概率论与数理统计期末练习卷（2）

一、单项选择题

1.某人向同一目标独立重复进行射击，每次击中目标的概率为$p\ (0<p<1)$，则此人第四次射击时恰好第 2 次命中目标的概率为(C)。

1 2 3 4

$\underbrace{1\ 2\ 3}_{\text{前3次击中1次}}$ 4 击中

$C_3^1 p\cdot(1-p)^2\cdot p = 3p^2(1-p)^2$

(A)$3p(1-p)^2$　　(B) $6p(1-p)^2$

(C)$3p^2(1-p)^2$　　(D) $6p^2(1-p)^2$

$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=1$

2.假设事件A和B满足$P(B|A)=1$，则（ B ）。

(A) A 是必然事件　　(B) $P(\bar{B}|A)=0$ $P(\bar{B}|A)=1-P(B|A)=1-1=0$

(C) $B\subset A$ B也可以等于A　　(D) $A\subset B$

3.已知随机变量$X\sim N(\mu,16)$，又$P\{X\le -2\}=0.5$，则$P\{X<2\}$（C）。

$\Phi(0)=0.5$

$P(X\le -2)=P(\frac{X-\mu}{4}\le\frac{-2-\mu}{4})=\Phi(\frac{-2-\mu}{4})=0$ $\mu=-2$

故$P(X<2)=P(\frac{X-(-2)}{4}<\frac{2-(-2)}{4})=\Phi(1)$

(A) $\phi(2)$　　(B) $\phi(0)$　　(C) $\phi(1)$　　(D) $\phi(3)$

4.设函数$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & 0\le x\le 1/2\\ 1, & x>1/2\end{cases}$，则$F(x)$ （ D ）。

（A）是离散型随机变量的分布函数　（B）是连续型随机变量的分布函数

（C）是随机变量的分布函数　（D）不是随机变量的分布函数

分布函数需满足右连续. 而$F(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$，但$F(\frac{1}{2}^+)=1$

故$F(\frac{1}{2})\ne\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+}F(x)$ 不满足右连续

5.设随机变量X和Y都服从正态分布$N(0,\sigma^2)$，且$P\{X\le 1, Y\le -1\}=1/4$，则$P\{X>1, Y>-1\}$等于（ A ）。

记$\{X\le 1\}$为事件A，$\{Y\le -1\}$为事件B，则$P(AB)=\frac{1}{4}$

(A) 1/4　　(B) 1/2

(C) 3/4　　(D) 1/16

$X\sim N(0,\sigma^2)$

$Y\sim N(0,\sigma^2)$

现求$P(\bar{A}\bar{B})$

$=P(\overline{A\cup B})$

$=1-P(A\cup B)$

$=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]$

$=1-P(A)-P(B)+P(AB)$

$=1-\cancel{\Phi(\frac{1}{\sigma})}-(1-\cancel{\Phi(\frac{1}{\sigma})})+P(AB)=\frac{1}{4}$

$P(A)=P(X\le 1)=P(\frac{X-0}{\sigma}\le\frac{1-0}{\sigma})=\Phi(\frac{1}{\sigma})$

$P(B)=P(Y\le -1)=P(\frac{Y-0}{\sigma}\le\frac{-1-0}{\sigma})=\Phi(-\frac{1}{\sigma})$

$\Phi(-\frac{1}{\sigma})=1-\Phi(\frac{1}{\sigma})$

6.设随机变量X的期望和方差均存在，则下列选项**正确**的是（ A ）

E(X) 和 D(X) 均为常数

(A) $D\big(D(X)\big)=0$ 　　而 D(C)=0，故 D(D(X))=0 　　(B) $D\big(D(X)\big)=1$

(C) $E\big(E(X)\big)=2E(X)$ 　　$=E(X)$ 　　(D) $E\big(E(X)\big)=E^2(X)$ 　　$=E(X)$

7.设$X_1,X_2,\dots,X_n$为来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的简单随机样本，$\bar{X}$为样本平均值，记：

$$S_1{}^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2,\qquad S_2{}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2,$$

$$S_3{}^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2,\qquad S_4{}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$$

$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

$S=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

$=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2\right]$

则服从自由度为$n-1$的 t 分布的随机变量是(B)。

(A)$t=\frac{\bar{X}-\mu}{S_1/\sqrt{n-1}}$ 　　$\frac{\bar{X}-\mu}{S_1/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$ 　　(B) $t=\frac{\bar{X}-\mu}{S_2/\sqrt{n-1}}$

(C) $t=\frac{\bar{X}-\mu}{S_3/\sqrt{n}}$ 　　(D) $t=\frac{\bar{X}-\mu}{S_4/\sqrt{n}}$

注意到 $S_1^2=\frac{n}{n-1}S_2^2$ 　　$S_1=\sqrt{\frac{n}{n-1}}S_2$

$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{n}{n-1}}S_2/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

即 $\frac{\bar{X}-\mu}{S_2/\sqrt{n-1}}\sim t(n-1)$

8.下列哪个**不属于**常用估计量的评选标准的是（ D ）

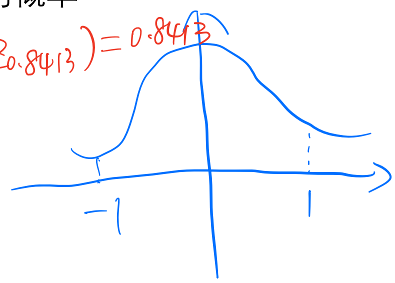
(A) 无偏性 (B) 有效性 (C) 相合性 (D)灵活性

9. 在假设检验中，显著性水平α表示（ B ）. 　　第一类错误，弃真错误 　　H_0为真，拒绝H_0

(A) H_0为真接受H_0的概率 　　(B) H_0 为真拒绝H_0的概率

(C) H_0为不真接受H_0的概率 　　(D) H_1为真接受H_1的概率

$P(X>Z_{0.8413})=0.8413$



10. 已知$\phi(1)=0.8413$，则上α分为点$Z_{0.8413}=$（ D ）。

(A) 0.8413 (B) 0.1587 (C) 1 (D) -1

$\phi(1)=P(X\le 1)=0.8413$ 　　故 $Z_{0.8413}=-1$

则 $P(X\ge -1)=0.8413$

二、填空题

11.设$P(A)=0.5,P(B)=0.6,P(AB)=0.3$，则$P(\overline{A\cup B})=$ __0.2__。

$P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$

$=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]$

$=1-0.8=0.2$

12.设X是连续型随机变量，其密度函数为 $f(x)=\begin{cases}c(4x-2x^2), & 0<x<2\\ 0, & 其它\end{cases}$，则常数$c=$__$\frac{3}{8}$__。（**结果用分数表示**）

解：$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=1$，则 $\int_0^2 x\cdot c(4x-2x^2)\,dx=1$

$c\cdot\left[\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{2}x^4\Big|_0^2\right]=1$ 　即 $\frac{8}{3}c=1\Rightarrow c=\frac{3}{8}$

13.已知随机变量X服从参数为 1 的泊松分布，则$P\{X=E(X^2)\}$=$\underline{\ \frac{1}{2e}\ }$。

$X\sim\pi(1)$ 则 $E(X^2)=D(X)+(E(X))^2$ $=2$　　$P(X=2)=\frac{1^2e^{-1}}{2!}=\frac{1}{2}e^{-1}=\frac{1}{2e}$

$E(X)=1$

$D(X)=1$

14.设随机变量X具有 $E(X)=2, D(X)=3$，则由切比雪夫不等式得$P\{|X-2|\geq 4\}\leq$ $\underline{\ \frac{3}{16}\ }$。（**结果用分数表示**）

$P(|X-E(X)|\geq\varepsilon)\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$

$P(|X-2|\geq 4)\leq\frac{3}{4^2}=\frac{3}{16}$

$a=F_{0.2}$ 分位点.

15.设随机变量$X\sim F(n,n)$且$P\{X>a\}=0.2$，a为常数，则$P\left\{X>\frac{1}{a}\right\}=$ $\underline{\ 0.8\ }$。

因 $X_1\sim F(n_1,n_2)$ 则 $\frac{1}{X_1}\sim F(n_2,n_1)$

$X\sim F(n,n)$ 则 $\frac{1}{X}\sim F(n,n)$，$P(X>\frac{1}{a})=P(\frac{1}{X}<a)$

$=1-P(\frac{1}{X}\geq \underset{F_{0.2}}{a})=1-0.2$

$=0.8$

16．设随机变量X与Y相互独立，下表是二维随机变量(X,Y)的联合分布律及边缘分布律中的部分数值，请将表中空白①至⑧填入正确的数值，并写出计算过程。

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}$
x_1	①	$\frac{1}{8}$	②	③
x_2	$\frac{1}{8}$	④	⑤	⑥
$P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$	⑦	⑧	1

$P(X=x_2,Y=y_3)$
$=P(X=x_2)-\frac{1}{8}-\frac{3}{8}$
$=\frac{3}{4}-\frac{1}{8}-\frac{3}{8}=\frac{1}{4}$ ⑤

$P(X=x_2,Y=y_1)=\frac{1}{8}$，而$P(Y=y_1)=\frac{1}{6}$，$P(X=x_2)=\frac{3}{4}$ ⑥

$P(X=x_1,Y=y_1)=P(Y=y_1)-P(X=x_2,Y=y_1)=\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{1}{24}$ ①

$P(X=x_1)=\frac{P(X=x_1,Y=y_1)}{P(Y=y_1)}=\frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{6}}=\frac{1}{4}$ ③，$P(X=x_1,Y=y_3)=\frac{1}{4}-\frac{1}{24}-\frac{1}{8}=\frac{1}{12}$ ②

$P(X=x_2,Y=y_2)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$ ④

过程： $P(Y=y_2)=\frac{P(X=x_1,Y=y_2)}{P(X=x_1)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$ ⑦

$P(Y=y_3)=P(X=x_1,Y=y_3)$
$+P(X=x_2,Y=y_3)$
$=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$ ⑧

结果：

①$\underline{\ \frac{1}{24}\ }$；②$\underline{\ \frac{1}{12}\ }$；③$\underline{\ \frac{1}{4}\ }$；④$\underline{\ \frac{3}{8}\ }$；⑤$\underline{\ \frac{1}{4}\ }$；⑥$\underline{\ \frac{3}{4}\ }$；⑦$\underline{\ \frac{1}{2}\ }$；⑧$\underline{\ \frac{1}{3}\ }$

17．设总体X的概率密度函数$f(x;\lambda)=\begin{cases}\lambda^2 x\,e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$，其中$\lambda>0$为未知参数，$X_1,X_2,\ldots,X_n$为来自总体$X$的随机样本，$x_1,x_2,\ldots,x_n$为相应的样本值。

求：（1）参数λ的**矩估计量**；（2）参数λ的**最大似然估计量**。

解：(1) 矩估计量

因只含一个未知参数，故 $\mu_1 = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda^2 x e^{-\lambda x} dx$

$= \int_0^{+\infty} -\lambda x^2 d(e^{-\lambda x})$

$= -\lambda x^2 e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} d(-\lambda x^2)$ （$-\lambda x^2 e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} = 0$）

$= \int_0^{+\infty} 2\lambda x e^{-\lambda x} dx$

$= \int_0^{+\infty} -2x\, d(e^{-\lambda x})$

$= -2x e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} d(-2x)$

$= \int_0^{+\infty} 2 e^{-\lambda x} dx = -\frac{2}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty}$

$= \frac{2}{\lambda}$

再令 $A_1 = \bar{X} = \mu_1$，得 $\bar{X} = \frac{2}{\lambda}$

故矩估计量为 $\hat{\lambda} = \frac{2}{\bar{X}}$

(2) 最大似然估计量

似然函数 $L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \left(\lambda^2 x_i e^{-\lambda x_i}\right) = \lambda^{2n} \prod_{i=1}^{n} x_i \cdot e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}$

$\ln L(\lambda) = 2n \ln\lambda + \ln \prod_{i=1}^{n} x_i$ (不含λ, 求导为0) $- \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i$

令 $\frac{d \ln L(\lambda)}{d\lambda} = \frac{2n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$

得最大似然估计量 $\hat{\lambda} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^{n} X_i} = \frac{2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i} = \frac{2}{\bar{X}}$

(注意 矩估计值 $\hat{\lambda} = \frac{2}{\bar{x}}$

最大似然估计值 $\hat{\lambda} = \frac{2}{\bar{x}}$

18．由于某渔业养殖场收到水质污染，需要测定该养殖场中的鱼的含汞量，随机地取 10 条鱼，测得各条鱼的含汞量（单位：毫克）为：

0.8　1.6　0.9　0.8　1.2　0.4　0.7　1.0　1.2　1.1

计算得 $\bar{x} = 0.97$，$S^2 = 0.33^2$。 假设鱼的含汞量服从正态分布$N(\mu, \sigma^2)$，求：

（1）关于σ^2的置信水平为 0.9 的双侧置信区间；

（2）检验假设$H_0: \mu \le 1.2$，$H_1: \mu > 1.2$ （右边检验，取$\alpha = 0.1$）。

$(\chi^2_{0.05}(9) = 16.92, \chi^2_{0.95}(9) = 3.33, t_{0.1}(9) = 1.383, \sqrt{10} = 3.16)$

法一（拒绝域法）

（最终结果保留两位小数）

(1)

解：因 μ 未知，所以关于 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha = 0.9$ 的双侧置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \right)$$

又因 $n = 10$，$S^2 = 0.33^2$，$\alpha = 0.1$，$\chi^2_{0.05}(9) = 16.92$，$\chi^2_{0.95}(9) = 3.33$

代入得 $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \right) = \left(\frac{9 \times 0.33^2}{16.92}, \frac{9 \times 0.33^2}{3.33} \right) = (0.06, 0.29)$

题意：保留2位小数

(2) $H_0: \mu \le 1.2$，$H_1: \mu > 1.2$ （右边检验）

因 σ^2 未知，选取检验统计量 $t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$

拒绝域为 $t \ge t_\alpha(n-1)$

而 $\alpha = 0.1$，$\bar{x} = 0.97$，$S = 0.33$，$\mu_0 = 1.2$，$n = 10$，代入得

$t = \frac{0.97 - 1.2}{0.33/\sqrt{10}} < 0 < t_{0.1}(9) = 1.383$ （没有落在拒绝域）

故接受原假设 H_0，认为含汞量均值并未增加

法二（置信区间法）因σ^2未知，关于μ的置信水平为$1-\alpha=0.9$的单侧置信下限的置信区间为

$$[\underline{\mu},+\infty)=\left(\bar{x}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1),+\infty\right)$$

代入$\bar{x}=0.97$，$S=0.33$，$n=10$，$\alpha=0.1$，$t_{0.1}(9)=1.383$，$\underline{\mu}=0.97-\frac{0.33}{\sqrt{10}}\times1.383<0.97<\mu_0=1.2$

故$\mu_0\in(\underline{\mu},+\infty)$，因而落在接受域，接受原假设$H_0$，认为含质量均值并未增加

19． 设 $X_1,X_2,\dots,X_{30}$是一组独立同服从均匀分布U(0,1)的随机变量序列。根据中心极限定理求$P\{\sum_{i=1}^{30}X_i\geq 12\}$的概率。**（结果用$\Phi(\cdot)$表示，结果可以含根式）**

解：$X_i\sim U(0,1)$　$E(X_i)=\frac{1}{2}$，$D(X_i)=\frac{1}{12}$

$$P\left(\sum_{i=1}^{30}X_i\geq 12\right)=P\left(\frac{\sum_{i=1}^{30}X_i-30\times\frac{1}{2}}{\sqrt{30}\times\sqrt{\frac{1}{12}}}\geq\frac{12-30\times\frac{1}{2}}{\sqrt{30}\times\sqrt{\frac{1}{12}}}\right)$$

$$\approx 1-\Phi\left(\frac{-6}{\sqrt{10}}\right)=\Phi\left(\frac{6}{\sqrt{10}}\right)\text{或}\Phi\left(\frac{3\sqrt{10}}{5}\right)$$

20． 设随机变量(X,Y)的分布函数

注意给的是分布函数

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-3y}), & x>0,y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases},$$

不是联合概率密度函数

求（1）$F_X(x)$，$f_X(x)$，$f_Y(y)$；（2）X与Y是否相互独立？（3）$f_{X|Y}(x|y)$；（4）$\mathrm{Cov}(-X,Y)$。

解：(1) $F_X(x)=F(x,+\infty)=\lim\limits_{y\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-2x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$f_X(x)=F_X'(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-3y}, & y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}3e^{-3y}, & y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

(2) 因$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$（联合分布函数=两边缘分布函数乘积）

故X与Y相互独立

或用$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

$f(x,y)=\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}=\begin{cases}6e^{-2x-3y}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

(3) 当$y>0$时 前提条件

$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

(4) $\mathrm{Cov}(-X,Y)=-\mathrm{Cov}(X,Y)$

因X,Y相互独立，故$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$

从而$\mathrm{Cov}(-X,Y)=0$

21．设总体X服从参数为θ的指数分布，其概率密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases},\quad \text{其中}\theta>0\text{为未知参数，}$$

$X_1,X_2,\dots,X_n$为来自总体X的随机样本。

证明：（1） $\bar{X}$ 和 $nY=n\min(X_1,X_2,\dots,X_n)$均为$\theta$的无偏估计量；

（2）$\bar{X}$ 较 nY有效。

解(1) 由于 $X\sim \exp(\theta)$，故 $E(X)=\theta$，$D(X)=\theta^2$，且 $F(x;\theta)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ (指数分布的分布函数)

$E(\bar{X})=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=E(X_i)=\theta$

故$\bar{X}$是θ的无偏估计

$E(nY)=nE(Y)$，$Y=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$，故 $F_Y(y)=1-\prod_{i=1}^{n}[1-F_{X_i}(y)]$

而$X_1,X_2,\cdots X_n$同分布

故 $F_Y(y)=1-[1-F_X(y)]^n$

$=\begin{cases}1-e^{-\frac{ny}{\theta}}, & y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$\Downarrow$

(故Y服从参数为$\frac{\theta}{n}$的指数分布)

$E(Y)=\frac{\theta}{n}$

$D(Y)=\frac{\theta^2}{n^2}$

$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{n}{\theta}e^{-\frac{n}{\theta}y}, & y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ (可有可无)

(若没看出Y服从参数为$\frac{\theta}{n}$的指数分布，则需求出$f_Y(y)$ 用利用$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}y\cdot f_Y(y)dy$计算Y的期望)

$E(Y)=\frac{\theta}{n}$，故$E(nY)=nE(Y)=\theta$

$\Rightarrow$ nY也是θ的无偏估计

(2) $D(\bar{X})=D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n^2}D(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}D(X_i)=\frac{\theta^2}{n}$

$D(nY)=n^2D(Y)=n^2\cdot\frac{\theta^2}{n^2}=\theta^2$

当$n>1$时，因 $D(\bar{X})<D(nY)$，故$\bar{X}$较nY有效

当$n=1$时，因 $D(\bar{X})=D(nY)$，此时有效性相同