

自动控制原理 考前复习

2016.6.7

考试安排

- 考试时间：2016年6月23日 13:45~15:45
- 考试地点：6教北218
- 考试形式：闭卷，8道大题，100分
- 勿忘携带：计算器、画图工具



- 第一题：第二章，10分
- 第二题：第三章，10分
- 第三题：第三章，15分
- 第四题：第四章，10分
- 第五题：第五章，15分
- 第六题：第五、六章，20分
- 第七题：第七章，10分
- 第八题：第八章，10分



1. 考察从结构图求传递函数的掌握情况

(方法不限)

- **题型分析**: 给定某一控制系统的结构图, 求出闭环传递函数
- 估计为10分。
- **解题关键**: 结构图简化或梅森公式, 步骤不可少。



Mason公式

用梅逊公式可以**直接**求信号流图从输入节点到输出节点的增益，其表达式为

$$P = \frac{1}{\Delta} \sum_k P_k \Delta_k$$

P ——系统总增益（对于控制系统的结构图而言，就是输入到输出的传递函数）；

k ——前向通道数目； P_k ——第 k 条前向通道的增益；

Δ ——信号流图的特征式。

Δ_k —— P_k 的余因式。在特征式 Δ 中，将其与第 k 条前向通道接触的回路所在项后除去后余下部分。



- 信号流图的特征式 Δ ，它是信号流图所表示的方程组的系数矩阵的行列式。在同一个信号流图中不论求图中任何一对节点之间的增益，其分母总是 Δ ，变化的只是其分子。

$$\Delta = 1 - \sum L_{(1)} + \sum L_{(2)} - \sum L_{(3)} + \cdots + (-1)^m \sum L_{(m)}$$

$\sum L_{(1)}$ ——所有不同回路增益乘积之和；

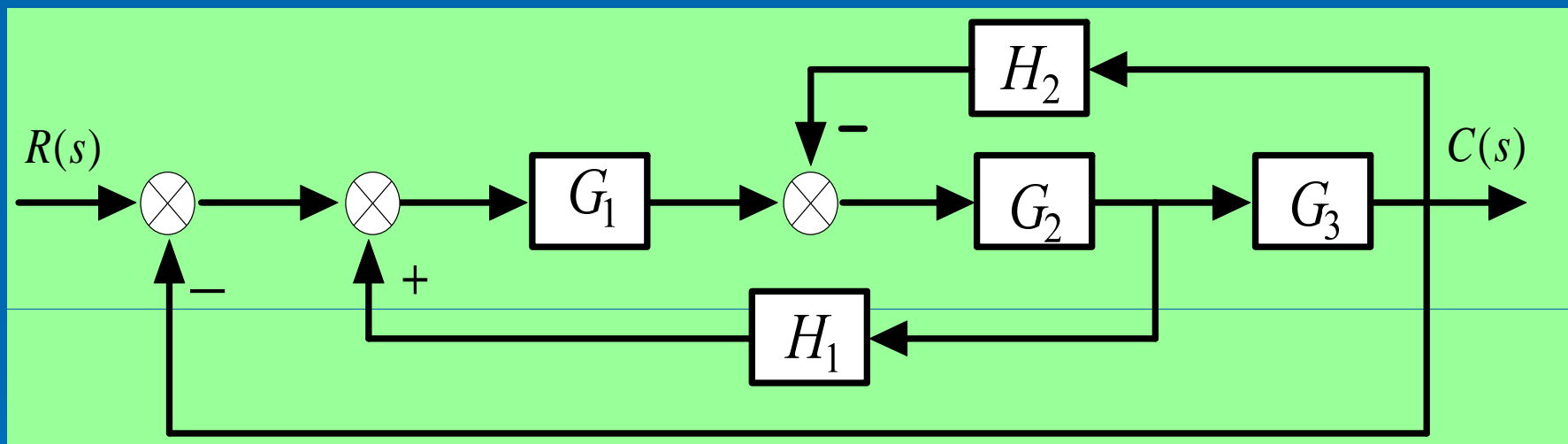
$\sum L_{(2)}$ ——所有任意两个互不接触回路增益乘积之和；

$\sum L_{(3)}$ ——所有任意三个互不接触回路增益乘积之和；

$\sum L_{(m)}$ ——所有任意 m 个不接触回路增益乘积之和。



例1-1 系统的方块图如下所示，试用梅逊公式求系统传递函数 $C(s)/R(s)$ 。



某系统的结构图



解 从图中可以看出，该框图只有一个前向通路，其增益为

$$P_1 = G_1 G_2 G_3$$

有三个独立回路

$$L_1 = G_1 G_2 H_1 \quad L_2 = -G_1 G_2 G_3 \quad L_3 = -G_2 G_3 H_2$$

没有两个及两个以上的互相独立回路。特征式 Δ 为
$$\Delta = 1 - \sum L_{(1)} = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) = 1 - G_1 G_2 H_1 + G_1 G_2 H_3 + G_2 G_3 H_2$$

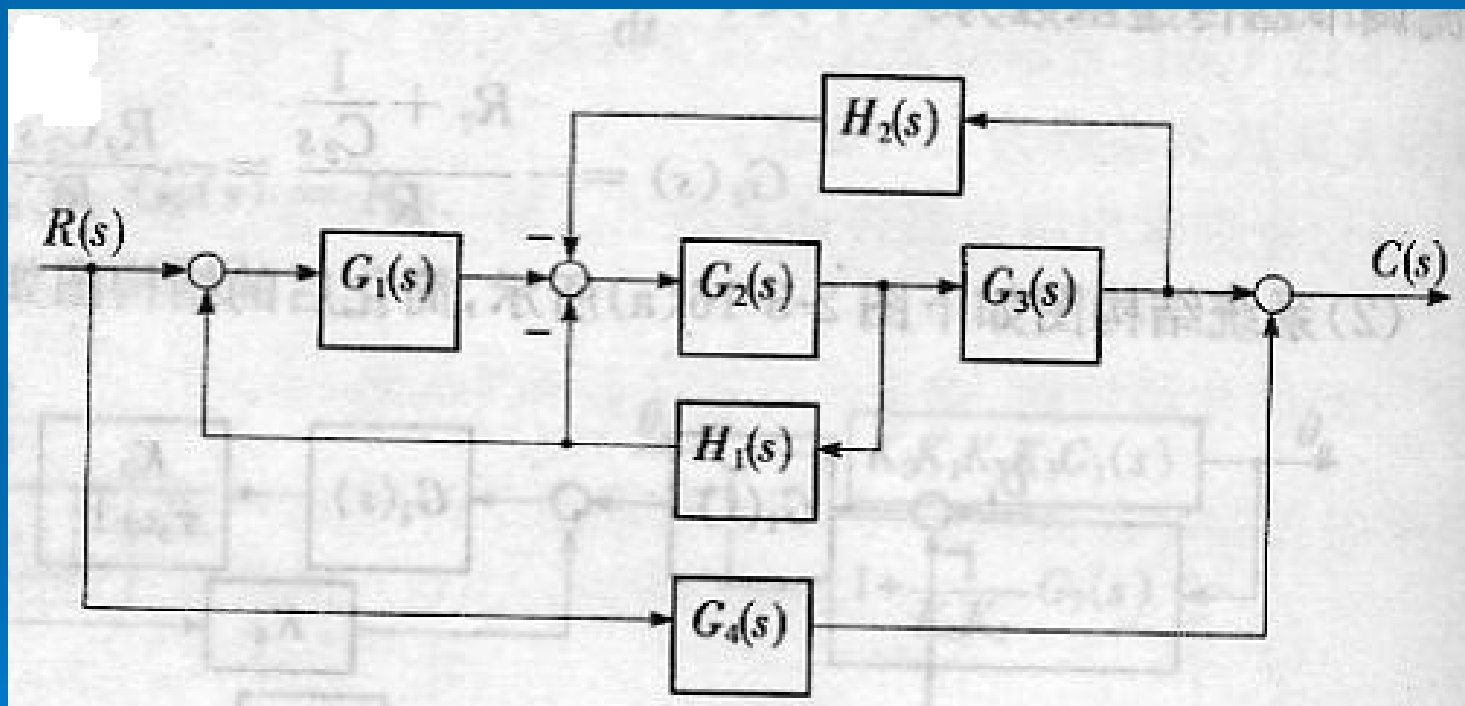
➤ 因为通道 P_1 与三个回路都接触，所以有 $\Delta_1 = 1$ 。

因此，输入和输出之间的总增益或闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = P = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 - G_1 G_2 H_1 + G_1 G_2 H_3 + G_2 G_3 H_2}$$



例1-2 系统的方块图如下所示，试用梅逊公式求系统传递函数 $C(s)/R(s)$ 。



解 从图中可以看出，该框图有两个前向通路，其增益为

$$P_1 = G_1 G_2 G_3, \quad P_2 = G_4$$

有三个独立回路

$$L_1 = -G_1 G_2 G_3 \quad L_2 = G_1 G_2 H_1 \quad L_3 = -G_2 G_3 H_2$$

没有两个及两个以上的互相独立回路。特征式 Δ 为

$$\Delta = 1 - \sum L_{(1)} = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) = 1 - G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3$$

因为通道 P_1 与三个回路都接触，所以有 $\Delta_1 = 1$ 。

因此，输入量和输出量之间的总增益或闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = P = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{P_1 \Delta_1}{1 - (L_1 + L_2 + L_3)} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 G_3 - G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2}$$



第三章

1. 动态性能计算

- **题型分析：** 给定某一控制系统，计算相应的动态性能
- 估计为10分。
- **解题关键：** 超调量和调节时间的计算。



欠阻尼二阶系统单位阶跃响应性能指标计算公式

$$t_r = \frac{\pi - \varphi}{\omega_d} = \frac{\pi - \varphi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{\pi - \arctan(\sqrt{1 - \zeta^2} / \zeta)}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$\sigma_p = e^{-\zeta\pi / \sqrt{1 - \zeta^2}} \times 100\%$$

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = 2t_p$$

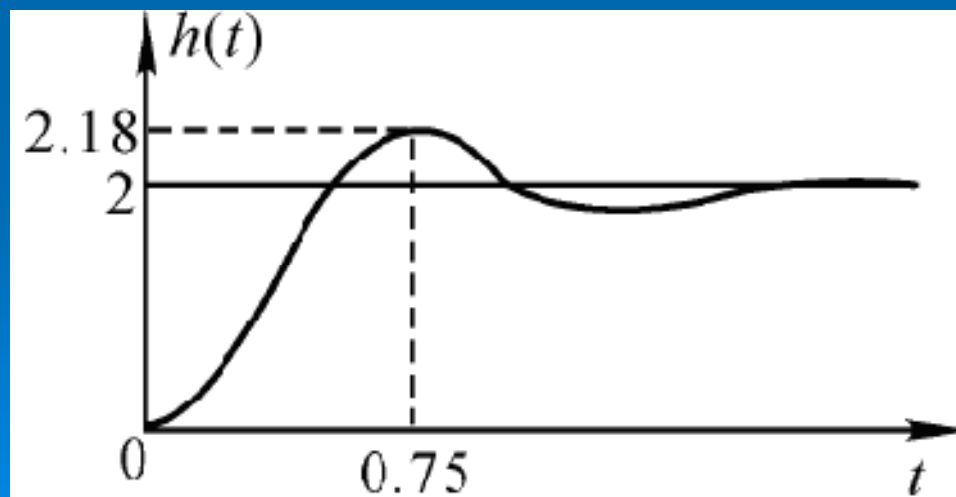
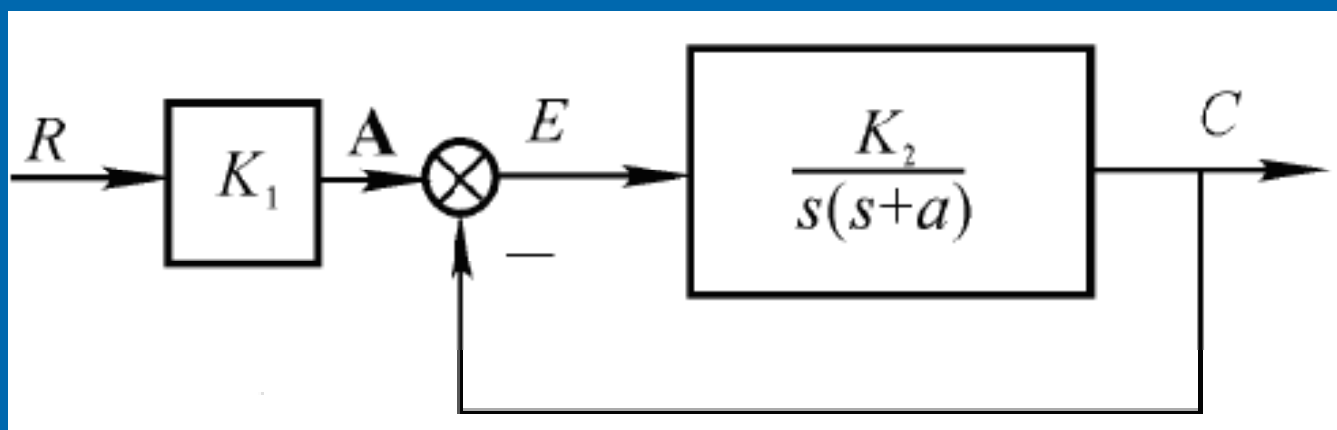
$$t_s \approx \frac{1}{\zeta \omega_n} (3 + \ln \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}})$$

$$N = \frac{t_s}{T_d} = \frac{t_s}{2t_p}$$

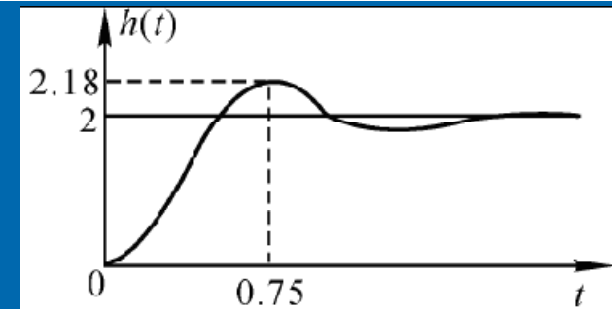
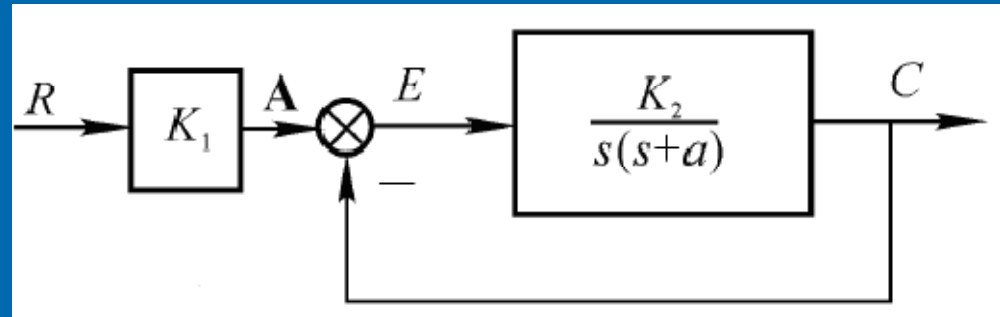
- ◆ 设计二阶系统时，可先由超调量确定阻尼比 ζ ，再由其他指标（如调节时间）和已确定的阻尼比给出自然振荡角频率 ω_n 。



➤ 例：系统的结构图和 $r(t)=1(t)$ 时的响应 $h(t)$ 如下图所示，求 K_1 、 K_2 和 a 。



解：由题意可知



$$h(\infty) = 2$$

$$t_p = 0.75 \text{ s}$$

$$\sigma\% = \frac{2.18 - 2}{2} = 9\%$$

$$h(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \Phi(s) \cdot R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{K_1 K_2}{s^2 + as + K_2} \cdot \frac{1}{s} = K_1 = 2 \quad (1)$$

$$\sigma\% = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.09 \quad \begin{cases} \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = -\frac{\ln 0.09}{\pi} = 0.7665 \\ \zeta = \sqrt{\frac{0.7665^2}{1+0.7665^2}} = 0.60833 (\beta = 52.55^\circ) \end{cases} \quad (2)$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = 0.75 \quad (3)$$



由(1)(2)和(3)可得

$$\omega_n = \frac{\pi}{t_p \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{0.75\sqrt{1-0.608^2}} = 5.236 \text{ rad/s} \quad (4)$$

$$\Phi(s) = \frac{K_1 K_2}{s^2 + as + K_2} = \frac{K_1 \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2} \Rightarrow \begin{cases} K_2 = \omega_n^2 \\ a = 2\zeta \omega_n \end{cases} \quad (5)$$

由(4) (5)和(2)得

$$\begin{cases} K_2 = \omega_n^2 = 5.236^2 = 27.4 \\ a = 2\zeta \omega_n = 2 \times 0.608 \times 5.236 = 6.37 \\ K_1 = 2 \end{cases}$$



➤ 例3-2：设一个带速度反馈的伺服系统，其结构图如图所示。要求系统的性能指标为 $\sigma_p=20\%$ ， $t_p=1\text{ s}$ 。试确定系统的 K 和 K_A 值，并计算性能指标 t_r 、 t_s 和 N 。

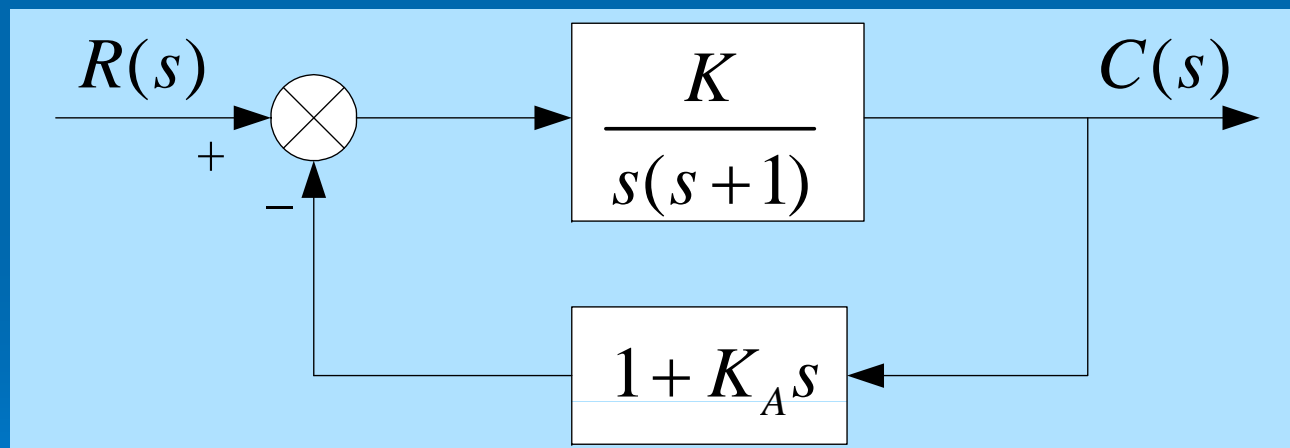


图3-10

解 首先, 根据要求的 σ_p 求取相应的阻尼比 ζ

$$\sigma_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \ln \frac{1}{\sigma_p} = 1.61$$

解得

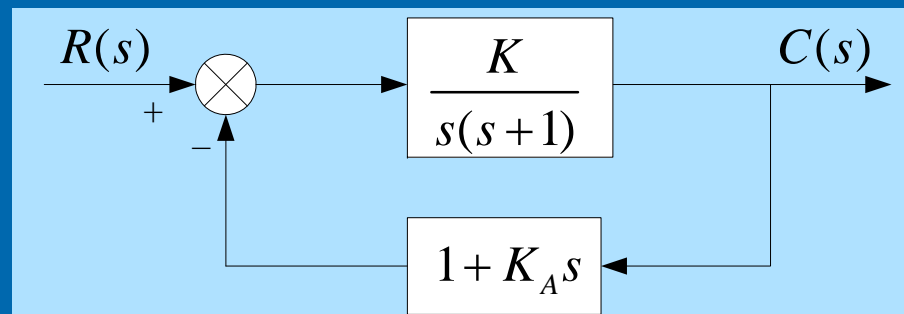
$$\zeta = 0.456$$

其次, 由已知条件 $t_p = 1\text{s}$ 和已求出的 $\zeta = 0.456$ 求无阻尼自振频率 ω_n , 即

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

解得

$$\omega_n = 3.53\text{rad/s}$$



将此二阶系统的闭环传递函数与标准形式比较，求 K 和 K_A 值。由图得

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + (1 + KK_A)s + K} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

比较上式两端，得

$$\omega_n^2 = K, \quad 2\zeta\omega_n = 1 + KK_A$$

所以

$$K = 12.5, \quad K_A = 0.178$$

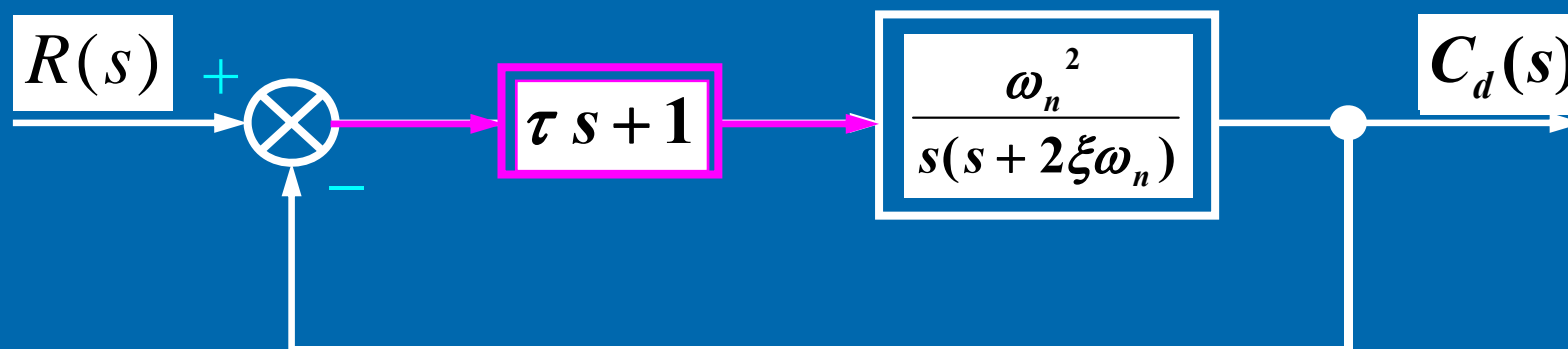
最后计算 t_r 、 t_s 和 N

$$\varphi = \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = 1.1 \text{rad}, \quad t_r = \frac{\pi - \varphi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = 0.65 \text{s}$$

$$t_s = \frac{3}{\zeta \omega_n} = 1.86 \text{s}, \quad N = \frac{t_s}{2t_p} = 0.93 \text{次} \quad (\Delta = 5\%)$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} = 2.48 \text{s}, \quad N = \frac{t_s}{2t_p} = 1.2 \text{次} \quad (\Delta = 2\%)$$

❖ 在前向通道中串联比例-微分环节 (P60习题3-4)



$$\begin{aligned}\Phi_d(s) &= \frac{C_d(s)}{R(s)} = \frac{(\tau s + 1) \times \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)}}{1 + (\tau s + 1) \times \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)}} = \frac{\omega_n^2(\tau s + 1)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \tau\omega_n^2 s + \omega_n^2} \\ &= \frac{\omega_n^2(\tau s + 1)}{s^2 + 2(\xi + \frac{\tau\omega_n}{2})\omega_n s + \omega_n^2}\end{aligned}$$



$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\Phi_d(s) = \frac{\omega_n^2 (\tau s + 1)}{s^2 + 2(\xi + \frac{\tau\omega_n}{2})\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\xi_d = \xi + \frac{\tau\omega_n}{2}$$

增加了系统的阻尼比!!

结论:

- 1、在欠阻尼二阶系统的前向通道中加入比例微分环节后，将使系统的阻尼比增加，有效地减小原二阶系统阶跃响应的超调量。
- 2、由于闭环系统传递函数中加入了一个零点，缩短了调节时间。



第三章

2. 劳斯判据的应用（可能与其他考点结合）

- **题型分析：** 给定某一控制系统，利用劳斯判据判断闭环系统的稳定性
- 估计为10分。
- **解题关键：** 劳斯判据（劳斯表）。



$$a_0 S^n + a_1 S^{n-1} + a_2 S^{n-2} + \cdots + a_{n-1} S + a_n = 0 \quad a_0 > 0$$

各项系数按下面的格式排成劳斯表

S^n	a_0	a_2	a_4	a_6	\cdots
S^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	\cdots
S^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	\cdots
S^{n-3}	c_1	c_2	c_3	\cdots	
.					
.					
.					
S^2	d_1	d_2	d_3		
S^1	e_1	e_2			
S^0	f_1				

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$

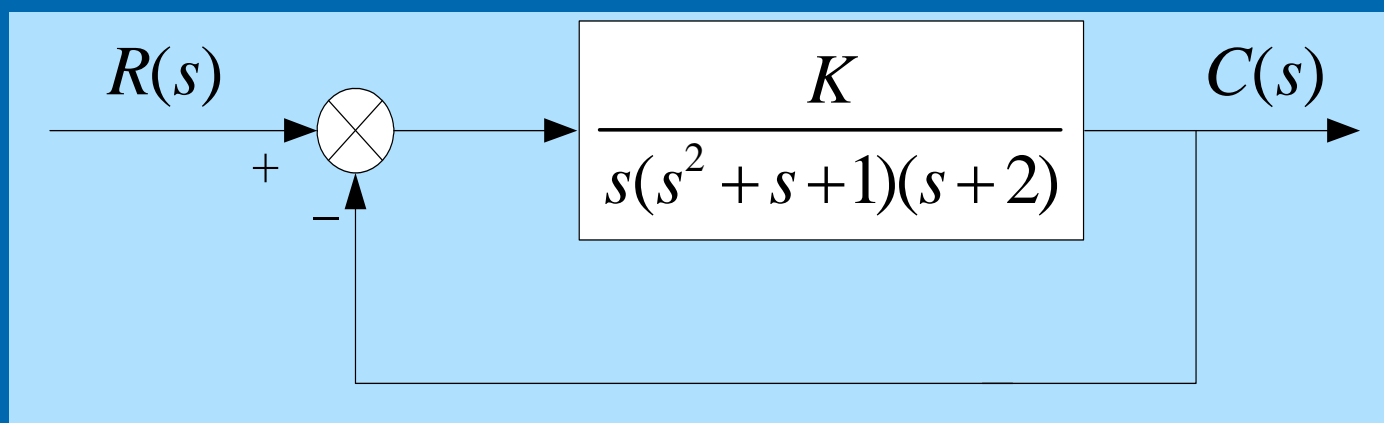
$$b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}, \cdots$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$$



例3-4: 考虑下图所示的系统，确定使系统稳定的 K 的取值范围。



解 由图可知，系统的闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s^2 + s + 1)(s + 2) + K}$$



所以系统的特征方程为

$$D(s) = s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

由稳定的必要条件可知， $K > 0$ 。列劳斯表如下

s^4	1	3	K
s^3	3	2	0
s^2	$7/3$	K	
s^1	$2 - 9K/7$		
s^0	K		



根据劳斯判据，系统稳定必须满足

$$K > 0$$

$$2 - 9K/7 > 0$$

s^4	1	3	K
s^3	3	2	0
s^2	$7/3$	K	
s^1	$2 - 9K/7$		
s^0	K		

因此，使系统闭环稳定的 K 的取值范围为

$$0 < K < 14/9$$

当 $K = 14/9$ 时，系统处于临界稳定状态。



第三章

3. 稳态误差计算

- **题型分析：** 给定某一控制系统的开环传递函数，求出闭环系统在特定输入信号下的稳态误差
- 估计为15分。
- **解题关键：** 系统类型的定义， K_p 、 K_v 、 K_a 的计算，稳态误差定义、公式。

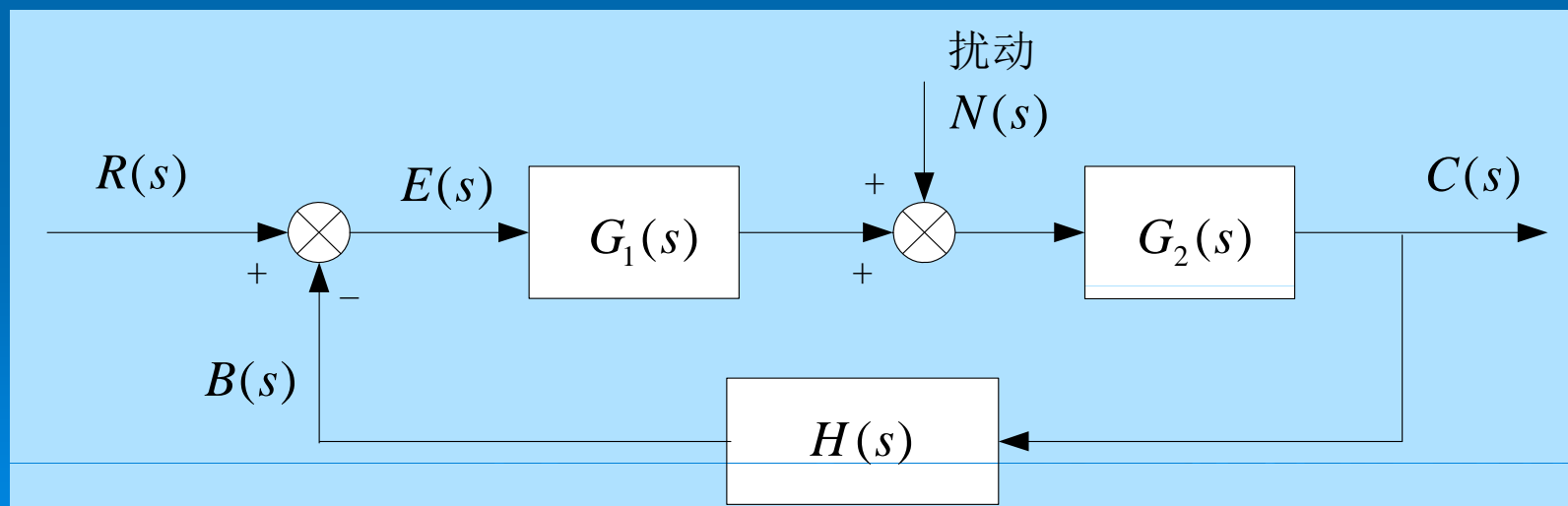


$$E_r(s) = \frac{1}{1 + G_o(s)} R(s)$$

$$e_{sr} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E_r(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G_o(s)} R(s)$$

e_{sr} 为给定稳态误差的终值;

$G_o(s)=G_1(s)G_2(s)H(s)$ 为开环传函数。



对于给定输入为**单位阶跃函数**时

则

$$r(t) = 1(t)$$

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

$$e_{sr} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G_o(s)} R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G_o(s)} = \frac{1}{1 + K_p}$$

K_p 为**静态位置误差系数**，或称**阶跃误差常数**。

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_o(s)$$



对于给定输入为单位斜坡函数时

$$r(t) = t$$

$$R(s) = \frac{1}{s^2}$$

则

$$e_{sr} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G_o(s)} R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G_o(s)} \frac{1}{s} = \frac{1}{K_v}$$

K_v 为静态速度误差系数，或称斜坡误差常数。

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_o(s)$$



对于给定输入为**单位抛物线函数**时

则

$$r(t) = \frac{1}{2} t^2$$

$$R(s) = \frac{1}{s^3}$$

$$e_{sr} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G_o(s)} R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G_o(s)} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{K_a}$$

K_a 为**加速度误差系数**，或称**抛物线误差常数**

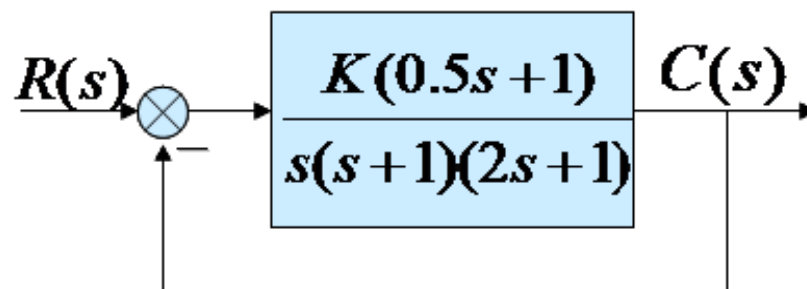
$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_o(s)$$



系统 类型	静态误差系数			稳态误差		
	K_p	K_v	K_a	$1(t)$	t	$\frac{1}{2}t^2$
0型	K	0	0	$\frac{1}{1+K}$	∞	∞
I型	∞	K	0	0	$\frac{1}{K}$	∞
II型	∞	∞	K	0	0	$\frac{1}{K}$



例:系统结构图如图所示, 当输入信号为单位斜坡函数时, 求系统在输入信号作用下的稳态误差; 调整K值能使稳态误差小于0.1吗?



解: 只有稳定的系统计算稳态误差才有意义, 所以先判稳

系统特征方程为 $2s^3 + 3s^2 + (1 + 0.5K)s + K = 0$

由劳斯判据知稳定的条件为: $0 < K < 6$

$$\Phi_E(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_k(s)} = \frac{s(s+1)(2s+1)}{s(s+1)(2s+1) + K(0.5s+1)}$$

$$R(s) = \frac{1}{s^2} \quad E(s) = \frac{s(s+1)(2s+1)}{s(s+1)(2s+1) + K(0.5s+1)} \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s(s+1)(2s+1)}{s(s+1)(2s+1) + K(0.5s+1)} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{K}$$

由稳定的条件知: $e_{ss} > \frac{1}{6}$ 不能满足 $e_{ss} < 0.1$ 的要求

4. 简单根轨迹的绘制（已知零极点分布图）

- **题型分析：** 给定某系统的开环零极点分布图，绘制出对应的闭环系统根轨迹
- 估计为10分。
- **解题关键：** 实轴根轨迹绘制，渐近线的绘制，分离点计算，变换为零极点增益的标准形式。
- **注意事项：** 如果零极点分布图上未标明坐标位置，则只需概要画出形状和走势



- 规则一：根轨迹各条分支是连续、关于实轴对称
- 规则二：系统的根轨迹起点为开环极点，终点为开环零点（或无穷远处）。
- 规则三：实轴上根轨迹区段右侧的开环零极点数目之和为奇数。
- 规则四：分离点方程

$$\frac{dK}{ds} = 0$$

或

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{N(s)}{M(s)} \right) = \frac{N(s)M'(s) - N'(s)M(s)}{M^2(s)} = 0$$

$$N(s)M'(s) - N'(s)M(s) = 0$$

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{d - z_j} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d - p_i}$$



➤ 规则五 根轨迹的渐近线

- 如果开环零点的数目 m 小于开环极点数 n ，即 $n > m$ ，则有 $(n - m)$ 条根轨迹沿着渐近线终止于无穷远处。渐近线的方位可由下面的方程决定
- 渐近线与实轴的交点坐标

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m}$$

- 渐近线与实轴正方向的夹角

$$\varphi_a = \frac{\pm 180^\circ (2k+1)}{n-m} \quad (k=0,1,2,\dots)$$



➤ 规则六 根轨迹与虚轴的交点

- 根轨迹与虚轴相交，说明控制系统有位于虚轴上的闭环极点，即特征方程含有纯虚数的根。
将 $s=j\omega$ 代入特征方程，则有 (实部虚部均为0)

$$1+G(j\omega)H(j\omega)=0$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[1+G(j\omega)H(j\omega)]=0 \\ \operatorname{Im}[1+G(j\omega)H(j\omega)]=0 \end{cases}$$

- 求解上式，就可以求得根轨迹与虚轴的交点 ω 坐标，以及此交点对应的临界参数 K_c 。



例4-3 已知一四阶系统的特征方程为

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+4)^2} = 0$$

➤ 试大致绘制其根轨迹。

解 先在复平面上标出开环零极点的位置，极点用“×”表示，零点用“o”表示，并根据实轴上根轨迹的确定方法绘制系统在实轴上的根轨迹（如图 4-4 (a) 所示）。

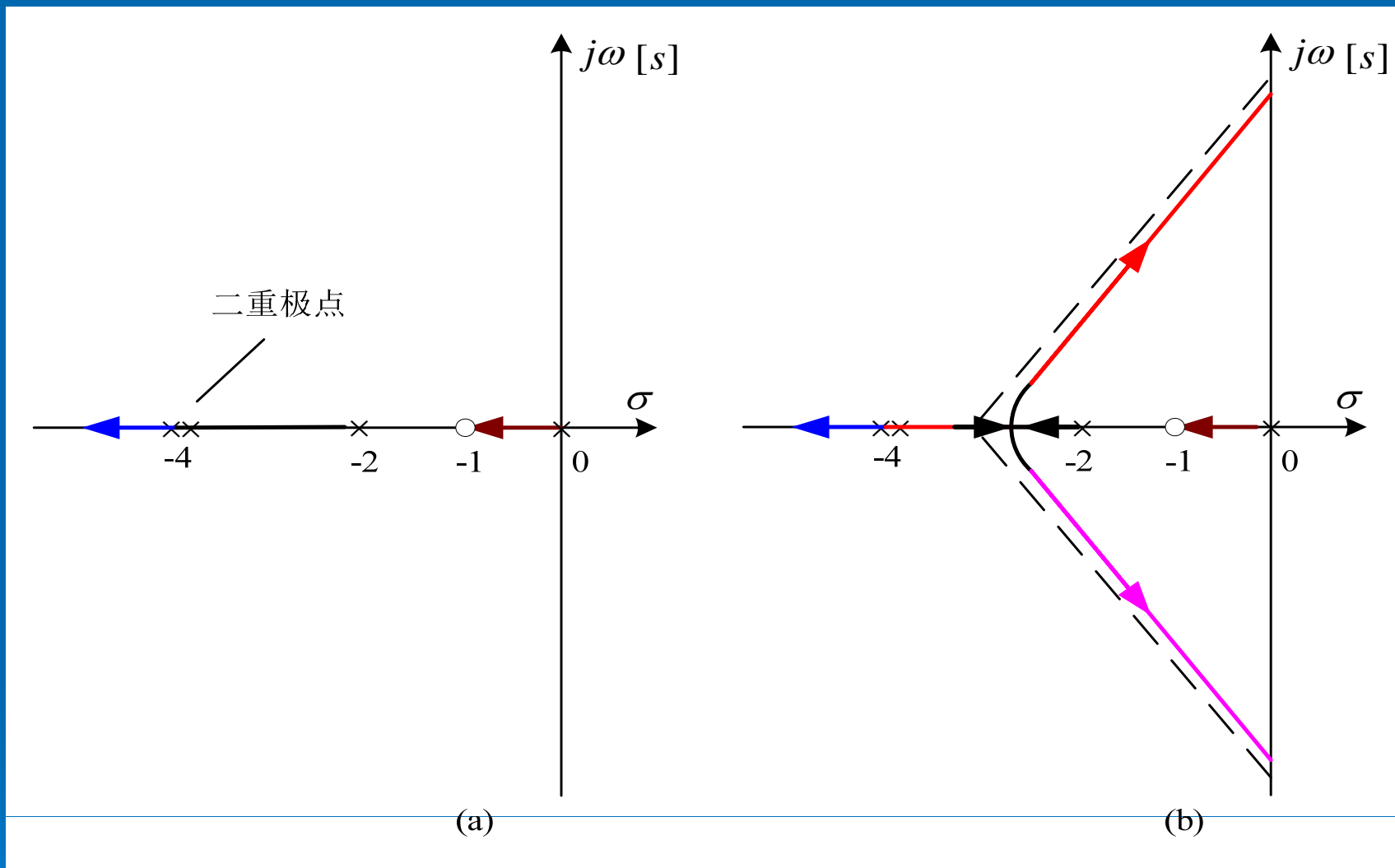
根据根轨迹与实轴的交点和夹角的计算公式有

$$\sigma_a = \frac{(-2) + 2(-4) - (-1)}{4 - 1} = -3$$

$$\varphi_{a1} = 60^\circ \ (k=0), \ \varphi_{a2} = 180^\circ \ (k=1), \ \varphi_{a3} = 300^\circ \ (k=2)$$

结合实轴上的根轨迹，绘制系统的根轨迹如图 4-4 (b) 所示。





根轨迹图



➤ 确定其分离点坐标

解 利用分离点计算公式有

$$d_1 = -4, \quad d_2 = -2.5994, \quad d_{34} = -0.7003 \pm 0.7317j$$

将这四个值代入闭环系统方程, 可知 d_{34} 对应的 K 不满足大于零的要求, 所以将其舍去。另外, 可以发现 $d_1 = -4$ 正是系统的开环极点 (对应 $K = 0$ 时系统的闭环极点), 是一个重根。所以此系统的分离点坐标为 $(-2.5994, 0j)$ 。



➤ 求系统根轨迹与虚轴的交点坐标。

解 将 $s = j\omega$ 代入例 4-2 所给出的系统的特征方程，可得

$$\omega^4 - j10\omega^3 - 32\omega^2 + j(32+K)\omega + K = 0$$

写出实部和虚部方程

$$\omega^4 - 32\omega^2 + K = 0, \quad 10\omega^3 - (32+K)\omega = 0$$

由此求得根轨迹与虚轴的交点坐标为

$$\omega_{12} = \pm 4.5204, \quad \omega_{34} = \pm 1.2514$$

因为 ω_{34} 对应的 K 小于零，所以舍去。因此，系统根轨迹与虚轴交点坐标为 $(0, \pm 4.5204j)$ 。



例：某单位反馈系统

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = \frac{0+(-1)+(-2)}{3-0} = -1$$

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \pi$$

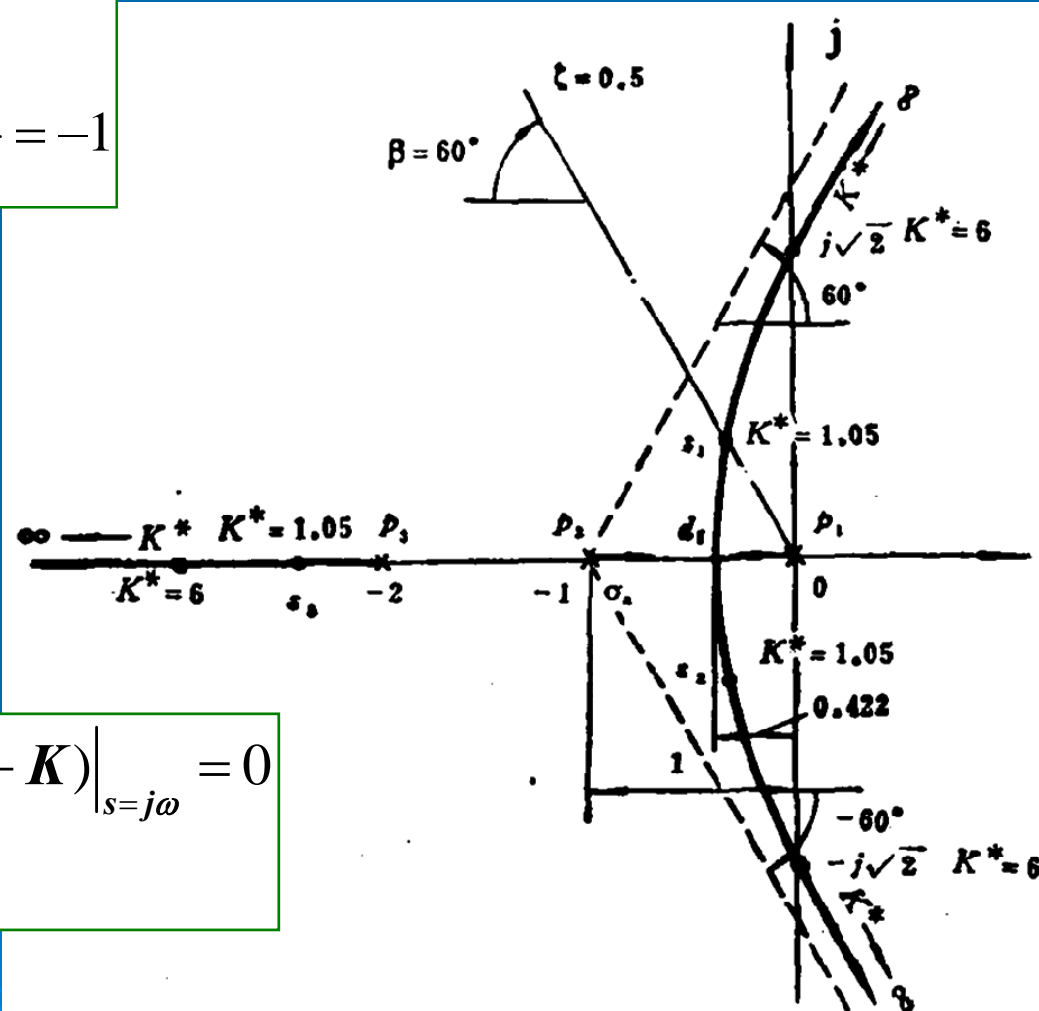
$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+1} + \frac{1}{d+2} = 0$$

$$d_1 = -0.42, d_2 = -1.58 (\text{舍去})$$

$$1 + G(s)H(s) = 0 \text{ 即 } (s^3 + 3s^2 + 2s + K) \Big|_{s=j\omega} = 0$$

$$\rightarrow -j\omega^3 - 3\omega^2 + 2j\omega + K = 0$$

$$\omega = \pm\sqrt{2}, K = 6$$

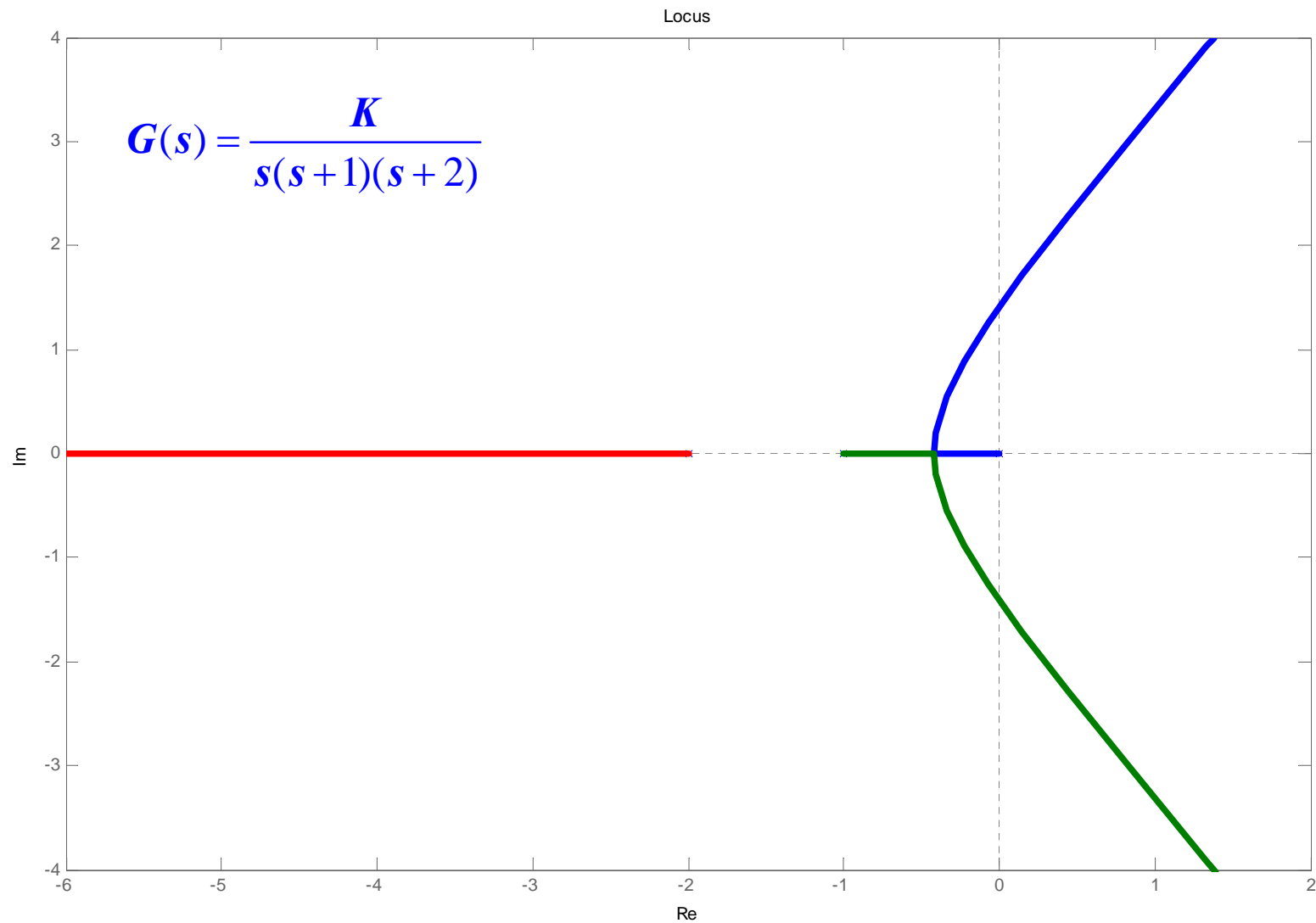


➤ 开环增益为 $K=K^*/2$ ， K 的稳定域为 $0 < K < 3$ 。



杭州电子科技大学

Hangzhou Dianzi University



5. Nyquist稳定性（要求画图）

- **题型分析：**给定某一控制系统的开环传递函数，绘制出奈氏图，并判断闭环系统稳定性
- 估计为15分。
- **解题关键：**奈氏图绘制，与负实轴交点的计算，奈氏定理



已知系统开环传递函数

$$G(s)H(s) = \frac{1}{s(5s+1)(s^2+s+1)}$$

- (1) 试绘制系统开环频率特性曲线（奈氏图）；
- (2) 利用奈奎斯特稳定判据分析系统的稳定性。



Nyquist图绘制方法

- ① 写出 $A(\omega)$ 和 $\varphi(\omega)$ 的表达式;
- ② 分别求出 $\omega = 0^+$ 和 $\omega = +\infty$ 时的 $G(j\omega)$;
- ③ 求Nyquist图与实轴的交点;
- ④ 勾画出大致曲线;
- ⑤ 关于实轴对称地镜像画出另外半幅图
- ⑥ 画出从 $\omega=0^-$ 变化到 $\omega=0^+$ 时的曲线



- **Nyquist稳定判据**: 闭环控制系统稳定的充分和必要条件是, 当 ω 从 $-\infty$ 变化到 $+\infty$ 时, 系统的开环频率特性 $G(j\omega)H(j\omega)$ 按逆时针方向包围 $(-1, j0)$ 点 $N = P$ 周, P 为位于 s 平面右半部的开环极点数目。
- 如果 $N \neq P$, 说明闭环系统不稳定。闭环系统分布在右半 s 平面的极点数 $Z = P - N$ 。
- 如果开环稳定, 即 $P=0$, 则闭环系统稳定的条件是: 映射曲线 C_{GH} 围绕 $(-1, j0)$ 的圈数为 $N=0$ 。



二阶振荡环节(要重视!!)

频率特性

$$G(j\omega) = \frac{\omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2} = \frac{1}{1 + j2\zeta\omega T + (j\omega T)^2}$$

幅频特性和相频特性和对数幅频特性和相频特性

$$\begin{cases} A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + (2\zeta\omega T)^2}} \\ \varphi(\omega) = -\arctg\left(\frac{2\zeta\omega T}{1 - \omega^2 T^2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} L(\omega) = -20\lg\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + (2\zeta\omega T)^2} \\ \varphi(\omega) = -\arctg\left(\frac{2\zeta\omega T}{1 - \omega^2 T^2}\right) \end{cases}$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\arctg\left(\frac{2\zeta\omega T}{1 - \omega^2 T^2}\right) & (\omega T \leq 1) \\ \varphi(\omega) = -\pi - \arctg\left(\frac{2\zeta\omega T}{1 - \omega^2 T^2}\right) & (\omega T > 1) \end{cases}$$



➤ 例5-1 已知开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(0.5s + 1)(s + 1)(2s + 1)}$$

试绘制(1) $K=5$, (2) $K=15$ 时的乃氏图, 并判断系统的稳定性。



解 (1) 当 $K=5$ 时, 开环幅频特性和相频特性分别为

$$A(\omega) = \frac{5}{\sqrt{1+0.25\omega^2} \sqrt{1+\omega^2} \sqrt{1+4\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg(0.5\omega) - \arctg\omega - \arctg(2\omega)$$

从而有 $\omega = 0^+$ 时, $A(\omega) = 5, \varphi(\omega) = 0^\circ$; $\omega = +\infty$ 时, $A(\omega) = 0, \varphi(\omega) = -270^\circ + \Delta$, 故奈氏图在第 II 象限趋向终点 $(0, j0)$ 。因为相角范围从 0° 到 -270° , 所以必有与负实轴的交点。令

$$\varphi(\omega) = -\arctg(0.5\omega) - \arctg\omega - \arctg(2\omega) = -\alpha - \beta - \gamma = -180^\circ$$

则

$$\begin{aligned} \tg(\alpha + \beta + \gamma) &= \frac{\tg(\alpha + \beta) + \tg\gamma}{1 - \tg(\alpha + \beta)\tg\gamma} \\ &= \frac{(\tg\alpha + \tg\beta)/(1 - \tg\alpha\tg\beta) + \tg\gamma}{1 - \tg(\alpha + \beta)\tg\gamma} \\ &= \tg 180^\circ = 0 \end{aligned}$$



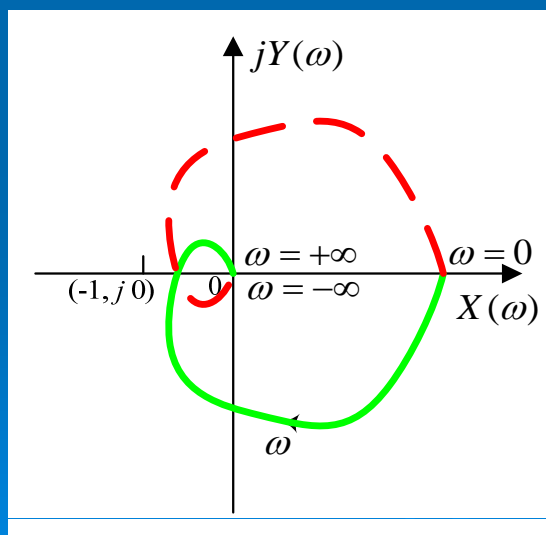
即

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma = 0, \quad 0.5 \omega + \omega + 2 \omega = 0.5 \omega \cdot \omega \cdot 2 \omega$$

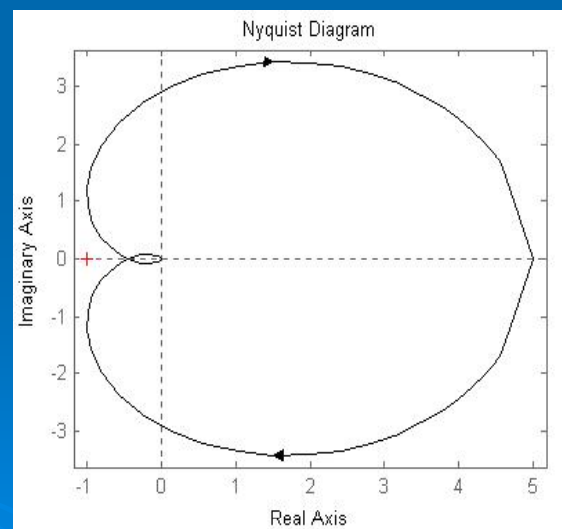
解得 $\omega = 1.87$ ，此时 $A(\omega) = 0.44$ ，因此与实轴的交点在 $(-1, j0)$ 点的右侧。奈氏图如图 5-37 所示。因为 s 平面右半部的开环极点数 $P=0$ ，且奈氏曲线不包围 $(-1, j0)$ 点，即 $N=0$ ，则 $Z=P-N=0$ ，所以系统稳定。

(2) 当 $K=15$ 时，奈氏图形状与(1)相同，只是以坐标原点为中心，向外“膨胀”而已。“膨胀”的倍数为 $15/5=3$ ，即 $A(\omega) = 0.44 \times 3 = 1.32$ ，交点在 $(-1, j0)$ 点的左侧。因为 s 平面右半部的开环极点数 $P=0$ ，且奈氏曲线顺时针包围 $(-1, j0)$ 点 2 次，即 $N=-2$ ，则 $Z=P-N=2$ ，所以系统不稳定，有两个闭环极点在 s 平面右半部。

```
nyquist([5],conv(conv([0.5 1],[1 1]),[2 1]))
```



例5-9的乃氏图



MATLAB绘制例5-9的乃氏图



➤ 例5-2 绘制开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+2)}$$

的Nyquist图，并判断闭环系统的稳定性。

解 开环幅频特性和相频特性分别

$$A(\omega) = \frac{10}{\omega\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{\omega^2+4}}$$

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctg \omega - \arctg 0.5\omega$$

$$\omega = 0^+ : A(\omega) = \infty, \varphi(\omega) = -90^\circ - \Delta$$

$$\omega = +\infty : A(\omega) = 0, \varphi(\omega) = -270^\circ + \Delta$$

起点在第III象限，在第II象限趋向终点(0, j0)

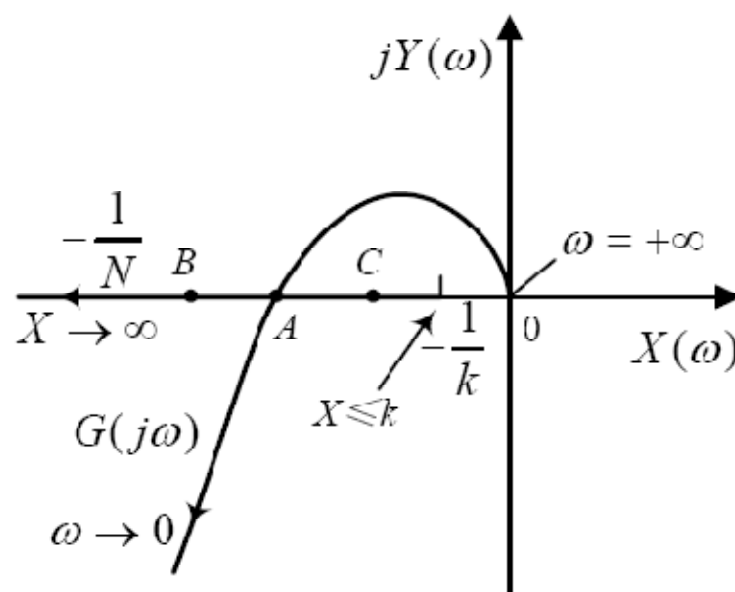


$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(jT_1\omega + 1)(jT_2\omega + 1)} = \frac{K}{(T_1 + T_2)\omega^2 + j\omega(1 - T_1T_2\omega^2)}$$

对于线性部分，当 $\omega \rightarrow 0$ 时， $G(j\omega) = \infty \angle -90^\circ$ ；当 $\omega \rightarrow +\infty$ 时， $G(j\omega) = 0 \angle -270^\circ$ 。

$G(j\omega)$ 乃氏曲线与负实轴有一交点，交点坐标为 $(-KT_1T_2/(T_1 + T_2), j0)$ ，交点频率为

$1/\sqrt{T_1T_2}$ 。本题饱和非线性描述函数的负倒特性曲线和线性部分频率特性的乃氏曲线为：



因为相角范围从 -90° 到 -270° ，所以必有与负实轴的交点。由 $\varphi(\omega) = -180^\circ$ 得

$$-90^\circ - \arctg \omega - \arctg 0.5\omega = -180^\circ$$

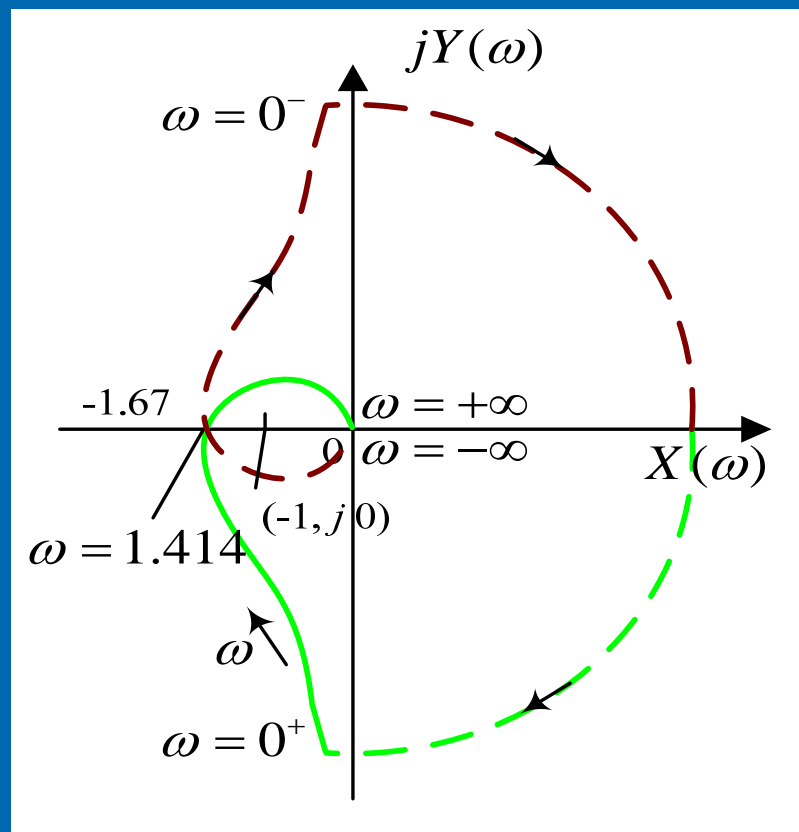
即 $\omega = 1.414$ ，此时 $A(\omega) = 1.67$ 。因此乃氏图与实轴的交点为 $(-1.67, j0)$

- 系统开环传递函数有一极点在 s 平面的原点处，因此乃氏回线中半径为无穷小量 ε 的半圆弧对应的映射曲线是一个半径为无穷大的圆弧：

$$\omega: 0^- \rightarrow 0^+; \theta: -90^\circ \rightarrow 0^\circ \rightarrow +90^\circ;$$

$$\varphi(\omega): +90^\circ \rightarrow 0^\circ \rightarrow -90^\circ$$





例5-10的乃氏图

- 因为 s 平面右半部开环极点数 $P=0$ ，且乃氏曲线顺时针包围 $(-1, j0)$ 点2次，即 $N=-2$ ，则 $Z=P-N=2$ ，所以系统不稳定，有两个闭环极点在 s 平面右半部。



➤ 例5-3 绘制开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{10}{s^2(s+1)(s+2)}$$

的乃氏图，并判断系统的稳定性。

解 开环幅频特性和相频特性分别

$$A(\omega) = \frac{10}{\omega^2 \sqrt{1+\omega^2} \sqrt{\omega^2+4}}$$

$$\varphi(\omega) = -180^\circ - \arctg \omega - \arctg 0.5\omega$$

$$\omega = 0^+ : \quad A(\omega) = \infty, \varphi(\omega) = -180^\circ - \Delta$$

$$\omega = +\infty : \quad A(\omega) = 0, \varphi(\omega) = -360^\circ + \Delta$$

故乃氏图起点在第 II 象限；在第 I 象限趋向终点(0, $j0$)。



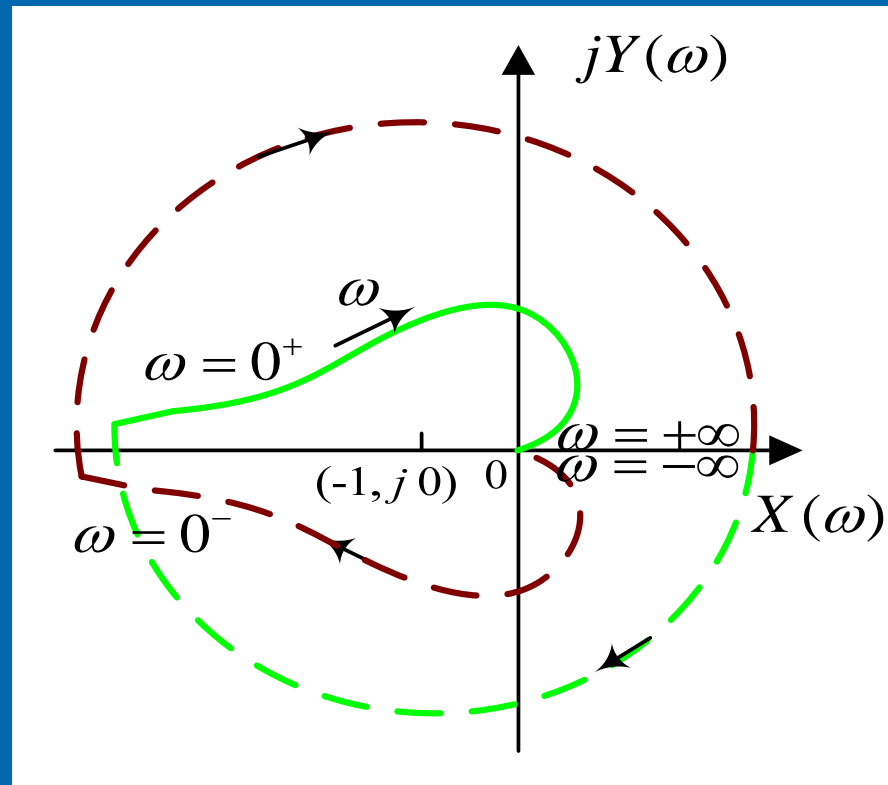
- 系统开环传递函数有2个极点在s平面的原点处，因此乃氏回线中半径为无穷小量 ε 的半圆弧对应的映射曲线是一个半径为无穷大的圆弧

$$\omega: 0^- \rightarrow 0^+; \theta: -90^\circ \rightarrow 0^\circ \rightarrow +90^\circ ;$$

$$\varphi(\omega): +180^\circ \rightarrow 0^\circ \rightarrow -180^\circ$$

开环系统Nyquist图如下所示:





例5-10的乃氏图

- 因为 s 平面右半部的开环极点数 $P = 0$ ，且乃氏曲线顺时针包围 $(-1, j0)$ 点2次，即 $N = -2$ ，则 $Z = P - N = 2$ ，所以系统不稳定，有两个闭环极点在 s 平面右半部。



6. 串联超前校正的计算

- **题型分析**: 给定某一控制系统的开环传函及串联迟后环节, 求出系统校正前后的稳定裕度、剪切频率等
- 估计为20分。
- **需要画图!!!**
- **解题关键**: a 的大小, 在校正后剪切频率出的校正网络增益值 $10\lg a$, 及 $\omega_{c2}=\omega_m$



几点说明:

➤ 串联相位超前校正的优点:

- 增大系统相角裕度，降低系统响应的超调量；
- 增加系统带宽，加快系统响应速度。

➤ 超前校正的基本原理：利用超前校正网络的相角超前特性去增大系统相角裕度，以改善系统的暂态响应。

2. 设 I 型单位反馈系统开环传递函数为 $G(s) = \frac{200}{s(0.1s+1)}$ ，求出其截止频率 ω_c 和相角裕度 γ ；若设计串联超前校正装置为 $G_c(s) = \frac{0.0316s+1}{0.0079s+1}$ ，求校正后系统的截止频率 ω_{c2} 和相角裕度 γ_2 。 (15 分)

解：1) 未校正系统的伯德图如下图中的曲线 G_0 ，可以计算出其剪切频率 ω_{c1} 。

$$20\lg(10/1) + 40\lg(\omega_{c1}/10) = 20\lg K = 20\lg 200 \quad (2)$$

$$\omega_{c1} = \sqrt{2000} = 44.72s^{-1}。 \quad (2)$$

于是未校正系统的相角裕度为

$$\gamma_0 = 180^\circ - 90^\circ - \arctg \omega_{c1} = 90^\circ - \arctg(44.72/10) = 11.96^\circ \quad (2)$$



2) 引入串联超前校正网络 $G_c(s) = \frac{0.0316s+1}{0.0079s+1}$, 则

$$\alpha = 0.0316 / 0.0079 = 4$$

在校正后系统剪切频率 $\omega_{c2} = \omega_m$ 处, 校正网络的增益应为

$$10 \lg \alpha = 10 \lg 4 = 40 \lg \sqrt{2} = 6 \text{dB}$$

$$\omega_{c2} = \omega_m = \sqrt{\alpha} \omega_1 = \sqrt{4} \times (1 / 0.0316) = 63.29 \text{s}^{-1} \quad \textcircled{2}$$

或: $L_o(\omega) = -6 \text{dB} = -40 \lg(\omega_{c2} / \omega_{c1}) = -40 \lg(\omega_{c2} / 44.72)$,

$$\omega_{c2} = 44.72 \times \sqrt{2} = 63.24 \text{s}^{-1}$$

经过超前校正, 系统开环传递函数为

$$G(s) = G_c(s)G_o(s) = \frac{10(0.0316s+1)}{s(0.1s+1)(0.0079s+1)}$$

其相角裕度为

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= 180^\circ - 90^\circ + \arctg(0.0316 * 63.29) - \arctg(0.1 * 63.29) - \arctg(0.0079 * 63.29) \quad \textcircled{2} \\ &= 90^\circ + 63.43^\circ - 81.02^\circ - 26.56^\circ = 45.85^\circ \end{aligned}$$



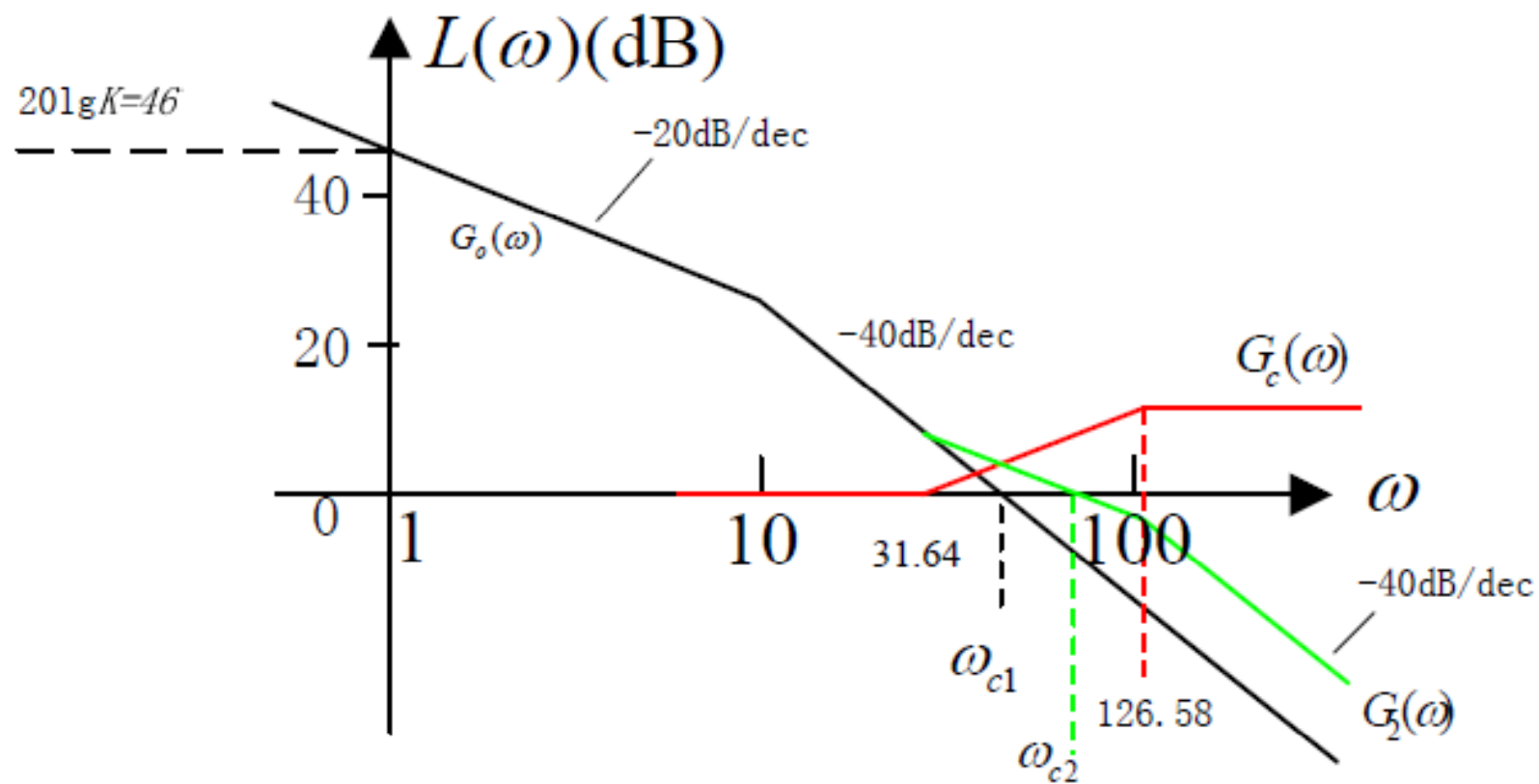


图 ⑤



7. 闭环脉冲传递函数及系统稳定性

- **题型分析**: 给定某一控制系统的结构框图, 求出闭环系统的脉冲传递函数, 判断系统稳定性
- 估计为10分。可能有保持器、多个采样开关
- 估计为2阶系统带保持器(时间、计算量)
- 作业3、5、6中计算到闭环脉冲传递函数
- **解题关键**: Z变换, 采样开关前后传函处理, 稳定域(单位圆、双线性变换-劳斯判据)



➤ **例7-15** 设采样系统如图7-18所示，采样周期 $T = 0.25\text{s}$ ，求能使系统稳定的 K 值范围。

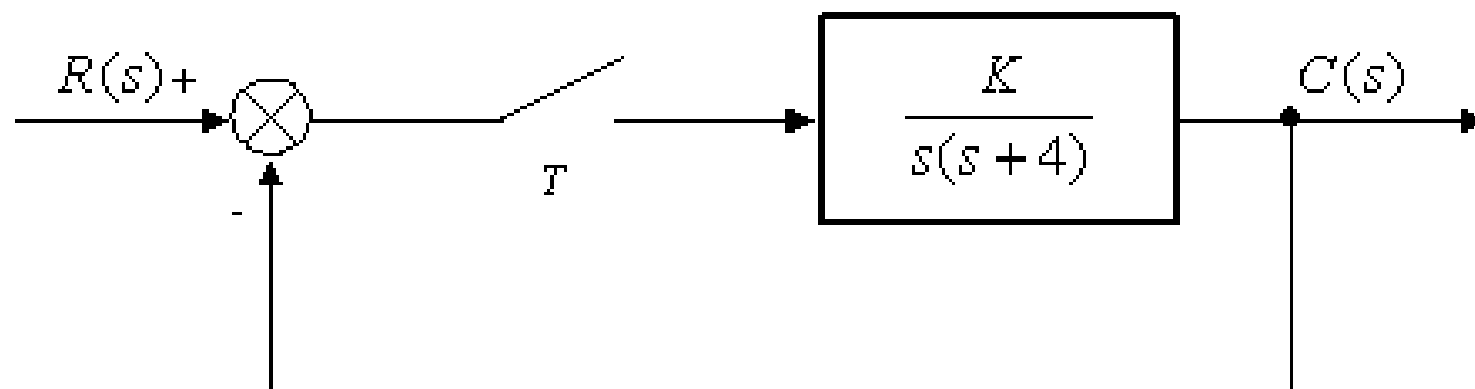


图 7-18 采样系统



解 开环脉冲传递函数为

$$\begin{aligned} G(z) &= Z\left(\frac{K}{s(s+4)}\right) = Z\left[\frac{K}{4}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+4}\right)\right] \\ &= \frac{K}{4}\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-4T}}\right) = \frac{K}{4} \cdot \frac{(1-e^{-4T})z}{(z-1)(z-e^{-4T})} \end{aligned}$$

闭环传递函数为 $G_c(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)}$

闭环系统的特征方程为 $1+G(z)=0$

$$(z-1)(z-e^{-4T}) + \frac{K}{4}(1-e^{-4T})z = 0$$

令 $z = \frac{w+1}{w-1}$, $T=0.25s$ 代入上式得

$$\left(\frac{w+1}{w-1} - 1\right)\left(\frac{w+1}{w-1} - 0.368\right) + 0.158K \frac{w+1}{w-1} = 0$$



整理后可得

$$0.158Kw^2 + 1.264w + (2.736 - 0.158K) = 0$$

列劳斯表为

w^2	$0.158K$	$2.736 - 0.158K$
w^1	1.264	
w^0	$2.736 - 0.158K$	

要使系统稳定，必须使劳斯表中第一列各项大于零，即

$$0.158K > 0 \text{ 和 } 2.736 - 0.158K > 0$$

所以使系统稳定的 K 值范围是 $0 < K < 17.3$ 。



除了应用劳斯方法，还有没有其他方法？ $|z| < 1$

由特征方程 $(z-1)(z-e^{-4T}) + \frac{K}{4}(1-e^{-4T})z = 0$

$T=0.25s$ 代入上式得

$$z^2 + (0.15803k - 1.36788)z + 0.36788 = 0$$

由特征根公式（韦达定理）

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(0.15803k - 1.36788) \pm \sqrt{(0.15803k - 1.36788)^2 - 4 * 0.36788}}{2}$$

令 $|z_{1,2}| < 1$ ，可得使系统稳定的 K 值范围是 $0 < K < 17.3$ 。



12. 设离散系统如下图所示，确定使系统稳定的 K 值范围。（15 分）

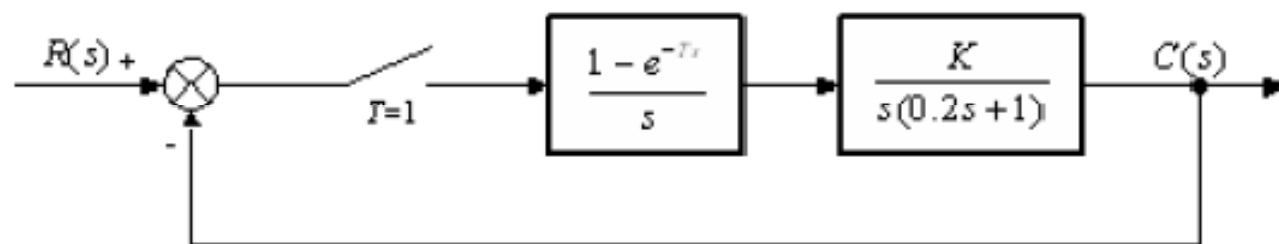


图 4

解：开环脉冲传递函数为：

$$\begin{aligned}
 G(z) &= Z\left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{K}{s(0.2s + 1)}\right] \\
 &= K(1 - z^{-1})Z\left[\frac{5}{s^2(s + 5)}\right] \\
 &= K(1 - z^{-1})Z\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{5} \frac{1}{s} + \frac{1}{5} \frac{1}{s + 5}\right] \\
 &= K(1 - z^{-1})\left[\frac{Tz}{(z - 1)^2} - \frac{1}{5} \frac{z}{z - 1} + \frac{1}{5} \frac{z}{z - e^{-5T}}\right] \\
 &= \frac{K}{5} \frac{5T(z - e^{-5T}) - (z - 1)(z - e^{-5T}) + (z - 1)^2}{(z - 1)(z - e^{-5T})}
 \end{aligned}$$



特征方程为 $1 + G(z) = 0$ ，即 $5KT(z - e^{-5T}) - (K - 5)(z - 1)(z - e^{-5T}) + K(z - 1)^2 = 0$

将 $T=1$ 代入上式，并整理得：

$$5z^2 + (4.0067K - 5.0336)z + 1.0404K + 0.0336 = 0$$

将 $z = \frac{w+1}{w-1}$ 代入上述特征方程，得

$$5\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2 + (4.0067K - 5.0336)\frac{w+1}{w-1} + 1.0404K + 0.0336 = 0$$

整理得：

$$5.0471Kw^2 + (9.9328 - 2.0808K)w + 10.0672 - 2.9663K = 0$$

因此，系统稳定的 K 值范围为： $0 < K < 3.39$ 。

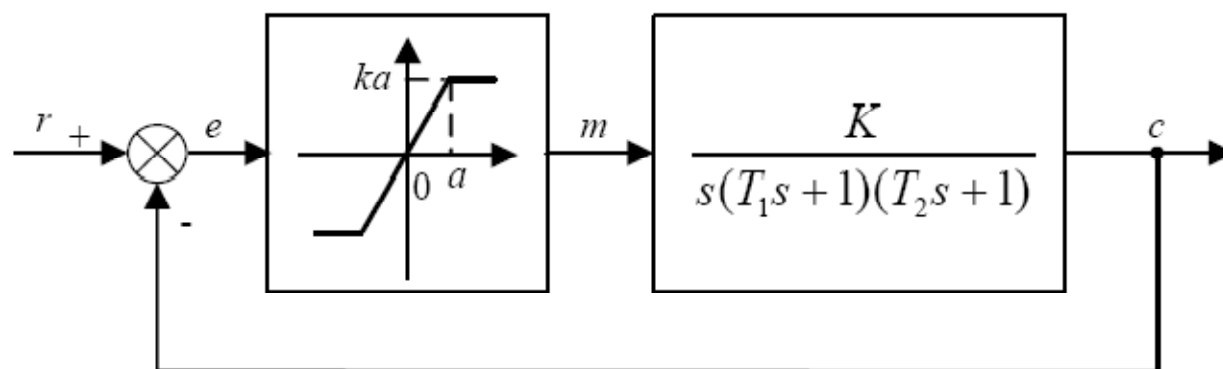


8. 考察描述函数法确定非线性系统稳定、不稳定以及产生周期运动（极限环）的条件

- **题型分析：** 给定某系统的框图和非线性部分描述函数，求出系统极限环的振幅和频率。
- 估计为10分。
- **解题关键：** 负倒数描述函数和奈氏图的绘制，计算与负实轴的交点。
- 习题8-3、例8-8非常重要



例8-1 已知非线性系统的结构图如下图所示，试分析系统的稳定性。



含饱和和非线性的非线性系统

解 饱和和非线性的描述函数为

$$N = \begin{cases} \frac{2k}{\pi} \left[\arcsin \frac{a}{X} + \frac{a}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{X} \right)^2} \right] & (X > a) \\ k & (X \leq a) \end{cases}$$

当 $X \leq a$ 时, $-1/N = -1/k$; 当 $X \rightarrow \infty$ 时, $-1/N = -\infty$ 。

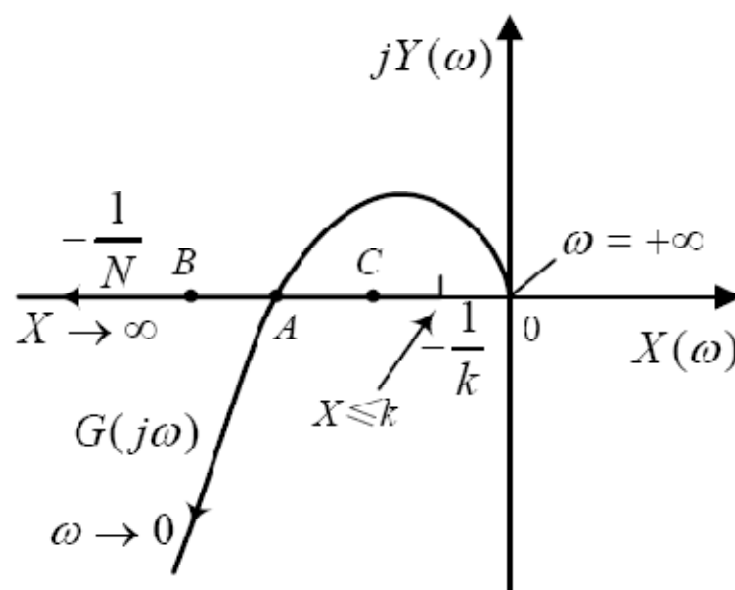


$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(jT_1\omega + 1)(jT_2\omega + 1)} = \frac{K}{(T_1 + T_2)\omega^2 + j\omega(1 - T_1T_2\omega^2)}$$

对于线性部分，当 $\omega \rightarrow 0$ 时， $G(j\omega) = \infty \angle -90^\circ$ ；当 $\omega \rightarrow +\infty$ 时， $G(j\omega) = 0 \angle -270^\circ$ 。

$G(j\omega)$ 乃氏曲线与负实轴有一交点，交点坐标为 $(-KT_1T_2/(T_1 + T_2), j0)$ ，交点频率为

$1/\sqrt{T_1T_2}$ 。本题饱和非线性描述函数的负倒特性曲线和线性部分频率特性的乃氏曲线为：

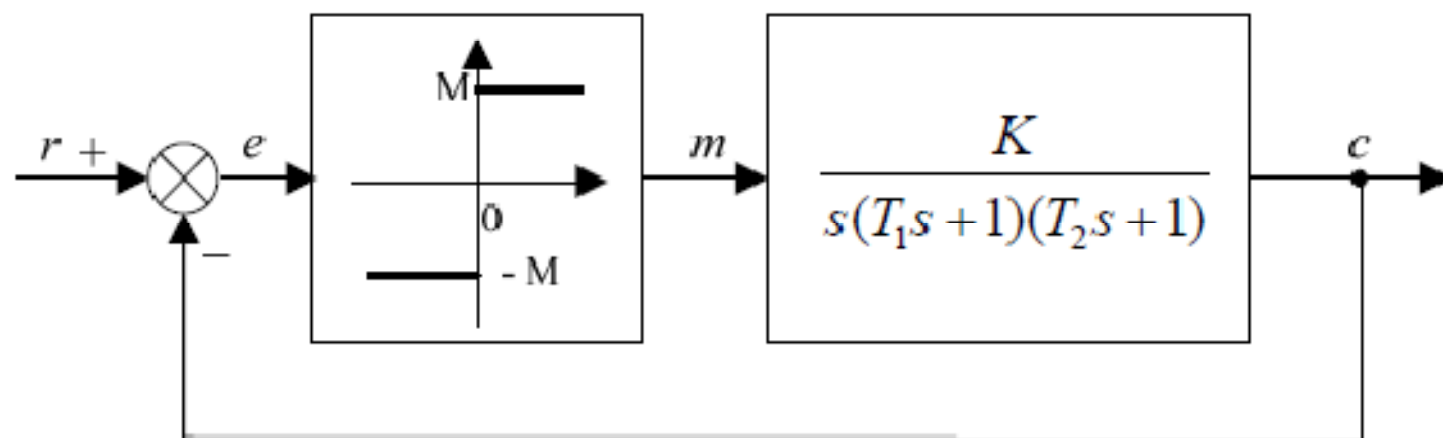


当线性部分放大倍数 K 充分大, 使得 $KT_1T_2/(T_1+T_2) > 1/k$ 时, $G(j\omega)$ 与 $-1/N$ 曲线相交, 产生极限环。当扰动使得幅值 X 变大时, $-1/N$ 上该点 A 移到交点左侧 B 点, 使得 $G(j\omega)$ 曲线不包围 B 点, 系统稳定, 于是其幅值逐渐变小, 又回到交点 A 。当扰动使得幅值 X 变小时, A 点移到交点右侧 C 点, 使得 $G(j\omega)$ 曲线包围 C 点, 系统不稳定, 于是其幅值逐渐变大, 同样回到交点 A 。因此, 该极限环为稳定极限环, 其极限环的频率等于 A 点的频率 $\omega_A = 1/\sqrt{T_1T_2}$, 其极限环的幅值对应 $-1/N$ 的 A 点的幅值。

无论是稳定极限环, 还是不稳定极限环, 都是系统所不希望的。对于上述系统, 只要使线性部分放大倍数 K 小到使 $KT_1T_2/(T_1+T_2) < 1/k$, 则系统的 $G(j\omega)$ 与 $-1/N$ 没有交点, 就不会产生极限环。



8-10 设非线性系统如下图所示，已知非线性环节的描述函数 $N = \frac{4M}{\pi X}$ ，且 $K > 0, T_1 > 0, T_2 > 0$ ，试求极限环对应的振幅和频率。



解：由题意

$$-\frac{1}{N(X)} = -\frac{\pi X}{4M}$$

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(jT_1\omega + 1)(jT_2\omega + 1)} \quad ②$$

令 $\angle G(j\omega) = -90^\circ - \arctg T_1\omega - \arctg T_2\omega = -180^\circ$

求出 $G(j\omega)$ 曲线与负实轴交点处的频率

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} \quad ②$$

及相应幅值

$$|G(j\omega)| = \frac{T_1 T_2 K}{T_1 + T_2} \quad ②$$



$G(j\omega)$ 曲线与 $-1/N(X)$ 曲线如下图所示，由图知，系统存在极限环，

极限环对应的频率为 $\omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$ ②

极限环对应的振幅 $\frac{\pi X}{4M} = \frac{T_1 T_2 K}{T_1 + T_2}$ $X = \frac{4MT_1 T_2 K}{\pi(T_1 + T_2)}$ ②

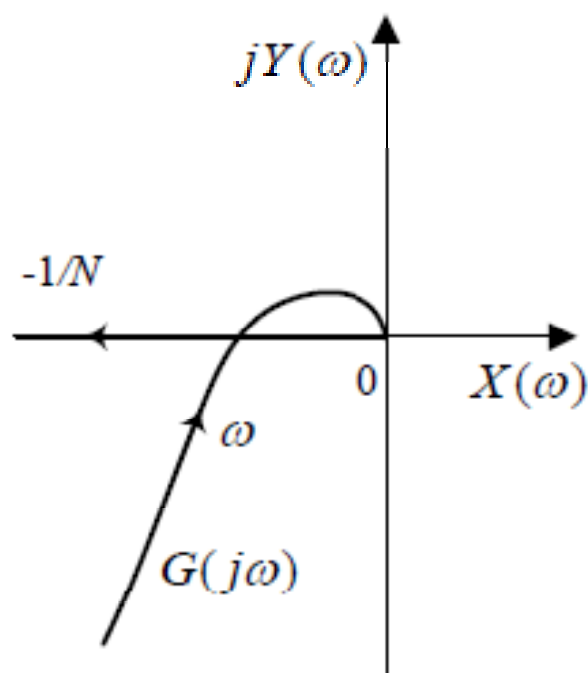


图 ⑤



务请遵守考场纪律，
祝大家取得好成绩！



杭州电子科技大学

Hangzhou Dianzi University