TEMA 7: ALGORITMOS VORACES

COMPUTABILIDAD Y ALGORITMIA

M. Colebrook Santamaría
J. Riera Ledesma
J. Hernández Aceituno

Objetivos

- Características generales de los algoritmos voraces
- Esquema general de los algoritmos voraces
- Funciones asociadas
- Ejemplo del cambio de moneda
- Ejemplo del problema de la mochila

Introducción

- Los algoritmos **voraces** (*greedy*: codicioso, ávido) son los más fáciles dentro de la familia de técnicas algorítmicas.
- Su enfoque es *miope*: **toman decisiones** basándose en la información disponible en cada momento, sin tener en cuenta el efecto que pueden tener en el futuro.
- Por ello son fáciles de diseñar y desarrollar, y suelen ser **eficientes**.
- Se suelen utilizar para resolver problemas de **optimización**. Ejemplos: búsqueda de la ruta más corta entre dos puntos, búsqueda de la mejor planificación de tareas en un ordenador, etc.

Ejemplo de algoritmo voraz: Cambio de monedas

- Monedas disponibles:
  - 1, 2, 5, 10, 20, 50 céntimos de €.
  - 1 y 2 € (equivalente a 100c y 200c)
- El problema consiste en diseñar un algoritmo para pagar una cierta cantidad usando el menor número posible de monedas.
- <u>Ejemplo</u>: 2,89€ = 2 € + 50c + 20c + 10c + 5c + 2c + 2c.
- En total son 7 monedas, que es el menor número posible de monedas para esa cantidad.

Algoritmo para el cambio de monedas

```
función devolver_cambio(n: cantidad): conjunto de monedas {
  M <- { 200, 100, 50, 20, 10, 5, 2, 1 }
  S <- ∅     // conjunto de la solución
  suma <- 0  // suma de los elementos de S
  mientras suma ≠ n hacer {
    v <- mayor elemento de M tal que suma + v <= n
    si no existe v entonces
      devolver NO_EXISTE_SOLUCIÓN
    S <- S ∪ {una moneda de valor v}
    suma <- suma + v
  }
  devolver S
}
```

Análisis del algoritmo

- Con los valores correctos de las monedas y disponiendo de un suministro ilimitado de cada moneda, el algoritmo produce una **solución óptima**.
- En otro caso, el algoritmo puede **no funcionar** o **no encontrar el valor óptimo**. Por ejemplo: M={1,3,4} y n=6, el algoritmo hubiera cogido S={4,1,1}, siendo la **solución óptima** $\mathbf{S}$**={3,3}**.
- El algoritmo es **voraz** porque en cada paso selecciona la mayor de las monedas posibles, y **nunca** cambia de opinión (no hace ***backtracking***): una vez que una moneda se incluye en la solución, se queda para siempre.
- <u>**Complejidad**</u>: siendo $m=|M|$, tenemos **O(n·m)**, aunque se puede reducir a **O(m)** si se cambia el esquema.

Algoritmo alternativo para el cambio de monedas

```
función devolver_cambio(n: cantidad): conjunto de monedas {
  M <- { 200, 100, 50, 20, 10, 5, 2, 1 }
  S <- ∅      // conjunto de la solución
  suma <- 0  // suma de los elementos de S
  para v ∈ M (de mayor a menor valor) hacer {
    c <- (n - suma) / v  // división entera
    si c > 0 entonces {
      S <- S ∪ {v} * c   // c items de valor v
      suma <- suma + c * v
    }
  }
  devolver S
}
```

Características generales de los algoritmos voraces

Los algoritmos voraces disponen de tres conjuntos:

- Un **conjunto (o lista) de candidatos** viables.
- Los candidatos considerados y **seleccionados**.
- Los candidatos considerados y **rechazados.**

y cuatro funciones que calculan:

- si un conjunto de candidatos constituye una **solución.**
- si un cierto conjunto de candidatos es **factible**.
- cuál es el mejor de los candidatos que no han sido ni seleccionados ni rechazados (función de **selección**).
- el valor de la solución (función **objetivo**).

Esquema general de un algoritmo voraz

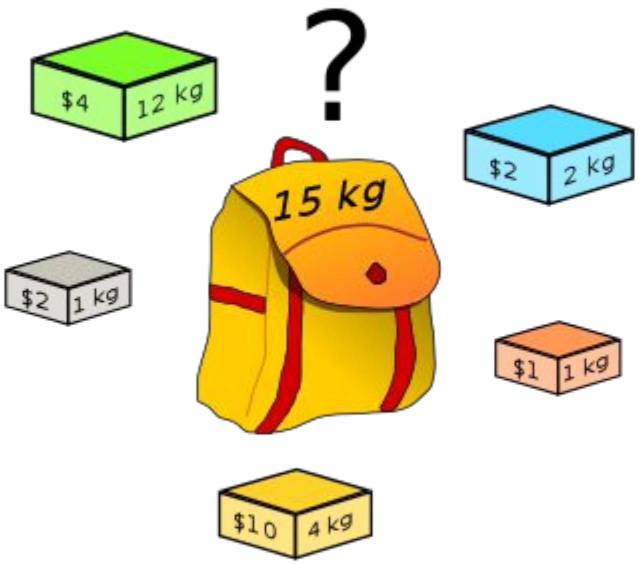
```
función voraz(C: conjunto): conjunto
{ // C es el conjunto de candidatos
  S <- ∅  // conjunto de la solución
  mientras C ≠ ∅ y no solución(S) hacer {
    x <- seleccionar(C)
    C <- C - {x}  // quitamos x de C
    si factible(S ∪ {x}) entonces
      S <- S ∪ {x}
  }
  si solución(S) entonces devolver S
  en otro caso devolver NO_HAY_SOLUCIÓN
}
```

Esquema general aplicado al cambio de monedas

- **Conjunto de candidatos**: es el conjunto de monedas M={1c, 2c, 5c, …, 200c}, con una cantidad ilimitada de cada moneda.
- **Función solución**: comprueba si el valor de las monedas seleccionadas hasta el momento es *exactamente* el valor buscado.
- **Función de factibilidad**: un conjunto de monedas es factible si su valor total no sobrepasa la cantidad establecida.
- **Función de selección**: escoge la moneda de valor más alto que quede en el conjunto de candidatos.
- **Función objetivo**: cuenta el número de monedas en la solución.

El problema de la mochila (1) (*knapsack problem*)

- Tenemos ***n* objetos** y una mochila.
- Cada objeto i=1,...,n tiene un **peso p_i** y un **valor v_i**.
- El peso máximo que la mochila soporta es ***P***.
- Objetivo: llenar la mochila maximizando el valor total de todos los objetos, y respetando la limitación de peso máximo ***P***.



El problema de la mochila (2)

- Para simplificar, permitimos que para cada **objeto *i*** podemos incluir una fracción $\boldsymbol{x_i}$ del mismo, $\mathbf{0 \leq x_i \leq 1}$.
- Por tanto, el **objeto *i*** contribuye al **peso** de la mochila en $\boldsymbol{x_i \cdot p_i}$ unidades, y al **valor** en $\boldsymbol{x_i \cdot v_i}$ unidades.
- El problema se puede definir de esta forma:

$$\max \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$$

$$s.a. \quad \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \leq P$$

$$v_i > 0, \;\; p_i > 0, \;\; 0 \leq x_i \leq 1, \;\; i=1,\ldots,n$$

Funciones de selección

- Tenemos al menos tres funciones de selección:
  a) Seleccionar el objeto **más valioso**.
  b) Seleccionar el objeto **menos pesado**.
  c) Seleccionar el objeto cuyo **valor por unidad de peso** sea el mayor.
- Las opciones (a) y (b) no generan la solución óptima, pero (c) sí.

Ejemplo

***P* = 100 kg, *n* = 5 objetos**					
i:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
v_i:	20 €	30 €	66 €	40 €	60 €
p_i:	10 kg	20 kg	30 kg	40 kg	50 kg
v_i / p_i:	2.0 €/kg	1.5 €/kg	2.2 €/kg	1.0 €/kg	1.2 €/kg

Selección:		x_i					**Peso total**	**Valor total**
(a)	**Max v_i**	0	0	1	0.5	1	100	146
(b)	**Min p_i**	1	1	1	1	0	100	156
(c)	**Max v_i / p_i**	1	1	1	0	0.8	100	164

Algoritmo de la mochila

```
función mochila(P, p[1..n], v[1..n]): vector[1..n] {
  para i <- 1 hasta n hacer x[i] <- 0
  peso <- 0
  mientras peso < P hacer {
    i <- seleccionar el mejor objeto restante
    si peso + p[i] <= P entonces {
      x[i] <- 1
      peso <- peso + p[i]
    } en otro caso {
      x[i] <- (P - peso) / p[i]
      peso <- P
    }
  devolver x
}
```

Análisis del algoritmo

- Si los objetos ya están en orden decreciente de v_i / p_i, el algoritmo voraz requiere un tiempo **O(*n*)**.
- De otro modo, en general la ordenación requerirá un tiempo de cómputo mayor (**O(*n* log *n*)** para *heapsort*) y predominará sobre la del algoritmo voraz (reglas de simplificación).

Referencias

- ★ Brassard, G. and Bratley, P. (1998) “Fundamentos de Algoritmia”, *Prentice-Hall*. [**Capítulo 6**]
- ★ Shaffer, C. A. (2013) “Data Structures and Algorithm Analysis”, Edition 3.2 (C++ Version), *Dover Publications*. **Freely** available for **educational** and **non-commercial use** at: people.cs.vt.edu/shaffer/Book/C++3elatest.pdf