

# Modélisation d'une épidémie et stratégies de défense

Yessin Moakher

2022

# Introduction et motivations

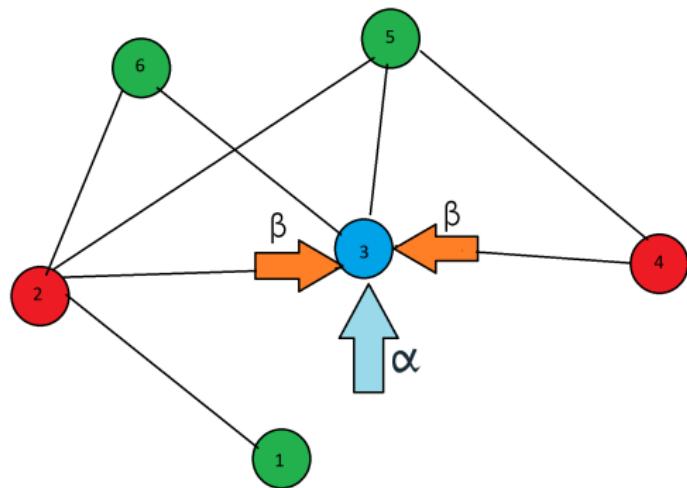
Le réseau de contact est un graphe complexe dans lequel chaque individu est représenté par un noeud et dont les liens représentent les cas contacts. On s'intéresse à la modélisation de l'introduction d'un agent viral dans le réseau.



# Définition du modèle

Soit  $G = (V, E)$  un graphe connexe avec  $V = \{1, \dots, n\}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



- $\beta$  la probabilité de transmission de la maladie vers un voisin.
- $\alpha$  la probabilité de guérison.

# Formulation mathématique

On représente l'état de l'épidémie à l'instant  $t$  avec le vecteur  $X(t) = (X_i(t), i \in V)$  définie par

$$X_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{si au temps } t \text{ le sommet } i \in V \text{ est infectieux} \\ 0, & \text{si au temps } t \text{ le sommet } i \in V \text{ est susceptible} \end{cases}$$

Les taux de transition sont définies par

$$X_i : 0 \rightarrow 1 \text{ de probabilité } \beta(1 - x_i) \sum_{j \in V} A_{ij} x_j$$

$$X_i : 1 \rightarrow 0 \text{ de probabilité } \alpha x_i$$

où  $A$  est **la matrice d'adjacence de  $G$ .**

# Problématique 1

**On s'intéresse à déterminer  $\tau = \inf\{t \geq 0 | X(t) = 0\}$   
le temps pour lequel l'épidémie s'éradique.**

# Une condition suffisante pour une majoration de $\tau$

On note  $\rho(A) := \max_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda|$  le rayon spectral de  $A$ .

Théorème: Ganesh-Massoulié-Towsley, 2005

Si  $\beta\rho(A) < \alpha$ , alors

$$\mathbb{E}[\tau] \leq \frac{\log n + 1}{\alpha - \beta\rho(A)}$$

# Généralisation

Pour  $t$  fixé, on pose

$$B = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \beta_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \beta_n \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \alpha_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

## Théorème

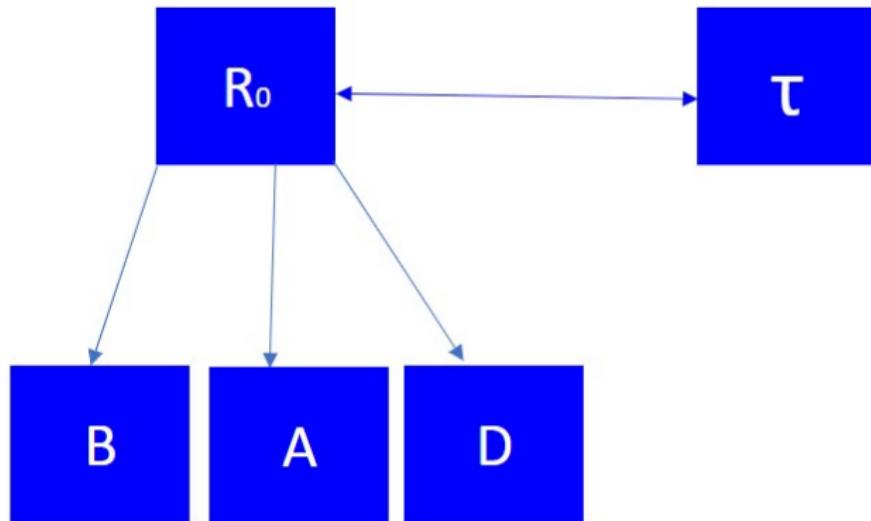
On pose  $R_0 = \max_{\lambda \in Sp(BA-D)} \operatorname{Re}(\lambda)$ .

Si  $R_0 \leq \epsilon$ , pour un  $\epsilon > 0$  alors

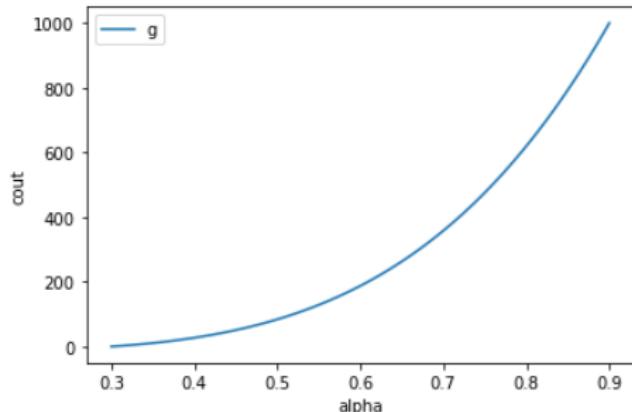
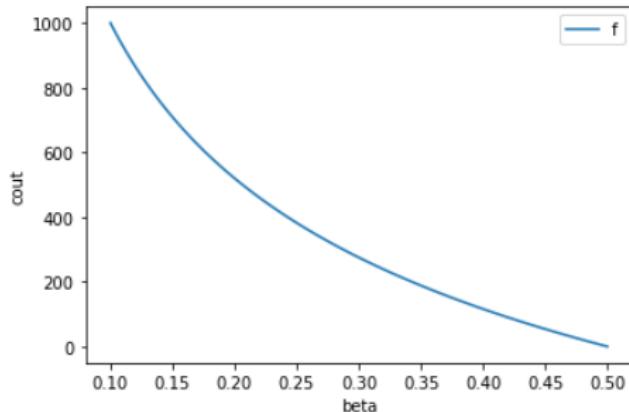
$$\exists K > 0 \text{ tel que } \|X(t)\|_1 \leq K \exp(-\epsilon t).$$

Ce qui nous donne une estimation de  $\tau$  le temps tel que  $X(\tau) = 0$ .

Cette condition pour l'extinction rapide de l'épidémie nous amène à étudier la meilleure stratégie de réduire  $R_0$ .



Pour cela, on modélise une fonction  $f(\beta)$  qui associe le coût d'avoir une probabilité de transmission  $\beta$  en fonction de l'argent dépensé et une fonction  $g(\alpha)$  définie de la même façon.



**Comment chercher la solution optimale de  $B$  et  $D$  tout en ayant un budget contraint ?**

On va donc résoudre le problème suivant :

$$\text{minimiser } \operatorname{Re}(\lambda_1(BA - D))$$

$$\text{sous contraintes } \sum_{i=1}^n f(\beta_i) + g(\alpha_i) \leq C$$

$$\beta_{\min} \leq \beta_i \leq \beta_{\max},$$

$$\alpha_{\min} \leq \alpha_i \leq \alpha_{\max} \forall i \in \{1..n\}$$

avec  $C$  le budget disponible.

Pour cela on utilise le résultat suivant :

### Définition

Une matrice est irréductible s'il n'existe pas de sous-espace stable non trivial engendré par des vecteurs de la base canonique.

### Théorème: Perron-Frobenius, 1907

Soit  $A$  une matrice positive et irréductible. On a les résultats suivants :

- 1)  $\rho(A)$  est une valeur propre de  $A$ .
- 3)  $\rho(A) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} | AX \leq \lambda X, \text{ pour } X \in \mathbb{R}_{++}^n\}$ .

# Résolution du problème

Le théorème de Perron-Frobenius nous permet de transformer le problème suivant en considérant une matrice  $M = (m_{ij})$  positive et irréductible

*minimiser  $\text{Re}(\lambda_1(M))$*

*sous contraintes  $f_{ij}(m_{ij}) \leq 1, (i,j) \in \{1..n\}^2$*

en le problème suivant :

*minimiser  $\lambda$*

*sous contraintes  $\sum_{j=1}^n \frac{m_{ij}x_j}{\lambda x_i} \leq 1, i \in \{1..n\}$*

*$f_{ij}(m_{ij}) \leq 1, (i,j) \in \{1..n\}^2$*

## Théorème 1

Si un graphe non orienté est connexe alors sa matrice d'adjacence est irréductible.

On pose  $D' = \alpha_{\max} * I_n$  et  $\tilde{\alpha}_i := 1 + \alpha_{\max} - \alpha_i$ . La matrice  $BA + D' - D$  est une matrice positive et irréductible, en vertu des résultats précédents notre problème est équivalent à

*minimiser*  $\lambda$   
 $\lambda, x_i, \beta_i, \tilde{\alpha}_i$

sous contraintes  $\sum_{j=1}^n \frac{[BA + D' - D + I_n]_{ij}x_j}{\lambda x_i} \leq 1, i \in \{1..n\}$

$$\sum_{i=1}^n f(\beta_i) + \tilde{g}(\tilde{\alpha}_i) \leq C$$

$$\beta_{\min} \leq \beta_i \leq \beta_{\max},$$

$$\alpha_{\min} \leq \alpha_i \leq \alpha_{\max} \forall i \in \{1..n\}$$

## Programmation géométrique (GP)

Un problème de programmation géométrique est un problème d'optimisation de la forme

$$\text{minimiser } f_0(x)$$

$$\text{sous contraintes } f_i(x) \leq 1, i \in \{1..p\}$$

où les  $f_i$  sont des fonctions posynomiales

## Définition : Fonctions posynomiales

Une fonction posynomiale est une fonction  $f : \mathbb{R}_{++}^n \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \sum_{k=1}^N c_k x_1^{a_{1,k}} \dots x_n^{a_{n,k}}$  pour  $N, n \in \mathbb{N}, c_k > 0, \forall k \in \{1..N\}$  et  $a_{i,k} \in \mathbb{R}, \forall (i, k) \in \{1..N\} \times \{1..n\}$  avec  $\mathbb{R}_{++}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_i > 0 \forall i \in \{1..n\}\}$

## Exemples :

- $x_1 + x_2^{\sqrt{2}}$  est posynomiale.
- Mais,  $x_1 - x_2^2$  ne l'est pas.

# Avantages de la programmation géométrique

- ① Contrairement à la plupart des outils d'optimization non linéaire, les problèmes géométriques peuvent être résolus en un temps rapide.
- ② Garantie d'une solution optimale.

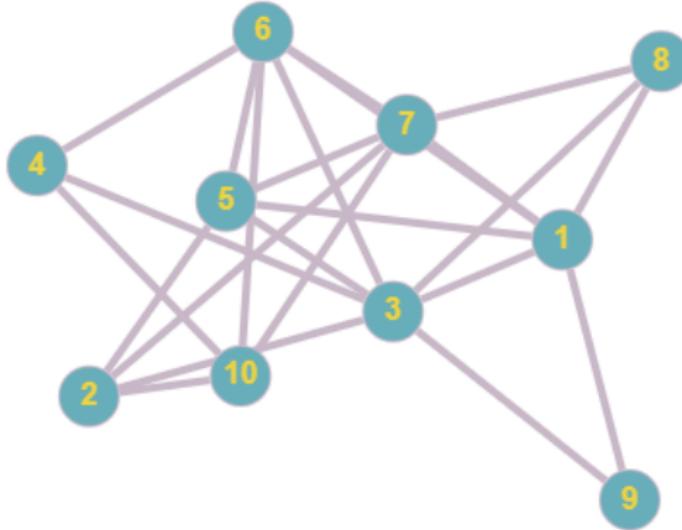
# Simulation numérique

Dans le cas où  $f, g$  sont des fonctions posynomiales, on obtient un problème GP qu'on peut résoudre numériquement.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# Paramètres

- $n = 10 / \alpha_{max} = 0.6 / \alpha_{min} = 0.3 / \beta_{min} = 0.1 / \beta_{max} = 0.8$
- $f(x) = a/X + b$  avec  $f(\beta_{min}) = 1$  et  $f(\beta_{max}) = 0$
- $\tilde{g}(x) = \tilde{a}/x + \tilde{b}$  avec  $\tilde{g}(1 + \alpha_{max} - \alpha_{min}) = 0$  et  $\tilde{g}(1) = 1$
- $C = 3$



# Résultats

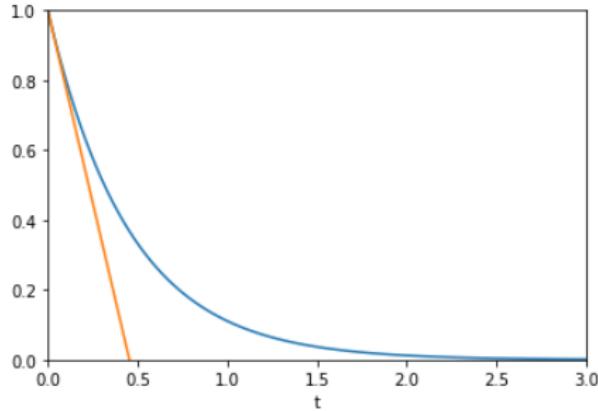
$\alpha_1$	0.3456	$\beta_1$	0.51268
$\alpha_2$	0.3439	$\beta_2$	0.51268
$\alpha_3$	0.6000	$\beta_3$	0.51268
$\alpha_4$	0.3438	$\beta_4$	0.51268
$\alpha_5$	0.3442	$\beta_5$	0.51268
$\alpha_6$	0.3456	$\beta_6$	0.51268
$\alpha_7$	0.3456	$\beta_7$	0.51268
$\alpha_8$	0.3438	$\beta_8$	0.51268
$\alpha_9$	0.3438	$\beta_9$	0.51267
$\alpha_{10}$	0.3439	$\beta_{10}$	0.51268

# Vérification

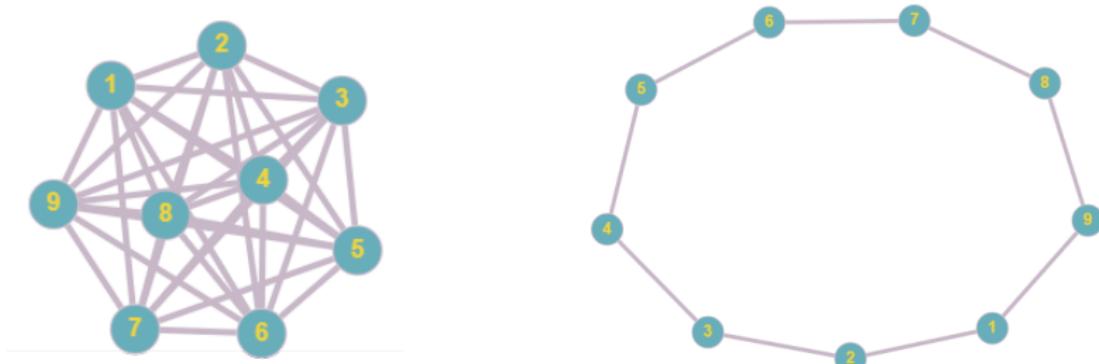
En calculant les valeurs propres de  $BA - D$  on obtient

$$\rho(BA - D) = 2.1946$$

$\|X(t)\| \leq K \exp(-2.2t)$   
 $\tau \approx 0.5 * 5 \approx 2.5$  unités de temps

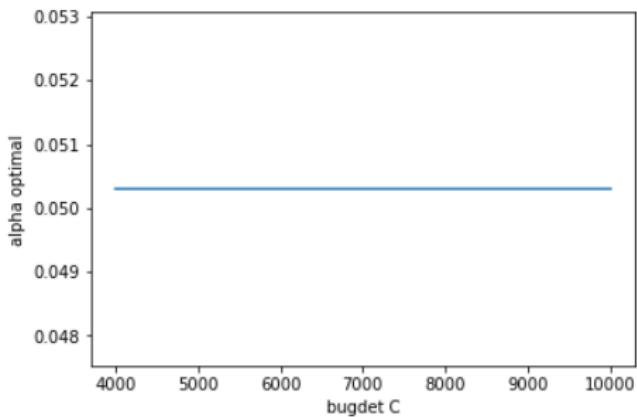
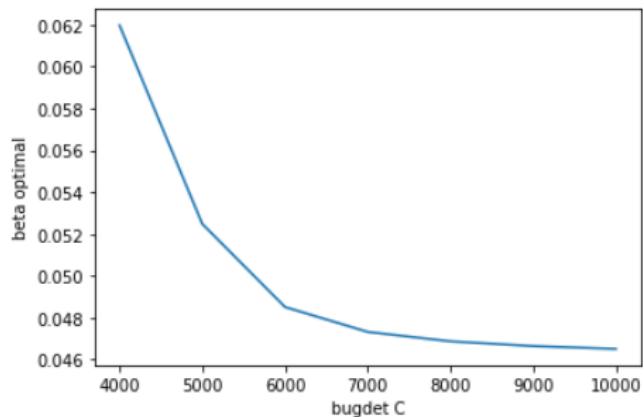


# Influence de la topologie du graphe

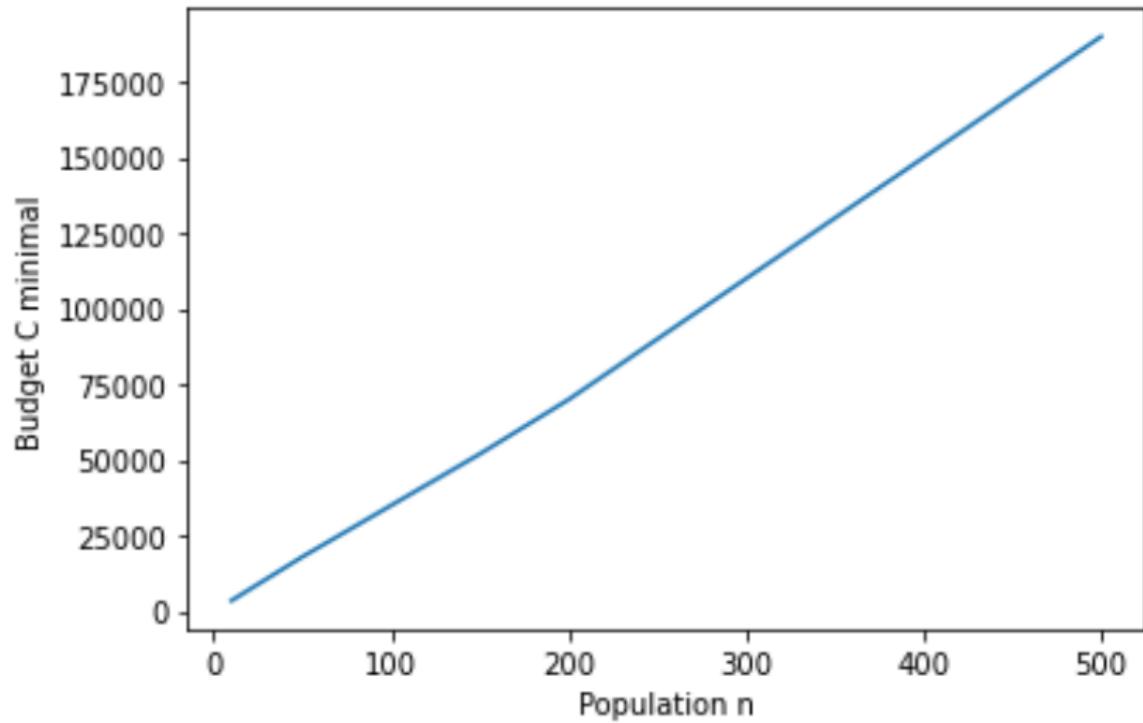


On obtient pour les deux graphes pour  $C = 3500$  :  $\alpha = 0.07$  et  $\beta = 0.063499$ .

# Influence du budget



# Influence de la taille de la population



# Conclusion

- Pour ce projet on a introduit la théorie des graphes pour modéliser la propagation d'un virus dans une population donnée.
- On a cherché à estimer le temps minimal  $\tau$  pour une extinction totale. Il s'est avéré que l'étude de  $\tau$  se ramène à influer sur une valeur  $R_0$  qui dépend de 3 paramètres qui sont la matrice d'adjacence du graphe, les taux de transmission et de guérison de chaque individu.
- Dans notre étude, on a choisi de influer sur les taux de transmission et de guérison de chaque individu qui dépendent d'une fonction coût.
- On a formulé le modèle comme un problème de programmation géométrique sous contraintes d'inégalité et de bornes.

# Perspectives

- La simulation numérique nous a donné des résultats non satisfaisants qui ne prennent pas en considération la topologie du graphe qui devrait être l'aboutissement de toute notre étude.
- Pour cela, on propose de prendre en considération, dans notre étude, la variation de la structure du graphe.
- Par ailleurs, on souhaite faire plus de simulation et aussi comparer les résultats avec d'autre méthodes d'optimisation numérique.

# Références

-  A. Ganesh, L. Massoulié and D. Towsley, "The effect of network topology on the spread of epidemics", Proceedings IEEE 24th Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies, (2005), vol. 2, pp. 1455–1466.
-  V. M. Preciado, M. Zargham, C. Enyioha, A. Jadbabaie et G. J. Pappas, "Optimal Resource Allocation for Network Protection Against Spreading Processes", IEEE Transactions on Control of Network Systems, (2014), vol. 1, no. 1, pp. 99–108.
-  S. Boyd, S.-J. Kim, L. Vandenberghe, and A. Hassibi, "A Tutorial on Geometric Programming", Optimization and Engineering, (2007), vol. 8, pp. 67–127.

# Annexe 1 : Idées de preuve du théorème de Ganesh-Massoulié-Towsley

## Lemme : Couplage

Le processus de Markov  $\{Y(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  défini par les taux de transition

$$\begin{aligned}\tilde{q}(y, y + e_i) &= \beta \sum_{j|(j,i) \in E} y_j \\ \tilde{q}(y, y - e_i) &= \alpha y_i\end{aligned}$$

vérifie  $Y(t) \geq X(t), \forall t \geq 0$ , si  $Y(0) \geq X(0)$ .

- Le processus  $Y(t)$  vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}[Y(t)] = (\beta A - \alpha I) \mathbb{E}[Y(t)],$$

dont la solution est :

$$\mathbb{E}[Y(t)] = e^{(\beta A - \alpha I)t} Y(0) = e^{(\beta A - \alpha I)t} X(0).$$

- Soit  $t > 0$ , on a

$$\mathbb{P}(X_i(t) = 1) = \mathbb{E}(X_i(t))$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau > t) &= \mathbb{P}(\exists i \in V | X_i(t) = 1) \\ &\leq \sum_{i \in V} \mathbb{P}(X_i(t) = 1) \\ &= \sum_{i \in V} \mathbb{E}(X_i(t)) \\ &\leq \sum_{i \in V} \mathbb{E}(Y_i(t)).\end{aligned}$$

## Proposition

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On pose  $\|M\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|MX\|_2}{\|X\|_2}$ .

Si  $M$  est symétrique alors  $\|M\| = \rho(M)$ .

## Preuve

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$  formée par des vecteurs propres de  $M$  associés aux valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

Pour  $X = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  non nul, on a

$$\|MX\|_2^2 = \langle MX, MX \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 \lambda_i^2 \leq \rho(M)^2 \|X\|_2^2.$$

On en déduit que  $\|M\| \leq \rho(M)$ . Pour  $x = e_j$  où  $|\lambda_j| = \rho(M)$ , on a égalité. D'où le résultat.

- D'après Cauchy-Schwarz on a :

$$\sum_{i \in V} \mathbb{E}(Y_i(t)) = \langle \mathbf{1}, e^{(\alpha A - \beta I)t} Y(0) \rangle \leq \|\mathbf{1}\|_2 \|e^{(\alpha A - \beta I)t} Y(0)\|_2.$$

- $A$  étant réelle symétrique, on a  $e^{(\alpha A - \beta I)t}$  l'est aussi et donc d'après la proposition précédente on a :

$$|||e^{(\alpha A - \beta I)t}||| = \rho(e^{(\alpha A - \beta I)t}) = e^{(\alpha \rho(A) - \beta)t}.$$

- Ainsi on a :

$$\mathbb{P}(\tau > t) \leq \sqrt{n} e^{(\alpha \rho(A) - \beta)t} \|Y(0)\|_2 \leq n e^{(\alpha \rho(A) - \beta)t}.$$

- Finalement

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\tau] &= \int_0^\infty \mathbb{P}(\tau > t) dt \leq \int_0^\infty \min\{1, ne^{(\beta\rho(A)-\alpha)t}\} dt \\ &= \int_0^{\log(n)/\alpha - \beta\rho(A)} 1 dt + \int_{\log(n)/\alpha - \beta\rho(A)}^\infty ne^{(\beta\rho(A)-\alpha)t} dt \\ &= \frac{\log(n)}{\alpha - \beta\rho(A)} + \int_0^\infty e^{(\beta\rho(A)-\alpha)t} dt \\ &= \frac{\log n + 1}{\beta - \alpha\rho(A)}.\end{aligned}$$

## Annexe 2: Preuve du théorème de Perron-Frobenius

### Proposition 1

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  alors

$$\rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{1/k}$$

### Proposition 2

$\rho : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  est continue.

## Lemme 1

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice strictement positive,  $\lambda$  une valeur propre de module  $\rho(A)$  de vecteur propre  $X = (x_i)$  associé. Alors

- 1) Le rayon spectral  $\rho(A)$  est une valeur propre de A
- 2) le vecteur  $|X| = (|x_i|)$  est un vecteur propre associé à  $\rho(A)$
- 3) il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $X = e^{i\theta}|X|$

Par inégalité triangulaire on obtient  $E = A|X| - \rho(A)|X|$  est positif. On suppose par l'absurde que  $E$  est non nul. Dans ce cas  $AY - \rho(A)Y > 0$  avec  $Y = AE$ . Pour  $\epsilon$  suffisamment petit on a  $AY - (\rho(A) + \epsilon)Y$  est positif et donc pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$   $AY^k - (\rho(A)^k + \epsilon)Y$  (par récurrence). Ainsi  $\|A^k Y\|_\infty \geq (\rho(A) + \epsilon)^k \|Y\|_\infty$  et donc

$$(\rho(A) + \epsilon) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|\|A^k\|\|_\infty^{1/k} = \rho(A)$$

Ce qui est absurde. On obtient donc les résultats souhaités ( le troisième résultat s'obtient en considérant le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire).

## Théorème de Perron

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice strictement positive, Si  $X$  est un vecteur propre associé à  $\rho(A)$  alors  $X$  n'admet pas de composante nulle.

$\rho(A)$  est l'unique valeur propre de module maximale. En effet, soit  $\lambda$  une valeur propre de module  $\rho(A)$  et  $X$  un vecteur propre associé. On a d'après le lemme 1:

$$\lambda X = AX = Ae^{i\theta}|X| = e^{i\theta}A|X| = e^{i\theta}\rho(A)|X| = \rho(A)X$$

Ainsi  $\rho(A) = \lambda$ .

Soit  $X$  un vecteur propre associé à  $\rho(A)$ .  $X$  s'écrit  $X = e^{i\theta}|X|$  alors  $\rho(A)X = e^{i\theta}A|X|$ .  $|X|$  est positif donc  $A|X|$  est strictement positif et  $X$  n'admet pas de composante nulle.

## Corollaire

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  positive. Alors  $\rho(A)$  est une valeur propre.

On pose  $A_k = A + 1/kJ$  avec  $J$  la matrice remplie de 1.  $A_k$  est strictement positive, on a d'après le théorème de Perron, il existe un vecteur propre  $X_k$  strictement positif unitaire associé à la  $\rho(A_k)$ . On peut supposer  $X_k$  converge vers  $X$  quitte à extraire une sous-suite convergente ( $(X_k)$ ) est à valeurs dans la sphère unitaire qui est compacte). On a  $A_k X_k = \rho(A_k) X_k$ . Par passage à la limite et par la proposition 2 on a le résultat souhaité.

## Lemme 2

$(I_n + A)^{n-1}$  est à coefficients strictement positifs.

Soit  $X = (x_i) \in \mathbb{R}_+^n$  et  $Y = (I_n + A)X$ .

On a pour tout  $i$ ,  $y_i = x_i + \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ . Si  $x_i > 0$  alors  $y_i > 0$ . Supposons que  $X$  ait exactement  $p$  coordonnées strictement positives avec  $1 \leq p < n$

On va montrer que  $Y$  admet au moins  $p + 1$  coordonnées strictement positives. Notons  $i_1, \dots, i_p$  les indices des coordonnées de  $X$  strictement positives. Supposons par l'absurde qu'on ait  $y_i = 0$  pour  $i \notin \{i_1, \dots, i_p\}$ .

On a donc  $\sum_{k=1}^p a_{i,i_k}x_{i_k} = 0$ . Ainsi  $a_{i,i_k} \forall k \in \{1..p\}$  et  $\forall i \notin \{i_1, \dots, i_p\}$ .

Cela contredit l'irréductibilité de  $A$  puisque  $\text{Vect}((Ei)_{i \in \{i_1, \dots, i_p\}})$  est stable par  $A$ .

On en déduit que  $(I_n + A)^{n-1}X_i > 0$  pour  $X_i$  les vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  par conséquent  $(I_n + A)^{n-1} > 0$ .

## Démonstration de la première partie du théorème

Puisque  $A$  est positive, on a d'après le corollaire que  $\rho(A)$  est une valeur propre de  $A$ . Le sous-espace propre de  $A$  associé à  $\rho(A)$  est inclus dans le sous-espace propre de  $(I_n + A)^{n-1}$  associé à  $(1 + \rho(A))^{n-1}$ . D'après le lemme 2  $(I_n + A)^{n-1}$  est strictement positif. Le théorème de Perron permet ainsi de conclure.

## Démonstration du théorème

- Pour  $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$  non nul, on pose

$$r(X) = \max_{x_i \neq 0} \frac{(AX)_i}{x_i}.$$

- $r$  admet un minimum  $\rho$  sur  $\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$ .

En effet, pour tout  $X \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$  et tout  $t > 0$  on a  $r(tX) = r(X)$ .

Cette homogénéité nous permet de restreindre l'étude sur

$$\mathbf{S} = \{X = (x_i) \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$$

qui est compact (fermé et borné). Il reste à étudier la continuité de  $r$ . Les fonctions  $X \mapsto \frac{(AX)_i}{x_i}$  sont toutes continues sur  $(\mathbb{R}_+^*)^n$  et donc  $r$  est continue sur  $(\mathbb{R}_+^*)^n$ .

Posons  $\mathbf{S}' = (I_n + A)^{n-1}(\mathbf{S})$ .  $\mathbf{S}'$  est encore un compact comme image d'un compact par une application continue. D'après le lemme 1,  $\mathbf{S}'$  est inclus dans  $(\mathbb{R}_+^*)^n$ . On en conclut que  $r$  atteint un minimum  $\rho$  sur  $\mathbf{S}'$ . Montrons que  $\rho$  est le minimum de  $r$  sur  $\mathbf{S}$ . Pour  $X \in \mathbf{S}$  et  $Y = (I_n + A)^{n-1}(X) \in \mathbf{S}'$ , on va montrer que  $r(Y) \leq r(X)$ . On a par définition de  $r(X)$  que  $r(X)X - AX \geq 0$ . Ainsi  $r(X)Y - AY \geq 0$  (car  $A$  et  $(I_n + A)^{n-1}$  commutent). Et par définition de  $r(Y)$  on a  $r(Y) \leq r(X)$ .

- $\rho$  est égal au rayon spectral de  $A$ .

Soit  $X_0$  tel que  $\rho = r(X_0)$  et on pose  $Y_0 = (I_n + A)^{n-1}(X_0)$ . On va montrer que  $X_0$  est un vecteur propre de  $A$  associé à  $\rho$ .

On suppose par l'absurde que  $\rho X_0 - AX_0$  est non nul. On a  $\rho X_0 - AX_0 > 0$  donc  $\rho Y_0 - AY_0 > 0$ .

Pour  $\epsilon > 0$  suffisamment petit on a  $(\rho - \epsilon)Y_0 - AY_0 \geq 0$  et donc par définition de  $r$  on a  $r(Y_0) \leq \rho - \epsilon$ . Ainsi  $r(Y_0) < \rho$ . Ce qui contredit la définition de  $\rho$ .

## Annexe 3: Démonstration du théorème 1

### Lemme 1

Toute matrice  $A$  telle qu'il existe  $p \in \mathbb{N}$  vérifiant  $A^p$  est strictement positive est irréductible.

Supposons que  $A$  est réductible. Il existe alors une partie  $J \subset \{1..n\}$  non triviale telle que  $\text{Vect}(E_j)_{j \in J}$  est stable par  $A$ . Ce sous espace est donc stable par  $A^p$  ce qui est absurde.

## Lemme 2

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $G$  un graphe non orienté à  $p$  sommets, numérotés de 1 à  $p$  et  $A$  sa matrice d'adjacence.

Pour tout entier naturel  $n$ , et pour toute paire  $(i,j)$  compris entre 1 et  $p$ , en notant  $c_{ij}(n)$  le nombre de chemins de longueur  $n$  reliant les sommets  $i$  et  $j$  sur  $G$ , on a

$$c_{ij}(n) = [A^n]_{ij}.$$

Par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 0$  le résultat est immédiat. Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$[A^{n+1}]_{ij} = \sum_{k=1}^p c_{ik}(n)a_{kj}$$

$c_{ik}(n)a_{kj}$  est le nombre de chemins de longueur  $n + 1$  reliant  $i$  à  $j$  qui se terminent par l'arête reliant  $k$  à  $j$ .

Le résultat s'en déduit immédiatement puisque  $G$  est connexe.

# Annexe 4 : Code Octave I

```
sim.m
1 n = 10;
2
3 alpha_min = 0.3;
4 alpha_max = 0.6;
5
6 beta_min = 0.1;
7 beta_max = 0.8;
8
9 btilde = -1/(alpha_max - alpha_min);
10 atilde = 1 - btilde;
11
12 a = 1/(1/beta_min-1/beta_max);
13 b = -a/beta_max;
14
15
16 ca = atilde/(3 - n*(b + btilde));
17 cb = a/(3 - n*(b + btilde));
18
19 Adjm = randi(2, n, n) - 1; % constant
20 Am = tril(Adjm) + tril(Adjm)' - 2*diag(diag(Adjm));
21 Dtilde = alpha_max*diag(ones(n,1)); % constant
22
23 ##% Variables
24 #x = rand(n,1);
25 ##alpha = alpha_min + (alpha_max - alpha_min)*rand(n,1);
26 ##beta = beta_min + (beta_max - beta_min)*rand(n,1);
27 ##lambda = 1;
28 ##
29 ##D = diag(alpha); % (alpha_i variables)
30 ##B = diag(beta); % (beta_i variables)
31 ##
32 ##X = [x; alpha; beta; lambda];
33
```

## Annexe 4 : Code Octave II

```
sim.m
34 A0 = [zeros(1,3*n), 1];
35 b0 = [1];
36
37 mr = sum(Am);
38 m = sum(mr);
39
40
41 A1 = [];
42 b1 = [];
43 szs1 = [];
44
45 for i=1:n
46     Ai = zeros(mr(i)+1, 3*n + 1);
47     bi = ones(mr(i)+1, 1);
48
49     k=1;
50     for j=1:n
51         if Am(i,j) ~= 0
52             if i~=j
53                 Ai(k,i) = -1; % xi exponent
54                 Ai(k,j) = 1; % xj exponent
55             endif
56             Ai(k,2*n+i) = 1; % bi exponent
57         endif
58     endfor
59     Ai(k+1,n+i) =1;
60     A1 = [A1; Ai];
61     b1 = [b1; bi];
62     szs1 = [szs1; mr(i)+1];
63     k = k + 1;
64 endfor
65 A1(:,3*n+1) = -1; % lambda exponent
66
```

## Annexe 4 : Code Octave III

```
67 size(A1)
68 size(b1)
69 size(szsl)
70
71 A2 = zeros(2*n,3*n+1);
72 A2(1:n,n+1:2*n) = -1*eye(n);
73 A2(n+1:2*n,2*n+1:3*n) = -1*eye(n);
74
75 b2 = [ca*ones(n,1); cb*ones(n,1)];
76
77 szs = [1; szsl; 2*n];
78
79 A = [A0; A1; A2];
80
81 b = [b0; b1; b2];
82
83 G = [];
84 h = [];
85
86 l = [1.e-100*ones(n,1); ones(n,1); beta_min*ones(n,1); 1.e-100];
87 u = [1.e100*ones(n,1); (1+alpha_max-alpha_min)*ones(n,1); beta_max*ones(n,1);
88
89 %[X,status,Lambda,nu] = gpposy(A,b,szs);
90 [X,status,Lambda,nu] = gpposy(A,b,szs,G,h,l,u);
```