

Trabajo Práctico 1

[75.12 - 95.04] Análisis Numérico

[CB051] Modelación Numérica

Curso Sassano

1er Cuatrimestre 2024

Firmapaz, Agustín Ezequiel [105172]

Feijoo, Sofía [101148]

Panetta, Martina Ágata [103713]

## 

Índice

[1. Introducción 2](#_ocapcicyrqg1)

[2. Objetivos 2](#_yz68eg7pvxgk)

[3. Métodos a analizar 3](#_d9clxm7ie87v)

[3. 1. Bisección 3](#_avlbsashbns)

[3. 2. Punto Fijo 3](#_lz8lc476rhqo)

[3. 3. Newton-Raphson 4](#_ut8ccj4wwb)

[3. 4. Secante 4](#_v5klbhwhfryu)

[3. 5. Newton-Raphson Modificado 4](#_9ojba8brhkkh)

[4. Presentación de resultados 5](#_qi4g8u20eoce)

[5. Conclusiones 9](#_y0mr3j69gvoa)

[6. Referencias 9](#_nqoa9fuwgxlw)

## 

## 1. Introducción

El estudio y la implementación de métodos numéricos juegan un papel crucial en la resolución de problemas complejos. Uno de estos métodos es la búsqueda de raíces de funciones, que tiene aplicaciones que van desde la optimización de sistemas hasta la modelización de fenómenos físicos. En este trabajo nos enfocaremos en cinco métodos para encontrar raíces de funciones:

* Bisección.
* Punto Fijo.
* Newton-Raphson.
* Secante.
* Newton-Raphson modificado.

## 

## 2. Objetivos

El objetivo principal de este trabajo práctico es profundizar en el conocimiento y comprensión de los métodos de búsqueda de raíces, explorando sus ventajas y limitaciones comparativamente. Para ello se realizará la implementación en Python de cada uno de los 5 métodos, analizando casos de éxito y de falla.

Además, se realizarán análisis gráficos para visualizar el desempeño de cada método en términos de orden de convergencia, constante asintótica y convergencia de error, intentando verificar que los valores obtenidos de cada uno de estos sean los esperados para cada tipo de método.

## 

## 

## 3. Métodos a analizar

A continuación, se introducen los métodos de búsqueda de raíces [1] que serán implementados y analizados a lo largo del trabajo.

### 

### 3. 1. Bisección

El primer método que analizamos es el de Bisección o Búsqueda Binaria. Dada una función f continua en un intervalo [a, b] y tal que el producto f(a) por f(b) es negativo, utilizando el Teorema de Bolzano se garantiza la existencia de un valor p perteneciente al intervalo [a, b] tal que f(p) = 0.

Para analizar un caso de éxito para este método se estudió la siguiente función en el intervalo [1,2]: . Primero se aplicó el método con una tolerancia de y se encontró la raíz 1.3652305603027344 en 18 iteraciones, y luego se lo aplico con una tolerancia de y se encontró una raíz en 1.36523001344176 en 34 iteraciones. Para ver el valor de la raíz obtenida por iteración para cada caso, ver las tablas de la subsección Casos de Éxito en la sección Bisección en el Google Colab.

### 3. 2. Punto Fijo

Dada una función g continua en un intervalo [a, b], se dice que p es un punto fijo de la función si g(p) = p. Mediante el Teorema del Punto Fijo podemos asegurar que la sucesión (con p0 como semilla), converge al punto fijo:

) (3.2.1)

¿Cómo usamos este método para obtener raíces? Dada una f(x) a la cual buscamos sus raíces, basta con despejar una de sus términos incógnitas en la ecuación f(x) = 0, dándonos una g(x) = x. Si g(x) cumple con el teorema del punto fijo, el punto fijo en g será raíz en f.

Para analizar un caso de éxito para este método se estudió la función:.

Se aplicó el método con una tolerancia de y una semilla de 1.5 y se encontró la raíz 1.3652332557424998 en 18 iteraciones, y luego se lo aplico con una tolerancia de y se encontró una raíz en 1.365230013689632 en 30 iteraciones. Para ver el valor de la raíz obtenida por iteración para cada caso, ver las tablas de la subsección Casos de Éxito y Casos de Falla en la sección Punto Fijo en el Google Colab.

### 

### 

### 3. 3. Newton-Raphson

Dada una f continua y df su primera derivada, el método de Newton Raphson aplica la sucesión:

(3.3.1)

Se basa en la idea de aproximar la función por su recta tangente en un punto y luego encontrar la intersección de esa recta con el eje x para obtener una mejor aproximación de la raíz.

Para analizar un caso de éxito para este método se estudió la función:.

Se aplicó el método con una tolerancia de y una semilla de 20 y se encontró la raíz 0.6840945657036894 en 11 iteraciones. Para ver el valor de la raíz obtenida por iteración para cada caso, ver las tablas de la subsección Casos de Éxito y Casos de Falla en la sección Newton-Raphson en el Google Colab.

### 3. 4. Secante

Dada una f continua, este método aplica la sucesión:

(3.4.1)

A diferencia del método de Newton-Raphson, que requiere la derivada de la función, el método del secante aproxima la derivada con una diferencia finita entre dos puntos cercanos. Esto lo hace útil cuando la derivada no es fácil de calcular o no está disponible.

Para analizar un caso de éxito para este método se estudió la función. Se aplicó el método con una tolerancia de y los valores iniciales 19 y 20 y se encontró la raíz 0.6840945657036894 en 14 iteraciones. También se analizó un caso de falla en el cual la tangente en la raíz tiende a infinito con la función , por lo que el método no converge. Para ver el valor de la raíz obtenida por iteración para cada caso, ver las tablas de las subsecciones Caso de Éxito y Caso de Falla en la sección Secante en el Google Colab.

### 3. 5. Newton-Raphson Modificado

Dada una f continua, df su primera derivada, y ddf su segunda derivada, este método aplica la sucesión:

(3.5.1)

Busca mejorar la convergencia cuando la derivada de la función es cercana a cero en la raíz. En lugar de usar la derivada exacta, se utiliza una aproximación de la derivada que evita dividir por valores cercanos a cero.

Para analizar un caso de éxito para este método se estudió la función. Se aplicó el método con una tolerancia de y una semilla de 1 y se encontró la raíz 0.6840945657036894 en 4 iteraciones. Para ver el valor de la raíz obtenida por iteración para cada caso, ver las tablas de la subsección Caso de Éxito y Caso de Falla en la sección Newton-Raphson Modificado en el Google Colab.

## 4. Presentación de resultados

Considerando todas las condiciones para la utilización de los métodos de búsqueda de raíces mencionados anteriormente, se presenta la función seleccionada para evaluar la efectividad de cada uno. Se trata de una función exponencial que presenta una raíz en el intervalo [1, 3], por lo que nos enfocaremos en ese intervalo.

(4.1.1)

| *Figura 1: Gráfico de la función f(x) = e\*\*x/4 - x en el intervalo [1, 3].* |
| --- |

Como se observa en la Figura 1, la función es continua en el intervalo [1, 3] y cumple con que el producto f(a) por f(b) es negativo, por lo que cumple con las condiciones del **método de Bisección**. La función f pertenece a C2 en [1, 3] (es decir, tiene derivadas continuas hasta el segundo orden en el intervalo) y su derivada f’(x) no se anula en [1, 3], por lo que puede aplicarse el método de la **Secante**, **Newton Raphson** y su versión **modificada.**

Además, encontramos la función g(x) = ex/4 al despejar x en la ecuación f(x) = 0, que mapea sobre sí misma en el intervalo, por lo que la utilizamos para el método de **Punto Fijo**.

A continuación, analizaremos los resultados obtenidos con cada uno de los métodos utilizados.

En primer lugar si observamos la Figura 2 podemos ver la velocidad con la que convergen todos los métodos. Según el gráfico, los métodos de Newton Raphson, Secante y Newton Raphson Modificado convergen más rápidamente a la raíz en comparación con los métodos de Bisección y Punto fijo, viendo que en la primera iteración ya comienzan con una aproximación de la raíz más cercana al valor real. Los métodos de bisección y punto fijo en cambio son más oscilantes en las primeras iteraciones. Esto nos da una pauta de la eficiencia y estabilidad de estos métodos por sobre otros.

| *Figura 2: Valor de la raíz en cada iteración.* |
| --- |

Los métodos de NR, Secante y NR Modificado muestran un comportamiento asintótico muy similar, convergiendo rápidamente a una constante pequeña tras unas pocas iteraciones iniciales (en donde se producen algunas oscilaciones). Esto indica que estos métodos de orden cuadrático o superior alcanzan una tasa de convergencia estable y rápida. El método de Bisección muestra un descenso lineal más lento hacia la constante asintótica, que refleja su orden de convergencia lineal inferior en comparación (ver Figura 3).

|  |
| --- |
| *Figura 3: Valor de la constante asintótica en cada iteración.* |

El orden de convergencia de un método numérico describe cómo se reduce el error en cada iteración. Analizándolo en la *Figura 3* nos muestra que los métodos de Bisección y Punto Fijo tienen un tipo de convergencia lineal con un alpha que se mantiene en casi todo momento constante e igual a 1. Por su parte, los métodos de Newton Raphson y su variante modificada alcanzan rápidamente y mantienen un alfa cercano a 2, lo cual expresa y confirma su tipo de convergencia cuadrática. Por último, se observa cómo el método de la Secante hace crecer su orden de convergencia hasta aproximadamente 2.5, para luego reducirlo y estabilizarse en valores cercanos a 1.5 confirmando de esta manera el tipo de convergencia supralineal.

|  |
| --- |
| *Figura 4: Constante asintótica en cada iteración.* |

En la *Figura 4* podemos comparar las constantes asintóticas de cada método. Podemos interpretar estas constantes como un coeficiente que proporciona una idea de la rapidez con la que convergen estos métodos numéricos (entre mas pequeña, mas rapido convergerá). Podemos observar que, dentro de los algoritmos de orden de convergencia lineal, el método de punto fijo converge de manera más veloz que el método de bisección. En el caso de Newton Raphson y su variante modificada, si se realiza un acercamiento en el gráfico, observamos que Newton Raphson posee una constante asintótica ligeramente menor que la de su contraparte modificada, indicando que el primero ha convergido con una mayor velocidad.

|  |
| --- |
| *Figura 5: log10(∆x) vs iteraciones.* |

Finalmente, observando el gráfico de reducción de errores a lo largo de las iteraciones, podemos reconfirmar todos los postulados que hemos mencionado previamente:

* Bisección ha sido un método que ha convergido más lentamente al resultado que Punto Fijo.
* Newton Raphson y su variante modificada han sido los métodos más rápidos. Además, podemos confirmar cómo en este caso la variante normal ha sido más rápida en convergencia que la variante modificada.
* El método de la secante se mantiene como un método más eficiente que los métodos de orden de convergencia lineal, pero no más que aquellos de orden de convergencia cuadrática.

## 

## 5. Conclusiones

Luego de analizar casos de éxito y falla, y habiendo analizado la performance para una misma función, podemos observar que los métodos de Newton-Raphson y su versión modificada son, como era de esperar, quienes convergen de manera más veloz.

En el gráfico de convergencia de error (y teniendo en cuenta que en gráfico de la convergencia de las raíces, todos los métodos convergen a la raíz esperada), podemos observar como los métodos de tipo NR (Newton-Raphson) alcanzan valores cercanos a la tolerancia definida en una menor cantidad de iteraciones que los demás métodos, pudiendo así confirmar su superioridad en velocidad de convergencia.

Por otra parte, los gráficos de orden de convergencia y constante asintótica nos permiten confirmar la linealidad en la convergencia de los métodos de Bisección y Punto Fijo, tanto en que su orden de convergencia siempre vale 1, como en que su constante asintótica es, efectivamente, constante a lo largo de las iteraciones. Hemos podido también comprobar la naturaleza cuadrática de los métodos de Newton Raphson y Newton Raphson Modificado, como la naturaleza supralineal del método del Secante; aun así, la rapidez de estos métodos para converger a la raíz buscada dificulta la confirmación de que sus constantes asintóticas sean, efectivamente, constantes, debido a que la cantidad de iteraciones realizadas por estos métodos son ampliamente inferiores a las brindadas por los métodos de Bisección y Punto fijo, lo cual reduce la muestra a analizar.

En resumen, este estudio nos ayudó a comprender la importancia de evaluar de forma exhaustiva los métodos de búsqueda de raíces en diferentes contextos. A lo largo del desarrollo, debimos poner a prueba nuestras suposiciones teóricas a partir de utilizar una amplia cantidad de gráficos y variantes de funciones para asegurar la eficacia de los métodos numéricos que exploramos. Esto nos brindó una visión más profunda sobre la complejidad asociada con la implementación, análisis y aplicación de métodos computacionales, que son herramientas esenciales en la resolución de problemas matemáticos y científicos.

## 

## 

## 6. Referencias

[1] Apuntes del curso Análisis numérico 1 - curso Sassano - Facultad de Ingeniería - Universidad de Buenos Aires - 2020.