FIUBA 2017 Matemática Discreta 61.07 Integrador 4, 17.07.2017 **Curso:** **Cuat.:** **Año:**

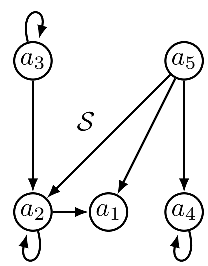
Alumno: L:

Duración: dos horas y media. Una condición suficiente de aprobación es la resolución ***completa*** y ***justificada*** de ***dos*** ejercicios cualesquiera. No se consideran cálculos dispersos o sin comentarios, ni gráficos o diagramas sin la identificación completa de sus elementos y su relación con el problema.

1. (a) Dados los enteros positivos a, b, m probar que $\alpha \in \mathbb{Z}$ es una solución de la ecuación $ax = b \pmod m$ sii cualquier elemento de $[\alpha] \in \mathbb{Z}_m$ es una solución de la misma ecuación y determinar el conjunto $X = \{x \in \mathbb{Z} : 6x = 12 \pmod 9, 12x = 24 \pmod{18}\}$.

   (b) Decidir si la siguiente proposición es verdadera o falsa, justificando detalladamente los argumentos que validan la decisión.
   No existe un grafo simple G planar tal que su complemento G' sea planar y su orden sea mayor que 10.

2. (a) En el conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ sea $\mathcal{S}$ la relación determinada por el *digraph* de la figura, y $\mathcal{T}$ la relación definida por la matriz $M_{\mathcal{T}}$, y sea $\mathcal{R}$ la relación $\mathcal{R} = (\mathcal{S} + \mathcal{T})^{-1}$. Determinar (siempre que existan), con las operaciones $x + y \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{x, y\}, xy \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{x, y\}$, *todos* los pares $(x, y) \in A^2$ tales que $xy + x = x + a_2a_3, (x + y)\mathcal{R}(a_3a_5)$.



$$M_{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (b) Probar que el producto de n números positivos ($n > 1$) de suma constante igual a s es máximo sii cada uno de ellos es igual a s/n.

3. Probar que: (a) todo grafo simple $G = (V(G), E(G))$ planar conexo de orden $n = |V(G)| \geq 3$ tiene al menos un vértice v de grado $d(v) \leq 5$. (b) Todo grafo planar es 5-coloreable.

4. Determinar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones, detallando la justificacin completa del valor asignado.

   (a) Una condición necesaria para que el grafo orientado $G = (V(G), E(G))$ sea un torneo de orden n es que $\sum_{k=1}^{n}(d_k^+)^2 = \sum_{k=1}^{n}(d_k^-)^2$.

   (b) Sean n (con $n > 1$) números naturales $d_1, d_2, \ldots, d_n$ tales que $0 \leq d_1 \cdots \leq d_n$. Para que estos números sean los grados de los vértices de algún grafo G de orden n es necesario y suficiente que se cumplan las dos condiciones siguientes: $(i)\, d_1 + d_2 + \cdots + d_n$ es par, $(ii)\, d_n \leq d_1 + d_2 + \cdots + d_{n-1}$.