FIUBA 2016 Matemática Discreta Integrador 5, 29.02.2016

Curso:	**Cuat.:**	**Año:**

Alumno:	NL:

Duración: dos horas y media. Una condición suficiente de aprobación es la resolución ***completa*** y ***justificada*** de ***dos*** ejercicios cualesquiera No se consideran cálculos dispersos o sin comentarios, ni diagramas sin la identificación completa de sus elementos.

1. Determinar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones y dar una *prueba* del valor de verdad determinado.

   (a) Una condición suficiente para la conexidad de un grafo $G = (V(G), E(G))$ de orden $n = |V(G)|$ es que su grado mínimo $\delta(G)$ satisfaga la desiguadad $\delta(G) \geq (n-1)/2$.

   (b) Si $G = (V(G), E(G))$ es un grafo cuyos únicos dos vértices de grado impar son u y v, entonces existe un camino entre u y v.

   (c) En un álgebra de Boole $(B, +, \cdot, {}', \mathbf{0_B}, \mathbf{1_B})$, la relación $x \mathcal{R} y$ sii $x + y = xy$ es de equivalencia, y el cardinal del conjunto cociente $B/\mathcal{R}$ es la mitad del cardinal de B.

2. Sea P la familia de grafos que son caminos simples (*paths*), C la familia de los ciclos, K la familia de los completos y B la familia de los bipartitos.

   (a) Para cada par de estas familias, determinar *todas* las clases isomorfas a los grafos que pertenezcan a ambas familias, probando en detalle la argumentación.

   (b) Llamando E a la familia de los grafos eulerianos (esto es que tienen un camino cerrado sin aristas repetidas que incluye todas sus aristas) y H la familia de los hamiltonianos (esto es que tiene un camino cerrado sin vértices repetidos que incluye todos los vértices), determinar la intersección de H y de E con cada una de las cuatro familias P, C, K, B.

3. (a) Construir, siempre que exista, una ecuación de recurrencia $x_{n+1} = a_n x_n + b_n$, dos de cuyas soluciones sean $u_n = 2^n n!$ y $v_n = 2^n n!$ y determinar una solución de esa ecuación que satisfaga la condición $x_0 = 4$.

   (b) Probar por inducción que la siguiente desigualdad vale para todo natural $n \geq 2$, detallando explícitamente el esquema de la prueba y cada una de las inferencias:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} > \frac{13}{24}$$

4. Si A es la matriz de adyacencia del grafo simple dado por $G = (V(G), E(G))$, siendo $V(G) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de orden $n = |V(G)|$ y el tamaño $m = |E(G)|$, se *definen* los autovalores de G como los autovalores de A, siendo su espectro $\sigma(G) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$.

   (a) *Probar* las propiedades $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 0$, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 = 2m$ y mostrar su efectivo cumplimiento para el espectro del grafo G de la figura.

   (b) *Probar* que es suficiente que dos grafos sean isomorfos para que tengan el mismo espectro, pero que la recíproca es falsa.