FIUBA 2016 Matemática Discreta 61.07 Integrador 2, 04.07.2016

Curso:	**Cuat.:**	**Año:**

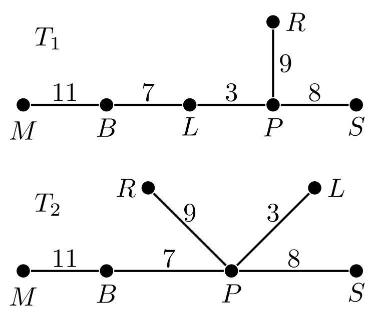
Alumno:	L:

Se presenta un esqueleto, prácticamente sin detalles, con justificaciones mínimas o inexistentes, de las líneas maestras de la resolución; se recomienda al alumno completarlas con los comentarios y definiciones que transformen el esqueleto en una resolución aceptable.

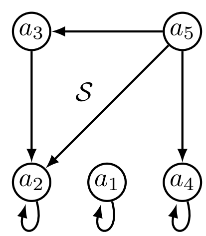
1. La tabla muestra las distancias (km) de las rutas de tierra que conectan seis ciudades (B, L, M, P, R, S). Determinar, mediante el algoritmo de Prim iniciado en R , todas las posibles formas de conectar las ciudades minimizando la cantidad de kilómetros a asfaltar, y para cada una de esas formas obtenidas, determinar las ciudades que quedan en el centro y las que quedan en la periferia del sistema asfaltado.

	B	L	M	P	R	S
B	-	7	11	7	10	15
L	7	-	18	3	12	11
M	11	18	-	18	20	27
P	7	3	18	-	9	8
R	10	12	20	9	-	13
S	15	11	27	8	13	-

♣ (Resp. Parcial). Son dos los árboles posibles, indicados con T_1 y T_2 en la figura, de peso $11 + 7 + 7 + 9 + 8 = 38$; inciando el algoritmo de Prim en R, debe conectarse necesariamente con P (pues la arista RP tiene el peso mínimo entre todas las que inciden en R), ahora debe añadirse necesariamente PL y a continuación puede elegirse añadir la arista LB o la arista PB, ambas de peso 7, el menor peso de entre las aristas todavía disponibles que agrandan el árbol hasta allí presente; si se elige la arista LB el resto de la construcción es única y resulta en T_1; en otro caso, eligiendo PB, las restantes elecciones son también únicas y arrojan el árbol T_2. Para el primer árbol, L es central (con excentricidad 18) , M y R periféricos (ambos con excentricidad 30); en cambio, para el segundo árbol, B es central (excentricidad 16). ¿Periféricos?

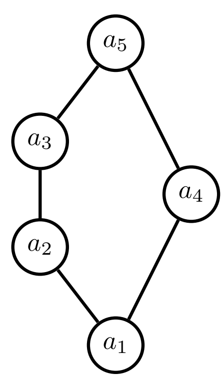


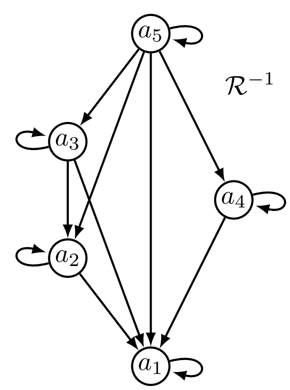
2. En el conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ sea $\mathcal{S}$ la relación determinada por el *digraph* de la figura, y $\mathcal{T}$ la relación definida por la matriz $M_{\mathcal{T}}$, y sea $\mathcal{R}$ la relación $\mathcal{R} = (\mathcal{S} + \mathcal{T})^{-1}$.
   (a) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de orden en A y determinar, con las operaciones $x + y \overset{\text{def}}{=} \sup\{x, y\}, xy \overset{\text{def}}{=} \inf\{x, y\}$, *todos* los pares $(x, y) \in A^2$ tales que $xy + x = a_3, (x + y)\mathcal{R}(a_3a_5)$.
   (b) Si $G = (V(G), E(G))$ es el *digraph* dado por la relación $\mathcal{R}^{-1}$ (inversa de $\mathcal{R}$), determinar la circunferencia de radio 1 centrada en $a_1 \in V(G) = A$ (esto es todos los $x \in A$ tales que $d(x, a_1) = 1$).



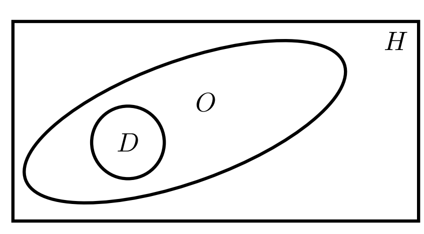
$$M_{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

♣ (Resp. Parcial). (a) La relación $\mathcal{R} = \mathcal{S}^{-1} + \mathcal{T}^{-1}$ es reflexiva pues $a_1\mathcal{S}^{-1}a_1, a_2\mathcal{S}^{-1}a_2, a_3\mathcal{T}^{-1}a_3, a_4\mathcal{S}^{-1}a_4, a_5\mathcal{T}^{-1}a_5$, luego $a_k\mathcal{R}a_k, k = 1, 2, 3, 4, 5$; del mismo modo se prueba que es antisimétrica y transitiva, y entonces es de orden, por definición de orden, con el diagrama de Hasse que se indica en la figura. Ahora $xy + x = \sup\{xy, x\} = \sup\{\inf\{x, y\}, x\} = x$ (¡detallar los motivos de la última igualdad! y no hablar de 'absorción'), de modo que debe ser $x = a_3$, y como $a_3a_5 = a_3$ la segunda condición es $a_3 + y = \sup\{a_3, y\} = a_3$, de donde y puede ser a_1, a_2, a_3 (y ningún otro), de modo que los pares pedidos son $(a_3, a_1), (a_3, a_2), (a_3, a_3)$. Para (b), obtenida la representación del *digraph* de la figura, la circunferencia pedida es el conjunto $\{a_2, a_3, a_4, a_5\}$.

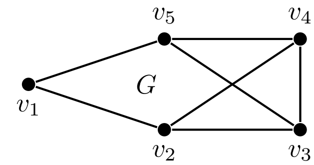


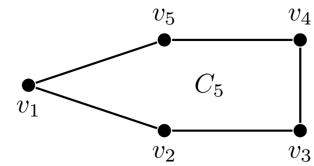


3. Sea D el conjunto de los grafos que satisfacen las hipótesis del teorema de Dirac, O el conjunto de los grafos que satisfacen las hipótesis del teorema de Ore, y H el conjunto de los grafos hamiltonianos. *Demostrar* que se dan la inclusiones estrictas de la figura, esto es que $D \subset O \subset H$ con $D \neq O, O \neq H$.



♣ (Resp. Parcial). Sea $G = ((G), E(G))$ un grafo simple de orden $n =\mid V(G) \mid \geq 3$. El teorema de Dirac afirma si $\forall v \in V(G) : d(v) \geq n/2$ entonces G es hamiltoniano; el teorema de Ore afirma que si para todo par de vértices no adyacentes u, v es $d(u) + d(v) \geq n$ entonces G es hamiltoniano. Ahora, $D \subset O$, pues si $\forall v \in V(G) : d(v) \geq n/2$, entonces $d(u) + d(v) \geq n/2 + n/2 = n$ (cualesquiera sean u, v, en particular, no adyacentes). El teorema de Dirac, por lo tanto se deduce del teorema de Ore, y basta probar éste (¡hacerlo!) para ver que $O \subset H$. El grafo G de la figura, con $n = 5$ está en O (verificar que los grados de cualquier par de vértices no adyacentes suman al menos n pero no en D (pues $d(v_1) = 2 < n/2$), de modo que $O \neq D$. Finalmente, C_5 está en H (es hamiltoniano) pero no en O, pues para cualquier par de vértices no adyacentes $d(u) + d(v) = 4 < 5 = n$, de modo que $O \neq H$.





4. Sea el grafo *planar* $G = (V(G), E(G))$ de orden $n =\mid V(G) \mid$ y tamaño $m =\mid E(G) \mid$ y de f caras en una representación plana.

   (a) *Probar* la fórmula de Euler: $n - m + f = 2$ y deducir que si G es simple, conexo y planar de orden al menos tres, debe cumplirse que $m \leq 3n - 6$. ¿Cuál es el menor valor de n para el que el grafo completo K_n no es planar?

   (b) Probar que si G es simple, conexo y planar sin triángulos de orden al menos tres, entonces se cumple $m \leq 2n - 4$. ¿Cuál es el menor valor de n tal que $K_{n,n}$ no es planar?

♣ (Resp. Parcial). (a) Una prueba de la fórmula de Euler supone sabido que cualquier grafo conexo se construye partiendo de un árbol generador T añadiendo una arista por vez. En T se sabe que $f = 1$ (cualquier inmersión del árbol tiene solo una cara), y además el número de aristas es $m = n - 1$, de modo que $n - m + f = n - (n - 1) + 1 = 2$. Ahora, en cada estado, la adición de una arista no cambia el valor de n es incrementa en 1 el número de aristas (m pasa a $m + 1$) y el número de caras se incrementa en 1 (f pasa a $f + 1$) pues la arista añadida o bien conecta dos vértices o bien es un lazo, y en cualquier caso divide una cara existente en dos (la figura muestra el k-ésimo estado G_k en que se añade la arista punteada, que divide en dos la cara no acotada): luego el valor $n - m + f$ no se altera en cada paso, y al finalizar la construcción del grafo G, permanece en el valor del árbol generador T, esto es, 2.

(b) En general para un grafo simple planar ($n \geq 3$) el grado de cada cara es al menos 3 (¿por qué?) y entonces (*faceshaking lemma*) $2m \geq 3f$ y como (fórmula de Euler) es $f = m - n + 2$ resulta que $3(m - n + 2) \leq 2m$ de donde $m \leq 3(n - 2)$. Si en particular K_5 fuera planar ($n = 5, m = 10$) debera ser $10 \leq 3(5 - 2) = 9$, lo que es imposible, de modo que K_5 no es planar. Otra vez, en general, si el grafo carece de triángulos, el grado de cada cara es al menos 4, y (*faceshaking lemma*) $2m \geq 4f$ y como es $f = m - n + 2$ resulta que $4(m - n + 2) \leq 2m$ de donde $m \leq 2(n - 2)$. Si en particular $K_{3,3}$ (que está libre de triángulos, ver figura) fuera planar ($n = 6, m = 9$) debería ser $9 \leq 2(6 - 2) = 8$, lo que es imposible, de modo que $K_{3,3}$ no es planar. Finalmente, las figuras prueban que K_1, K_2, K_3, K_4 son planares, de modo que el menor valor de n para el que K_n no es planar es 5; del mismo modo (ver figuras), siendo planares $K_{1,1}, K_{2,2}$, el menor valor de n para el que $K_{n,n}$ no es planar es 3.