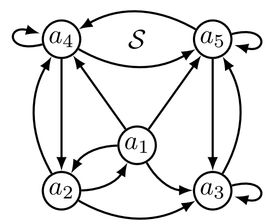
FIUBA 2016 Matemática Discreta Integrador 4, 22.02.2016 **Curso: Cuat.: Año:**

Alumno: NL:

Duración: dos horas y media. Una condición suficiente de aprobación es la resolución ***completa*** y ***justificada*** de ***tres*** ejercicios cualesquiera No se consideran cálculos dispersos o sin comentarios, ni diagramas sin la identificación completa de sus elementos.

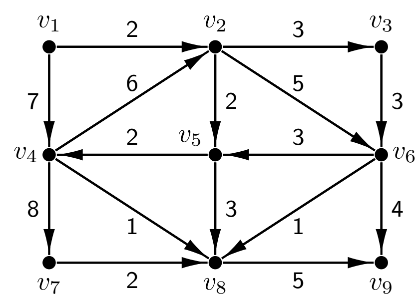
1. Sean a_n, b_n dos funciones reales definidas para todos los naturales n tales que $n \geq n_0 \geq 0$, con $a_n \neq 0$. (a) Hallar la solución exlícita de la ecuación de recurrencia lineal de primer orden $x_{n+1} = a_n x_n + b_n$ con la condición $x_{n_0} = x_0$. (b) Si se conocen dos soluciones $u_n = 2^n$ y $v_n = 2^n n! + n!$ de la ecuación de recurrencia $x_{n+1} = a_n x_n + b_n$, determinar el valor de x_4 si la condición iniciales $x_0 = 2$, .

2. En el conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ sea $\mathcal{S}$ la relación determinada por el *digraph* de la figura, y $\mathcal{T}$ la relación definida la matriz $M_{\mathcal{T}}$, y sea $\mathcal{R}$ la relación complemento de $\mathcal{T} \circ \mathcal{S}$ (esto es $\mathcal{R} = (\mathcal{T} \circ \mathcal{S})'$). (a) Analizar si $\mathcal{T}$ es una relación de equivalencia en A, y en caso afirmativo dar el conjunto cociente $A/\mathcal{T}$. (b) Representar el *digraph* de $\mathcal{R}$ y calcular las distancias $d(a_5, a_2)$ y $d(a_2, a_5)$.

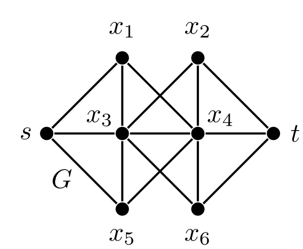


$$M_{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Sea $G = (V(G), E(G))$ la red de la figura con las capacidades indicadas por los números junto a cada arista.
   (a) Aplicar, detallando todos los pasos, el algoritmo de Ford-Fulkerson que permite obtener un flujo máximo de G.
   (b) En G el *alcance* $a(u_i)$ de un vértice u_i se define como el conjunto de vértices v_j tales que hay un camino (orientado) desde v_i a v_j. En V se define $v_i \mathcal{R} v_j$ sii $a(v_i) \subset a(v_j)$. Determinar si $\mathcal{R}$ es una relación de orden en $V(G)$, y en caso afirmativo graficar su diagrama de Hasse.



4. Sea $G = (V(G), E(G))$ conexo y s y t dos vértices en $V(G)$. Dos o más caminos entre s y t son de *arista-disjuntos* si no comparten aristas y se dice que un subconjunto de $E(G)$ *separa* s de t si su remoción destruye todo camino entre s y t. (a) *Probar* que la máxima cantidad de caminos arista-disjuntos no supera la mínima cantidad de aristas que separan s de t. (b) En particular, para el grafo G de la figura, determinar *todos* los caminos arista-disjuntos entre s y t, y determinar un par de vértices u, v tales que tengan entre ellos una cantidad de caminos de arista-dijuntos que no sea superada por ningún otro par de vértices.



5. Analizar cuáles de los tres grafos son hamiltonianos y cuáles son fuertemente conexos (¿algunos son isomorfos?). Para G_2, determinar su radio $r(G_2) \stackrel{\text{def}}{=} \min_u \max_v d(u, v)$, calcular su matriz de incidencia M y explicar el significado de cada uno de los elementos (i, j) de la matriz $B = MM^T$ y ponerlo en evidencia en el correspondiente grafo.