《自动控制原理》试卷

乙 A 卷（72 学时）

1. 已知系统信号流图如图 1 所示。试求出传递函数$C(s)/R(s)$及$C(s)/N(s)$。（16 分）

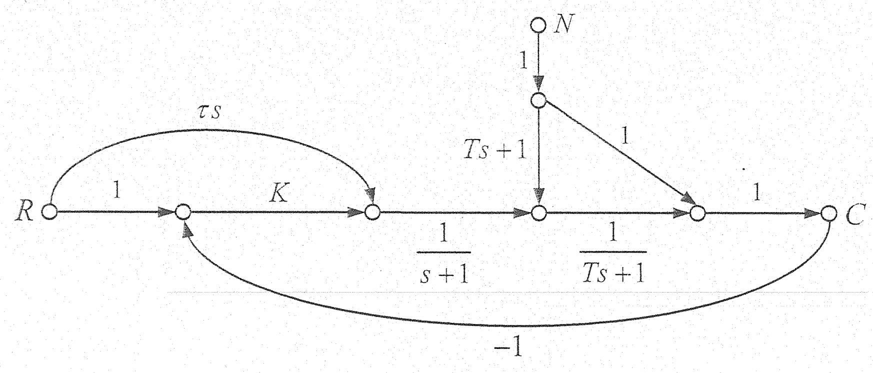

图 1 系统的信号流图

解：1）求$C(s)/R(s)$

由图可知，此时系统有两条前向通道，一个单独回路，即

$$L_1 = -\frac{K}{(s+1)(Ts+1)}, \qquad \Delta = 1 - L_1 = 1 + \frac{K}{(s+1)(Ts+1)}$$

$$p_1 = \frac{K}{(s+1)(Ts+1)}, \qquad \Delta_1 = 1;$$

$$p_2 = \frac{\tau s}{(s+1)(Ts+1)}, \qquad \Delta_2 = 1$$

由梅森增益公式可得系统的传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\sum p_i \Delta_i}{\Delta} = \left(\frac{K+\tau s}{(s+1)(Ts+1)}\right) \bigg/ \left(1 + \frac{K}{(s+1)(Ts+1)}\right) = \frac{\tau s + K}{(s+1)(Ts+1)+K}$$

2）求$C(s)/N(s)$

由图可知，此时系统有两条前向通道，一个单独回路，即

$$L_1 = -\frac{K}{(s+1)(Ts+1)}, \qquad \Delta = 1 - L_1 = 1 + \frac{K}{(s+1)(Ts+1)}$$

$$p_1 = 1, \qquad \Delta_1 = 1; \qquad p_2 = 1, \qquad \Delta_2 = 1$$

由梅森增益公式可得系统的传递函数为

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{\sum p_i \Delta_i}{\Delta} = 2 \bigg/ \left(1 + \frac{K}{(s+1)(Ts+1)}\right) = \frac{2(s+1)(Ts+1)}{(s+1)(Ts+1)+K}$$

2. 系统如图 2 所示。要求在保证$\zeta = 0.7$和$e_{ss}(\infty) = 0.25$条件下，确定参数a及前向通

道增益 K。（18 分）

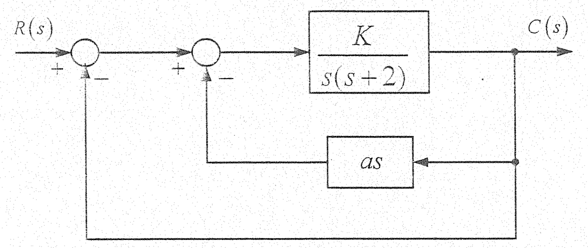

图 2　控制系统

解　当 $\zeta=0.7$，$e_{ss}(\infty)=0.25$ 时，设前向通道增益为 K，则开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K}{s(s+2+Ka)}=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$$

显然系统是 I 型系统，且 $K_v=K/(2+Ka)$，单位斜坡函数输入时系统的稳态误差为

$$e_{ss}(\infty)=1/K_v=2/K+a$$

代入 $\zeta=0.7$，$e_{ss}(\infty)=0.25$，有

$$\begin{cases}\omega_n^2=K\\1.4\cdot\omega_n=2+Ka\\2/K+a=0.25\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\omega_n=5.6\\K=31.36\\a=0.186\end{cases}$$

故在保证 $\zeta=0.7$ 和 $e_{ss}(\infty)=0.25$ 条件下，参数 $a=0.186$，前向通道增益 $K=31.36$。

3. 设系统如图 3 所示。试作闭环系统根轨迹图，并分析 K 值变化对系统在阶跃扰动作用下响应 $c_n(t)$ 的影响。（16 分）

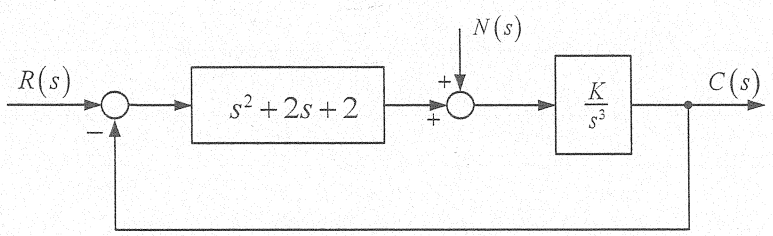

图 3　控制系统

解　由题意可知

$$n(t)=1(t)，\quad N(s)=\frac{1}{s}$$

在扰动作用下，系统的闭环传递函数为

$$\Phi_n(s)=\frac{K}{s^3+K(s^2+2s+2)}$$

$$C_n(s)=\Phi_n(s)N(s),\qquad c_n(\infty)=\lim_{s\to0}s\Phi_n(s)\frac{1}{s}=\frac{1}{2}$$

系统的闭环特征方程为

$$D(s)=s^3+K\left(s^2+2s+2\right)=0$$

系统的等效开环传递函数为

$$G_1(s)=\frac{K\left(s^2+2s+2\right)}{s^3}=\frac{K(s+1+j)(s+1-j)}{s^3}$$

① 实轴上的根轨迹：$[0,\ -\infty)$

② 根轨迹与虚轴的交点

令 $s=j\omega$，并将其代入闭环特征方程可得

$$(j\omega)^3+K\left[(j\omega)^2+2(j\omega)+2\right]=0$$

即

$$\begin{cases}-\omega^3+2K\omega=0\\-K\omega^2+2K=0\end{cases}$$

因 $\omega\neq0$，故可解得交点坐标为

$$\omega=\pm\sqrt{2}=\pm1.414\,,\qquad K=1$$

根据以上分析，画出系统的闭环根轨迹如下图所示。

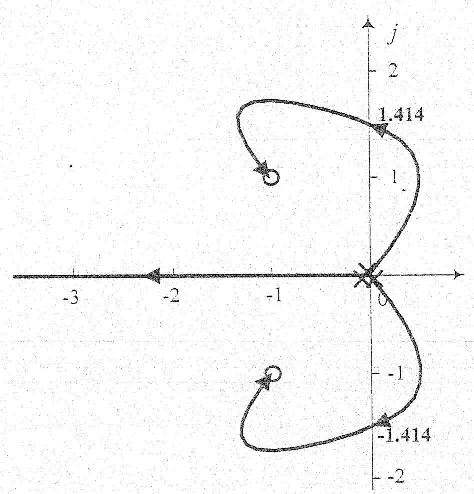

图 $1+\frac{K(s+1+j)(s+1-j)}{s^3}$ 概略参数根轨迹图

由系统的根轨迹可知：当 $0<K<1$ 时，系统不稳定，$c_n(t)$ 发散；而当 $K>1$ 时，系统稳定，$c_n(t)$ 收敛；当 K 值在 $K>1$ 基础上继续增大时，系统的稳定性变好，$c_n(t)$ 收敛加快；当 $K\to\infty$ 时，系统的阻尼比趋近于 0.707，响应 $c_n(t)$ 的振荡性减弱，系统的调节时间减小，快速性得到改善。

4. 设单位反馈系统的开环传递函数

$$G(s)=\frac{as+1}{s^2}$$

试确定相角裕度为时参数 a 的值。45° （16 分）

解：系统的开环频率特性

$$G(j\omega)=\frac{1+ja\omega}{-\omega^2}=\frac{\sqrt{1+a^2\omega^2}}{\omega^2}\mathrm{e}^{-j(\pi-\mathrm{arctg}a\omega)}$$

其中$\varphi(\omega)=\pi-\mathrm{arctg}a\omega$。由相角裕度定义可知：

$$\gamma=\pi+\varphi(\omega_c)=\mathrm{arctg}a\omega_c=\frac{\pi}{4}$$

解得：

$$\omega_c=1/a$$

而

$$|G(j\omega_c)|=\left.\frac{\sqrt{1+a^2\omega_c^2}}{\omega_c^2}\right|_{\omega_c=1/a}=1$$

解得：

$$a=0.841,\quad \omega_c=1.189$$

5. 闭环采样系统如图 4 所示，采样周期$T=0.5$。要求判别采样系统的稳定性。（18 分）

已知$Z\left[\frac{1}{s^2}\right]=\frac{Tz}{(z-1)^2}$，$Z\left[\frac{1}{s+a}\right]=\frac{z}{z-\mathrm{e}^{-aT}}$。

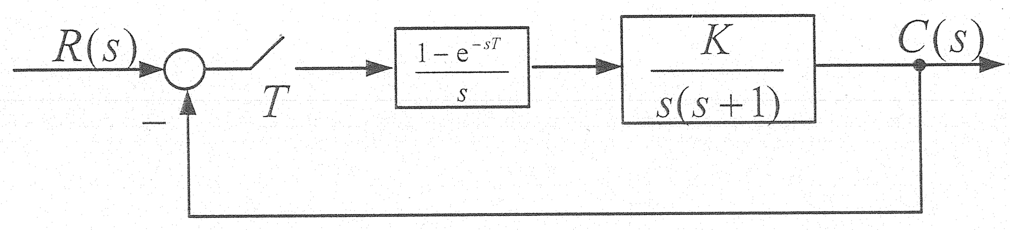

图 4　闭环采样系统

解　开环脉冲传递函数为

$$G_hG(z)=Z\left[\frac{(1-\mathrm{e}^{-sT})K}{s^2(s+1)}\right]=K(1-z^{-1})Z\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right]=K(1-z^{-1})Z\left[\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}\right]$$

$$=K(1-z^{-1})[\frac{0.5z}{(z-1)^2}-\frac{z}{z-1}+\frac{z}{z-0.6065}]=K\frac{0.1065z+0.0902}{(z-1)(z-0.6065)}$$

则闭环特征方程为

$$D(z)=(z-1)(z-0.6065)+K(0.1065z+0.0902)$$

$$=z^2+(0.1065K-1.6065)z+(0.6065+0.0902K)=0$$

令$z=\frac{w+1}{w-1}$，得w域特征方程为

$$D(w) = 0.1967Kw^2 + (0.787 - 0.1804K)w + (3.213 - 0.0163K) = 0$$

列出劳思表如下：

$$\begin{array}{c|cc} w^2 & 0.1967K & 3.213-0.0163K \\ w^1 & 0.787-0.1804K & 0 \\ w^0 & 3.213-0.0163K & \end{array}$$

根据劳思判据得系统稳定的条件为

$$0.1967K > 0，\ 0.787 - 0.1804K > 0，\ 3.213 - 0.0163K > 0$$

则有系统稳定时，K 值范围为

$$0 < K < 4.3625$$

6. 设非线性系统如图 5 所示，其中参数 K_1，K_2，T_1，T_2，M 均为正。

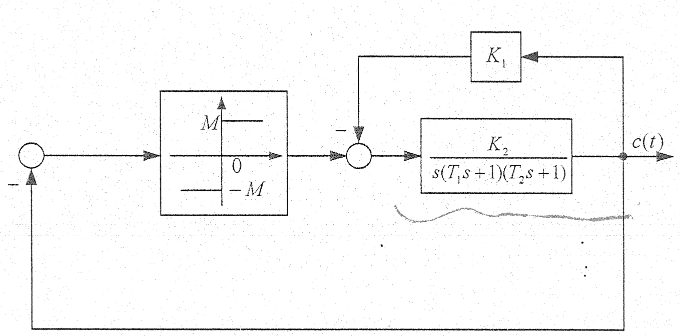

图 5 非线性系统

试确定系统发生自振时，各参数应满足的条件。已知理想继电特性的描述函数为 $N(A) = \dfrac{4M}{\pi A}$。 （16 分）

解 将图示非线性系统化为典型结构

$$G(j\omega) = \frac{K_2}{j\omega(T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1) + K_1K_2}$$

$$= \frac{K_2}{K_1K_2 - (T_1 + T_2)\omega^2 + (1 - T_1T_2\omega^2)j\omega}$$

$$-\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi A}{4M}$$

$$\frac{K_2}{1+\frac{K_1K_2}{K_2}}$$

当 $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{T_1T_2}}$ 时，有

$$\mathrm{Re}[G(j\omega)] = \frac{K_2}{K_1K_2 - \left(\dfrac{T_1 + T_2}{T_1T_2}\right)}$$

令

$$-\frac{1}{N(A)} = \mathrm{Re}[G(j\omega)]$$

即

$$-\frac{\pi A}{4M}=\frac{K_2}{K_1K_2-\left(\frac{T_1+T_2}{T_1T_2}\right)}$$

由此可知，使系统产生稳定自振时各参数应满足的条件为

$$K_1K_2<\frac{T_1+T_2}{T_1T_2}$$