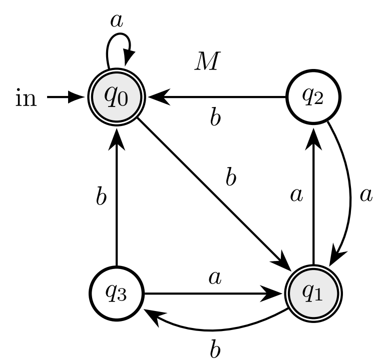
FIUBA 2016 Matemática Discreta 81.11 Parcial O1, 02.05.2016 **Curso 1, 1c2016**

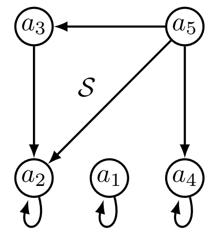
Alumno: NL:

Duración: dos horas. Una condición suficiente de aprobación es la resolución ***completa*** y ***justificada*** de ***dos*** ejercicios cualesquiera No se consideran cálculos dispersos o sin comentarios, ni diagramas sin la identificación completa de sus elementos.

1. En un autómata $M = (\Sigma, Q, q_0, \Upsilon, F)$, dado $k \in \mathbb{N}_0$ se define en Q la relación de *k-equivalencia* $\mathcal{R}_k$ tal que $q\mathcal{R}_k r$ sii para cualquier $x \in \Sigma^\star :\mid x \mid \leq k$ se cumple que $\Upsilon^\star(q, x) \in F$ sii $\Upsilon^\star(r, x) \in F$ (con su correspondiente clausura, la $\star$*-equivalencia* $\mathcal{R}_\star$). Para el autómata M, determinar las clases de k-equivalencia, los conjuntos cociente $\bar{Q} = Q/\mathcal{R}_\star, \bar{F} = F/\mathcal{R}_\star$, la clase $\bar{q}_0 = [q_0]$, la función $\bar{\Upsilon} : \bar{Q} \times \Sigma \to \bar{Q}$ y el *autómata cociente* $\bar{M} = (\Sigma, \bar{Q}, \bar{q}_0, \bar{\Upsilon}, \bar{F})$ y determinar el lenguaje $\bar{L} = L(\bar{M})$. Hallar *todas* las palabras $x \in \bar{L}$ tales que $\mid x \mid \leq 3$.



2. En el conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ sea $\mathcal{S}$ la relación determinada por el *digraph* de la figura, y $\mathcal{T}$ la relación definida por la matriz $M_\mathcal{T}$, y sea $\mathcal{R}$ la relación $\mathcal{R} = (\mathcal{S} + \mathcal{T})^{-1}$.
   (a) Analizar si $\mathcal{R}$ es una relación de orden en A, y en caso afirmativo dibujar su diagrama de Hasse.
   (b) Si $\mathcal{R}$ es de orden, y se *definen* en A las operaciones $x + y \overset{\text{def}}{=} \sup\{x, y\}, xy \overset{\text{def}}{=} \inf\{x, y\}$, hallar *todos* los pares $(x, y) \in A^2$ tales que $xy + x = a_1, (x + y)\mathcal{R}(a_3 a_5)$.



$$M_\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Sean a_n, b_n dos funciones reales definidas para todos los naturales n tales que $n \geq n_0 \geq 0$, con $a_n \neq 0$.
   (a) Determinar la solución de la ecuación lineal de primer orden $x_{n+1} = a_n x_n + b_n$ con la condición $x_{n_0} = x_0$, y escribir la solución para el caso particular de $n_0 = 0, a_n = a \neq 1, b_n = b$, discutiendo su comportamiento cualitativo.
   (b) Resolver $x_{n+1} = 3^n x_n, x_0 = 1$.

4. En el álgebra de Boole $(B, +, \cdot, ', \mathbf{0_B}, \mathbf{1_B})$, sea $f : B^4 \to B$ definida por el circuito de la figura ($f(x, y, z, u)$), con compuertas (AND, OR, NOT) y sea el orden $\leq$ dado por $x \leq y$ sii $x' + y = \mathbf{1_B}$. Diseñar un circuito equivalente solo compuertas NAND y determinar los $(x, y, z, u) \in B^4$ que verifican:

$$\begin{cases} ux + f(x', u, y, z) \leq u + f(z, u, y', x) \\ f(x, y, z, u) + xy(z + u') = u \\ u' f(u, y, x, z) + xuy = z' \end{cases}$$