$\frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B\bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$

期末练习题

1、设 A、B是两随机事件，且$0 < P(A) < 1$，$P(B) > 0$，$P(B|A) = P(B|\bar{A})$，则必有（C）。

可得 $P(AB) - P(A)\cdot P(AB) = P(A)\cdot P(B) - P(A)\cdot P(AB)$

(A) $P(A|B) = P(\bar{A}|B)$ $=1-P(\bar{A}|B)$　　(B) $P(A|B) \neq P(\bar{A}|B)$

(C) $P(AB) = P(A)P(B)$　　(D) $P(AB) \neq P(A)P(B)$

2、显著性检验中，满足显著水平α是指（C）。

(A) $P\{当H_0为真时接受H_1\} \le 1-\alpha$　　(B)$P\{当H_1为真时接受H_0\} \le \alpha$

(C) $P\{当H_0为真时接受H_1\} \le \alpha$　　(D)$P\{当H_0为真时接受H_1\} < 1-\alpha$

$\Leftrightarrow$ 拒绝H_0 | 参看课本182页(1-1)式

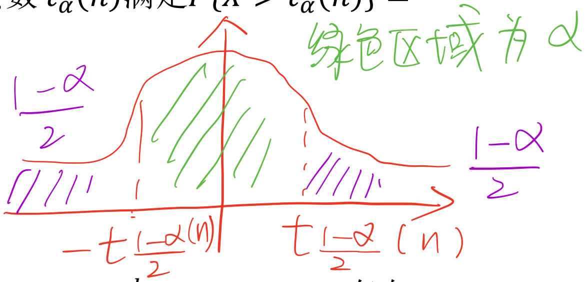
3、 设$X_1, X_2, \dots, X_n (n \ge 3)$为来自总体$X$的随机样本，则下列估计量中，不是总体期望μ的无偏估计量的是（C）。

（A）$\bar{X}$　$E(\bar{X}) = \mu$　　（B）$X_1 + X_3 - X_2$　$E(X_1+X_3-X_2) = \mu$

（C）$X_1 + X_2 + \cdots + X_n$　　（D） $0.2(2X_1 + 3X_n)$

$E(X_1+\cdots+X_n) = n\mu$　　$E(0.2(2X_1+3X_n)) = 0.2\times 5\mu = \mu$

4、设随机变量$X \sim t(n)$，对于给定的α $(0 < \alpha < 1)$，实数 $t_\alpha(n)$满足$P\{X > t_\alpha(n)\} = \alpha$。若$P\{|X| < x\} = \alpha$，则$x$等于（C）



(A) $t_{\alpha/2}(n)$　　(B) $t_{1-\alpha/2}(n)$

(C) $t_{(1-\alpha)/2}(n)$　　(D) $t_{1-\alpha}(n)$

5、设随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$来自某总体X的样本，且$\mu_k = E(X^k) (k = 1,2,3,4)$存在，则由切比雪夫不等式，对任意ε > 0有$P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \mu_2| \ge \varepsilon\} \le$（A）

(A) $\frac{\mu_4-\mu_2^2}{n\varepsilon^2}$　　(B) $\frac{\mu_2-\mu_1^2}{\sqrt{n}\varepsilon^2}$　　(C) $\frac{\mu_2-\mu_1^2}{n\varepsilon^2}$　　(D) $\frac{\mu_4-\mu_2^2}{\sqrt{n}\varepsilon^2}$

$P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \mu_2| \ge \varepsilon) \le \frac{D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2)}{\varepsilon^2}$　注意 $D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2) = \frac{1}{n^2} D(\sum_{i=1}^n X_i^2) = \frac{1}{n^2}\cdot n D(X_i^2) = \frac{1}{n} D(X_i^2)$

填空题

$D(X_i^2) = E(X_i^4) - (E(X_i^2))^2 = \mu_4 - \mu_2^2$

1、设随机变量X的概率密度为$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}+x-1}, -\infty < x < +\infty$，则$X$的函数$Y = \frac{X-2}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$。

$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2\cdot 2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2\cdot(\sqrt{2})^2}}$　则 $X \sim N(2, (\sqrt{2})^2)$

$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

$Y = \frac{X-2}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$

2、设随机事件A与B相互独立，A与C相互独立，$BC = \emptyset$，若$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$，$P(AC|AB \cup C) = \frac{1}{4}$，则$P(C) =$ $\frac{1}{4}$ 。

$P(AC|AB\cup C) = \frac{P(AC\cap(AB\cup C))}{P(AB\cup C)} = \frac{P(ABC\cup AC)}{P(AB\cup C)}$

$P(ABC\cup AC) = P(AC)$

$P(AB\cup C) = P(AB) + P(C) - P(ABC) = P(A)P(B) + P(C)$

故可得 $\frac{P(AC)}{P(A)P(B)+P(C)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot P(C)}{\frac{1}{4}+P(C)} = \frac{1}{4}$，$P(C)=\frac{1}{4}$

3、已知X的概率密度函数为$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{8}x^2, & 0<x<a\\ 0, & 其它\end{cases}$，则 $a=$ <u>2</u>

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^a \frac{3}{8}x^2 dx = \frac{1}{8}x^3\Big|_0^a = \frac{1}{8}a^3 = 1$

$a=2$

$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$

4、设二维随机变量 (X,Y) 在以原点为圆心的单位圆内服从均匀分布，则 $F(0,0)=$ <u>0.25</u>

$F(x,y)=\frac{1}{\pi}\iint_{(x,y)\in G} dxdy$

$F(0,0)$

$F(x,y)=\frac{1}{\pi}\iint_G dxdy = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$

5、随机变量$X\sim U[1,7]$，$Y\sim\chi^2(5)$，则$E(X^2-2Y^2-9)=$ <u>-60</u>。

$E(X)=\frac{a+b}{2}$，$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$，故 $E(X)=4$，$D(X)=3$，$E(Y)=5$，$D(Y)=10$

$E(X^2)=D(X)+(E(X))^2 = 3+4^2=19$

$E(Y^2)=D(Y)+(E(Y))^2 = 10+5^2=35$

$E(X^2-2Y^2-9) = 19-70-9 = -60$

6、设随机变量X的数学期望$E(X)=\mu$，方差$D(X)=\sigma^2>0$，利用切比雪夫不等式估计，则$P\{\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma\}\ge$ <u>$\frac{8}{9}$</u>。

$\Leftrightarrow P(|X-\mu|<3\sigma)$

而 $P(|X-\mu|\ge 3\sigma) \le \frac{\sigma^2}{(3\sigma)^2} = \frac{1}{9}$

三、某工厂有 200 台同类型的机器，每台机器工作时需要的电功率为 Q 千瓦。由于工艺等原因，每台机器的实际工作时间只占全部工作时间的 75%，各台机器是否工作是相互独立的，求任一时刻有 144 至 160 台机器正在工作的概率。(结果用$\Phi(x)$表示)

解：$X\sim b(200, 0.75)$ 由棣莫弗—拉普拉斯定理 $\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ 近似 $\sim N(0,1)$

$P(144<X<160)$

$=P\left(\frac{144-200\times0.75}{\sqrt{200\times0.75\times0.25}} < \frac{X-200\times0.75}{\sqrt{200\times0.75\times0.25}} < \frac{160-200\times0.75}{\sqrt{200\times0.75\times0.25}}\right)$

$=P\left(\frac{-6}{\sqrt{37.5}} < \frac{X-150}{\sqrt{37.5}} < \frac{10}{\sqrt{37.5}}\right) = \Phi\left(\frac{10}{\sqrt{37.5}}\right) - \Phi\left(\frac{-6}{\sqrt{37.5}}\right)$

或写成 $=\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{37.5}}\right)+\Phi\left(\frac{6}{\sqrt{37.5}}\right)-1$

四、设二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}2, & 0<x<1,\ 0<y<x\\ 0, & else\end{cases}$，

求（1）$f_X(x)$，$f_Y(y)$；(2) X与Y是否相互独立？（3）Cov（X，Y）。

解：(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$

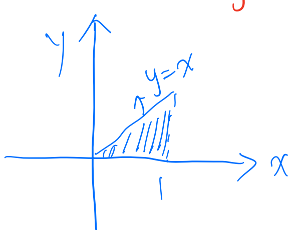
$=\begin{cases}\int_0^x 2dy, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

$=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$

$=\begin{cases}\int_y^1 2dx, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

$=\begin{cases}2(1-y), & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$



概率密度函数图

(2) $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，故X与Y不相互独立

(3) $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{36}$

$E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^x 2xy\,dy\,dx = \frac{1}{4}$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx=\int_0^1 x\cdot 2x\,dx=\frac{2}{3}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy=\int_0^1 2y(1-y)\,dy=\frac{1}{3}$$

五、已知二维随机变量(X,Y)的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}Ae^{-(x+4y)}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases},$$

$$-\frac{1}{4}e^{-4y}\Big|_0^{+\infty} \quad \frac{1}{4}$$

求：（1）A 的值；（2）$f_X(x)$， $f_Y(y)$; (3) X与Y是否相互独立？（4）X与Y的相关系数ρ_{XY}

解(1). $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-(x+4y)}\,dx\,dy=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}Ae^{-(x+4y)}\,dx\,dy$

$$=A\int_0^{+\infty}e^{-x}\left(\int_0^{+\infty}e^{-4y}\,dy\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}A=1 \Rightarrow A=4$$

(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy$

$$=\begin{cases}\int_0^{+\infty}4e^{-(x+4y)}\,dy, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}e^{-x}\int_0^{+\infty}4e^{-4y}\,dy, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx$

$$=\begin{cases}\int_0^{+\infty}4e^{-(x+4y)}\,dx, & y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}4e^{-4y}\int_0^{+\infty}e^{-x}\,dx, & y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}4e^{-4y}, & y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(3) $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，故X与Y相互独立

(4) $\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=\dfrac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}$

注意到X,Y相互独立

故$E(XY)=E(X)E(Y)$

从而$Cov(X,Y)=0$

即得$\rho_{XY}=0$

六、（本题 15 分）

设随机变量(X,Y)的概率分布律为：

Y \ X	0	1	2
-1	0.1	0.1	0.4
1	0.1	0.2	0.1

求(1) 概率 $P\{X+Y\le 1\}$; (2)关于$Z=X^2-2Y$的分布律； (3) $D(Z)$.

解(1) $P(X+Y\le 1)=P(X=0,Y=-1)+P(X=1,Y=-1)$

$$+P(X=2,Y=-1)+P(X=0,Y=1)$$

$$=0.7$$

(2) X^2-2Y的可能取值为 -2 -1 2, 3, 6

0 1 4

-2 2

$P(Z=-2)=P(X=0,Y=1)=0.1$

$P(Z=-1)=P(X=1,Y=1)=0.2$

$P(Z=2)=P(X=0,Y=-1)+P(X=2,Y=1)=0.2$

$P(Z=3)=P(X=1,Y=-1)=0.1$

$P(Z=6)=P(X=2,Y=-1)=0.4$

Z的分布律为

Z	-2	-1	2	3	6
P	0.1	0.2	0.2	0.1	0.4

Z^2的分布律

Z^2	1	4	9	36
P	0.2	0.3	0.1	0.4

$E(Z)=2.7$

$E(Z^2)=16.7$

$D(Z)=E(Z^2)-(E(Z))^2$

$=9.41$

t分布定义：$X\sim N(0,1)$，$Y\sim \chi^2(n)$，X，Y相互独立

则 $\frac{X}{\sqrt{Y/n}}\sim t(n)$ 这个n与$\chi^2(n)$中自由度个数一致

七、设$X_1,X_2,\cdots,X_7$是来自总体$X\sim N(0,1)$的一个简单随机样本，证明:

$$\text{统计量}Y=\frac{X_1-2X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2+X_6^2+X_7^2}}\sim t(5)。$$

$i=1,2,\cdots,7$

解：$X_1,\cdots,X_7$与总体X独立同分布，故可得 $X_i\sim N(0,1)$

X_1-2X_2 为X_1与X_2的线性组合，故服从正态分布

且 $E(X_1-2X_2)=E(X_1)-2E(X_2)=0$　　故 $X_1-2X_2\sim N(0,5)$

$D(X_1-2X_2)=D(X_1)+4D(X_2)=5\Rightarrow \frac{X_1-2X_2-0}{\sqrt5}\sim N(0,1)$

此外，$X_3^2+X_4^2+X_5^2+X_6^2+X_7^2\sim\chi^2(5)$

且 $\frac{X_1-2X_2}{\sqrt5}$ 与 $X_3^2+X_4^2+X_5^2+X_6^2+X_7^2$ 相互独立，由t分布定义即得

$$\frac{\frac{X_1-2X_2}{\sqrt5}}{\sqrt{\frac{X_3^2+X_4^2+X_5^2+X_6^2+X_7^2}{5}}}=\frac{X_1-2X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2+X_6^2+X_7^2}}\sim t(5)$$

八、设总体X的概率分布如下，

X	1	2	3
p_k	$1-\theta$	$\theta-\theta^2$	θ^2

其中 θ为未知参数，从中独立随机取到了一组样本值：1,3,2,3,1，求θ的矩估计值和最大似然估计值。

解：(1) 矩估计法

$\mu_1=E(X)=1\cdot(1-\theta)+2\cdot(\theta-\theta^2)+3\theta^2=1+\theta+\theta^2$
$=(\theta+\frac12)^2+\frac34$

$\bar x=\frac15(1+3+2+3+1)=2$

令 A_1 替代 μ_1，可得 $(\theta+\frac12)^2+\frac34=A_1=\bar X$

故可得θ的矩估计量　　θ的矩估计值为

$\hat\theta=\sqrt{\bar X-\frac34}-\frac12$，　$\hat\theta=\sqrt{\bar x-\frac34}-\frac12=\frac{\sqrt5-1}{2}$

(2) 最大似然估计法

$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i=x_i)=P(X_1=1)P(X_2=3)P(X_3=2)P(X_4=3)P(X_5=1)$
$=(1-\theta)^2(\theta-\theta^2)\theta^4$

取对数 $\ln L(\theta)=2\ln(1-\theta)+\ln(\theta-\theta^2)+4\ln\theta$

$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{-2}{1-\theta}+\frac{1-2\theta}{\theta-\theta^2}+\frac4\theta=\frac{5-8\theta}{\theta(1-\theta)}$

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0$，得$\theta$的最大似然估计量为 $\hat\theta=\frac58$，　最大似然估计值也为 $\hat\theta=\frac58$

九、设总体X的概率密度函数为$f(x;\theta)=\frac{1}{2}\theta e^{-\theta|x|},-\infty<x<\infty$，其中$\theta>0$为待估参数，$X_1,X_2,\dots,X_n$为来自总体的随机样本。求：（1）$\theta$的**最大似然估计量**；（2）$P(X>1)$的最大似然估计值。

(1)

解：似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\frac{1}{2^n}\theta^n e^{-\theta\sum_{i=1}^{n}|x_i|}$

取对数 $\ln L(\theta)=\ln\frac{1}{2^n}+n\ln\theta-\theta\sum_{i=1}^{n}|x_i|$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0$，

得θ的最大似然估计量 $\hat\theta=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}$

(2) $P(X>1)=\int_1^{+\infty}\frac{1}{2}\theta e^{-\theta x}dx$

$=\frac{1}{2}e^{-\theta}$

故$P(X>1)$的最大似然估计值

$\hat P(X>1)=\frac{1}{2}e^{-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}}$

十、设总体X具有期望 μ，方差 σ^2，独立抽取容量分别为n_1和n_2的两组样本，样本均值分别为$\bar X$和$\bar Y$，问当α取何值时，μ的无偏估计量$\hat\mu=\alpha\bar X+(1-\alpha)\bar Y$最有效？

解：$E(\bar X)=\mu$，$E(\bar Y)=\mu$

$D(\bar X)=\frac{\sigma^2}{n_1}$，$D(\bar Y)=\frac{\sigma^2}{n_2}$

$$E(\hat\mu)=E(\alpha\bar X+(1-\alpha)\bar Y)=\alpha\mu+(1-\alpha)\mu=\mu$$

$$D(\hat\mu)=D(\alpha\bar X+(1-\alpha)\bar Y)=\alpha^2D(\bar X)+(1-\alpha)^2D(\bar Y)$$

$$=\frac{\alpha^2\sigma^2}{n_1}+\frac{(1-\alpha)^2\sigma^2}{n_2}=\frac{n_2\sigma^2\alpha^2+n_1\sigma^2(1-\alpha)^2}{n_1n_2}$$

要使μ的无偏估计$\hat\mu$最有效，即方差要尽可能小

$n_2\sigma^2\alpha^2+n_1\sigma^2(1-2\alpha+\alpha^2)$

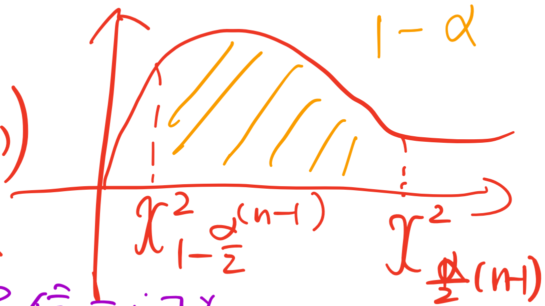
$=(n_1+n_2)\sigma^2\alpha^2-2n_1\sigma^2\alpha+n_1\sigma^2$ 要使其最小

故α取 $-\frac{-2n_1\sigma^2}{2(n_1+n_2)\sigma^2}=\frac{n_1}{n_1+n_2}$ 时，$D(\hat\mu)$最小，无偏估计$\hat\mu$最有效。

十一、设高速公路上汽车的速度服从正态分布，现对汽车的速度独立地作了 5 次测试，求得这 5 次测试值的方差是$s^2 = 0.25$（m/s^2）。求汽车速度的方差σ^2的置信水平为 0.9 的置信区间。（已知$\chi^2_{0.05}(4) = 9.49$，$\chi^2_{0.05}(5) = 11.07$，$\chi^2_{0.95}(4) = 0.71$，$\chi^2_{0.95}(5) = 1.15$，**结果保留两位小数)**

解：选取枢轴量 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

$$P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) = 1-\alpha$$



故可得σ^2的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$$

由于 $1-\alpha=0.9$，$\alpha=0.1$，可得所求σ^2的置信水平为0.9的置信区间为 $\left(\frac{4S^2}{\chi^2_{0.05}(4)}, \frac{4S^2}{\chi^2_{0.95}(4)}\right)$，代入数据得 $\left(\frac{4\times0.25}{9.49}, \frac{4\times0.25}{0.71}\right)$ 即为 $(0.105, 1.408)$

十二、甲、乙两个电子元件厂生产的元件寿命分别记为X和Y，且$X \sim N(\mu_1, 25), Y \sim N(\mu_2, 30)$，现从甲厂随机抽取 10 个元件，测得其寿命平均值$\bar{x} = 50.2$，从乙厂随机抽取 20 个元件，测得其寿命平均值$\bar{y} = 54.1$，且两组样本相互独立。问是否可以认为两厂元件寿命有显著差异（$\alpha = 0.05$，$z_{0.05} = 1.645$，$z_{0.025} = 1.96$）？

解：$H_0: \mu_1-\mu_2=\overset{\delta_0}{0}$，$H_1: \mu_1-\mu_2\neq\overset{\delta_0}{0}$（双边检验）

由于 $\sigma_1^2=25$，$\sigma_2^2=30$ 已知，故选取检验统计量 $Z=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$

拒绝域 $|Z| \geq z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96$

代入数据 $\bar{x}=50.2$，$\bar{y}=54.1$，$n_1=10$，$n_2=20$

$$|Z| = \left|\frac{50.2-54.1-0}{\sqrt{\frac{25}{10}+\frac{30}{20}}}\right| = 1.95 < 1.96$$

（没有落在拒绝域）

故接受H_0，即认为两厂元件寿命无显著差异