedio el 80% de los casos. Para verificar esta afirmación, inspectores de gobierno utilizan el medicamento en una muestra de 100 individuos y deciden aceptar la afirmación si 75 o más se curan.
 - a) ¿Cuál es la probabilidad de que el gobierno acepte la afirmación?
 - b) ¿Cuál es la probabilidad de que el gobierno rechace la afirmación si en realidad la probabilidad de curarse es de 0.70?

4. Un estudio sobre nuevos delincuentes juveniles reveló que el 38% de ellos vuelve a delinquir.
 - a) ¿Cuál es la probabilidad de que de cien nuevos delincuentes juveniles 30 ó más vuelvan a delinquir?
 - b) ¿Cuál es la probabilidad de que de 50 nuevos delincuentes juveniles 40 ó menos vuelvan a delinquir?
 - c) ¿Cuál es la probabilidad de que de 35 nuevos delincuentes juveniles 15 vuelvan a delinquir?



Revisión: _____

Observaciones: _____




AUTOEVALUACIÓN

Nombre _____

Núm. de lista _____ Grupo _____ Turno _____

Núm. de Expediente _____ Fecha _____

INSTRUCCIONES: Lee cuidadosamente y responde los siguientes cuestionamientos, rellenando el círculo de la opción que consideres correcta.

1. La distribución de probabilidad de una variable aleatoria proporciona una probabilidad para cada valor posible, y estas probabilidades deben sumar:
 - ☐ A -1
 - ☐ B 1
 - ☐ C $0 < P < 1$
 - ☐ D 100
2. En este tipo de distribución de probabilidad, la variable que se está considerando puede tomar cualquier valor dentro de un intervalo dado; es una distribución de probabilidad de:
 - ☐ A Variable aleatoria.
 - ☐ B Variable discreta.
 - ☐ C Variable categórica.
 - ☐ D Variable continua.
3. Para obtener este valor de una variable aleatoria discreta, se multiplica cada valor que la variable puede tomar por la probabilidad de presentación de ese valor y luego se suman esos productos. A este valor se le llama:
 - ☐ A Valor de la mediana.
 - ☐ B Valor esperado.
 - ☐ C Desviación típica.
 - ☐ D Varianza.
4. Es cualquier mecanismo que nos ayuda a obtener las probabilidades de los valores de una variable si es discreta, o las probabilidades de intervalos de la variable si es continua.
 - ☐ A Tabla de probabilidades.
 - ☐ B Función aleatoria.
 - ☐ C Distribución de probabilidad.
 - ☐ D Función de frecuencias.
5. *Por ejemplo*, supongamos que vamos a realizar un experimento aleatorio que consiste en seleccionar una persona y apuntar su peso. Podemos crear una variable aleatoria cuyos valores sean el número de kilogramos que pesa la persona observada. Este es un tipo de variable:
 - ☐ A Continua.
 - ☐ B Aleatoria.
 - ☐ C Discreta.
 - ☐ D Categórica.

6. La ecuación o formula que evalúa probabilidad acumulada hasta un cierto valor, y se puede analizar cómo cambia la probabilidad acumulada en cada valor de la variable se le llama:
 - Ⓐ Función de distribución.
 - Ⓑ Función de probabilidad.
 - Ⓒ Frecuencia relativa.
 - Ⓓ Función de densidad.

7. La gráfica que divide el rango de valores de la variable en intervalos de igual longitud, representando sobre cada intervalo un rectángulo con área proporcional al número de datos en ese rango. Se llama:
 - Ⓐ Polígono de frecuencias.
 - Ⓑ Histograma de frecuencias.
 - Ⓒ Ojiva.
 - Ⓓ Grafica de líneas.

8. Esta curva suave "asintótica" representa de modo intuitivo la distribución teórica de la característica observada. Es la función de densidad. Una de las distribuciones teóricas mejor estudiadas y más utilizadas en los diferentes campos del conocimiento, es:
 - Ⓐ Distribución "t" students.
 - Ⓑ Distribución exponencial.
 - Ⓒ Distribución ji-cuadrada.
 - Ⓓ Distribución normal.

9. Existen muchísimos fenómenos aleatorios continuos que siguen o se aproximan a este tipo de distribución; se puede utilizar la normal para aproximar diversas distribuciones de probabilidad discretas; constituye la base para la Inferencia Estadística clásica, debido a su relación con el Teorema del Límite Central; éstas son:
 - Ⓐ Las razones fundamentales.
 - Ⓑ Las características principales.
 - Ⓒ Las propiedades importantes.
 - Ⓓ Las distinciones elementales.

10. Ya que la probabilidad es siempre un número no negativo, la función de densidad de probabilidad es una función:
 - Ⓐ Decreciente.
 - Ⓑ No creciente.
 - Ⓒ Horizontal.
 - Ⓓ Creciente.

11. La distribución de una variable aleatoria continua normal está completamente determinada por los parámetros:
 - Ⓐ La moda y el rango.
 - Ⓑ La media y la desviación estándar.
 - Ⓒ La mediana y la varianza.
 - Ⓓ La media y la desviación media.

12. El área total bajo la curva de una distribución normal es, por tanto:

- Ⓐ Igual a 100
- Ⓑ Igual a 0.75
- Ⓒ Igual a 1
- Ⓓ Igual al 50 %

13. El área bajo la curva comprendida entre los valores situados aproximadamente a dos desviaciones estándar de cada lado de la media es igual a:

- Ⓐ 0.90
- Ⓑ 0.97
- Ⓒ 0.99
- Ⓓ 0.95

ESCALA DE MEDICIÓN DEL APRENDIZAJE

- Si todas tus respuestas fueron correctas: **excelente**, por lo que te invitamos a continuar con esa dedicación.
- Si tienes de 8 a 9 aciertos, tu aprendizaje es **bueno**, pero es necesario que nuevamente repases los temas.
- Si contestaste correctamente 7 ó menos reactivos, tu aprendizaje es **insuficiente**, por lo que te recomendamos solicitar asesoría a tu profesor.

*Consulta las
claves de
respuestas en la
página 161.*


**EJERCICIO DE
REFORZAMIENTO 1**

Nombre _____

Núm. de lista _____ Grupo _____ Turno _____

Núm. de Expediente _____ Fecha _____

INSTRUCCIONES: Resuelve los siguientes ejercicios

PROBLEMAS PROPUESTOS DE LA DISTRIBUCION NORMAL

1. Dada una distribución normal estándar, encuentre el área bajo la curva que está
 - a). a la izquierda de $z = 1.43$
 - b). a la derecha de $z = -0.89$
 - c). entre $z = -2.16$ y $z = -0.65$

2. Encuentre el valor de z si el área bajo una curva normal estándar
 - a). a la derecha de z es 0.3622
 - b). a la izquierda de z es 0.1131
 - c). entre 0 y z , con $z > 0$, es 0.4838
 - d). entre $-z$ y z , con $z > 0$, es 0.9500

3. Los alambres que se utilizan en cierta computadora deben tener una resistencia entre 0.12 y 0.14 ohms. Las resistencias reales de los alambres producidos por la compañía A tienen una distribución normal con media de 0.13 ohms y una desviación estándar de 0.005 ohms.
 - a) ¿Cuál es la probabilidad de que un alambre seleccionado al azar de la producción la compañía A satisfaga las especificaciones?
 - b) Si se utilizan cuatro de estos alambres en un sistema y los seleccionan de la compañía A ¿Cuál es la probabilidad de que los cuatro satisfagan las especificaciones?

4. Se supone que los resultados de un examen tienen una distribución normal con media de 78 y varianza de 36.
 - a). ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que presenta examen obtenga una calificación mayor de 72?
 - b). Suponga que los estudiantes que se encuentran en el 10% superior de la distribución se les asigna una calificación A ¿Cuál es la calificación mínima que debe tener un estudiante para obtener una A?
 - c). ¿Cuál debe ser la calificación mínima aprobatoria si el evaluador pretende que solamente el 28.1% de los estudiantes apruebe?

5. Algunos estudios muestran que el rendimiento de gasolina de autos compactos vendidos en USA se distribuye normalmente con una media de 25.5 mpg y una desviación estándar de 4.5 mpg.
 - a). ¿Qué porcentaje de autos compactos tiene un rendimiento de 30 mpg o más?
 - b). Si un fabricante desea diseñar un auto compacto más económico que el 95% de los autos compactos actuales ¿Cuál debe ser el rendimiento del nuevo auto?

6. El rendimiento promedio al vencimiento de los bonos industriales emitidos durante el primer trimestre de 1975 fue de 8.55% con una desviación estándar de 0.70%. Suponiendo que el rendimiento de los bonos se distribuye normal y que el rendimiento de la compañía FLEX fue de 7.1% ¿Qué podemos decir de la situación financiera de esta firma durante el trimestre mencionado?

7. Durante los últimos años ha crecido el volumen de acciones negociadas en la bolsa de Nueva York. Durante las dos primeras semanas de enero de 1998, el volumen diario promedio fue de 646 millones de acciones (Barron's. Enero de 1998). La distribución de probabilidad del volumen diario es aproximadamente normal, con desviación estándar de unos 100 millones de acciones.
 - a). ¿Cuál es la probabilidad de que el volumen negociado sea menor de 400 millones de acciones?
 - b). ¿Qué porcentaje de las veces el volumen negociado es mayor de 800 millones de acciones.
 - c). Si la Bolsa quiere emitir un boletín de prensa sobre el 5% de los días más activos ¿Qué volumen activará la publicación?
8. La edad promedio que tiene una persona al casarse por primera vez es de 26 años (U:S News & World Report, 6 de junio de 1994). Suponga que las edades en el primer casamiento tienen una distribución normal, con desviación estándar de cuatro años.
 - a) ¿Cual es la probabilidad de que una persona que se casa por primera vez tenga menos de 23 años de edad?
 - b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que se casa por primera vez tenga entre 20 y 30 años de edad?
 - c) El 90% de las personas que se casan por primera vez ¿A qué edad lo hacen?
9. Mansa es una asociación internacional de personas con alto coeficiente intelectual. Para pertenecer a ella, una persona debe tener un coeficiente intelectual de 132 ó más alto (USA today, 13 de febrero de 1992). Si las calificaciones del coeficiente de inteligencia se distribuyen normalmente con promedio de 100 y desviación estándar de 15 ¿Qué porcentaje de personas califican para ser miembros de Mansa?
10. Traza una curva normal para una variable aleatoria x que tiene una media $\mu = 100$ y desviación estándar $\sigma = 10$. Indique los valores de 70, 80, 90, 100, 110, 120 y 130 en el eje horizontal.
11. Si X es una variable aleatoria distribuida según una distribución $N(\mu, \sigma)$, hallar:
 $p(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma)$
9. Si X es una variable aleatoria distribuida según una distribución $N(\mu, \sigma)$, hallar:
 $p(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma)$
12. En una ciudad se estima que la temperatura máxima en el mes de junio si una distribución normal, con media 23° y desviación típica 5° . Calcular el número de días del mes en los que se espera alcanzar máximas entre 21° y 27° .
13. La media de los pesos de 500 estudiantes de un colegio es 70 kg y la desviación típica 3 kg. Suponiendo que los pesos se distribuyen normalmente, identifica cuántos estudiantes pesan:
 - a. Entre 60 kg y 65 kg.
 - b. Más de 90 kg.
 - c. Menos de 64 kg.
 - d. 64 kg.
 - e. 64 Kg. o menos.

14. Se supone que los resultados de un examen siguen una distribución normal con media 78 y varianza 36. Se pide:
- ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que se presenta el examen obtenga una calificación superior a 72?
 - Calcular la proporción de estudiantes que tienen puntuaciones que exceden por lo menos en cinco puntos de la puntuación que marca la frontera entre el Apto y el No-Apto (son declarados No-Aptos el 25% de los estudiantes que obtuvieron las puntuaciones más bajas).
 - Si se sabe que la calificación de un estudiante es mayor que 72 ¿Cuál es la probabilidad de que su calificación sea, de hecho, superior a 84?
15. Tras un test de cultura general se observa que las puntuaciones obtenidas siguen una distribución una distribución $N(65, 18)$. Se desea clasificar a los examinados en tres grupos (de baja cultura general, de cultura general aceptable, de excelente cultura general) de modo que hay en el primero un 20% la población, un 65% el segundo y un 15% en el tercero ¿Cuáles han de ser las puntuaciones que marcan el paso de un grupo al otro?
16. Varios test de inteligencia dieron una puntuación que sigue una ley normal con media 100 y desviación típica 15.
- Determinar el porcentaje de población que obtendría un coeficiente entre 95 y 110.
 - ¿Qué intervalo centrado en 100 contiene al 50% de la población?
 - En una población de 2500 individuos ¿Cuántos individuos se espera que tengan un coeficiente superior a 125?
17. En una ciudad, una de cada tres familias posee teléfono. Si se eligen al azar 90 familias, calcular la probabilidad de que entre ellas haya por lo menos 30 tipos de teléfonos.
18. En un examen tipo test de 200 preguntas de elección múltiple, cada pregunta tiene una respuesta correcta y una incorrecta. Se aprueba si se contesta a más de 110 respuestas correctas. Suponiendo que se contesta al azar, calcular la probabilidad de aprobar el examen.
19. Un estudio ha mostrado que, en un cierto barrio, el 60% de los hogares tienen al menos dos televisores. Se elige al azar una muestra de 50 hogares en el citado barrio. Determina:
- ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 20 de los citados hogares tengan cuando menos dos televisores?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que entre 35 y 40 hogares tenga cuando menos dos televisores?

-

Unidad 4

Análisis de datos de dos variables.

Objetivos:

El alumno:

Resolverá problemas que involucren el comportamiento de datos de dos variables en situaciones de su propio interés en el ámbito escolar o personal; tras conocer, la tendencia, el coeficiente de correlación lineal y la fórmula que relaciona las variables; mediante la representación tabular y gráfica, la aplicación del análisis de regresión y el método de mínimos cuadrados en el cálculo de la recta de mejor ajuste, con una actitud crítica de tolerancia, de respeto y honestidad.

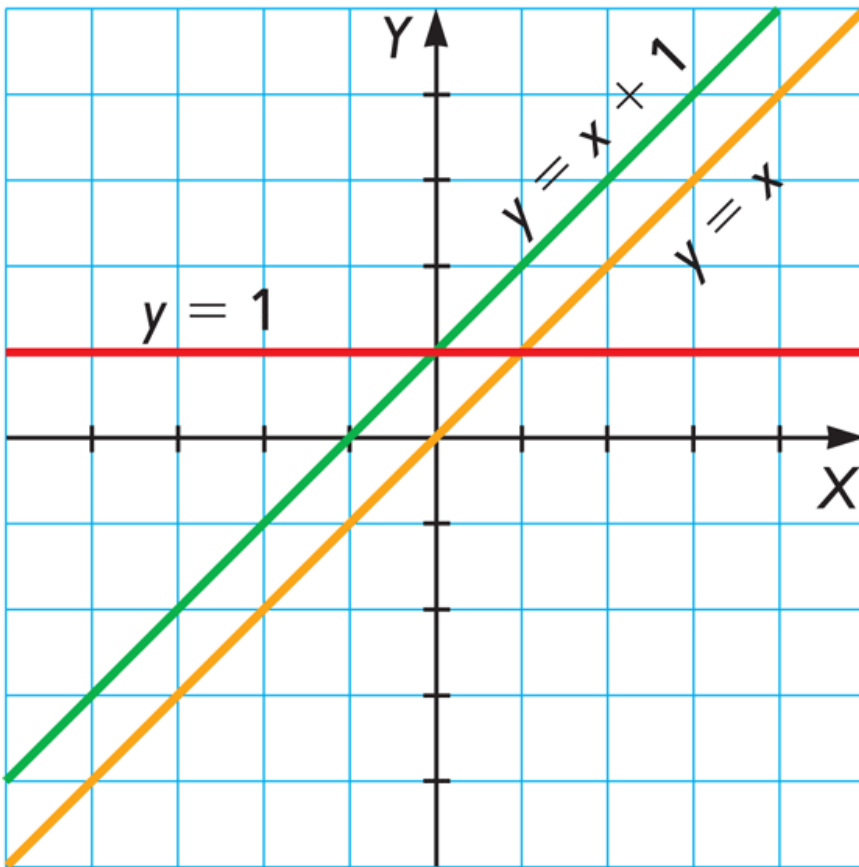
Organizador anticipado:

El conocimiento estadístico, nos sirve para fundamentar mediante razones objetivas el comportamiento de las variables de un evento.

En esta unidad analizaremos algunas estrategias para manejar datos, con la finalidad de poder aplicarlos a nuestra vida cotidiana.

Temario:

- Representación de datos de dos variables.
- Correlación lineal.
- Regresión lineal.



Mapa Conceptual de Unidad



4.1. REPRESENTACIÓN DE DATOS DE DOS VARIABLES.

Datos de dos variables: estos datos constan de los valores de dos variables respuestas diferentes que se obtienen del mismo elemento de la población.

Cada una de las variables puede ser por su naturaleza cualitativa o cuantitativa. Como resultado, los datos bivariados pueden formarse mediante tres combinaciones de variables:

1. Ambas variables son cuantitativas (de atributos).
2. Una variable es cuantitativa (de atributo) y otra es cualitativa (numérica).
3. Ambas variables son cuantitativas (numéricas).

- Dos variables cualitativas.

Cuando los datos bivariados resultan de dos variables cualitativas (de atributo o categóricas), a menudo los datos se disponen en una tabla cruzada o de contingencia.

- Una variable cualitativa y otra cuantitativa

Cuando los datos bivariados se obtienen de una variable cuantitativa y otra cualitativa, los valores cuantitativos se consideran como muestras ajenas, cada una identificada por niveles de la variable cualitativa.

- Dos variables cuantitativas.

Cuando los datos bivariados son resultado de dos variables cuantitativas, los datos matemáticos suelen expresarse como pares ordenados, (X,Y) , donde "X" es la variable de entrada (variable independiente) y "Y" es la variable de salida (variable dependiente).

Se dice que los datos están ordenados porque siempre se escribe primero un valor, "X", y se explica que están parecidos porque para cada valor de X existe un valor Y.

4.1.1. Tabla de contingencias.

Se muestra cuando los datos bivariados resultan de dos variables cualitativas.

Ejemplo:

Tabla cruzada de género y especialización.

Género	Filosofía y letras	Administración empresarial	Tecnología	Totales
Masculino	5	6	7	18
Femenino	6	4	2	12
totales	11	10	9	30

TAREA 1



Página 149.

La tabla de contingencias a menudo presenta porcentajes (frecuencias relativas). Estos porcentajes pueden estar basados en toda la muestra o en las clasificaciones de la submuestra.

Porcentajes basados en el gran total (toda muestra) de la tabla anterior puede convertirse fácilmente en porcentajes del gran total, al dividir cada frecuencia entre el gran total y multiplicar por 100 el resultado.

Por ejemplo 6 se convierte en 20%

$$[(6/30) \times 100 = 20]$$

Ejemplo:

Tabla cruzada de género y especialización
 (Frecuencias relativas)

Especialización

Género	Filosofía y letras	Administración de empresas	Tecnología	Totales
Masculino	17%	20%	23%	60%
Femenino	20%	13%	7%	40%
Totales	37%	33%	30%	100%

EJERCICIO 1



En una encuesta aplicada en Sonora a 500 personas hombres y 500 mujeres, todos casados entre sí, se les solicitó calificar a su cónyuge como pareja sexual.

	Excelente	Aceptable	Otro	Totales
Esposo	230	173	97	500
Esposa	240	177	83	500
Totales	470	350	180	1,000

4.1.2. Diagrama de dispersión.

Es la gráfica de todos los pares ordenados de datos de dos variables que están en un sistema de ejes coordenados. Las variables de entrada, X, se grafica en el eje horizontal y la variable de salida, Y, se gráfica en el eje vertical.

Ejemplo:

En la clase de Educación Física del señor Cham, se tomaron varios puntajes de condición física. La muestra siguiente es el número de “lagartijas” y “sentadillas” realizadas por los estudiantes elegidos aleatoriamente:

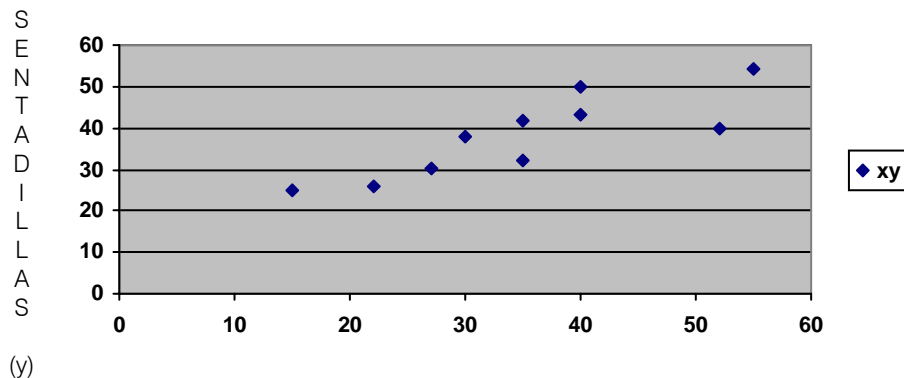
(27,30), (22,26), (15,25), (35,42), (30,38), (52,40), (35,32), (55,54), (40,50), (40,43)

Tabla:

Estudiantes

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Lagartijas (x)	27	22	15	35	30	52	35	55	40	40
Sentadillas (y)	30	26	25	42	38	40	32	54	50	43

Diagrama de Dispersión.



Ejercicio:

¿Valdrá la pena estudiar para un examen?

- a) Elabore un diagrama de dispersión del número de horas de estudio, X, en comparación con la calificación que se obtuvo en el examen, Y.

X	2	5	1	4	2
Y	80	80	70	90	60

- b) Explique lo que puede concluir con base en el patrón de datos mostrado en el diagrama de dispersión del inciso (a).

TAREA 2



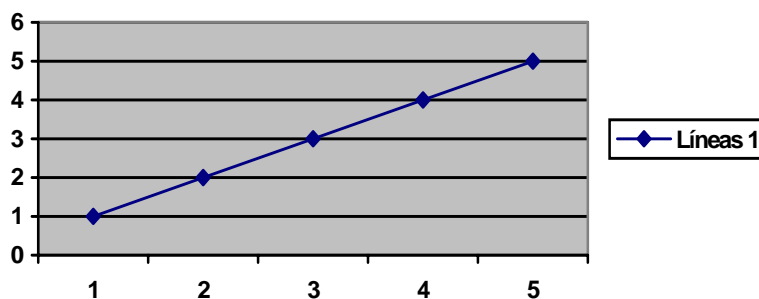
Página 151.

4.2. CORRELACIÓN LINEAL.

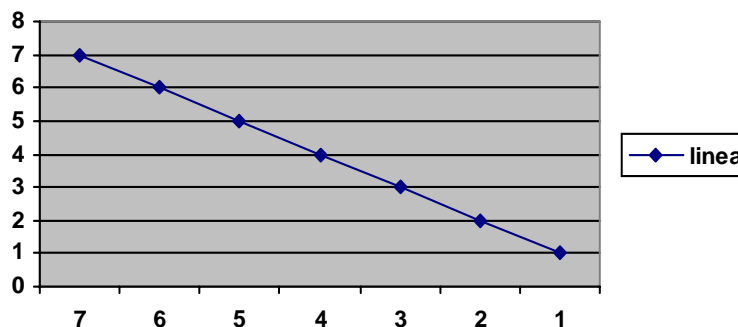
Si los pares ordenados (x, y) tienden a seguir un patrón de línea recta, se tiene una correlación lineal.

La correlación lineal perfecta ocurre cuando todos los puntos están exactamente sobre una recta. Esta correlación puede ser positiva o negativa, dependiendo de si "Y" crece o decrece a medida que "X" se incrementa. Si los datos forman una línea horizontal o vertical, no hay correlación, ya que una variable no afecta la otra.

a) Correlación Positiva Perfecta



b) Correlación Negativa Perfecta



4.2.1. Diagrama de dispersión y análisis de correlación.

El objetivo primordial del análisis de correlación lineal es medir la intensidad de una relación lineal entre dos variables. Analizaremos algunos diagramas de dispersión que muestren diferentes relaciones entre variable independiente o de entrada "x" y la variable dependiente o de salida, "y". Si a medida que crece "x" no hay un cambio en los valores de "y", se dice que no hay correlación o relación entre "x" y "y". Si a medida que crece "x", hay un cambio en los valores de una "y", existe una correlación. La correlación es positiva cuando "y" tiende a crecer, y es negativa cuando "y" tiende a decrecer. Si los pares ordinarios (x, y) tienden a seguir un patrón de línea recta, se tiene una correlación lineal.

FIGURA 3-14

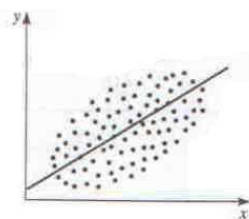
Regresión lineal con
pendiente positiva

FIGURA 3-15

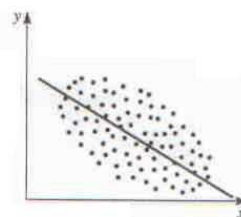
Regresión lineal con
pendiente negativa

FIGURA 3-16

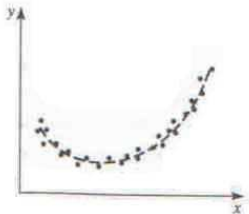
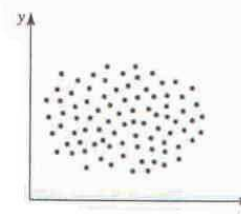
Regresión curvilínea
(cuadrática)

FIGURA 3-17

No hay relación



4.2.2. Coeficiente de correlación.

El coeficiente de correlación lineal, r , es la medida numérica de la intensidad de la relación lineal entre dos variables. El coeficiente refleja la consistencia de efecto que el cambio en una variable tiene sobre otras. El valor de coeficiente de correlación lineal ayuda a responder ¿Existe una correlación lineal entre dos variables en consideración?

El coeficiente de correlación lineal, r , siempre tiene un valor entre -1 y +1. Un valor de +1 significa una correlación positiva perfecta, y un valor de -1 indica una correlación negativa perfecta. Si a medida que “ x ” crece hay un incremento general en el valor de “ y ”, entonces el valor de “ r ” es positivo.

Por ejemplo, podría esperarse un valor positivo de “ r ” para la edad y la estatura de los niños, ya que con medida que aumenta la edad de un niño, se vuelve más alto. También, considere la antigüedad “ x ” y el valor de reventa “ y ” de un automóvil; a medida que “envejece” el automóvil su valor de reventa disminuye. Debido a que cuando “ x ” crece, “ y ” decrece, la relación resulta en un valor negativo de “ r ”.

El valor de “ r ” está definido por la fórmula producto momento de Pearson:

$$r = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{(n - 1)s_x s_y} \quad (3-1)$$

Nota: s_x y s_y son las desviaciones estándar de las variables x y y .

Para calcular “r”, se aplicará una fórmula alternativa, la fórmula (3-2), que es equivalente a la (3-1); como cálculos preliminares por separado, se realizarán tres sumas de cuadrados y luego se sustituirá en la fórmula (3-2) para obtener “r”.

$$r = \frac{\text{suma de los cuadrados de } xy}{\sqrt{(\text{suma de los cuadrados de } x)(\text{suma de los cuadrados de } y)}}$$

$$r = \frac{SC(xy)}{\sqrt{SC(x)SC(y)}} \quad (3-2)$$

$$\text{suma de los cuadrados de } x = \text{suma de } x^2 - \frac{(\text{suma de } x)^2}{n}$$

donde

$$SC(x) = \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n} \quad (2-8)$$

$$\text{suma de los cuadrados de } y = \text{suma de } y^2 - \frac{(\text{suma de } y)^2}{n}$$

$$SC(y) = \sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n} \quad (3-3)$$

$$\text{suma de los cuadrados de } xy = \text{suma de } xy - \frac{(\text{suma de } x)(\text{suma de } y)}{n}$$

$$SC(xy) = \sum xy - \frac{\sum x \sum y}{n} \quad (3-4)$$

Ejemplo: encuentre el coeficiente de correlación lineal para los datos de “lagartija” y “sentadillas”

En la clase de educación física del señor Cham, se tomaron varios puntajes de condición física. La muestra siguiente es el número de “lagartijas” y “sentadillas” realizadas por los estudiantes elegidos aleatoriamente:

(27,30), (22,26), (15,25), (35,42), (30,38), (52,40), (35,32), (55,54), (40,50), (40,43)

Tabla:

Estudiantes

Estudiante	“lagartijas” (x)	X ²	“sentadillas” (y)	Y ²	XY
1	27	729	30	900	810
2	22	484	26	676	572
3	15	225	25	625	375
4	35	1225	42	1 764	1 479
5	30	900	38	1 444	1 140
6	52	2704	40	1 600	2 080
7	35	1225	32	1 024	1 120
8	55	3025	54	2 916	2 970
9	40	1600	50	2 500	2 000
10	40	1600	43	1 849	1 720
	$\Sigma x = 351$	$\Sigma x^2 = 13717$	$\Sigma y = 380$	$\Sigma y^2 = 15 298$	$\Sigma xy = 14 257$

Segundo, para complementar los cálculos preliminares, se sustituyen las cinco sumatorias (los cinco totales de las columnas) de la tabla de extensiones en las fórmulas (2-8), (3-3) y (3-4), y se calcula las tres sumas de cuadrados.

$$SC(x) = \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n} = 13\,717 - \frac{(351)^2}{10} = 1\,396.9$$

$$SC(y) = \sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n} = 15\,298 - \frac{(380)^2}{10} = 858.0$$

$$SC(xy) = \sum xy - \frac{\sum x \sum y}{n} = 14\,257 - \frac{(351)(380)}{10} = 919.0$$

Tercero, las tres sumas de cuadrados se sustituyen en la fórmula (3-2) y se obtiene el valor del coeficiente de correlación.

$$r = \frac{SC(xy)}{\sqrt{SC(x)SC(y)}} = \frac{919.0}{\sqrt{(1396.9)(858.0)}} = 0.8394 = 0.84$$

X	12	24	17	28	24	36	20
Y	44	36	25	23	32	17	24

- Encuentre la correlación lineal entre “x” y “y”.
- ¿Qué parece indicar el valor de este coeficiente de correlación? Explique la respuesta.

EJERCICIO 2



4.3. REGRESIÓN LINEAL.

El coeficiente de correlación mide la intensidad de una relación lineal, no dice nada sobre la relación matemática que hay entre las dos variables.

El análisis de regresión encuentra la ecuación de la recta que describe mejor la relación entre las dos variables. Una aplicación de esta ecuación es hacer predicciones. Hay muchas situaciones en las que estas predicciones se usan regularmente; por ejemplo, predecir el éxito que obtendrá un estudiante en la universidad con base en los resultados que obtuvo en el bachillerato, y averiguar la distancia necesaria para detener un automóvil conociendo su velocidad.

La relación entre estas dos variables es una expresión algebraica que describe la relación matemática entre "x" y "y".

FIGURA 3-14

Regresión lineal con pendiente positiva

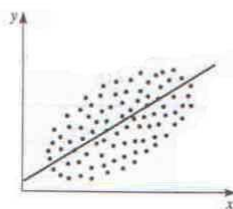


FIGURA 3-15

Regresión lineal con pendiente negativa

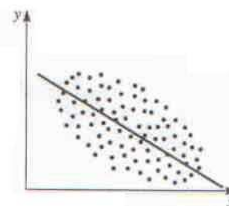


FIGURA 3-16

Regresión curvilínea (cuadrática)

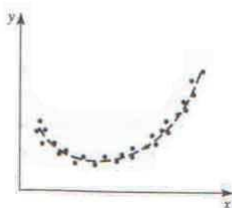
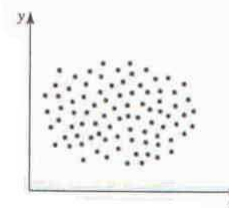


FIGURA 3-17

No hay relación

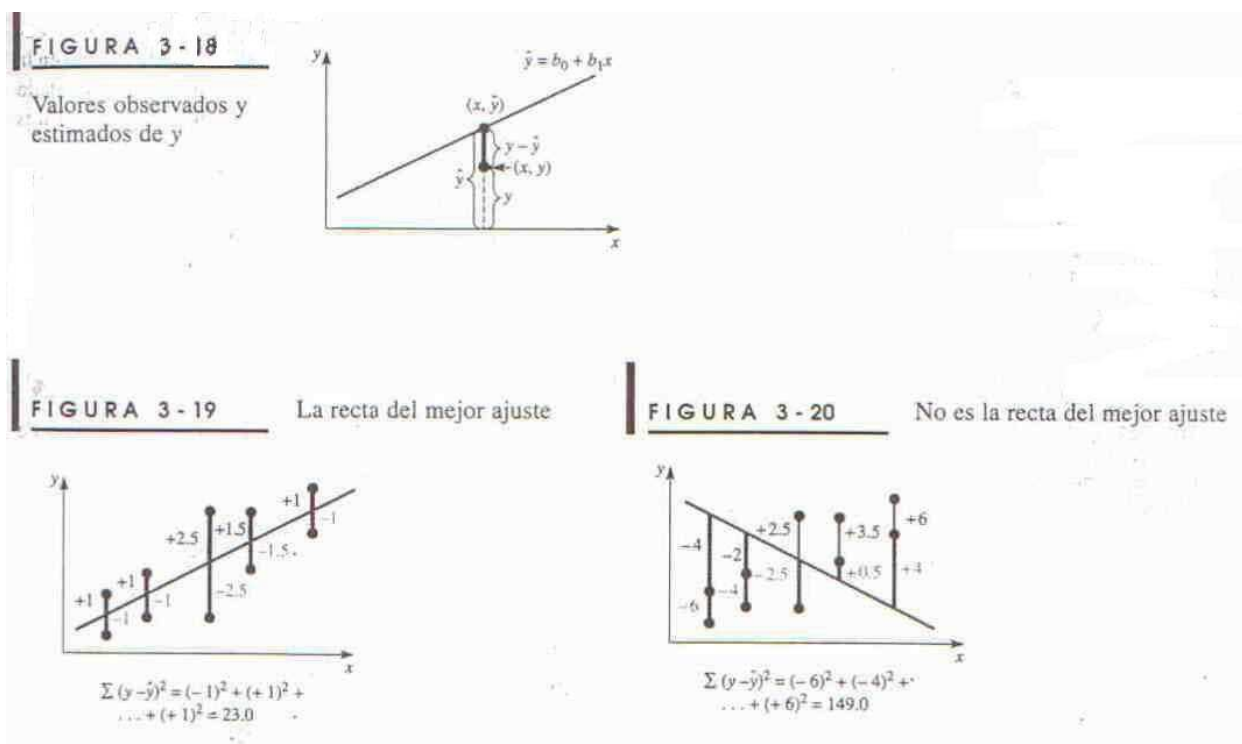


4.3.1. Método de mínimos cuadrados.

El criterio de mínimos cuadrados requiere encontrar las constantes b_0 y b_1 tales que la sumatoria $\sum (y - \hat{y})^2$ sea lo más pequeña posible. En la figura 3-18 se muestra la distancia de un valor observado de "y" a un valor estimado de \hat{y} . La longitud de esta distancia representa el valor $(y - \hat{y})$, mostrado como el segmento de la recta línea gruesa de la figura 3-18. Observe que $(y - \hat{y})$ es positivo cuando el punto (x, y) está por arriba de la recta y es negativo cuando (x, y) está por debajo de la recta.

En la figura 3-19 se muestra un diagrama de dispersión con una posible recta del mejor ajuste, junto con los 10 valores individuales de $(y - \hat{y})$. Los valores positivos se muestran en línea gruesa y los negativos en una línea gris. Si la recta es, en efecto, la del mejor ajuste, la suma de los cuadrados de estas diferencias se minimiza (se hace lo más pequeña posible).

En la figura 3-20 se muestran los mismo puntos que en la 3-19 con los 10 valores individuales $(y - \hat{y})$, asociados a una recta que, definitivamente, no es la de mejor ajuste. El valor de $\sum (y - \hat{y})^2$ es 149, mucho mayor que el 23 de la figura 3-19. Cada recta trazada a partir de este conjunto de 10 puntos, produce un valor distinto de $\sum (y - \hat{y})^2$. La tarea consiste en encontrar la recta tal que el valor de $\sum (y - \hat{y})^2$ sea el menor posible.



La ecuación de la recta del mejor ajuste es determinada por su pendiente (b) y su ordenada al origen (b^0) (Consulte el Tutor estadístico para un repaso de los conceptos de pendiente y ordenada al origen de una recta.) Los valores de las constantes, pendiente y ordenada al origen, que satisfacen el criterio de mínimos cuadrados se encuentran aplicando las fórmulas siguientes:

pendiente:
$$b_1 = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sum (x - \bar{x})^2}$$

ordenada al origen =
$$\frac{(\text{suma de } y) - [(pendiente)(\text{suma de } x)]}{\text{número}}$$

ordenada al origen:
$$b_0 = \frac{\sum y - (b_1 \cdot \sum x)}{n}$$

Observe que el numerador en la fórmula (3 – 7) es la SC (xy) de la fórmula y que el denominador es la fórmula (2 – 8) de los cálculos del coeficiente de correlación. Entonces, si ya ha calculado previamente el coeficiente de correlación lineal aplicando el procedimiento delineado en la sección 3 - 2, es fácil encontrar la pendiente de la recta del mejor ajuste. Si no ha calculado previamente r , elabore una tabla semejante a la tabla 3-11 y complete los cálculos preliminares necesarios.

Ahora se consideran los datos de la ilustración 3-7 y la cuestión es predecir las “sentadillas” efectuadas por un estudiante con base en el número de “lagartijas” hechas. Se quiere encontrar la recta del mejor ajuste, $\hat{y} = b_0 + b_1 x$. los cálculos preliminares ya han sido completados en la tabla 3-11. Para calcular la pendiente, b_1 , usando la fórmula (3-7), recuerde que $SC(xy) = 919.0$ y $SC(x) = 1396.9$.

$$\text{pendiente: } b_1 = \frac{SC(xy)}{SC(x)} = \frac{919.0}{1396.9} = 0.6579 = 0.66$$

Para calcular la ordenada al origen, b_0 , usando la fórmula (3 – 6), recuerde que por la tabla de extensiones, $\sum x = 351$ y $\sum y = 380$.

$$\begin{aligned} \text{ordenada al origen: } b_0 &= \frac{\sum y - (b_1 \cdot \sum x)}{n} = \frac{380 - (0.6579)(351)}{10} \\ &= \frac{380 - 230.9229}{10} = 14.9077 = 14.9 \end{aligned}$$

Así, la ecuación de la recta del mejor ajuste, es

$$\hat{y} = 14.9 + 0.66x$$

Ahora que se conoce la ecuación de la recta del mejor ajuste, en el diagrama de dispersión se trazará esta recta para poder visualizar la relación entre la recta y los datos. Para trazar la recta en el diagrama se requieren dos puntos. Se eligen dos valores convenientes de “x”, cada uno cerca de cada extremo del dominio ($x = 10$ y $x = 60$ son buenas elecciones para la ilustración) y se encuentran sus valores y correspondientes:

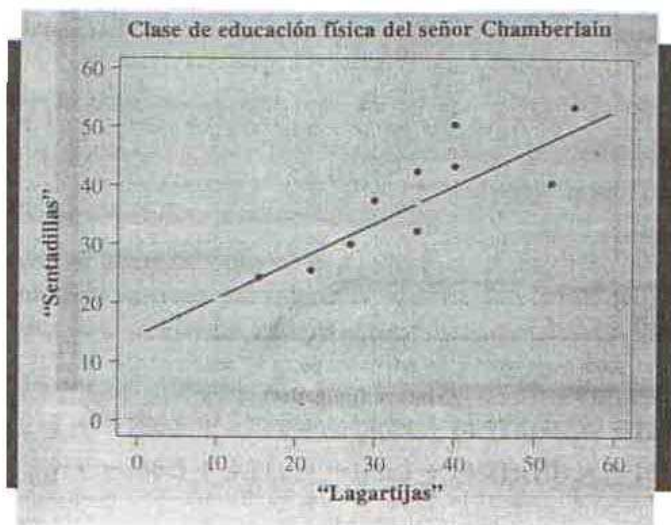
$$\begin{aligned} \text{Para: } x = 10: \quad \hat{y} &= 14.9 + 0.66x = 14.9 + 0.66(10) = 21.5; \quad (10, 21.5) \\ \text{Para: } x = 60: \quad \hat{y} &= 14.9 + 0.66x = 14.9 + 0.66(60) = 54.5; \quad (60, 54.5) \end{aligned}$$

Luego, estos dos puntos (10, 21.5) y (60, 54.5) se localizan en el diagrama de dispersión (use un signo + color negro para distinguirlos de los demás puntos) y se traza la recta del mejor ajuste (que se muestra en negro en la figura 3-21).

Hay algunos hechos adicionales sobre el criterio de los mínimos cuadrados que es necesario analizar.

1. La pendiente b_1 representa el cambio estimado en “y” por incremento unitario en “x”. En este ejemplo, $b_1 = 0.66$; entonces, por cada 10 “lagartijas” adicionales (x), que realice un estudiante a petición será que el estudiante haría aproximadamente siete (0.66×10) sentadillas más (y).
2. La ordenada al origen es el valor de “y” donde la recta del mejor ajuste corta la eje vertical “y” (la ordenada al origen puede observarse fácilmente en el diagrama de dispersión, dibuja como un signo + de color gris en la figura 3-21, como el valor vertical está localizado arriba de $x = 0$). No obstante, al interpretar b , primero debe considerarse si $x = 0$ es un valor realista para “x” antes de concluir la predicción de que $\hat{y} = b_0$ si $x = 0$. Predecir que si un estudiante no hizo “lagartijas” y que aun así realizará 15 “sentadillas” ($b_0 = 14.9$), probablemente es incorrecto. Segundo, el valor $x = 0$ esta fuera del dominio de los datos sobre los que se basa la recta de regresión. Al predecir y con base en un valor “x”, es necesario asegurarse de que el valor “x” esta en el dominio de los valores “x” observados.
3. La recta del mejor ajuste siempre pasa por el punto (x, y). Al trazar esta recta en el diagrama de dispersión, use este punto como comprobación. Para el ejemplo que se ha trabajado aquí, $x = \Sigma x/n = 351/10 = 35.1$, $y = \Sigma y/n = 380/10 = 38.0$; en consecuencia, $(x, y) = (35.1, 38)$ como se indican con el signo + color gris en la figura 3-21.

Recta del mejor ajuste para “lagartijas” contra “sentadillas”



Ejercicio:

- a) Construye una línea recta que se aproxime a los datos en la tabla.
- b) Encuentra una ecuación para esta recta.

x	1	3	4	6	8	9	11	14
y	1	2	4	4	5	7	8	9

TAREA 3



Página 153.

¡Ojo! Recuerda que debes resolver la autoevaluación y los ejercicios de reforzamiento; esto te ayudará a enriquecer los temas vistos en clase.



**TAREA 1**

Nombre _____

Núm. de lista _____ Grupo _____ Turno _____

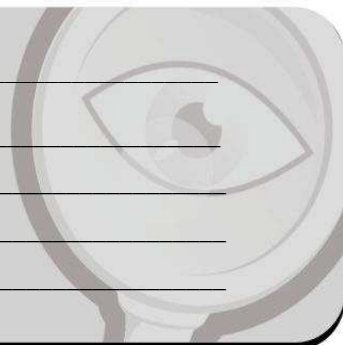
Núm. de Expediente _____ Fecha _____

INSTRUCCIONES: En tu colonia, realiza una investigación del grado de estudio de los padres y elabora una tabla de contingencias.



Revisión: _____

Observaciones: _____



**TAREA 2**

Nombre _____

Núm. de lista _____ Grupo _____ Turno _____

Núm. de Expediente _____ Fecha _____

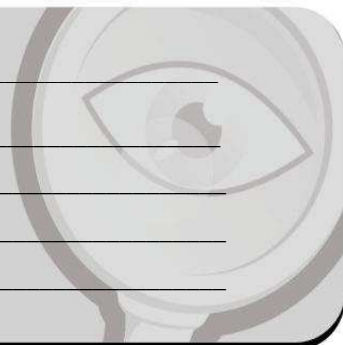
INSTRUCCIONES: Traza un eje de coordenadas y grafica un diagrama de dispersión de los siguientes puntos:

(0, 6), (3, 5), (3, 2), (5, 0)



Revisión: _____

Observaciones: _____





TAREA 3

Nombre _____
 Núm. de lista _____ Grupo _____ Turno _____
 Núm. de Expediente _____ Fecha _____

INSTRUCCIONES: En el Zócalo de la ciudad de México, se aplicó una encuesta a 202 amas de casa de tiempo completo y 197 esposas empleadas, donde se reportó un coeficiente de correlación de 0.43, entre el ingreso familiar y el nivel educativo de las participantes en el estudio. En una investigación semejante que implicó a ocho personas, se obtuvieron los siguientes resultados (“x” representa los años de instrucción y “y” representa el ingreso familiar en miles de pesos).

x	12	13	10	14	11	14	16	16
y	34	45	36	47	43	35	50	42

- a) Encuentra la correlación lineal entre “x” y “y”.
- b) Encuentra la ecuación lineal de la recta del mejor ajuste.



Revisión: _____

Observaciones: _____

**AUTOEVALUACIÓN**

Nombre _____

Núm. de lista _____ Grupo _____ Turno _____

Núm. de Expediente _____ Fecha _____

INSTRUCCIONES: Lee cuidadosamente y responde los siguientes cuestionamientos, rellenando el círculo de la opción que consideres correcta.

1. Cuando los datos bivariados resultan de dos variables cualitativas o de atributos o categóricas a menudo los datos se disponen en:
 - ☐ A) Tabla de frecuencias.
 - ☐ B) Tabla de contingencias.
 - ☐ C) Pares ordenados.
 - ☐ D) Variable bipolar.
2. Cuando los datos divariados son resultado de dos variables cuantitativas, los datos matemáticos suelen expresarse como:
 - ☐ A) Tabla de frecuencias.
 - ☐ B) Tabla de contingencias.
 - ☐ C) Pares ordenados.
 - ☐ D) Variable bipolar.
3. Se grafican todos los pares ordenados de datos de dos variables que están en un sistema de ejes coordenados.
 - ☐ A) Tabla de frecuencias.
 - ☐ B) Tabla de contingencias.
 - ☐ C) Diagrama de dispersión.
 - ☐ D) Diagrama de correlación.
4. Cuando los puntos están exactamente sobre una recta hablamos de:
 - ☐ A) Correlación lineal.
 - ☐ B) Correlación positiva.
 - ☐ C) Correlación negativa.
 - ☐ D) Diagrama de dispersión.
5. Medir la intensidad de una relación lineal entre dos variables es su:
 - ☐ A) Fuerza.
 - ☐ B) Distribución gráfica.
 - ☐ C) Objetivo primordial.
 - ☐ D) Análisis de correlación.

6.- Mide numéricamente la intensidad de la relación lineal entre dos variables.

- Ⓐ Coeficiente de correlación.
- Ⓑ Análisis de correlación.
- Ⓒ Distribución general.
- Ⓓ Tabla de contingencias.

7. Encuentra la ecuación e la recta que describe mejor la relación de las dos variables.

- Ⓐ Análisis de correlación.
- Ⓑ Análisis de regresión.
- Ⓒ Tabla de contingencia.
- Ⓓ Coeficiente de correlación.

8. Requiere encontrar las constantes b_0 y b_1 tales que la sumatoria $\sum (y - \hat{y})^2$ sea lo más pequeña posible.

- Ⓐ Análisis de regresión.
- Ⓑ Coeficiente de correlación.
- Ⓒ Criterio de mínimos cuadrados.
- Ⓓ Diagrama de dispersión.

ESCALA DE MEDICIÓN DEL APRENDIZAJE

- Si todas tus respuestas fueron correctas: **excelente**, por lo que te invitamos a continuar con esa dedicación.
- Si tienes de 6 a 7 aciertos, tu aprendizaje es **bueno**, pero es necesario que repases los temas.
- Si contestaste correctamente 5 ó menos reactivos, tu aprendizaje es **insuficiente**, por lo que te recomendamos solicitar asesoría a tu profesor.

*Consulta las
claves de
respuestas en la
página 161.*


**EJERCICIO DE
REFORZAMIENTO 1**

Nombre _____

Núm. de lista _____ Grupo _____ Turno _____

Núm. de Expediente _____ Fecha _____

INSTRUCCIONES: Resuelve el siguiente ejercicio.

La gente no es más longeva en la actualidad, sino que también lo es de manera independiente. En el número de mayo/junio del 2006 del imparcial, se publicó el artículo "análisis multi-estadístico de vida activa de las personas" en el cual dos de las variables estudiadas fueron la edad actual de una persona y el número esperado de años restantes por vivir.

- Elaborara diagrama de dispersión.
- Calcula la ecuación de la recta del mejor ajuste utilizando el método de mínimos cuadrados.
- Determina el coeficiente de correlación de la siguiente tabla de datos:

Edad	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83
Años restantes	16.5	15.1	13.7	12.4	11.2	10.1	9.0	8.4	7.1	6.4


**EJERCICIO DE
REFORZAMIENTO 2**

Nombre _____

Núm. de lista _____ Grupo _____ Turno _____

Núm. de Expediente _____ Fecha _____

INSTRUCCIONES: De la siguiente tabla de datos:

x	2	12	4	6	9	4	11	3	10	11
y	4	8	10	9	10	8	8	5	10	9

- Elabora un diagrama de dispersión.
- Aplica la técnica de regresión lineal para encontrar la recta de mejor ajuste.
- Determina el coeficiente de correlación r y su gráfica.

Claves de Respuestas

UNIDAD 1	UNIDAD 2	UNIDAD 3	UNIDAD 4
1. B	1. A	1. B	1. B
2. C	2. B	2. D	2. C
3. D	3. C	3. B	3. C
4. B	4. B	4. C	4. A
5. A	5. B	5. A	5. D
6. D	6. A	6. D	6. A
7. C	7. D	7. B	7. B
8. B	8. A	8. D	8. C
9. B	9. B	9. A	
10. D	10. C	10. D	
11. C		11. B	
		12. C	
		13. D	

Glosario

AJUSTE DE BONFERRONI

Técnica estadística que ajusta el nivel de significación en relación al número de pruebas estadísticas realizadas simultáneamente sobre un conjunto de datos. El nivel de significación para cada prueba se calcula dividiendo el error global de tipo I entre el número de pruebas a realizar. El ajuste de Bonferroni se considera conservador.

AMPLITUD O RANGO

La diferencia entre el valor máximo y mínimo de los valores de una variable. En la amplitud de una variable se encuentran comprendidos el 100% de los valores muestrales.

ANACOVA O ANCOVA

Análisis de la covarianza. Es una técnica estadística que combina ANOVA (pues compara medias entre grupos) y análisis de regresión (ajusta las comparaciones de las medias entre los grupos, por variables continuas o covariables).

ANOVA

Análisis de la varianza. Es una técnica estadística que sirve para decidir/determinar si las diferencias que existen entre las medias de tres o más grupos (niveles de clasificación) son estadísticamente significativas. Las técnicas de ANOVA se basan en la partición de la varianza para establecer si la varianza explicada por los grupos formados es suficientemente mayor que la varianza residual o no explicada.

ÁREA BAJO LA CURVA ENTRE DOS PUNTOS

Si la curva viene dada por una función de densidad teórica, representa la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor dentro del intervalo determinado por esos dos puntos.

CARACTERÍSTICAS

Propiedades de las unidades o elementos que componen las muestras. Se miden mediante variables. Se asume que los individuos presentan diferentes características.

CAUSALIDAD

Relación entre causa y efecto. Generalmente identificadas como variables. No hay que confundir causalidad con correlación. La correlación mide la similitud estructural numérica entre dos variables. Normalmente la existencia de correlación es condición necesaria para la causalidad.

CENTIL

Puntuación directa por debajo de la cual queda un determinado porcentaje de sujetos.

COCIENTE INTELECTUAL

Norma cronológica consistente en la razón entre la edad mental y la edad cronológica multiplicada por 100.

COEFICIENTE DE ALINEACIÓN

Multiplicado por 100 indica el porcentaje de inseguridad, o el azar, que afecta a los pronósticos.

COEFICIENTE DE CORRELACIÓN

Estadístico que cuantifica la correlación. Sus valores están comprendidos entre -1 y 1.

COEFICIENTE DE CORRELACIÓN

Relación conjunta entre dos variables que indica hasta qué punto la variación de una de

COEFICIENTE DE DETERMINACIÓN	<p>ellas conduce a la obtención de valores en la segunda.</p> <p>Es el cuadrado del coeficiente de correlación. Expresado en tanto por ciento mide el grado de información compartida entre dos variables continuas.</p>
COEFICIENTE DE DETERMINACIÓN	<p>Multiplicado por 100, indica el porcentaje de varianza común o asociada entre las puntuaciones de los sujetos en el test y en el criterio o, lo que es lo mismo, la varianza de las puntuaciones de los sujetos en el criterio que se puede pronosticar a partir de las puntuaciones en el test.</p>
COEFICIENTE DE FIABILIDAD	<p>Cociente entre la varianza de las puntuaciones verdaderas y la varianza de las puntuaciones empíricas obtenidas en un test.</p>
COEFICIENTE DE VALIDEZ	<p>Correlación entre las puntuaciones obtenidas por los sujetos en el test y las obtenidas en el criterio.</p>
COEFICIENTE DE VALIDEZ MÚLTIPLE	<p>Correlación entre el criterio y el conjunto de variables predictoras. Indica la eficacia de las variables predictoras para estimar el criterio.</p>
COEFICIENTE DE VARIACIÓN	<p>Es una medida de dispersión relativa. No tiene unidades y se calcula dividiendo la cuasi-desviación típica entre la media muestral. Se suele expresar en tanto por ciento.</p>
COEFICIENTES DE REGRESIÓN	<p>En un modelo de regresión lineal son los valores de a y b que determinan la expresión de la recta de regresión $y=a + b \cdot x$</p>
CONCEPTO AXIOMÁTICO DE PROBABILIDAD	<p>La definición axiomática de probabilidad se debe a Kolmogorov (1933). Dado un espacio muestral S, diremos que P es una probabilidad sobre un evento dado, si las siguientes propiedades (axiomas) son verificadas:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. La probabilidad de que ocurra un evento cualquiera se encuentra entre cero y uno. 2. La probabilidad de que ocurra el espacio muestral, es decir, el conjunto de todos los resultados posibles, es 1. 3. Si A y B son eventos mutuamente exclusivos, es decir, que no tienen elementos en común, entonces la probabilidad de alguno de los dos ocurra es igual a la suma de las probabilidades de los eventos.
CONCEPTO CLÁSICO DE PROBABILIDAD	<p>La fracción en la que el numerador es igual al número de apariciones del suceso, y el denominador es igual al número total de casos en los que ese suceso pueda o no pueda ocurrir, expresa la probabilidad de que ocurra el suceso. Elaborado por Bernoulli (1654-1705) y reformulado por Moivre en 1713.</p>
CONCEPTO FRECUENTISTA DE PROBABILIDAD	<p>La probabilidad de un suceso es el resultado que se obtendría de dividir el número de veces que ocurre el suceso entre el número total de observaciones, si el proceso se repitiera en</p>

CONCEPTO SUBJETIVO DE PROBABILIDAD	condiciones similares un número grande de veces. Elaborado por Bernoulli (1654-1705). En el segundo cuarto del siglo XX surgió una nueva interpretación, llamada 'subjetiva', según la cual la probabilidad mide el grado de creencia de un individuo en la verdad de una proposición, variando entre 0 (el individuo cree que es falso) a 1 (cree que es cierto). Esta interpretación fue propuesta por primera vez por el filósofo Frank P. Ramsey.
CONTRASTE BILATERAL	Contraste de hipótesis en el que la hipótesis alternativa da opción a igualdad o superioridad
CONTRASTE DE HIPÓTESIS	Es el proceso estadístico que se sigue para la toma de decisiones a partir de la información de la muestra. Comparando el valor del estadístico experimental con el valor teórico rechazamos o no la hipótesis nula.
CONTRASTE UNILATERAL	Contraste de hipótesis en el que la hipótesis alternativa da opción a solo igualdad o a solo superioridad.
CORRELACIÓN	Expresa la concordancia entre dos variables según el sentido de la relación de éstas en términos de aumento o disminución.
CORRELACIÓN PARCIAL	Permite interpretar el grado de correlación entre la variable criterio (Y) y una de las variables predictoras, eliminando de antemano el efecto que sobre dicha correlación puedan estar ejerciendo el resto de las variables.
CORRELACIÓN SEMIPARCIAL	Permite conocer el grado de correlación entre la variable criterio (Y) y una de las variables predictoras, eliminando el efecto que sobre esta variable predictora puedan estar ejerciendo el resto de las variables.
COVARIABLES	Variables continuas independientes que junto a una o más variables grupo de tratamiento sirven para explicar una variable respuesta continua. Supongamos que pretendemos explicar las diferencias existentes en el nivel de cortisol en sangre por grupo de tratamiento A/B, teniendo en cuenta el peso. La variable peso es una covariable.
COVARIANZA	Representa la media del producto de las desviaciones de dos variables en relación a su media.
COVARIANZA	Media del producto de las puntuaciones diferenciales de dos variables medidas conjuntamente.
CUARTILES	Existen tres cuartiles: Q1, Q2 y Q3. Estos números dividen a los valores muestrales, una vez ordenados, en cuatro partes homogéneas en cuanto a número de observaciones. Así Q1 determina el valor que hace que haya un 25% de valores muestrales por debajo de éste, y un 75% por encima de éste. Q2 es la mediana.
CUASIVARIANZA	Característica de una muestra o población que cuantifica su dispersión o variabilidad. La

	cuasivarianza se obtiene multiplicando la varianza por $n / (n-1)$. La cuasivarianza muestral es un estimador centrado (no sesgado) de la varianza poblacional.
DATOS CENSURADOS	En análisis de supervivencia son datos donde no se conoce el tiempo total hasta la aparición del fracaso/éxito, bien porque el individuo se retiró del estudio bien porque se acabó el estudio (datos con censura administrativa). Existen datos censurados por la izquierda y por la derecha.
DATOS PAREADOS	Datos de poblaciones dependientes, donde los datos de las variables van emparejados por individuos, en contraposición con los datos independientes.
DECILES	Corresponden a los percentiles 10%, 20%, 30%, 40%, 50%, 60%, 70%, 80%, 90% y 100%.
DESCRIPTIVA	Parte de la estadística que resume la información de la muestra. La información recogida y resumida en los estadísticos se usa para la estimación de parámetros poblacionales.
DESVIACIÓN CUARTILAR	La desviación cuartilar es la mitad de la diferencia entre el tercer cuartil y el primer cuartil. El primer cuartil es el valor correspondiente al punto abajo del cual está el 25% de las observaciones. El tercer cuartil es el valor abajo del cual están el 75% de las observaciones.
DESVIACIÓN ESTÁNDAR	Es la raíz cuadrada de la varianza. Si los datos se agrupan estrechamente en torno a la media, la Desviación Estándar era relativamente pequeña; si se extienden en todas direcciones, la Desviación Estándar será relativamente grande.
DESVIACIÓN ESTANDAR (TÍPICA)	Característica de una muestra o población que cuantifica su dispersión o variabilidad. Tiene las mismas unidades que la variable. la desviación típica es invariante con respecto al origen de la distribución. Su cuadrado es la varianza.
DESVIACIÓN TÍPICA	Medida de variabilidad, definida como la raíz cuadrada de la varianza de una variable.
DIAGRAMA DE PUNTOS	Es un gráfico bidimensional o tridimensional que muestra la variación de los valores muestrales de dos o tres variables.
DIAGRAMAS DE BARRAS	Representación gráfica para las variables discretas.
DIFERENCIAS ESTADÍSTICAMENTE SIGNIFICATIVAS	Las diferencias entre lo observado y lo supuesto en la hipótesis nula no puede ser explicado por el azar.
DIFERENCIAS RELEVANTES	Diferencia esperada o definida a priori con un valor conceptual intrínseco. No confundir diferencias estadísticamente significativas que establece si una diferencia, cualquiera que sea su valor.

DIMENSIÓN	Si estudiamos una única variable la dimensión es uno, si estudiamos la información de dos variables en forma conjunta la dimensión es dos,...
DISPERSIÓN	Ver estadísticos de dispersión.
DISTRIBUCIÓN DE DATOS	En la realización de un experimento, corresponde al recopilamiento o recolección de los datos experimentales para cada individuo y cada variable.
DISTRIBUCIÓN NORMAL O DE GAUSS	Es una distribución teórica de probabilidad que se usa tanto en la estadística aplicada como en la teórica. Aparece en la práctica con mucha frecuencia como consecuencia del importante resultado que establece el teorema central del límite. Tiene una forma de campana, y viene caracterizada por únicamente dos valores: la media y la varianza.
DISTRIBUCIÓN T STUDENT	Distribución teórica de probabilidad. Se usa para la comparación de dos medias en poblaciones independientes y normales.
DISTRIBUCIONES DE FRECUENCIA	Una distribución de frecuencias es una serie de datos agrupados en categorías, en las cuales se muestra el número de observaciones que contiene cada categoría.
ECUACIÓN DE LA REGRESIÓN	Ver recta de regresión.
ERROR ALFA	Es el error que se comete cuando se rechaza una hipótesis nula, cuando es verdadera. Error de tipo I.
ERROR ALFA GLOBAL	Es el error alfa que se comete por hacer múltiples comparaciones.
ERROR BETA	Es el error que se comete cuando no se rechaza una hipótesis nula siendo ésta falsa. Error de tipo II.
ERROR DE PRIMERA ESPECIE	Ver error alfa.
ERROR DE SEGUNDA ESPECIE	Ver error beta.
ERROR DE TIPO I	Ver error alfa.
ERROR DE TIPO II	Ver error beta.
ERROR ESTÁNDAR DE LA MEDIA	Es el cociente entre la cuasivarianza muestral y la raíz cuadrada del tamaño muestral.
ERROR ESTANDAR DE LOS RESIDUOS	Estadístico de dispersión de los valores de los residuos después de la regresión.
ERROR FALSO NEGATIVO	Ver error beta .
ERROR FALSO POSITIVO	Ver error alfa.
ESCALA	La distribución de datos puede recogerse en distintas escalas: nominal, dicotómica, discreta o continua.
ESPECIFICIDAD DE UN TEST DIAGNÓSTICO	Representa la probabilidad de que un individuo esté sano habiendo dado negativo en el test diagnóstico.
ESTADÍSTICA	La Estadística actual es el producto del encuentro de dos ramas distintas del saber, la antigua estadística y el moderno cálculo de probabilidades. Etimológicamente, la palabra estadística procede de la palabra estado, ya que desde la antigüedad los romanos recolectaban datos que posteriormente tenían

	que resumir para después disponer de una información útil.
	Estadística es la ciencia que se ocupa de la ordenación y análisis de datos procedentes de muestras, y de la realización de inferencias acerca de las poblaciones de las que éstas proceden.
ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA	Estadística Descriptiva es el conjunto de procedimientos utilizados para organizar, resumir y presentar grupos de datos numéricos.
ESTADÍSTICA INFERENCIAL	Estadística Inferencial es el conjunto de métodos utilizados para obtener conclusiones relativas a una población, basándose en el conocimiento de las características de una muestra.
ESTADÍSTICO DE CONTRASTE EXPERIMENTAL	Se utiliza para realizar las pruebas o contrastes de hipótesis. Depende de la muestra. Su valor hay que compararlo con el valor crítico dado en las tablas de distribución teóricas.
ESTADÍSTICOS	Son funciones de la muestra. Su valor variará según la muestra, pero nos permite hacer estimaciones de parámetros poblacionales o construir estadísticos experimentales para tomar decisiones acerca de la
ESTADÍSTICOS DE CENTRALIZACIÓN	Son estadísticos que nos resumen la información de la muestra dándonos información acerca del valor donde parece concentrarse la distribución de datos.
ESTADÍSTICOS DE DISPERSIÓN	Son estadísticos que nos resumen la información de la muestra, dándonos información acerca de la magnitud del alejamiento de la distribución de datos en relación a un valor central o de concentración de los datos.
ESTADÍSTICOS DE FORMA	Son aquellos que nos hablan de la forma de la distribución de datos en cuanto a su simetría y su apuntamiento.
ESTADO DE LA NATURALEZA	La naturaleza funciona según una determinada hipótesis que desconocemos. Las técnicas estadísticas nos cuantifican el error que cometemos cuando tomamos decisiones en la predicción de cuál es la hipótesis con la que la naturaleza trabaja. Estos errores son los del tipo I y II.
ESTIMACIÓN	Técnicas que a partir de la información de la estadística descriptiva pretenden conocer cómo es la población en global. Existen técnicas de estimación puntuales y por intervalos de confianza.
ESTIMADO	Valor experimental que se toma como candidato al valor poblacional desconocido.
ESTIMADOR	Función de la muestra que sirve para dar valores candidatos a los valores desconocidos poblacionales.
FACTOR	Variable que se incluye en un modelo con el

FACTOR DE CLASIFICACIÓN

propósito de explicar la variación en la variable respuesta. Ver variable independiente o explicativa.

Es una variable que se usa para clasificar los datos experimentales en grupos. Los factores de clasificación son variables nominales. Cada factor de clasificación se compone de niveles. Así la variable "Fumador" codificada como "nunca", "ex fumador", "fumador actual" es un factor de clasificación con tres niveles.

FRECUENCIAS: ABSOLUTAS, RELATIVAS

Las frecuencias absolutas representan el recuento de los valores de una variable discreta de forma que su suma nos da el tamaño muestral. Las relativas son las absolutas divididas por el tamaño muestral. Las frecuencias relativas sumarán 1 ó 100 según se expresen en tanto por uno o en tanto por ciento.

FUNCIÓN

Función matemática. Expresión que liga dos o más variables de forma determinística.

FUNCIÓN ACUMULADA DE SUPERVIVENCIA

Función estadística que presenta la proporción de individuos que mueren entre dos tiempos dados.

FUNCIÓN DE DENSIDAD DE SUPERVIVENCIA

Nos da el momento crítico de mayor tasa de fallos o muertes en términos absolutos, por ello nos da una medida del riesgo en un momento dado.

**FUNCIÓN DE RIESGO DE SUPERVIVENCIA
FUNCIÓN TEÓRICA DE PROBABILIDAD**

Nos da una media de la predisposición al fallo en función del tiempo.

Idealización matemática que nos permite calcular probabilidades de que una variable tome un valor (caso discreto) o rango de valores (caso continuo).

**FUNCIÓN TEÓRICA DE PROBABILIDAD DE SUPERVIVENCIA
GAUSSIANA
GRADO DE CONFIANZA
GRADOS DE LIBERTAD**

Probabilidad de que un individuo sobreviva un tiempo mayor que t .

Ver distribución normal.

Ver nivel de confianza.

El número de datos que se pueden variar para que a un total fijo podamos reconstruir dicho total. Así la media tiene $n-1$ grado de libertad, pues si conocemos el valor de ésta podemos variar $n-1$ datos ya que el restante vendrá fijado. En una tabla 4×3 , si nos dan las frecuencias marginales, podremos variar las frecuencias de $(4-1) \times (3-1) = 3 \times 2 = 6$ celdas, quedando forzosamente determinadas las frecuencias de las celdas restantes. Así, los grados de libertad serían en este caso de 6.

HETEROCEDASTICIDAD

Hipótesis de no igualdad de varianzas poblacionales en distintos grupos.

HIPÓTESIS

Cualquier teoría que formule posibles líneas de trabajo experimental. Ver hipótesis nula y alternativa.

HIPÓTESIS ALTERNATIVA

Aquella que queremos probar. Representa la hipótesis renovadora.

HIPÓTESIS NULA	Aquella que queremos rechazar. Representa la situación actual.
HISTOGRAMA	Un histograma describe una distribución de frecuencia utilizando una serie de rectángulos adyacentes, donde la altura de cada rectángulo es proporcional a la frecuencia de clase que representa.
HISTOGRAMAS	Es un gráfico en forma de barras de una variable continua que se ha discretizado en intervalos, de forma que la altura de las barras en cada intervalo indica la frecuencia relativa en éste.
HOMOCEDASTICIDAD	Hipótesis de igualdad de varianzas poblacionales en distintos grupos.
IMPRECISIÓN	Error que se comete en la predicción.
INDEPENDENCIA	Son datos que no están ligados entre sí.
INTERVALO DE PROBABILIDAD	Proporción de casos entre dos valores definidos de la muestra
INTERVALOS CONFIDENCIALES	Intervalos de confianza. Intervalos fiduciales. Incluyen una cota mínima y máxima del verdadero parámetro poblacional con un determinado nivel de confianza.
JACKKNIFE	Método estadístico de estimación por intervalos de confianza basado en la simulación con reemplazamiento, propuesto por TuKey.
JUEGO DE SUMA CERO	En la teoría de juegos, juego en el que lo que unos ganan es a costa de lo que otros exactamente pierden.
LÍMITES CONFIDENCIALES MÁXIMO	Extremos de los intervalos confidenciales. Es un valor muestral de forma que por encima de éste no hay valores muestrales.
MEDIA	Es una medida de centralización para una variable continua. Se obtiene sumando todos los valores muestrales y dividiendo por el tamaño muestral.
MEDIA ARITMÉTICA	La media aritmética de un conjunto de valores. Es el resultado de la suma de todos ellos dividido entre el número total de valores. Comúnmente se le conoce como promedio.
MEDIANA	La mediana es el punto medio de los valores de una serie de datos después de haber sido ordenados de acuerdo a su magnitud. Hay tantos valores antes que la mediana como posteriores en el arreglo de datos.
MEDIANA	Corresponde al percentil 50%. Es decir, la mediana hace que haya un 50% de valores muestrales inferiores a ella y un 50% de valores muestrales superiores a ella.
MEDICIÓN	Proceso de medir.
MEDIDA	Valor numérico asignado a un objeto o sujeto en el proceso de medir.
MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL	Las Medidas de Tendencia Central resumen la serie de datos en un solo número, comúnmente conocidas como promedios. Hay tres diferentes medidas de tendencia central: la

MEDIDAS DE VARIABILIDAD	media aritmética, la mediana, y la moda. Las medidas de variabilidad de una serie de datos, muestra o población, permiten identificar qué tan dispersos o concentrados se encuentran los datos respecto a una medida de tendencia central.
MEDIR	Asignar un número a un objeto o sujeto en función del grado en que posea o manifieste la variable de interés.
MÉTODO	Camino a seguir para alcanzar un objetivo.
MÉTODO EQUIPERCENTIL	Método que se basa en equiparar aquellas puntuaciones cuyos percentiles son iguales.
MÉTODO LINEAL	Método que se basa en la equiparación de aquellas puntuaciones directas que tienen la misma puntuación típica.
METODOLOGÍA	Tratado de los métodos. Estudia las estrategias y procedimientos que, de una forma más o menos estructurada, se utilizan para la obtención de los conocimientos que constituyen una disciplina científica.
MÍNIMO	Es un valor muestral de forma que por debajo de este no hay valores muestrales.
MODA	Es el valor de la observación que aparece más frecuentemente. Es el valor que más se repite en una variable nominal.
MODELO	Intento matemático / estadístico para explicar una variable respuesta por medio de una o más variables explicativas o factores.
MUESTRAS	Subgrupos de observaciones de la población de estudio.
NIVEL DE CONFIANZA	Se define como 1 menos el nivel de significación. Se suele expresar en tanto por ciento.
NIVEL DE CONFIANZA	Probabilidad de que el parámetro se encuentre dentro del intervalo cuyos límites están definidos por el valor del estadístico más/menos el error máximo de estimación.
NIVEL DE SIGNIFICACIÓN	La probabilidad de rechazar una hipótesis nula verdadera; es decir, la probabilidad de cometer un error de tipo I.
NIVELES DE CLASIFICACIÓN	Los distintos posibles valores que pueden aparecer en una variable explicativa nominal u ordinal.
NORMAL	Ver distribución de probabilidad normal.
NORMAS	A las puntuaciones obtenidas por los sujetos que constituyen el grupo normativo, así como a las transformaciones que se hagan de dichas puntuaciones, se las denomina.
NÚMEROS	Ver valores numéricos.
OBSERVACIÓN	Sinónimo de caso registro e individuo.
OJIVAS	Las distribuciones de frecuencia acumulada y frecuencia relativa acumulada se presentan gráficamente con las ojivas de frecuencia acumulada y frecuencia relativa acumulada, que es una gráfica de segmentos de línea que une los puntos donde se cruzan los límites

	reales con las frecuencias relativas acumuladas, de cada intervalo de clase.
ORDEN DE UNA MATRIZ	Es el número que designa, en una matriz cuadrada, el número de filas o columnas.
ORTOGONAL	Se dice de las variables y en general, de las funciones que son independientes.
P (P- VALOR)	El nivel de significación observado en el test. Cuanto más pequeño sea, mayor será la evidencia para rechazar la hipótesis nula.
PARÁMETROS	Son valores desconocidos de características de una distribución teórica. El objetivo de la estadística es estimarlos, bien dando un valor concreto, bien dando un intervalo confidencial.
PEARSON (R DE PEARSON)	Ver coeficiente de correlación.
PERCENTIL	Puntuación en un test, que indica el “tanto por ciento” de sujetos del grupo normativo que dicha puntuación deja por debajo.
PERCENTILES	Un percentil 90% corresponde a un valor que divide a la muestra en dos, de forma que hay un 90% de valores muestrales inferiores a éste, y un 10% de valores muestrales superiores. Los percentiles 25%, 50%, 75% son el primer, segundo y tercer cuartil, respectivamente.
POBLACIONES	Conjunto de individuos de interés. Normalmente no se dispone de información de toda la población y se recurre a muestras.
POLÍGONO	El polígono de frecuencia consiste de segmentos de línea conectando los puntos formados por la intersección de las marcas de clase y las frecuencias de clase. El polígono de frecuencia relativa es similar, sólo que en éste se muestran porcentajes, es decir, las frecuencias relativas de cada clase.
PORCENTAJES	Proporciones expresadas en tanto por ciento.
POTENCIA DE LA PRUEBA	(1-beta). Es decir la probabilidad de rechazar una hipótesis nula siendo ésta falsa. Se suele expresar en tanto por ciento.
PREVALECIA	Cociente entre el número de individuos que poseen una característica (p. ej. enfermedad) entre el total de la población.
PROBABILIDAD	Asignación de un número entre cero y uno a cada resultado experimental.
PROCESO DISCRIMINANTE	Proceso subjetivo originado en el sujeto ante la presentación de un estímulo a través del cual le asignará un valor también subjetivo en el continuo psicológico.
PROPORCIÓN	Número de individuos que verifican una condición entre el total del tamaño muestral. Se puede expresar en tanto por uno o en tanto por cien.
PRUEBA CHI CUADRADO	Se utiliza para analizar tablas de contingencia y comparación de proporciones en datos independientes.
PRUEBA DE F	Prueba estadística que sirve para comparar varianzas. El estadístico F experimental es el estadístico de contraste en el ANOVA y otras







PRUEBA DE FISHER	pruebas de comparación de varianzas. Es la prueba estadística de elección cuando la prueba de Chi-cuadrado no puede ser empleada por tamaño muestral insuficiente.
PRUEBA DE LOS SIGNOS	Prueba estadística que sirve para comparar dos variables en términos de diferencias positiva o negativa, y no en términos de magnitud
PRUEBA DE MCNEMAR	Prueba estadística que sirve para comparar proporciones en datos pareados.
PRUEBA NO PARAMÉTRICA	Técnica estadística que no presupone ninguna distribución de probabilidad teórica de la distribución de nuestros datos.
PRUEBA PARAMÉTRICA	En contraposición de las técnicas no paramétricas, éstas si presuponen una distribución teórica de probabilidad subyacente para la distribución de los datos. Son más potentes que las no paramétricas.
PRUEBA T DE STUDENT	Se utiliza para la comparación de dos medias de poblaciones independientes y normales.
PUNTO DE INFLEXIÓN	Representan los puntos de una función matemática donde la curva pasa de ser cóncava a convexa o recíprocamente.
RANGO	Diferencia entre el valor máximo y mínimo de una muestra o población. Sólo es válido en variables continuas. Es una mala traducción de inglés "range". Amplitud.
RANGO INTERCUARTÍLICO	La diferencia entre el percentil 75% y el percentil 25%.
RAZÓN DE VEROSIMILITUDES	Combina resultados de varios tests diagnósticos dando una probabilidad de enfermedad en base a ese conjunto de resultados en forma global.
RECTA DE REGRESIÓN	Es el modelo que sirve para explicar una variable respuesta continua en términos de un único factor o variable explicativa.
REGRESIÓN	Técnica estadística que relaciona una variable dependiente (y) con la información suministrada por otra variable independiente (x) ambas variables deben ser continuas. Si asumimos relación lineal, utilizaremos la regresión lineal simple. Entre las restricciones de la RLS se incluyen: <ul style="list-style-type: none"> ➤ Los residuos deben ser normales. ➤ Las observaciones independientes. ➤ La dispersión de los residuos debe mantenerse a lo largo de la recta de regresión.
REGRESIÓN	Predicción del valor de una variable a partir el valor conocido de otra variable.
REGRESIÓN LINEAL MÚLTIPLE	El modelo de regresión lineal múltiple sirve para explicar una variable respuesta continua en términos de varios factores o variables explicativas continuas
REGRESIÓN POLINÓMICA	Es un tipo especial de regresión múltiple donde aparecen como variables independientes una

RELACIÓN LINEAL RESIDUOS	<p>única variable y potencias de ésta (al cuadrado, al cubo).</p> <p>Ver recta de regresión.</p> <p>Residuales. Distribución de valores muestrales calculados como la diferencia entre el valor de la variables respuesta (y) y el estimado del modelo de regresión (\hat{y}). La distribución de residuos es importante como indicador del cumplimiento de las condiciones de aplicación de las técnicas de correlación, así como de la bondad del ajuste.</p>
SECTORES CIRCULARES	Forma de representación en forma de tarta de variables discretas nominales.
SENSIBILIDAD DE UN TEST DIAGNÓSTICO	Representa la probabilidad de que un individuo esté enfermo habiendo dado positivo en el test diagnóstico.
SESGO	La diferencia entre el valor del parámetro y su valor esperado. También se utiliza en contraposición de aleatorio, así una muestra sesgada es no aleatoria.
SIMETRÍA	Es una medida que refleja si los valores muestrales se extienden o no de igual forma a ambos lados de la media.
SPEARMAN (RHO DE SPEARMAN) SUMATORIO	<p>Coeficiente de correlación ordinal análogo al coeficiente r de Pearson de correlación lineal.</p> <p>Estadístico descriptivo que suma los valores numéricos de los datos muestrales de distribuciones continuas.</p>
TABLA DEL ANOVA	Es una forma de presentar la variabilidad observada en una variable respuesta en términos aditivos según las distintas fuentes de variación: modelo y residual.
TABLAS DE CONTINGENCIA	Tablas de dos o más variables, en cuyas celdas se contabilizan los individuos que pertenecen a cada combinación de los posibles niveles de estas variables.
TABLAS DE FRECUENCIAS TAMAÑO MUESTRAL	<p>Ver tablas de contingencia.</p> <p>Número de individuos u observaciones que componen la muestra.</p>
TÉCNICAS DE CORRELACIÓN TÉCNICAS DE REGRESIÓN	<p>Ver coeficiente de correlación.</p> <p>Ver recta de regresión y regresión lineal múltiple.</p>
TÉCNICAS NO PARAMÉTRICAS	Son técnicas estadísticas que no presuponen ningún modelo probabilístico teórico. Son menos potentes que las técnicas paramétricas, aunque tienen la ventaja de que se pueden aplicar más fácilmente.
TEOREMA DEL LÍMITE CENTRAL	Resultado básico en la estadística que afirma que la distribución de las medias muestrales será normal para uno suficientemente grande con independencia de la distribución de datos de partida.
TEST	Instrumento de medición diseñado especialmente para estudiar de un modo objetivo y sistemático el nivel de los sujetos respecto a algún atributo o característica.

TRANSFORMACIONES	Cambios de escala con el propósito de conseguir linealidad, normalidad en los datos.
UNIDAD	Concepto primario relacionado con los componentes elementales de las muestras estadísticas. Sinónimo, pero no esencialmente idéntico, de caso, observación, registro o individuo.
UNIDIMENSIONALIDAD	Es un supuesto básico de los tres modelos logísticos estudiados en esta asignatura. Un test se considera unidimensional cuando todos los ítems miden un único rasgo o aptitud, y esa aptitud explica el rendimiento de los sujetos en cada ítem.
UNIVERSO	Conjunto infinito de elementos o unidades generado por un modelo teórico. Conjunto real de todos los elementos que comparten unas condiciones de admisión en el conjunto.
VALIDACIÓN	Proceso mediante el cual se recoge toda la información posible y necesaria para poder inferencias adecuadas a partir de las puntuaciones obtenidas en los tests.
VALOR ESCALAR DE UN ESTÍMULO	Valor modal de la distribución discriminante.
VALOR PREDICTIVO NEGATIVO DE UN TEST DIAGNÓSTICO	La probabilidad de que un individuo esté enfermo si el test diagnóstico da negativo.
VALOR PREDICTIVO POSITIVO DE UN TEST DIAGNÓSTICO	La probabilidad de que un individuo esté enfermo si el test diagnóstico da positivo.
VALORES	Preferencias sobre objetivos de vida y formas de vida más que sobre actividades concretas.
VALORES NUMÉRICOS	Resultados de las variables para cada individuo en la muestra de estudio. Su naturaleza puede ser nominal, dicotómica, ordinal o continua.
VALORES NUMÉRICOS	Resultados de las variables para cada individuo en la muestra de estudio. Su naturaleza puede ser nominal, dicotómica, ordinal o continua.
VARIABLE	Objeto matemático que puede tomar diferentes valores. Generalmente asociado a propiedades o características de las unidades de la muestra. Lo contrario de variable es constante. Describen características en las observaciones realizadas.
VARIABLE ALEATORIA	Variable que cuantifica los resultados de un experimento aleatorio. Variable que toma diferentes valores como resultado de un experimento aleatorio. Categoría cuantificable que puede tomar diferentes valores cada vez un experimento o suceso, el valor sólo se conocerá determinadamente una vez accedido el suceso.
VARIABLE CONTINUA	Aquella que puede tomar una infinidad de valores, de forma que dados dos valores cualesquiera, también pueda tomar cualquier valor entre dichos valores.
VARIABLE DEPENDIENTE	Ver variable respuesta.

VARIABLE DISCRETA	Variable que toma un número infinito o finito de valores numéricos. Variable aleatoria que puede tomar sólo un número limitado de valores.
VARIABLE EXPLICATIVA VARIABLE INDEPENDIENTES O EXPLICATIVAS	Ver variable independiente. Variables que nos sirven para construir un modelo que explique el comportamiento de una o más variables respuesta.
VARIABLE RESPUESTA O DEPENDIENTE	Variable objeto del estudio en la cual sus resultados se pretenden explicar por medio de las variables llamadas explicativas o independientes.
VARIANZA	Es la media aritmética de las desviaciones cuadradas de los datos respecto a la media.
VARIANZA	Medida de variabilidad, definida como el promedio de las diferencias al cuadrado de cada puntuación respecto a su media. Característica de una muestra o población que cuantifica su dispersión o variabilidad. La varianza tiene unidades al cuadrado de la variable. Su raíz cuadrada positiva es la desviación típica. La varianza muestral es un estimador sesgado de la varianza poblacional.
VARIANZA DE ERROR	Variación aleatoria de la variable dependiente debida a variables extrañas que afecten de forma sistemática a dicha variable.
WILCOXON	Prueba estadística no paramétrica para la comparación de dos muestras (dos tratamientos). Las distribuciones de datos no necesitan seguir la distribución normal. Es por tanto una prueba menos restrictiva que la prueba t-Student.
X2 CHI- CUADRADO	Ver prueba de Chi cuadrado.

Bibliografía General

-  Freund John, Williams Frank, Perles Benjamín. Estadística para la administración con enfoque moderno. Editorial Prentice Hall hispanoamericana, S. A. 1990.
-  Johnson, Robert y Kuby Patricia. Estadística elemental. Editorial Thomson, México, 2004.
-  Lipschutz, Seymour. Probabilidad. Editorial McGraw-Hill. 2da Edición. México 2001.
-  Murray R., Spiegel. Estadística. Editorial McGraw-Hill. 2da. Edición. México, 2002.
-  Webster, Allen I. Estadística aplicada a los negocios y la economía. Editorial McGraw-Hill. 3ra. Edición. México, 2001.
-  Wisniewski, Piotr Marian y Velasco Sotomayor Gabriel. Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias. Editorial Thomson. 2da. Edición. México, 2001.