FIUBA 2016 Matemática Discreta 61.07 Parcial O1, 14.10.2016 **Curso 1, 1c2016**

Alumno:	NL:

Duración: dos horas. Una condición suficiente de aprobación es la resolución ***completa*** y ***justificada*** de ***dos*** ejercicios cualesquiera. No se consideran cálculos dispersos o sin comentarios, ni diagramas sin la identificación completa de sus elementos.

1. (a) Probar que *si* para toda proposición x la proposición $px + qx'$ es una contradicción, *entonces* $p \uparrow q$ es una tautología. Escribir la recíproca y analizar su valor de verdad.

   (b) En $\mathbb{R}$ se define la relación $x\mathcal{R}y$ sii $x^3 + y = y^3 + x$. Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{R}$ y hallar, siempre que exista, un elemento $a \in \mathbb{R}$ tal que el cardinal de $[a] \in \mathbb{R}/\mathcal{R}$ sea 2.

2. (a) Determinar cuántas palabras de longitud $n \in \mathbb{N}$ con una cantidad impar de letras a pueden construirse con un alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$.

   (b) En el álgebra de Boole $(B, +, \cdot, {}', \mathbf{0}_B, \mathbf{1}_B)$ probar, utilizando *únicamente* los axiomas, que para todo $x \in B$ es $x + x = x$.

3. (a) Dados los enteros positivos a, b, m probar que $\alpha \in \mathbb{Z}$ es una solución de la ecuación $ax = b \pmod{m}$ sii cualquier elemento de $[\alpha] \in \mathbb{Z}_m$ es una solución de la misma ecuación; en particular, hallar el conjunto $X = \{x \in \mathbb{Z} : 6x = 12 \pmod{9}\}$.

   (b) Resolver $x_{n+1} - (n+1)x_n = (n+1)!\,3^n$, con la condición inicial $x_0 = 4$ y probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $x_{n+1} \geq 2\,nx_n$.

4. (a) Probar que un isomorfismo entre álgebras de Boole preserva los neutros, el orden (inducido) y los átomos. Establecer un isomorfismo entre dos subálgebras no triviales de $B = (D_{42}, \mathrm{mcm}, \mathrm{mcd}, {}', 1, 42)$ y mostrar el cumplimiento de esas propiedades.

   (b) En el conjunto D_{24} se definen $x \leq y$ sii $x \mid y, x + y \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{mcm}(x, y), xy \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{mcd}(x, y)$. Efectuar el diagrama de Hasse y determinar cuántas soluciones tiene la ecuación $AX = X$, siendo $A = \{x \in D_{24} : x + 2 \leq 6x + 2\}$, además de las triviales $X = A$ y $X = \emptyset$.