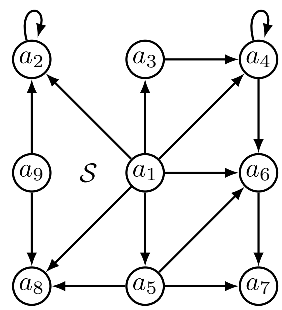
FIUBA 2016 Matemática Discreta 81.11 — Parcial O3, 24.06.2016 — **Curso 1, 1c2016**

Alumno: NL:

Duración: dos horas. Una condición suficiente de aprobación es la resolución ***completa*** y ***justificada*** de ***dos*** ejercicios cualesquiera No se consideran cálculos dispersos o sin comentarios, ni diagramas sin la identificación completa de sus elementos.

1. En $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9\}$ sea $\mathcal{S}$ la relación determinada por el *digraph* de la figura, y $\mathcal{T}$ la relación definida por la matriz $M_{\mathcal{T}}$, y sea $\mathcal{R}$ la relación $\mathcal{R} = \mathcal{S} + \mathcal{T}$. Analizar si $\mathcal{R}$ es una relación de orden en A, y en caso afirmativo dibujar su diagrama de Hasse y obtener *todos* los subconjuntos de A para los que a_4 es la máxima cota inferior y a_8 es maximal.

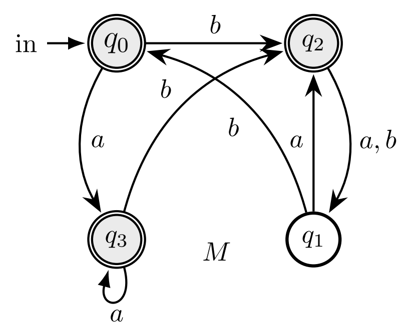


$$M_{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. (a) Probar que para cualquier natural n es $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$.

   (b) Si $f : B_1 \to B_2$ es una función biyectiva entre las álgebras de Boole $(B_1, +_1, \cdot_1, ', \mathbf{0}_1, \mathbf{1}_1)$ y $(B_2, +_2, \cdot_2, ', \mathbf{0}_2, \mathbf{1}_2)$, probar que basta que f preserve el producto y la complementación para que f sea un isomorfismo entre las dos álgebras.

3. En un autómata $M = (\Sigma, Q, q_0, \Upsilon, F)$, dado $k \in \mathbb{N}_0$ se define en Q la relación de *k-equivalencia* $\mathcal{R}_k$ tal que $q\mathcal{R}_k r$ sii para cualquier $x \in \Sigma^\star :\mid x \mid\leq k$ se cumple que $\Upsilon^\star(q, x) \in F$ sii $\Upsilon^\star(r, x) \in F$ (con su correspondiente clausura, la *$\star$-equivalencia* $\mathcal{R}_\star$). Para el autómata M, determinar las clases de k-equivalencia, los conjuntos cociente $\bar{Q} = Q/\mathcal{R}_\star, \bar{F} = F/\mathcal{R}_\star$, la clase $\bar{q}_0 = [q_0]$, la función $\bar{\Upsilon} : \bar{Q} \times \Sigma \to \bar{Q}$ y el *autómata cociente* $\bar{M} = (\Sigma, \bar{Q}, \bar{q}_0, \bar{\Upsilon}, \bar{F})$ y determinar el lenguaje $\bar{L} = L(\bar{M})$. Hallar *todas* las palabras $x \in \bar{L}$ tales que $\mid x \mid\leq 3$.



4. Completar la tabla (detallar el proceso) de leyes binarias $+$ y $\cdot$ en $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, definir una ley unaria $(\,')$ y los elementos $\mathbf{0}_B, \mathbf{1}_B$ tal que $(B, +, \cdot, ', \mathbf{0}_B, \mathbf{1}_B)$ resulte un álgebra de Boole.

$+$	α	β	γ	δ	$\cdot$	α	β	γ	δ
α					α		δ		
β	γ				β				
γ					γ				
δ					δ				

Graficar el diagrama de Hasse de $(B, \leq)$ con $u \leq v$ sii $uv = u$, y determinar *todos* los $(x, y) \in B^2$ que satisfacen el sistema:

$$\begin{cases} \beta x + \beta xy & \leq \alpha + \delta \\ xy + \alpha xy & \leq \beta + \delta \\ x + y & \leq \beta\gamma \end{cases}$$