

Tema 4.

Ejercicios de Árboles

Ejercicios de árboles

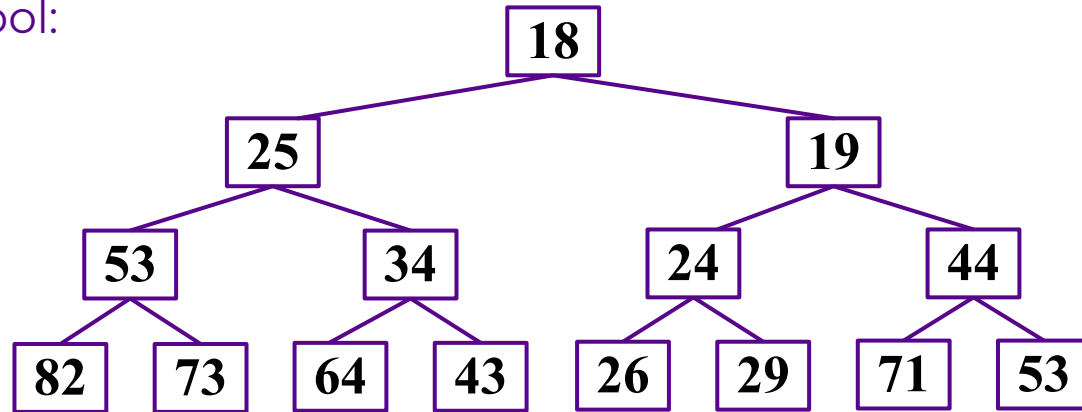
1. Considerando un árbol binario de profundidad 7:
¿Cuál es el mayor y el menor número de nodos que puede tener?
¿Cuál es el mayor y el menor número de nodos hoja que puede tener?
¿Cuál es el mayor y el menor número de nodos interiores?

SOLUCION:

- El mayor número de nodos que puede tener un árbol de profundidad 7 es $2^7 - 1 = 2^7 - 1 = 128 - 1 = 127$
- El menor número de nodos que puede tener un árbol de profundidad 7 es 7
- El mayor número de nodos hoja que puede tener un árbol de profundidad 7 es $2^{7-1} = 64$
- El menor número de nodos hoja que puede tener un árbol de profundidad 7 es 1
- El mayor número de nodos interiores que puede tener un árbol de profundidad 7 es el de un árbol completo por niveles hasta el nivel 7 es $127 - 64 = 2^{5+1} - 1 = 2^6 - 1 = 63$
- El menor número de nodos interiores que puede tener un árbol de profundidad 7 es el de una lista de profundidad 7, es decir, 6.

Ejercicios de árboles

2. Escribir en preorden, en inorden, en postorden y en el orden por niveles los nodos del árbol:

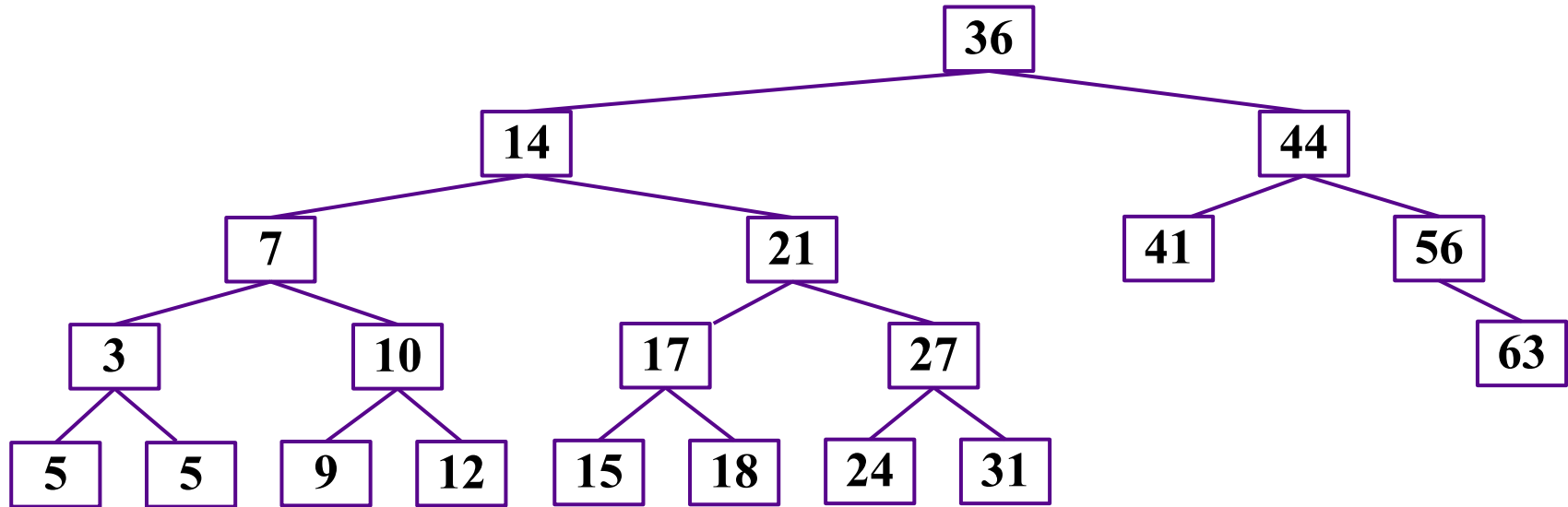


SOLUCIÓN:

- El preorden: 18 25 53 82 73 34 64 43 19 24 26 29 44 71 53
- El inorden: 82 53 73 25 64 34 43 18 26 24 29 19 71 44 53
- El postorden: 82 73 53 64 43 34 25 26 29 24 71 53 44 19 18
- El orden por niveles: 18 25 19 53 34 24 44 82 73 64 43 26 29 71 53

Ejercicios de árboles

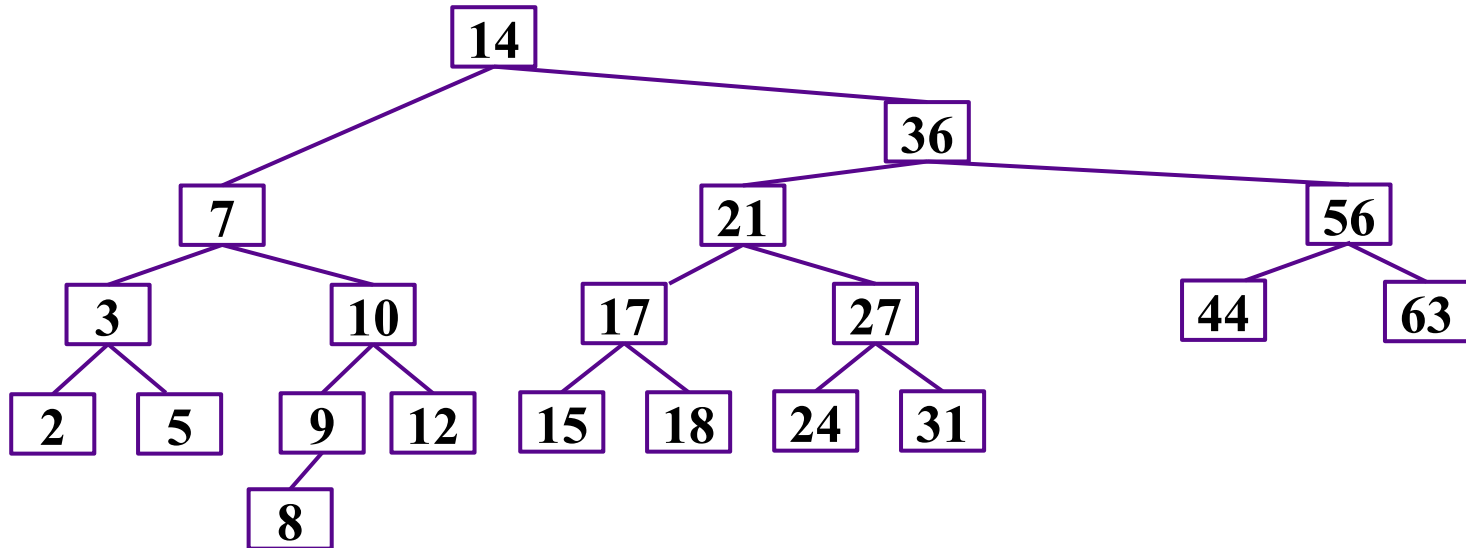
3. A partir del árbol AVL siguiente:



Eliminar 41 e insertar 8 haciendo los rebalanceos que correspondan

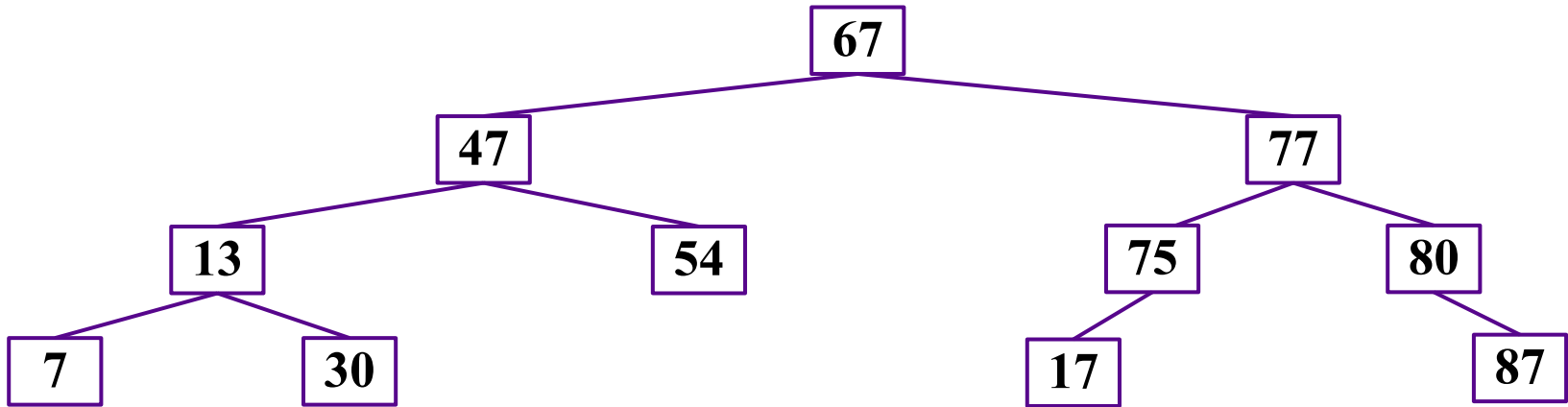
Ejercicios de árboles

3. Solución: 41 se elimina como nodo hoja y se desbalancea 44 a derecha-derecha por lo que le corresponde un rebalanceo DD en 44 y el árbol queda con un desbalanceo izquierda-izquierda en 36 por lo que requiere un rebalanceo II en 36. El 8 se inserta como hijo izquierdo de 9 sin necesitar rebalanceo.



Ejercicios de árboles

4. A partir del árbol AVL siguiente:



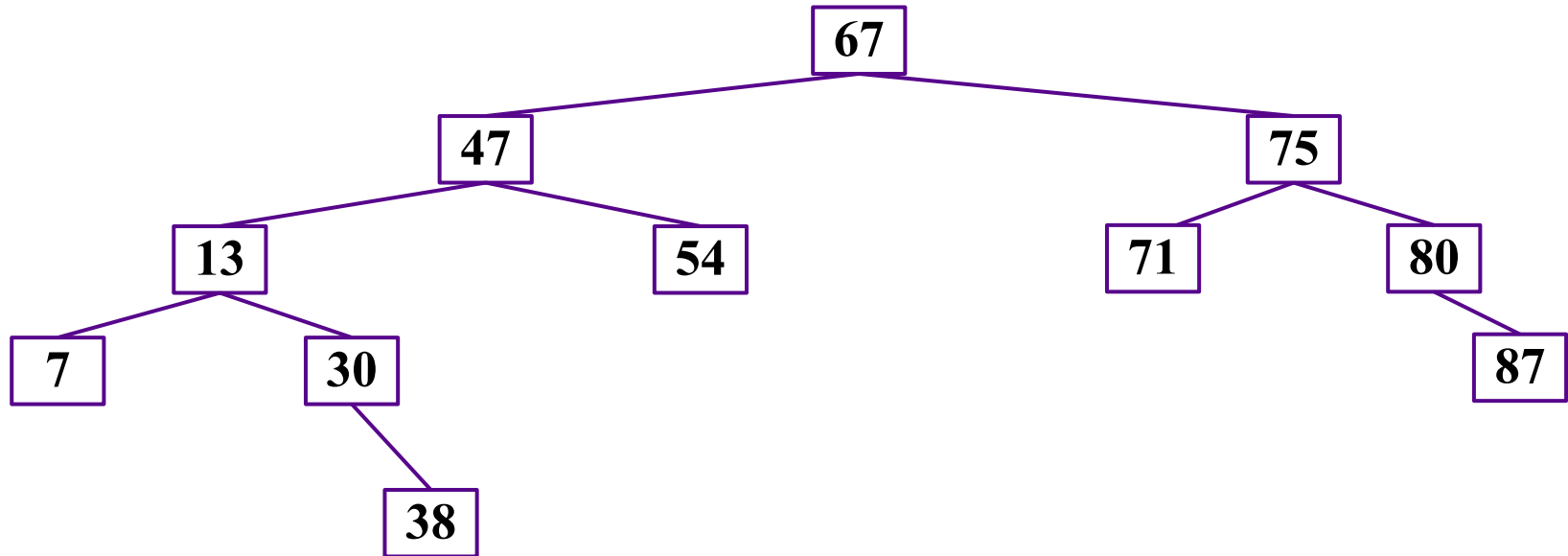
Insertar 38 y eliminar 77 haciendo los rebalanceos que correspondan

Ejercicios de árboles

4. Solución:

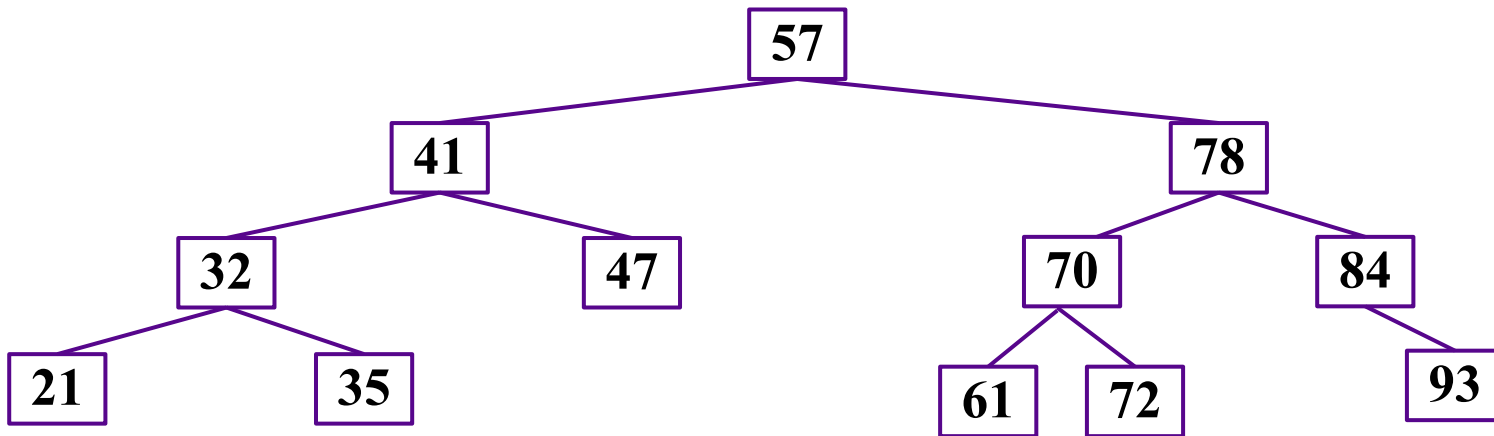
38 se inserta como hijo derecho de 30. Se requiere una rotación ID en 47.

Para eliminar 77 se sustituye por 75 y no requiere ningún otro rebalanceo.



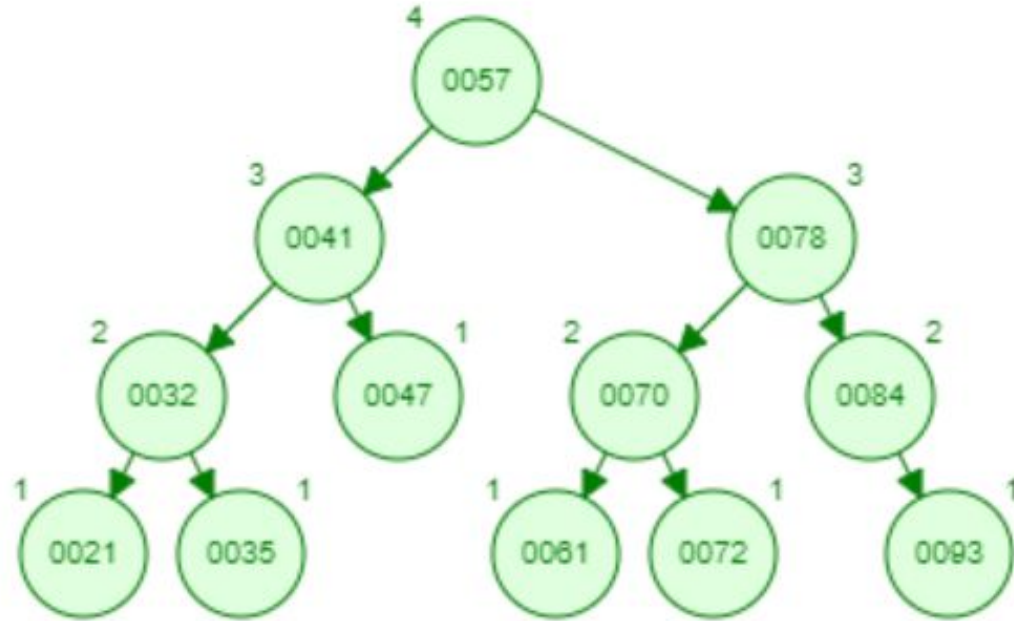
Ejercicios de árboles

5. Eliminar 57 e insertar 33 haciendo los rebalanceos que sean necesarios en el árbol AVL



Ejercicios de árboles

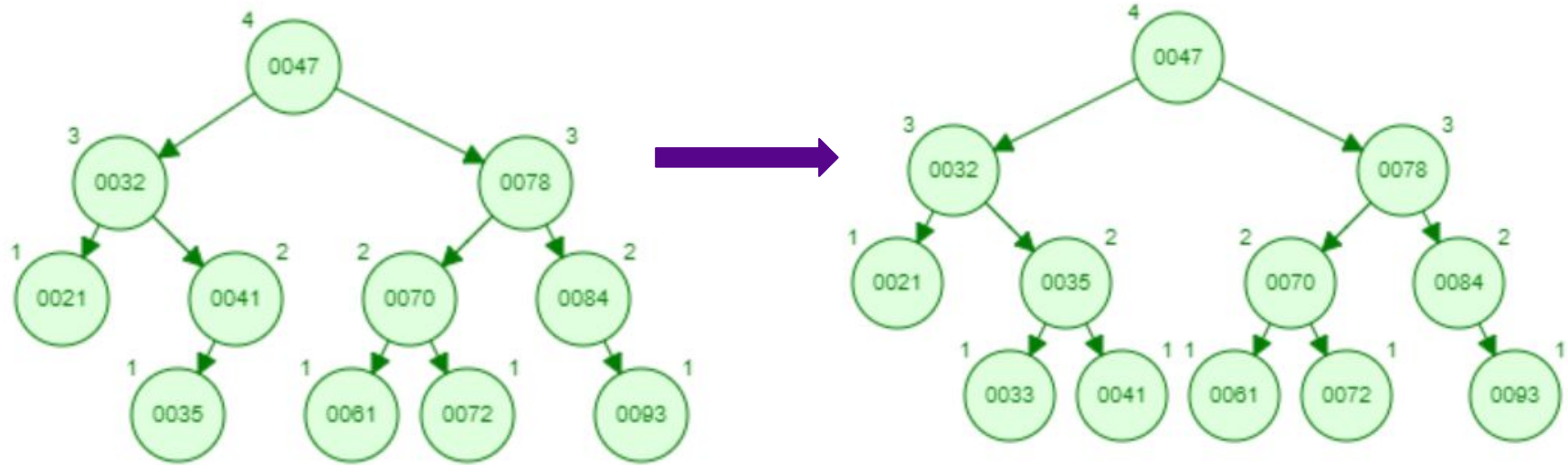
5. Solución



Ejercicios de árboles

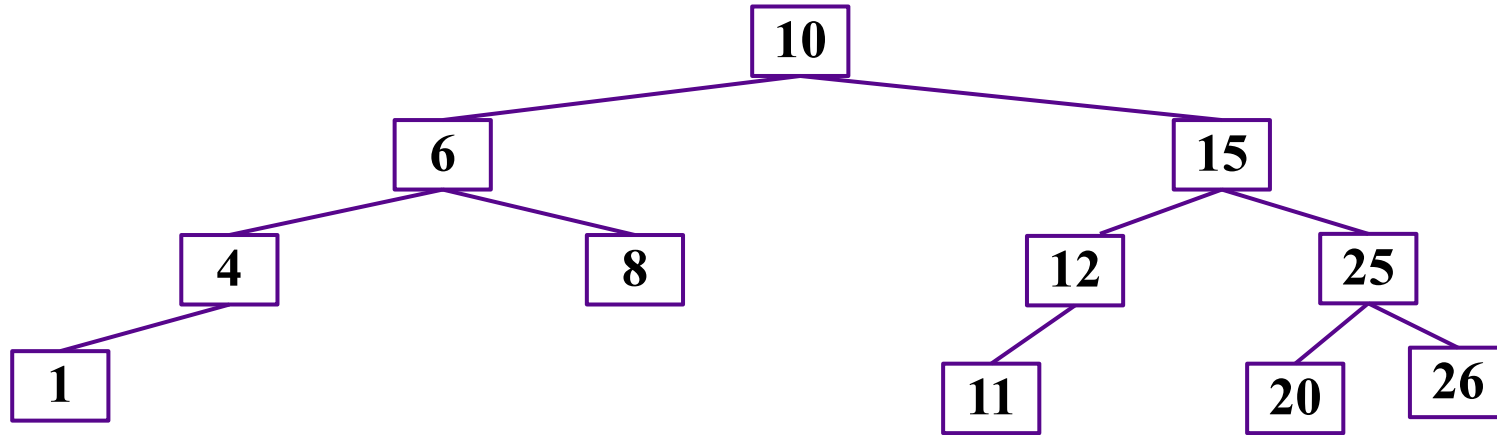
5. Solución:

Se elimina 57 sustituyéndolo por 47 y requiriendo una rotación II en 41.
Tras insertar 33 como hijo izquierdo de 35 requiere una rotación II en 41.



Ejercicios de árboles

6. Eliminar los nodos 8, 15, 11 y 10 del árbol AVL de la figura siguiente:



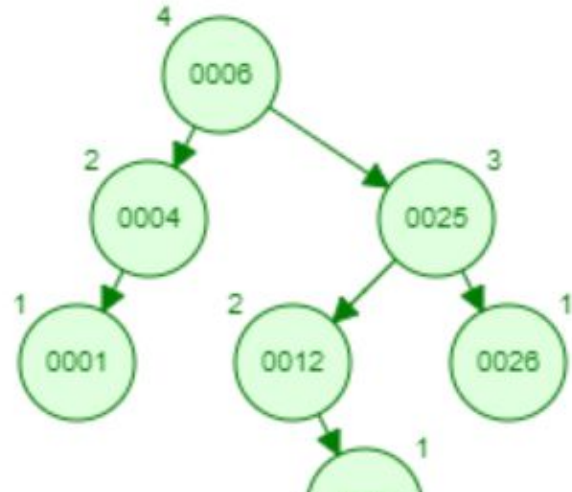
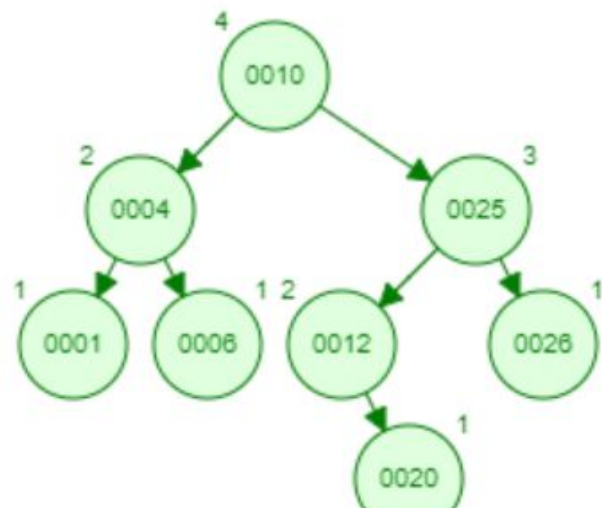
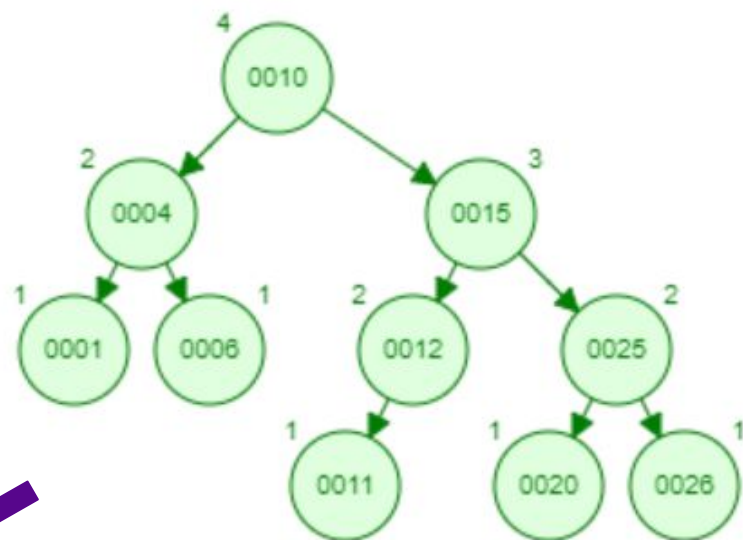
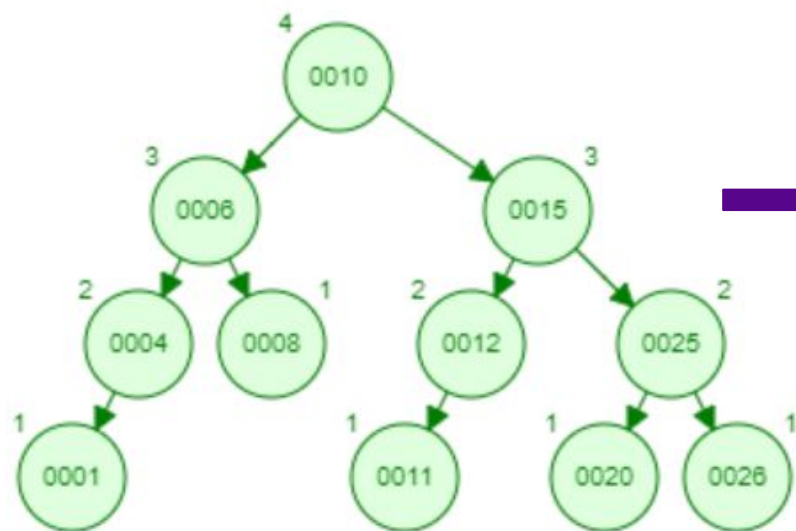
Solución:

Se elimina 8 como nodo hoja y se aplica rotación II en 6

Se elimina 15 sustituyéndolo por 12 sin rebalanceo.

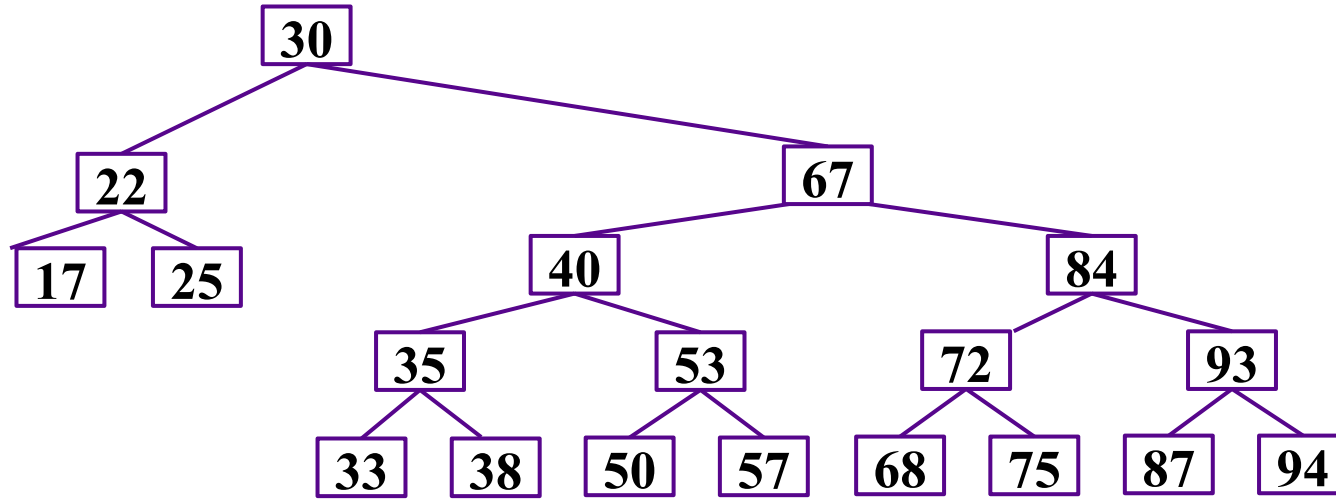
Tras eliminar 11 como nodo hoja se requiere una rotación DD en 12

Se elimina 10 sustituyéndose por 6



Ejercicios de árboles

7. Dar el preorden, inorden y postorden del árbol siguiente:

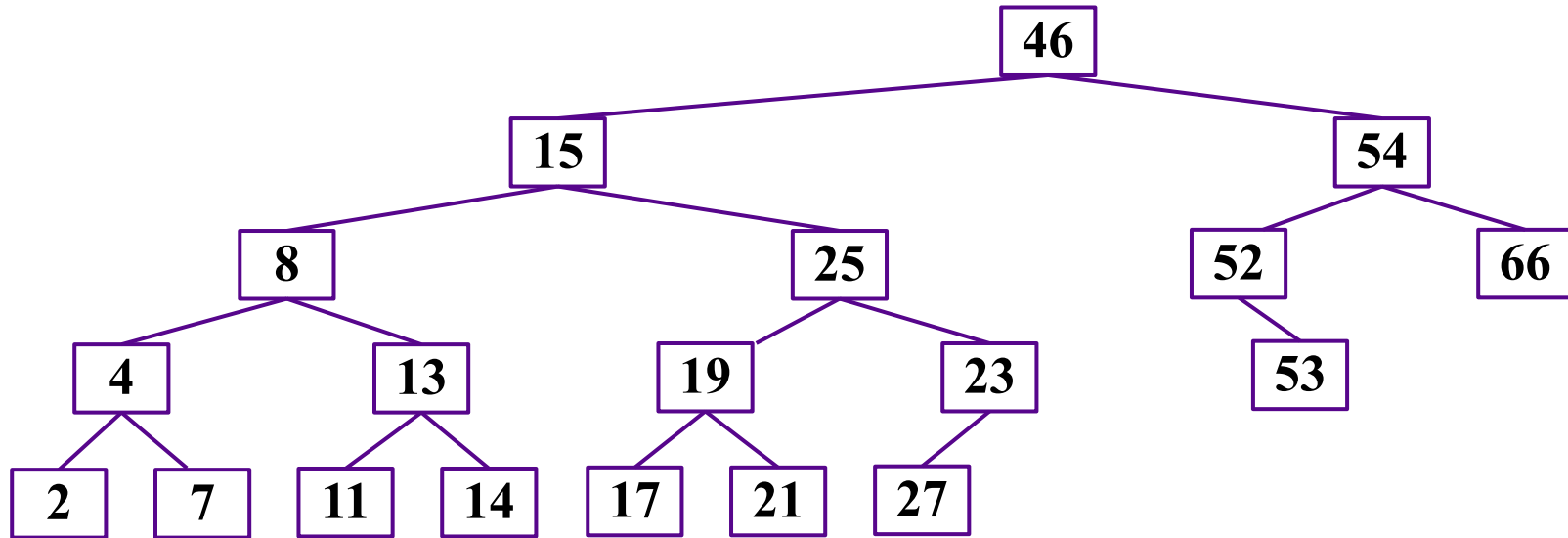


SOLUCIÓN:

Preorden: 30 22 17 25 67 40 35 33 38 53 50 57 84 72 68 75 93 87 94
Inorden: 17 22 25 30 33 35 38 40 50 53 57 67 68 72 75 84 87 93 94
Postorden: 17 25 22 33 38 35 50 57 53 40 68 75 72 87 94 93 84 67 30

Ejercicios de árboles

8. Insertar el nodo 16 y el nodo 12, y eliminar el nodo 66 en:



Ejercicios de árboles

9.

a) Dibujar el árbol binario dados su preorden y su inorden siguientes:

◦ Preorden: 46 55 82 24 72 67 13 71 44 25 99 17 02 62 27 54 12 63 66

◦ Inorden: 72 24 67 82 13 71 44 55 17 99 02 25 27 62 46 12 63 54 66

b) Dibujar el árbol binario dados su inorden y su postorden siguientes:

◦ Inorden: 71 44 62 18 10 55 92 51 80 75 66

◦ Postorden: 71 44 18 62 55 92 80 66 75 51 10.

Ejercicios de árboles

9. a) Solución:

Del preorden sabemos que la raíz del árbol es [46] y entonces del inorden sabemos que los nodos del subárbol izquierdo y derecho son los que están a la izquierda y derecha de 46; es decir, los nodos [72 24 67 82 13 71 44 55 17 99 02 25 27 62] y los nodos [12 63 54 66], respectivamente, dados en inorden.

Por tanto en el preorden los nodos del subárbol izquierdo serán los mismos nodos [55 82 24 72 67 13 71 44 25 99 17 02 62 27] y los del derecho son [54 12 63 66], por lo que los hijos izquierdo y derecho de [46] son [55] y [54].

Repetimos el proceso con ambos subárboles de los que tenemos su preorden y su inorden; del subárbol izquierdo tenemos el preorden [55 82 24 72 67 13 71 44 25 99 17 02 62 27] y el inorden [72 24 67 82 13 71 44 55 17 99 02 25 27 62].

Por tanto, además de la raíz [55] tenemos los dos subárboles de esta rama.

Los inórdenes son [72 24 67 82 13 71 44] y [17 99 02 25 27 62] y entonces los preórdenes son [82 24 72 67 13 71 44] y [25 99 17 02 62 27].

Ejercicios de árboles

De forma esquemática:

Obtenemos la raíz del preorden:

Preorden: [46] 55 82 24 72 67 13 71 44 25 99 17 02 62 27 54 12 63 66

Dividimos el árbol en los subárboles por el inorden

Inorden: I[72 24 67 82 13 71 44 55 17 99 02 25 27 62] R[46] D[12 63 54 66]

La misma división se tiene con los preórdenes de donde obtenemos las dos raíces

Preorden: R[46] I[55 82 24 72 67 13 71 44 25 99 17 02 62 27] D[54 12 63 66]

Del primer subárbol tenemos el preorden y el inórdenes:

Preorden [R[55] 82 24 72 67 13 71 44 25 99 17 02 62 27]

Inorden: I[72 24 67 82 13 71 44] R[55] D[17 99 02 25 27 62]

De donde obtenemos los preórdenes con sus raíces:

[R[55] I[82 24 72 67 13 71 44] D[25 99 17 02 62 27]]

Del siguiente subárbol tenemos el preorden e Inorden

Preorden: [R[82] 24 72 67 13 71 44]

Del inorden con raíz en [82] tenemos

I[72 24 67] R[82] D[13 71 44]

Y los correspondientes preórdenes son:

[R[82] I[24 72 67] D[13 71 44]

Ejercicios de árboles

Del siguiente árbol volvemos a tener:

Preorden: [R[24] 72 67]

Inorden: [I[72] R[24] D[67]]

Del otro subárbol tenemos:

Preorden: [R[13] 71 44]

Inorden [I[] R[13] D[71 44]]

El subárbol izquierdo está vacío y el derecho tenemos

Preorden [R[71] 44]

Inorden [I[] R[71] D[44]]

que vuelve a tener el izquierdo vacío y el derecho [44]

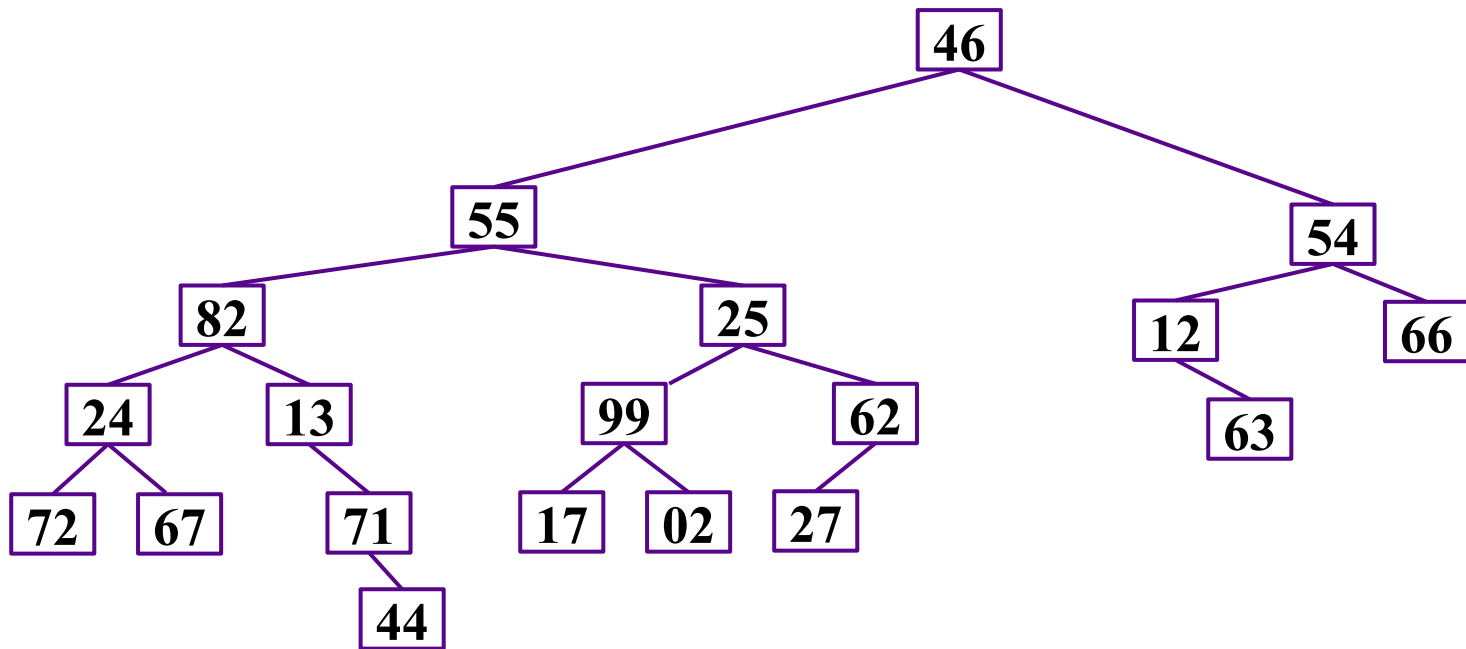
Volviendo al árbol de raíz 25 con preorden [25 99 17 02 62 27] e inorden [17 99 02 25 27 62] tiene la raíz 25 es [R[25] 99 17 02 62 27] y en el inorden [[17 99 02] R[25] [27 62]].

Por tanto los hijos son [R[25] I[99] 17 02 D[62] 27].

Finalmente la rama izquierda [R[99] I[17] D[02]] y la derecha R[62] I[27] D[].

Ejercicios de árboles

9. Solución: El árbol resultante es:



Ejercicios de árboles

9. b) Solución:

Del postorden [71 44 18 62 55 92 80 66 75 51 10] tenemos la raíz que es el último nodo: [10]
Localizamos la raíz [10] en el inorden [71 44 62 18 10 55 92 51 80 75 66] y entonces
tenemos los nodos de cada subárbol: I[71 44 62 18] R[10] D[55 92 51 80 75 66].

La misma división de nodos se da en el postorden I[71 44 18 62] D[55 92 80 66 75 51] R[10]

Del subárbol izquierdo tenemos el inorden [71 44 62 18] y el postorden [71 44 18 62]

Por tanto la raíz es [62] los nodos son I[71 44] R[62] D[18].

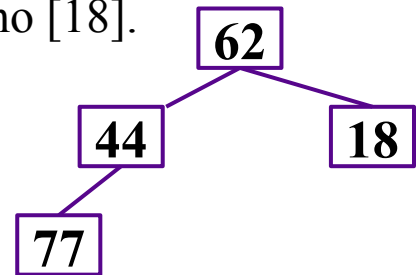
El postorden de este árbol es: I[71 44] D[18] R[62].

Por tanto la raíz del subárbol izquierdo de este nodo es [44] y [71] es su hijo izquierdo.

De aquí tenemos el subárbol izquierdo del árbol pedido:

La raíz es [62] y sus hijos son: hijo izquierdo [44] e hijo derecho [18].

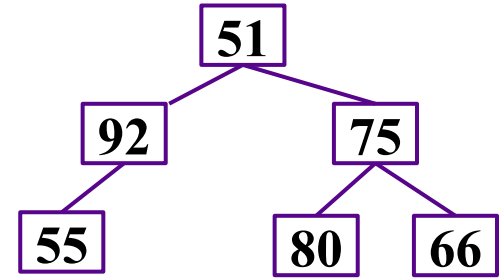
[44] sólo tienen el hijo izquierdo [77] y [18] no tiene hijos



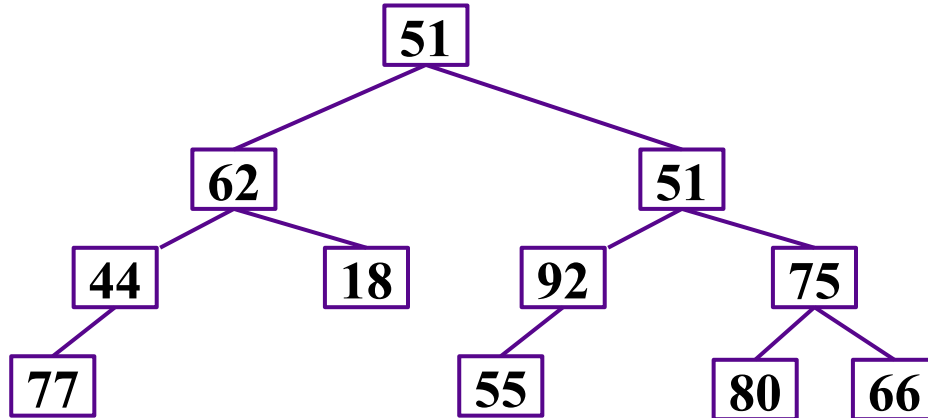
Ejercicios de árboles

9. b) Solución:

Trabajando de forma similar con el subárbol derecho con inorden [55 92 51 80 75 66] y postorden [55 92 80 66 75 51] obtenemos el subárbol:



Componemos el árbol completo:



Ejercicios de árboles

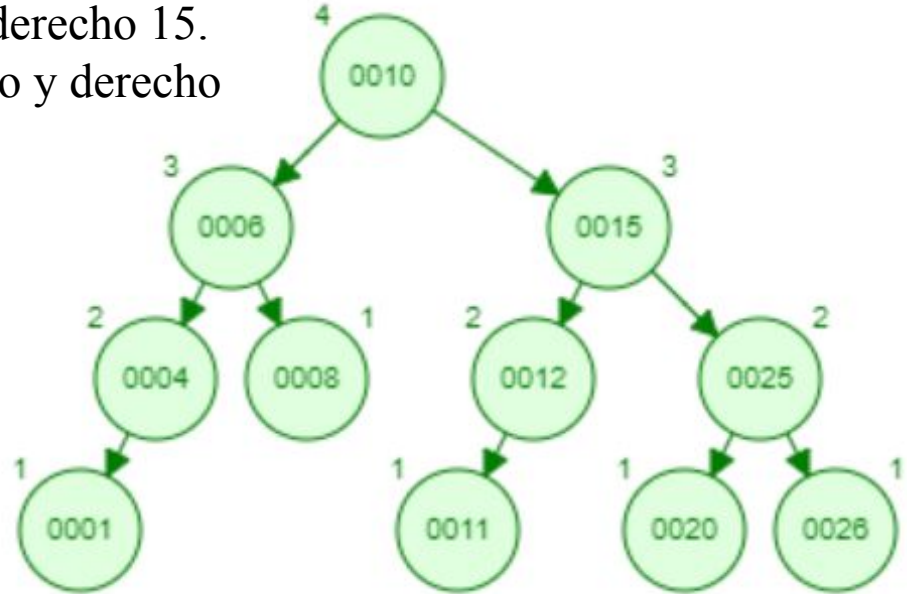
10. SOLUCIÓN: El árbol AVL con el postorden: 1 4 8 6 11 12 20 26 25 15 10, tiene como raíz es 10 y los postórdenes de los subárboles izquierdo y derecho son: los menores que 10 [1 4 8 6] y los mayores que 10 [11 12 20 26 25 15].

Por tanto, el hijo izquierdo de 10 es 6 y el derecho 15.

Los postórdenes de los subárboles izquierdo y derecho de 6 son: [1 4] y [8];

y los postórdenes de los subárboles izquierdo y derecho de 15 son: [11 12] y [20 26 25].

De donde el árbol en cuestión es:



Ejercicios de árboles

10. SOLUCIÓN: El árbol AVL con preorden: [67 47 13 7 30 54 77 75 71 80 87] tiene [67] como raíz y como preórdenes de los subárboles izquierdo y derecho [47 13 7 30 54] y [77 75 71 80 87]. Por tanto los hijos izquierdo y derecho de [67] son [47] y [77]. Los subárboles izquierdo y derecho de [47] tienen preórdenes [13 7 30] y [54], y los subárboles izquierdo y derecho de [77] tienen preórdenes [75 71] y [80 87]. Por tanto el árbol es:

