得分									

一、单项选择题（每题 3 分，共 15 分）

得分	

DCDDA

1、若事件 A 不发生必导致事件 B 发生，则此关系可表示为（ D ）.

(A) $B\subset \overline{A}$ (B) $\overline{A}B=\phi$

(C) $A\subset \overline{B}$ (D) $\overline{B}\subset A$

2、设 A，B 为两随机事件，且 $0<P(A)<1$，$P(B)>0$，$P(B|A)=P(B|\overline{A})$,则必有（ C ）

(A) $P(A|B)=P(\overline{A}|B)$ (B) $P(A|B)\neq P(\overline{A}|B)$

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$ (D) $P(AB)\neq P(A)P(B)$

3、设 $F(x)$ 为随机变量 X 的分布函数，当 $x<0$ 时，$F(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}$，$x>0$ 时，$F(x)=a+b(1-\frac{1}{1+x})$，且 $P\{X=0\}=0.2$ 则 a,b 的值分别为（ D ）

(A) $a=0.2,b=0.3$ (B) $a=0.5,b=0.5$

(C) $a=0.5,b=1$ (D) $a=0.7,b=0.3$

4、 下列与条件有关的等式中，错误选项为（ D ）

(A) $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}\left(P(B)>0\right)$ (B) $P\{X=x_i|Y=y_j\}=\dfrac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}$

(C) $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}\left(f_Y(y)>0\right)$ (D) $F_{X|Y}(x|y)=\dfrac{F(x,y)}{F_Y(y)}\left(F_Y(y)>0\right)$

5、设 X 为随机变量，且 $E(X^2)=1, E(X^3)=1, E(X^4)=4$,则 $E((X-X^2)^2)=$（ A ）

(A) 3　　(B) 2

(C) 1　　(D) 0

二、填空题（每空 3 分，共 15 分）

得分	

1、设 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.4$，$P(A\cup B)=0.7$，求 $P(AB)=$ 0.2

2、设 $X\sim\pi(\lambda)$（泊松分布），且 $P(X=4)=2P(X=3)$，则 $\lambda=$ 8

3、已知随机变量 $X\sim N(0,3^2)$，$Y\sim N(1,2^2)$，X与Y相互独立 则 $X+Y\sim$ N(1, 13)

4、设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$ 满足 $f(-x,-y)=f(x,y)$，已知 $P\{-2\le X<-1,-1\le Y<1\}=0.2, F(1,-1)=0.3, F(1,1)=0.4, F(2,-1)=0.4$，则 $F(2,1)=$ 0.7

5、设 $D(X)=3, D(Y)=5$，X与Y相互独立 则 $D(2X-Y)=$ ~~6~~ 17

三、(本题 5 分)

得分	

已知 $P(A|B)=0.4$，$P(A|\overline{B})=0.3$，$P(B)=0.2$，求 $P(A)$。

解: $P(\overline{B})=0.8$

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})$$
$$=0.08+0.24$$
$$=0.32$$

四、(本题 10 分)

得分	

设离散型随机变量 X 的概率分布律为

X	0	4	5
P	0.3	0.6	0.1

，

求：（1）X 的分布函数；

（2）$Y=(X-2)^2$ 的概率分布律。

(1)
$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 0.3, & 0\le x<4 \\ 0.9, & 4\le x<5 \\ 1 & x\ge 5 \end{cases}$$

(2)

Y	4	9
P	0.9	0.1

五、（本题 15 分）

得分	

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1 \\ 0.5, & 1\le x<2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

（1）求 X 的分布函数；(2) 求 $E(e^{-X})$；（3）求 $D(X)$。

(1) $x<0$ 时 $F(x)=0$

$0\le x<1$ 时，$F(x)=\int_0^x t\,dt=\frac{x^2}{2}$

$1\le x<2$ 时，$F(x)=\int_0^1 t\,dt+\int_1^x 0.5\,dt=\cancel{\frac{1}{2}(1+x)}$ $\frac{1}{2}x$

$x\geqslant 2$ 时，$F(x)=1$

$$\therefore F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{x^2}{2} & 0\le x<1 \\ \cancel{\frac{1}{2}(1+x)}\ \frac{1}{2}x & 1\le x<2 \\ 1 & x\geqslant 2 \end{cases}$$

(2) $E(e^{-X})=\int_0^1 e^{-x}x\,dx+\frac{1}{2}\int_1^2 e^{-x}dx$

$=-xe^{-x}\big|_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx+\frac{1}{2}\int_1^2 e^{-x}dx$

$=-e^{-1}+(1-e^{-1})+\frac{1}{2}(e^{-1}-e^{-2})$

$=1-\frac{3}{2e}-\frac{1}{2e^2}$

(3) $D(X)=E(X^2)-E^2(X)$

$E(X^2)=\int_0^1 x^3dx+\int_1^2\frac{1}{2}x^2dx=\frac{1}{4}+\frac{7}{6}=\frac{17}{12}$

$E(X)=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2\frac{1}{2}x\,dx=\frac{1}{3}+\frac{3}{4}=\frac{13}{12}$

$D(X)=\frac{17}{12}-\left(\frac{13}{12}\right)^2=\frac{35}{144}$

六、（本题 15 分）

得分	

设随机变量(X,Y)的概率分布律为：

X \ Y	-1	0	1	2
0	0.2	0.1	0.1	0.1
2	0.1	0.1	0.2	0.1

求：（1）关于Y的边缘分布律；

（2）关于X^2-Y的分布律；

（3）$P\{Y<1 \mid X=2\}$；

（4）判断X和Y是否相互独立？并说明理由。

(1)

Y	-1	0	1	2
P	0.3	0.2	0.3	0.2

(2)

X^2-Y	-2	-1	0	1	2	3	4	5
P	0.1	0.1	0.1	0.2	0.1	0.2	0.1	0.1

(3) $P\{Y<1 \mid X=2\} = \dfrac{P\{Y<1, X=2\}}{P\{X=2\}} = \dfrac{0.2}{0.5} = \dfrac{2}{5}$ —10'

(4) 不独立

$P(X=0, Y=-1) \neq P(X=0)P(Y=-1)$

七、（本题 15 分）

得分	

已知(X,Y)的密度函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases}3-x-y, & 0<y<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

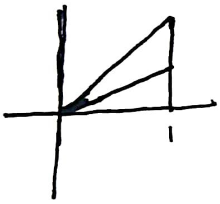
则：（1）求关于X的边缘概率密度$f_X(x)$；

（2）求$P\{X<2Y\}$；

（3）求$Z=X+Y$的概率密度函数$f_Z(z)$。

(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^x 3-x-y\,dy = x(3-x)-\frac{x^2}{2}=3x-\frac{3}{2}x^2, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$ (−2′) (−1′)

(2) $P\{X<2Y\}=\iint\limits_{x<2y} f(x,y)d\sigma=\int_0^1 dx\int_{\frac{x}{2}}^{x} 3-x-y\,dy$ (−2′) (−4′)



$=\int_0^1 \frac{x}{2}(3-x)-\frac{3}{8}x^2\,dx=\frac{3}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{11}{24}$ (+1′)

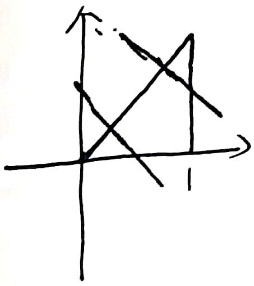
8

(3) $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,z-x)dx$ (−2′) $\cancel{=\int_{-\infty}^{\infty}3}$

12′

若 $z>2$ 或 $z<0$，$f_Z(z)=0$

若 $1\le z<2$，$f_Z(z)=\int_{\frac{z}{2}}^{1}3-z\,dx=(3-z)(1-\frac{z}{2})=\frac{z^2}{2}-\frac{5}{2}z+3$



若 $0\le z<1$，$f_Z(z)=\int_{\frac{z}{2}}^{z}3-z\,dx=\frac{3}{2}z-\frac{z^2}{2}$

2′)

$$\therefore f_Z(z)=\begin{cases}\frac{3}{2}z-\frac{z^2}{2}, & 0\le z<1\\ \frac{z^2}{2}-\frac{5}{2}z+3, & 1\le z<2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

八、(本题 5 分)

得分	

让某个实验仪器从高处落下，第一次落下时打破的概率为 0.4，在第一次未打破的情况下，第二次落下时打破的概率为 0.6，前两次未打破的情况下，第三次落下时打破的概率为 0.8，试求该仪器落下三次而未打破的概率。

A_i："第 i 次打破"　$\overline{A_i}$："第 i 次未打破"

$$P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}|\overline{A_1})P(\overline{A_3}|\overline{A_1}\,\overline{A_2})$$

$$= \cancel{0.4\times0.6\times0.8}\ 0.6\times0.4\times0.2$$

$$= \cancel{0.192}\ 0.048$$

扫描全能王 创建

情
概

九、（本题 5 分）

得分	

已知 $X \sim N(0,1), Y \sim N(0,1)$，且 X,Y 独立，令 $Z=\max\{1-X, Y^2+1\}$，证明：

$$F_Z(z)=\begin{cases}\Phi(z-1)\left[2\Phi(\sqrt{z-1})-1\right], & z\ge 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（说明：Φ 表示标准正态分布的分布函数）

$$F_Z(z) = F_{1-X}(z) F_{Y^2+1}(z)$$

$$F_{1-X}(z) = P(1-X \le z) = P(X \geqslant 1-z) = \phi(z-1)$$

$$F_{Y^2+1}(z) = P(Y^2+1 \le z) = P(-\sqrt{z-1} \le Y \le \sqrt{z-1})$$

$$= \begin{cases} 2\phi(\sqrt{z-1})-1, & z\geqslant 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\therefore F_Z(z) = \begin{cases} \phi(z-1)\left[2\phi(\sqrt{z-1})-1\right], & z \geqslant 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$