№1, ПЗ-1

1. $f_1(x)=e^x$, $f_2(x)=1$, $f_3(x)=x+1$, $f_4(x)=x-e^x$

$f_4(x)=x-e^x=f_3(x)-f_2(x)-f_1(x)$, т.е. $f_4(x)$ – линейная комбинация элементов $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$ => элементы линейно зависимы.

2. $f_1(x)=2$, $f_2(x)=x$, $f_3(x)=x^2$, $f_4(x)=(x+1)^2$

$f_4(x)=(x+1)^2=x^2+2x+4=f_3(x)+2\cdot f_2(x)+2\cdot f_1(x)$,

т.е. $f_4(x)$ – линейная комбинация элементов => эл. линейно зависимы.

3. $x=(b_2+3\cdot b_3+0{,}5\cdot b_3)$

4. а) $x=(3b_3-2b_2+2b_1)$

б) $x=(3b_1-2b_2+0\cdot b_3)$

5. а) $x=(0,a,b)$

$y=(c,0,d)$

$x+y=(c,a,b+d)$ – сумма векторов не явл. элементом подпространства, т.к. ни одна из первых двух координат не равна нулю

=> совокупность не явл. линейным подпространством

б) $u_1=u_2+u_3+\ldots+u_n$ – сумма векторов явл. линейной комбинацией

$u_1=\lambda(u_2+u_3+\ldots+u_n)=\lambda\cdot u_2+\lambda\cdot u_3+\ldots+\lambda\cdot u_n$

– произведение явл. линейной комбинацией

=> совокупность векторов является линейным подпространством

№1, ПЗ-2

1. а) $(x,y) = 0\cdot(-4) + (-3)\cdot 7 + 6\cdot 9 = 0 - 21 + 54 = 33$

б) $(x,y) = 7\cdot(-3) + (-4)\cdot 1 + 0\cdot 11 + 1\cdot 2 = -21 - 4 + 0 + 2 = -23$

2. Манхэттенские нормы:

$\|a\|_1 = |4| + |2| + |4| = 10$

$\|b\|_1 = |12| + |3| + |4| = 19$

Евклидовы нормы:

$\|a\|_2 = \sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$

$\|b\|_2 = \sqrt{12^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{144 + 9 + 16} = \sqrt{169} = 13$

$\cos\varphi = \dfrac{4\cdot 12 + 2\cdot 3 + 4\cdot 4}{\|a\|_2 \cdot \|b\|_2} = \dfrac{48 + 6 + 16}{6\cdot 13} = \dfrac{70}{78}$

3. а) $(x,y) = |x|\cdot|y| = |y|\cdot|x| = (y,x)$

$(\lambda x, y) = |\lambda x|\cdot|y| = \begin{matrix} -\lambda|x||y|, \text{ если } \lambda < 0 \\ \lambda|x||y|, \text{ если } \lambda > 0 \end{matrix}$

$(x1 + x2, y) = |x1 + x2|\cdot|y| = (x1, y) + (x2, y)$

$(x,x) = |x|\cdot|x| \geq 0$

=> пространство НЕ явл. евклидовым

б) $(x,y) = 3\cdot|x|\cdot|y|\cdot\cos\varphi = 3|y||x|\cos\varphi = (y,x)$

$(\lambda x, y) = 3\lambda|x|\cdot|y|\cdot\cos\varphi = \lambda(x,y)$

$(x1 + x2, y) = 3|x1 + x2||y|\cos\varphi = (x1, y) + (x2, y)$

$(x,x) = 3|x||x|\cos\varphi \geq 0$

=> пространство явл. евклидовым

4. а) $(x,y) = 1\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0$

$(x,x) = 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 = 1$

$(y,y) = 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 1\cdot 1 = 1$

=> образуют ортонорм. базис

б) $(x,y) = \frac{1}{\sqrt2}\cdot\frac{1}{\sqrt2} + \left(-\frac{1}{\sqrt2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt2} + 0\cdot 0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

$(y,z) = \frac{1}{\sqrt2}\cdot 0 + \frac{1}{\sqrt2}\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0$

$(x,z) = \frac{1}{\sqrt2}\cdot 0 + \left(-\frac{1}{\sqrt2}\right)\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0$

$(x,x) = \frac{1}{\sqrt2}\cdot\frac{1}{\sqrt2} + \left(-\frac{1}{\sqrt2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt2}\right) + 0\cdot 0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$(y,y) = \frac{1}{\sqrt2}\cdot\frac{1}{\sqrt2} + \frac{1}{\sqrt2}\cdot\frac{1}{\sqrt2} + 0\cdot 0 = 1$

$(z,z) = 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 1\cdot 1 = 1$

=> обр. ортонорм. базис

в) $(x,y) = \frac{1}{2}\cdot 0 + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

=> векторы НЕ образуют ортонорм. базис

г) $(x,y) = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 = 0$

$(y,z) = 0\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0$

$(x,z) = 1\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0$

$(x,x) = 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 = 1$

$(y,y) = 0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0 = 1$

$(z,z) = 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 1\cdot 1 = 1$

=> обр. ортонорм. базис