FIUBA 2016 Matemática Discreta 61.07 Integrador 1, 27.06.2016 **Curso: Cuat.: Año:**

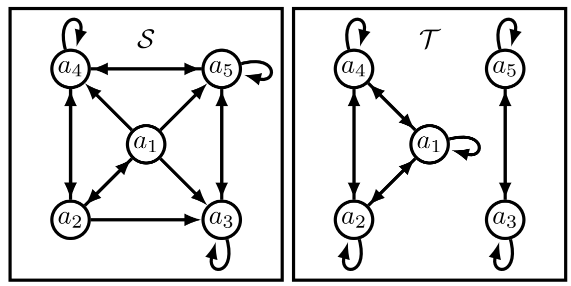
Alumno: L:

Duración: dos horas y media. Una condición suficiente de aprobación es la resolución ***completa*** y ***justificada*** de ***dos*** ejercicios cualesquiera. No se consideran cálculos dispersos o sin comentarios, ni diagramas sin la identificación completa de sus elementos.

1. Sean a_n, b_n dos funciones reales definidas para todos los naturales n tales que $n \geq n_0 \geq 0$, con $a_n \neq 0$. Determinar una solución explícita del problema de valor inicial dado por la ecuación de recurrencia lineal de primer orden $x_{n+1} = a_n x_n + b_n$ con la condición inicial $x_{n_0} = x_0$; resolver, para $k \in \mathbb{R}$, el problema de valor inicial:

$$x_{n+1} = (n+1)x_n + (n+1)!\,2^n, \text{con la condición inicial } x_0 = k$$

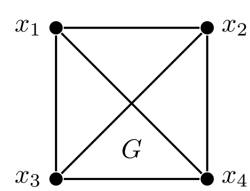
2. En el conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ sean $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ las relaciones determinadas por los correspondientes *digraphs* de la figura y sea $\mathcal{R}$ la relación complemento de $\mathcal{T} \circ \mathcal{S}$ (esto es $\mathcal{R} = (\mathcal{T} \circ \mathcal{S})'$).



   (a) Analizar si $\mathcal{T}^2$ es una relación de equivalencia en A, y en caso afirmativo hallar todos los $X \subset A$ tales que $[a_1]X + [a_3] = [a_5]$, donde $[a_k]$ es la clase de equivalencia del elemento a_k.

   (b) Si $G = (V(G), E(G))$ es el *digraph* que representa $\mathcal{R}$, determinar el círculo centrado en a_1 de radio 1 (esto es, los elementos x de $V(G) = A$ tales que la distancia $d(x, a_1)$ es a lo sumo 1).

3. Si A es la matriz de adyacencia del grafo simple dado por $G = (V(G), E(G))$, siendo $V(G) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de orden $n = |V(G)|$ y el tamaño $m = |E(G)|$, se *definen* los autovalores de G como los autovalores de A, siendo su espectro $\sigma(G) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$.



   (a) *Probar* las propiedades $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 0$, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 = 2m$ y mostrar su efectivo cumplimiento en el grafo G de la figura.

   (b) *Probar* que es suficiente que dos grafos sean isomorfos para que tengan el mismo espectro, pero que la recíproca es falsa.

4. Sea el *digraph* $G = (V(G), E(G))$ fuertemente conexo. Su radio es $r(G) \stackrel{\text{def}}{=} \min_u \max_v d(u, v)$ y su diámetro $\phi(G) \stackrel{\text{def}}{=} \max_u \max_v d(u, v)$.

   (a) *Probar* que $r(G) \leq \phi(G) \leq 2r(G)$ y verificar el cumplimiento de estas desigualdades para aquellos de los siguientes *digraphs* que resulten fuertemente conexos, determinando además su *periferia* $P(G)$, su *centro* $C(G)$.

   (b) Si M_G es la matriz de incidencia de G, explicar (y probar) el significado de cada uno de los elementos (i, j) de la matriz $B = M_G M_G^T$ y ponerlo en evidencia mediante el cálculo directo en aquellos de los siguientes *digraphs* que no resulten hamiltonianos.