概率论与数理统计期末练习卷（一）

一、单项选择题

1、已知 A、B 为任意两个随机事件，0<$P(A)<1$, 0<$P(B)<1$，假设两个事件中只有 A 发生和只有 B 发生的概率相等，则下列等式**未必**成立的是（ C ）

$P(A)=P(B)$

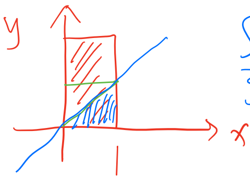
（A）$P(A|B)=P(B|A)$　$\frac{P(A)}{P(AB)}=\frac{P(B)}{P(AB)}$

（B）$P(A|\bar{B})=P(B|\bar{A})$　$\frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$

(C) $P(A|\bar{B})=P(\bar{A}|B)$　$\frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}$　$\frac{P(B)-P(AB)}{P(B)}$　$1-P(B)\neq P(B)$

（D）$P(A-B)=P(B-A)$　$P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB)$

2、随机地向长方形区域：$\{0<x<1, 0<y<2\}$内扔一个质点，质点落在长方形任何区域内的概率与区域面积成正比，则原点与落点的连线与x轴正向的夹角小于$\frac{\pi}{4}$的概率为（ B ）。



$\frac{S_\triangle = \frac{1}{2}}{S_\square = 2} = \frac{1}{4}$

（A）$\frac{1}{2}$　（B）$\frac{1}{4}$　（C）$\frac{3}{4}$　（D）1

3、对于任意随机变量X，若$E(X), D(X)$都存在，则$D[-E(X)]$的值为（ A ）。

（A）0　（B）$-D(X)$　(C) $E(X)$　（D）$D(X)$

$E(X)$为常数 $D(C)=0$
即得（常数方差为0）

4、设随机变量$X\sim t_\alpha(n)$, $F(x)$表示X的分布函数，记$t_\alpha(n)$ $(0<\alpha<1)$表示自由度n的t分布的上α分为点，以下说法正确的是（ C ）。

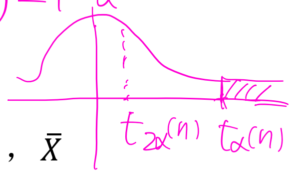
$P(X\geq t_\alpha(n))=\alpha$

（A）$P\{X<t_\alpha(n)\}=\alpha$　$=1-\alpha$

（B）$F(t_\alpha(n))=\alpha$　$F(t_\alpha(n))=P(X<t_\alpha(n))=1-\alpha$

(C) $F\big(t_\alpha(n)\big)=1-\alpha$

（D）$t_\alpha(n)<t_{2\alpha}(n)$　$t_{2\alpha}(n)<t_\alpha(n)$



5、设总体X的方差$D(X)=\sigma^2$, $X_1, X_2, \ldots X_n$为来自该总体的随机样本，$\bar{X}$为样本均值，则下列哪个统计量为σ^2的无偏估计（ D ）。

（A）$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$　（B）$\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}{X_i}^2-n\bar{X}^2)$

(C) $\frac{1}{n+1}(\sum_{i=1}^{n}{X_i}^2-n\bar{X}^2)$　（D）$\frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n}{X_i}^2-n\bar{X}^2)$

$E(S^2)=\sigma^2$
样本方差S^2为总体方差σ^2的无偏估计

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$
$$=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2\right)$$

二、填空题

1、设三次独立试验中，事件A 出现的概率均为 1/3。则三次试验中A至少出现

一次的概率= $\frac{19}{27}$ 。

一次都没出现的概率为 $(\frac{2}{3})^3=\frac{8}{27}$

至少出现一次的概率为 $1-(\frac{2}{3})^3=\frac{19}{27}$

2、设随机变量$X\sim N(-3,\sigma^2)(\sigma>0)$，则$P\{X\ge -3\}$= $\frac{1}{2}$ 。

$P(X\geq -3)=P(\frac{X+3}{\sigma}\geq\frac{-3+3}{\sigma})$
$=1-\Phi(0)$
$=\frac{1}{2}$

3、已知$P(A)=a, P(B|A)=b, a,b\epsilon(0,1)$,则 $P(AB)=$ ab , $P(A\bar{B})$= $a-ab$ 。

$P(AB)=P(A)P(B|A)$
$=ab$

$P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=a-ab$

4、设总体X的密度函数为$f(x)=\begin{cases}1-|x|, & -1<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$，$X_1,X_2,\dots X_{10}$为取自$X$的一个样本，$\bar{X}$表示样本均值，则$E(2\bar{X}+1)=$ 1 。

$E(2\bar{X}+1)$
$=2E(\bar{X})+1$

$E(\bar{X})=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=E(X_i)$

$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_{-1}^{0}x(1+x)dx+\int_{0}^{1}x(1-x)dx$
$=-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$
$=0$

法2
$x\cdot(1-|x|)$
为奇函数
故 $\int_{-1}^{1}x(1-|x|)dx$
$=0$

三、设随机变量X与Y**相互独立**，且$P\{X=1\}=P\{Y=1\}=p>0, P\{X=0\}=P\{Y=0\}=1-p>0$，定义$Z=\begin{cases}1, & X+Y为偶数\\ 0, & X+Y为奇数\end{cases}$，(1)求$(X,Y)$的联合分布律；(2)求$Z$的分布律。（结果用$p$表示）

解：(1)

X \ Y	0	1	$P\{X=i\}$
0	$(1-p)^2$	$p(1-p)$	$1-p$
1	$p(1-p)$	p^2	p
$P\{Y=j\}$	$1-p$	p	

(2)

Z	0	1
P	$2p-2p^2$	$2p^2-2p+1$

四、

一大批某公司的羽绒服，一等品占 80%。从中任取 400 件，利用中心极限定理**估计**其中一等品不超过 324 件的概率。（结果用$\phi(\cdot)$表示）

解： $X\sim B(400,0.8)$

$$P(X\leq 324)=P\left(\frac{X-400\times0.8}{\sqrt{400\times0.8\times0.2}}\leq\frac{324-400\times0.8}{\sqrt{400\times0.8\times0.2}}\right)$$

$$\approx\Phi\left(\frac{4}{8}\right)=\Phi\left(\frac{1}{2}\right)$$

约等于号，因 $\frac{X-400\times0.8}{\sqrt{400\times0.8\times0.2}}\overset{近似}{\sim}N(0,1)$，用到了棣莫弗－拉普拉斯定理
定理三
或(看成独立同分布中心极限定理
定理一

$\frac{\theta+1}{(\theta+2)\cdot 2^{\theta+1}} x^{\theta+2}\Big|_0^2$

$\frac{\theta+1}{\theta+2}\cdot 2=\bar{X}$

$2\theta+2=\bar{X}\theta+2\bar{X}$

$(2-\bar{X})\theta=2\bar{X}-2$

$\theta=\frac{2\bar{X}-2}{2-\bar{X}}$

五、

得分	

设总体X的概率密度函数$f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{\theta+1}{2^{\theta+1}}x^{\theta}, & 0<x<2\\ 0, & 其它\end{cases}$,其中$\theta>-1$是未知参数,

$X_1,X_2,\ldots,X_n$是来自该总体的一个样本，试求未知参数θ的矩估计量和最大似然估计量.

解：(1) $\mu_1=E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,\theta)\,dx=\int_0^2 x\cdot\frac{\theta+1}{2^{\theta+1}}x^{\theta}\,dx$

$=\int_0^2\frac{\theta+1}{2^{\theta+1}}x^{\theta+1}dx$

$=\frac{\theta+1}{(\theta+2)2^{\theta+1}}x^{\theta+2}\Big|_0^2$

$=\frac{2(\theta+1)}{\theta+2}$

令 $A_1=\bar{X}$ 替代 μ_1

得 $\frac{2(\theta+1)}{\theta+2}=\bar{X}$

故有θ的矩估计量 $\hat{\theta}=\frac{2\bar{X}-2}{2-\bar{X}}$

(2) $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=\frac{(\theta+1)^n}{2^{n(\theta+1)}}\prod_{i=1}^{n}x_i^{\theta}$

$\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)-n(\theta+1)\ln 2+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta+1}-n\ln 2+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$，得$\theta$的最大似然估计量

$\hat{\theta}=\frac{1}{\ln 2-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}-1$

$\hat{\theta}=\frac{1}{\ln 2-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}-1$

六、

设二维随机变量(X,Y)的分布律如右图：

求：（1）关于X的边缘分布律;

Y \ X	-1	1	2	3
-2	0.2	0.15	0.1	0.2
1	0.1	0	0.15	0.1

(2)关于X的分布函数 $F_X(x)$;（3）$Z=X+Y$的分布律;（4）E(Y)。

解：(1)

X	-1	1	2	3
P	0.3	0.15	0.25	0.3

(2) $F_X(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ 0.3, & -1\le x<1\\ 0.45, & 1\le x<2\\ 0.7, & 2\le x<3\\ 1, & x\ge 3\end{cases}$

(3)

Z	-3	-1	0	1	3	4
P	0.2	0.15	0.2	0.2	0.15	0.1

(4) $E(Y)=-2\times 0.65+1\times 0.35$

$=-0.95$

七、设总体X具有方差σ_1^2=700，总体Y具有方差σ_1^2=900，两个总体的均值相等。分别来自两个总体的两个相互独立的样本容量均为 400 的样本，分别记样本均值为$\bar{X},\bar{Y}$,试利用切比雪夫不等式估计ε，使得$P\{|\bar{X}-\bar{Y}|<\varepsilon\}\geq 0.99$。

解：$E(\bar{X}-\bar{Y})=E(\bar{X})-E(\bar{Y})=E(\frac{1}{400}\sum_{i=1}^{400}X_i)-E(\frac{1}{400}\sum_{i=1}^{400}Y_i)$

$=E(X_i)-E(Y_i)=0$

$D(\bar{X}-\bar{Y})=D(\bar{X})+D(\bar{Y})=\frac{\sigma_1^2}{400}+\frac{\sigma_2^2}{400}=4$

由切比雪夫不等式 $P(|\bar{X}-\bar{Y}-0|\geq\varepsilon)\leq\frac{D(\bar{X}-\bar{Y})}{\varepsilon^2}$

$P(|\bar{X}-\bar{Y}-0|<\varepsilon)\geq 1-\frac{D(\bar{X}-\bar{Y})}{\varepsilon^2}=0.99$

则 $\frac{4}{\varepsilon^2}=0.01$，解得 $\varepsilon=20$.

八、设随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}4xe^{-(2x+y)}, & x>0,y>0\\ 0, & else\end{cases}$，

求（1）$f_X(x)$，$f_Y(y)$；(2) X与Y是否相互独立？说明理由。(3) $f_{Y|X}(y|x)$（4）$Cov(X,Y)$。

解(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{\infty}4xe^{-(2x+y)}dy, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}4xe^{-2x}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^{\infty}4xe^{-(2x+y)}dx, & y>0\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$

(2) 因 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$，故 X与Y相互独立

(3) 当 $x>0$时，$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$

因X与Y相互独立

(4) 故 $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$

九、某厂生产的金属丝，产品指标折断力服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，折断力的方差被用作工厂精度的表征，方差越小，表明精度越高。以往工厂一直把该方差保持在 64 **及以下**。最近从一批产品中抽取了 10 根做折断力测试，测得结果（单位为千克）：$\bar{x}=575.2,s^2=75.73$。为此，厂方怀疑金属丝折断力的方差变大了。

试在显著水平$\alpha = 0.05$下检验厂方的怀疑。（$\chi^2_{0.05}(9) = 16.92$）**（先假设在检验）**

解：按题意需检验

$H_0: \sigma^2 \le \sigma_0^2 = 64$，$H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2 = 64$ （右边检验）

选取检验统计量 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

拒绝域为 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge \chi^2_\alpha(n-1)$ （右边检验的拒绝域）

代入数值 $n=10$, $S^2 = 75.73$, $\sigma_0^2 = 64$, $\alpha = 0.05$，得

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{9 \times 75.73}{64} = 10.65 < \chi^2_{0.05}(9)$$

故没有落在拒绝域，接受原假设H_0，即认为方差没有变大。

十、如果已知某品牌空调使用时间服从正态分布$N(\mu, \sigma^2)$，为了估计空调使用时间的均值。（$\alpha = 0.05$，$t_{0.025}(9) = 2.26$，$\sqrt{10} = 3.16$）

（1）现共测试了 10 台空调，测得$\bar{x} = 1500$小时，$s = 20$小时。求出μ的置信区间**（结果保留两位小数）**。

（2）要使置信区间长度小于 1，样本容量至少应是多少？（改为样本容量需满足什么条件）

解(1) 因 $\dfrac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

故μ的置信水平为0.05的一个置信区间为$\left(\bar{X} - \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), \bar{X} + \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$

代入$\bar{x} = 1500$, $S = 20$, $\alpha = 0.05$

$$\left(1500 - \frac{20}{\sqrt{10}} t_{0.025}(9), 1500 + \frac{20}{\sqrt{10}} t_{0.025}(9)\right)$$

即为$(1485.7, 1514.3)$

置信区间长度

(2) $l = 2\dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < 1$，则 $\cancel{\dfrac{1}{\sqrt{n}} t_{0.05}(n-1) < 0.1}$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} t_{0.025}(n-1) < 0.025$$