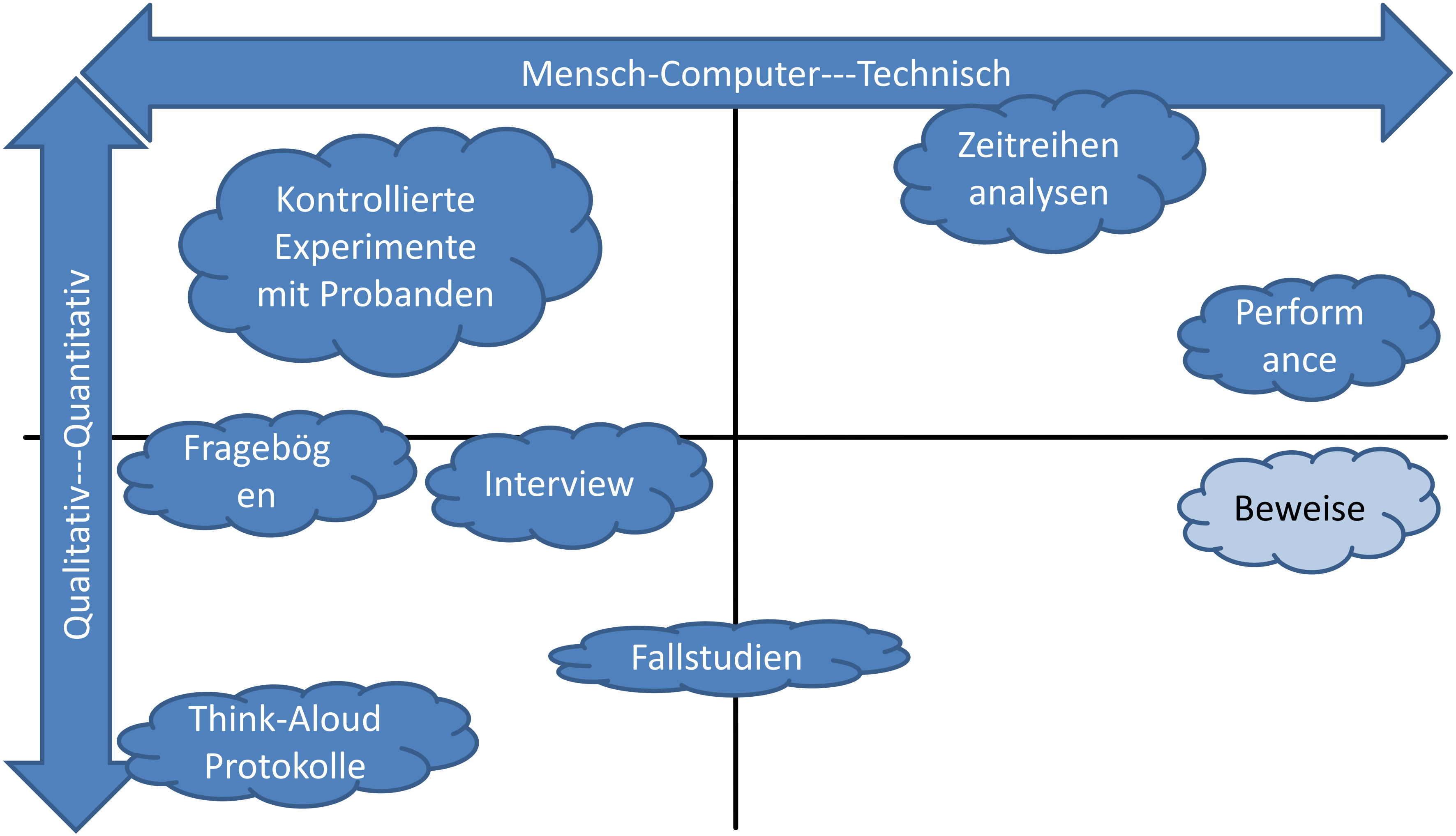
Faculty of
Computer Science

Auswertung

Lernziele

- χ^2-Test durchführen und interpretieren können
- Korrekte Korrelationen abhängig vom Skalenniveau berechnen und interpretieren können
- Problem des multiplen Testens verstehen
- Varianzanalysen durchführen und interpretieren können

Einordnung


Mensch-Computer---Technisch
Qualitativ---Quantitativ
Kontrollierte Experimente mit Probanden
Zeitreihen analysen
Perform ance
Fragebög en
Interview
Beweise
Fallstudien
Think-Aloud Protokolle

Erwartungswert

- Theoretischer Wert, der Erwartung beschreibt
- Z.B. bei diskreten Werten: $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \bullet x_i$
- Mittelwert ist beobachteter Wert

χ^2-Test

- Vergleich von Häufigkeiten
- Weichen beobachtete Häufigkeiten von erwarteten Häufigkeiten ab?
- Weichen beobachtete Häufigkeiten voneinander ab?

χ^2-Test von Hand

- Weichen beobachtete Häufigkeiten von erwarteten Häufigkeiten ab?

	Männlich	Weiblich
Beobachtet	9	3
Erwartet	6	6

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(f_{bi} - f_{ei})^2}{f_{ei}}$$

$$\frac{(6-9)^2}{6} + \frac{(6-3)^2}{6} = 3$$

χ^2-Test von Hand

- Errechneten Wert mit Wert aus Tabelle vergleichen $\chi^2_{df=1,\alpha=.05} = 3.84$
- 3.84 > 3; nicht signifikant

χ^2-Test von Hand

	0		1		2		
Aufgabe 1	6	4,5	18	16,5	16	19	40
Aufgabe 2	3	4,5	15	16,5	22	19	40
Summe	9		33		38		80

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{(f_{bij} - f_{eij})^2}{f_{eij}}$$

- Erwartete Häufigkeiten ausrechnen (Zeilensumme*Spaltensumme/Gesamtsumme)
- 2.22
- Freiheitsgrade: (n-1)*(m-1)

$$\chi^2{}_{df=2,\alpha=.05} = 5.99$$

χ^2-Test mit R

- Matrix definieren:
- freqs <- matrix(c(6,3,18,15,16,22),nrow=2)
- chisq.test(freqs)

χ^2-Test - Voraussetzung

- Vergleich von Häufigkeiten
- Erwartete Häufigkeiten > 5 (sonst Fisher‘s exact test)

Korrelationen

- Maß für Zusammenhang in Daten
- Keine Kausalität!
- Wertebereich: -1 <= r <=+1
- $|r|$: 0-.1: kein Zusam menhang
- $|r|$: 1-.3: schwacher Zusammenhang
- $|r|$: 3-.5: mittlerer Zusammenhang
- $|r|$: >.5: starker Zusammenhang

Signifikanztest für Korrelationen

- Je nach Korrelation verschiedene Tests
- Nullhypothese:
  - H0: r = 0
- Signifikanz bedeutet, dass Korrelation (vmtl.) von 0 verschieden ist

Produkt-Moment-Korrelation

- Pearson‘s r
- Metrisch-Metrisch

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}) \bullet (y_i - \overline{y})}{n \bullet s_x \bullet s_y}$$

Spearman-Korrelation

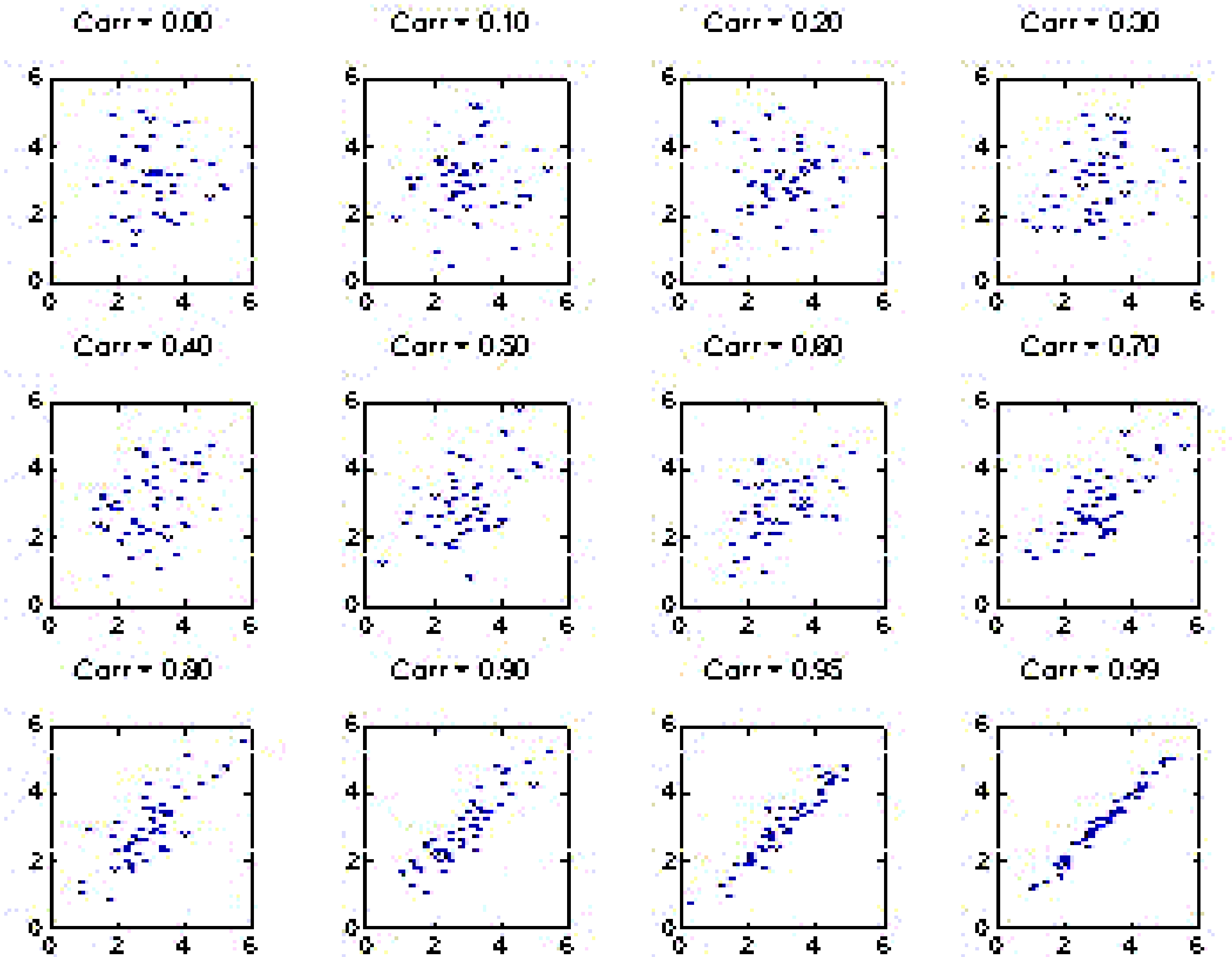
- Rangkorrelation
- Ordinal-ordinal, ordinal-metrisch

$$r_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^{\,2}}{n \bullet (n^2 - 1)}$$

Kontingenzkoeffizient

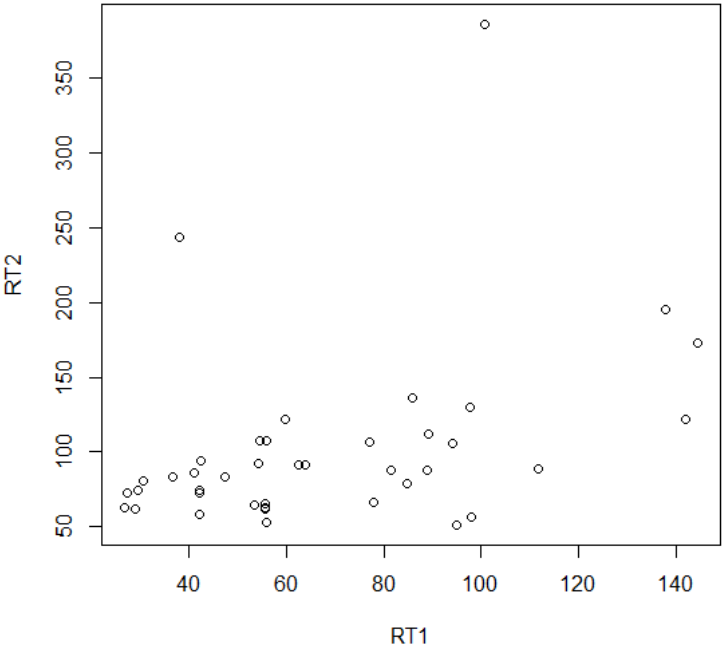
- Nominal-nominal

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}}$$


Corr = 0.00
Corr = 0.10
Corr = 0.20
Corr = 0.30
Corr = 0.40
Corr = 0.50
Corr = 0.60
Corr = 0.70
Corr = 0.80
Corr = 0.90
Corr = 0.95
Corr = 0.99

Regression

- Vorhersage einer Variablen basierend auf Prädiktorvariable
- Geradengleichung:
  - y=b*x + a
- Quadrierte Abweichung de
Geraden soll minimal sein
- R: lm(x~y)



Zusammenhang Korrelation und Regression

$$r = \frac{s_x}{s_y} \bullet b$$

- Regression erweckt den Anschein von Kausalität
- Aber auch statistisch nicht gegeben, sondern muss aus Versuchsdesign hervorgehen

Fehlerarten

		Es gilt: H_0	H_1
Entscheidung für:	H_0	✓	β-Fehler
	H_1	α-Fehler	✓

Multiples Testen-Beispiel (1)

- Faktor mit 4 Stufen, jeweils paarweise Vergleiche
- Insgesamt: $\binom{4}{2} = 6$

- Wahrscheinlichkeit, eine H_0 korrekterweise zu behalten: 0.95
- Wahrscheinlichkeit, zwei H_0 korrekterweise zu behalten: 0.95*0.95
- Wahrscheinlichkeit, sechs H_0 korrekterweise zu behalten: 0.95^6

Multiples Testen-Beispiel (2)

- Wahrscheinlichkeit, dass bei sechs Tests mindestens einer signifikant ist:
- $1 - 0.95^6 = 0.26$

Multiples Testen

- Bei mehreren Signifikanztests muss das Signifikanzniveau angepasst werden
- Bonferoni-Korrektur:
  - t: Anzahl Tests
  - $\alpha' = \alpha / t$
  - $\alpha / 6 = 0.0083$
- α-Fehler, dass grüne Jellybeans Akne verursachen: 64%

Varianzanalyse

- ANOVA (Analysis of Variances)
- Analyse, in wie weit Varianz in abhängiger Variablen durch unabhängige Variable verursacht wird
- Zerlegung der Varianzanteile in Treatment- und Fehlervarianz
- H_0: Mittelwerte aller Gruppen sind gleich
- H_1: Mindestens 2 Mittelwerte sind ungleich

Schritt 1: Totale Quadratsumme

	A_1		A_2		A_3		A_4	
	2	**4**	3	**1**	6	**4**	5	**1**
	1	**9**	4	**0**	8	**16**	5	**1**
	3	**1**	3	**1**	7	**9**	5	**1**
	3	**1**	5	**1**	6	**4**	3	**1**
	1	**9**	0	**16**	8	**16**	2	**4**
Mittel	2		3		7		4	

- Quadrierte Abweichung aller Messwerte vom Gesamtmittelwert
- $\overline{G}$: 4
- $QS_{tot} = 100$

Formal

$$\overline{G} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}}{n \cdot m}$$

$$QS_{tot} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_{ij} - \overline{G})^2$$

n: Anzahl Probanden pro Gruppe

m: Anzahl Faktorstufen

Schritt2: Treatmentquadratsumme

- Anteil, der auf 4 Stufen der unabhängigen Variablen zurückzuführen ist
- Annahme, dass nur die unabhängige Variable Varianz in Ergebnis hervorruft
- Abweichung der Messwerte vom Gesamtmittelwert (=4)
- $QS_{treat} = 70$

A_1		A_2		A_3		A_4	
2	**4**	3	**1**	7	**9**	4	**0**
2	**4**	3	**1**	7	**9**	4	**0**
2	**4**	3	**1**	7	**9**	4	**0**
2	**4**	3	**1**	7	**9**	4	**0**
2	**4**	3	**1**	7	**9**	4	**0**

Formal

$\overline{A_i}$: Gruppenmittelwert

$$QS_{treat} = n\sum_{i=1}^{m}(\overline{A_i} - \overline{G})^2$$

Schritt 3: Fehlerquadratsumme

- Unterschiede in Messwerten pro Gruppe sind nur durch Störvariablen beeinflusst
- Quadrierte Differenz der einzelnen Messwerte vom Gruppenmittelwert
- $QS_{error} = 30$

A_1		A_2		A_3		A_4	
2	**0**	3	**0**	6	**1**	5	**1**
1	**1**	4	**1**	8	**1**	5	**1**
3	**1**	3	**0**	7	**0**	5	**1**
3	**1**	5	**4**	6	**1**	3	**1**
1	**1**	0	**9**	8	**1**	2	**4**
2		3		7		4	

Formal

$$QS_{error} = \sum_i \sum_m (x_{mi} - \overline{A_i})^2$$

Zusammenhang Quradatsummen

- $QS_{tot} = 100$
- $QS_{treat} = 70$
- $QS_{error} = 30$

- $QS_{tot} = QS_{treat} + QS_{error}$

Schritt 4a: Freiheitsgrade

- df_{tot}: Anzahl Faktorstufen * Anzahl Probanden pro Stufe – 1 (=19)
- df_{treat} : Anzahl Faktorstufen – 1 (=3)
- df_{error}: Anzahl Faktorstufen * (Anzahl Probanden pro Stufe – 1) [=16]

- $df_{tot} = df_{treat} + df_{error}$

Schritt 4b: Varianzen

$$\hat{\sigma}^2{}_{treat} = \frac{QS_{treat}}{df_{treat}} = \frac{70}{3} = 23.33$$

$$\hat{\sigma}^2{}_{error} = \frac{QS_{error}}{df_{error}} = \frac{30}{16} = 1.88$$

$$\hat{\sigma}^2{}_{tot} = \frac{QS_{tot}}{df_{tot}} = \frac{100}{19} = 5.26$$

Schritt 5: F-Wert

- H_0: Mittelwerte aller Gruppen sind gleich
- H_0: $\hat{\sigma}^2_{treat} = \hat{\sigma}^2_{error}$

$$F = \frac{\hat{\sigma}^2_{treat}}{\hat{\sigma}^2_{error}} = \frac{23.33}{1.88} = 12.41$$

$$F_{dfZähler=3, dfNenner=16, \alpha=.05} = 3.24$$

- Signifikanter Unterschied, d.h.:

  Min. 2 Mittelwerte unterscheiden sich

Schritt 6: Einzelvergleiche

	A_1	A_2	A_3	A_4
Mittel	2	3	7	4

$$\sum_i c_i = 0$$

$$D = 1 \cdot \overline{A_1} + 1 \cdot \overline{A_2} + 1 \cdot \overline{A_4} - 3 \cdot \overline{A_3} = 2 + 3 + 4 - 21 = -12$$

$$F = \frac{n \cdot D^2}{\sum_{i=1}^{p} c_i^{\,2} \cdot \hat{\sigma}^2_{error}} = \frac{5 \cdot 12^2}{(1+1+1+9) \cdot 1.88} = 31.91$$

$$F_{dfZähler=1, dfNenner=16, \alpha=.05} = 4.49$$

Zweifaktorielle ANOVA

- Überprüfung, ob der Einfluss von 2 Faktoren signifikant ist
- Unterschied zur einfaktoriellen ANOVA:
  - Haupteffekte
  - Interaktionseffekte
- Hypothesen:
  - H_{0A}: Gleiche Mittelwerte in Faktorstufen von A
  - H_{0B}: Gleiche Mittelwerte in Faktorstufen von B
  - H_{0AxB}: Keine Interaktion zwischen A und B

Schritt 1: Totale Quadratsumme

	A_1		A_2		A_3	
B_1	22	26.01	16	0.81	13	15.21
	25	65.61	16	0.81	12	24.01
	22	26.01	16	0.81	12	24.01
	21	16.81	15	3.61	13	15.21
	22	26.01	15	3.61	12	24.01
B_2	18	1.21	19	4.41	16	0.81
	19	4.41	20	9.61	14	8.41
	17	0.01	17	0.01	16	0.81
	21	16.81	16	0.81	13	15.21
	19	4.41	16	0.81	14	8.41

- Quadrierte Abweichung aller Messwerte vom Gesamtmittelwert
- $\overline{G}$: 16,9
- $QS_{tot} = 348.7$

Formal

$$QS_{tot} = \sum_m \sum_i \sum_j (x_{ijm} - \overline{G})^2$$

Schritt 2: Quadratsumme der Zellen

	A_1	A_2	A_3
B_1	22.4	15.6	12.4
B_2	18.8	17.6	14.6

B_1A_1	$5*(22.4-16.9)^2$
B_1A_2	$5*(18.8-16.9)^2$
B_1A_3	$5*(15.6-16.9)^2$
B_2A_1	$5*(17.6-16.9)^2$
B_2A_2	$5*(12.4-16.9)^2$
B_2A_3	$5*(14.6-16.9)^2$

- Quadrierte Abweichung der Gruppenmittelwerte vom Gesamtmittelwert
- $QS_{cells} = 307.9$

Formal

$$QS_{error} = n\sum_i \sum_j (\overline{AB_{ij}} - \overline{G})^2$$

- $\overline{AB}_{ij}$: Mittelwerte der einzelnen Gruppen

Schritt 3: Fehlerquadratsumme

- Unterschiede in Messwerten pro Gruppe sind nur durch Störvariablen beeinflusst
- Differenz der einzelnen Messwerte vom Gruppenmittelwert
- $QS_{error} = 40,80$

		A_1		A_2		A_3	
B_1		22	0.16	16	0.16	13	0.36
		25	6.76	16	0.16	12	0.16
		22	0.16	16	0.16	12	0.16
		21	1.96	15	0.36	13	0.36
		22	0.16	15	0.36	12	0.16
	Mittel	22.4		15.6		12.4	
B_2		18	0.64	19	1.96	16	1.96
		19	0.04	20	5.76	14	0.36
		17	3.24	17	0.36	16	1.96
		21	4.84	16	2.56	13	2.56
		19	0.04	16	2.56	14	0.36
	Mittel	18.8		17.6		14.6	

Formal

$$QS_{error} = \sum_m \sum_i \sum_j (x_{ijm} - \overline{AB_{ij}})^2$$

- $\overline{AB}_{ij}$: Mittelwerte der einzelnen Gruppen

Zusammenhang Quadratsummen

- $QS_{tot} = 348.7$
- $QS_{cells} = 307.9$
- $QS_{error} = 40.8$

- $QS_{tot} = QS_{cells} + QS_{error}$

Schritt 4: Quadratsumme Haupteffekte

- Faktor A: Differenz der Gruppenmittelwerte vom Gesamtmittelwert
- $\overline{G}$: 16.9
- Wichtung mit Anz. Probanden pro Gruppe * Anz. Stufen Faktor B
- QS_A: 253.4

	A_1		A_2		A_3	
	22		16		13	
	25		16		12	
	22		16		12	
	21		15		13	
	22		15		12	
	18		19		16	
	19		20		14	
	17		17		16	
	21		16		13	
	19		16		14	
Mittel	20.6	**13.69**	16.6	**0.09**	13.5	**11.56**

Formal

$$QS_A = n \cdot q \cdot \sum_i (\overline{A_i} - \overline{G})^2$$

- n: Anzahl Probanden pro Gruppe
- q: Anzahl Faktorstufen B
- $\overline{A_i}$: Mittelwert Faktor (über alle Stufen von Faktor B)

Schritt 4: Quadratsumme Haupteffekte

- Faktor B (analog zu Faktor A)
  - Differenz der Gruppenmittelwerte von B vom Gesamtmittelwert
  - Wichtung mit Anz. Probanden pro Gruppe und Anz. Stufen Faktor A
  - QS_B: 0.30

Formal

$$QS_B = n \cdot p \cdot \sum_j (\overline{B_j} - \overline{G})^2$$

- n: Anzahl Probanden pro Gruppe
- p: Anzahl Faktorstufen A
- $\overline{B_i}$: Mittelwert Faktor (über alle Stufen von Faktor A)

Zusammenhang Haupteffekt-Quadratsummen

- $QS_{cells} = 307.9$
- $QS_A = 253.4$
- $QS_B = 0.30$

- $QS_{cells} = QS_A + QS_B + QS_{AxB}$

	A_1	A_2	A_3
B_1	22.4	15.6	12.4
B_2	18.8	17.6	14.6
Differenz	3.6	-2	-2.2

	A_1	A_2	A_3	
B_1	20.5	16.5	13.4	16.8
B_2	20.7	16.7	13.6	17.0
Differenz	0.2	0.2	0.2	
	20.6	16.6	13.5	16.9

Schritt 5: Quadratsumme Interaktionseffekt

	A_1		A_2		A_3		Gruppen mittel B_j
B_1	20.5	3.61	16.5	0.81	13.4	1	16.8
B_2	20.7	3.61	16.7	0.81	13.6	1	17.0
Differenz	0.2		0.2		0.2		
Gruppen mittel A_i	20.6		16.6		13.5		

- Differenz erwartete Gruppenmittelwerte und tatsächliche Gruppenmittelwerte
- Wichtung mit Anz. Probanden pro Gruppe (5)
- $QS_{AxB} = 54.2$

Formal

$$QS_{AxB} = n\sum_i \sum_j (\overline{AB_{ij}}^{erwartet} - \overline{AB_{ij}}^{beobachtet})^2$$

$$\overline{AB_{ij}}^{erwartet} = \overline{A}_i + \overline{B}_j - \overline{G}$$

Zusammenhang Quadratsummen

- $QS_{tot} = QS_{cells} + QS_{error}$
- $QS_{tot} = QS_A + QS_B + QS_{AxB} + Qs_{error}$
- 348.7 = 253.4 + 0.3 + 54.2 + 40.8

Schritt 6a: Freiheitsgrade

- df_{tot}: Faktorstufen (A) * Faktorstufen (B) * Anz. Probanden pro Stufe – 1 (=29)
- df_A: Faktorstufen (A) – 1 (=2)
- df_B: Faktorstufen (B) – 1 (=1)
- df_{AxB}: (Faktorstufen (A) – 1)*(Faktorstufen (B) – 1) (=2)
- df_{error}: Faktorstufen (A) * Faktorstufen (B) * (Anz. Probanden pro Stufe – 1) (=24)

- $df_{tot} = df_A + df_B + df_{AxB} + df_{error}$

Schritt 6b: Varianzen

$$\hat{\sigma}^2{}_{tot} = \frac{QS_{tot}}{df_{tot}} = \frac{348.7}{29} = 12.2$$

$$\hat{\sigma}^2{}_{error} = \frac{QS_{error}}{df_{error}} = \frac{40.8}{24} = 1.7$$

$$\hat{\sigma}^2{}_{A} = \frac{QS_{A}}{df_{A}} = \frac{253.4}{2} = 126.7$$

$$\hat{\sigma}^2{}_{B} = \frac{QS_{B}}{df_{B}} = \frac{0.3}{1} = 0.3$$

$$\hat{\sigma}^2{}_{AxB} = \frac{QS_{AxB}}{df_{AxB}} = \frac{54.2}{2} = 27.1$$

Schritt 7: Signifikanztest

$$F_A = \frac{126.7}{1.7} = 74.53 \qquad F_{dfZähler=2, dfNenner=24, \alpha=.05} = 3.4$$

$$F_B = \frac{0.3}{1.7} = 0.18 \qquad F_{dfZähler=1, dfNenner=24, \alpha=.05} = 4.26$$

$$F_{AxB} = \frac{27.1}{1.7} = 15.94 \qquad F_{dfZähler=2, dfNenner=24, \alpha=.05} = 3.4$$