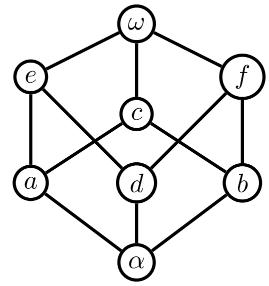
FIUBA 2015 Matemática Discreta 61.07 Parcial O1, 23.10.2015 **Curso 1, 2c2015**

Alumno:	NL:

Duración: dos horas. Una condición suficiente de aprobación es la resolución ***completa*** y ***justificada*** de ***dos*** ejercicios cualesquiera No se consideran cálculos dispersos o sin comentarios, ni diagramas sin la identificación completa de sus elementos.

1. En el conjunto $B = \{\alpha, a, b, c, d, e, f, \omega\}$ donde se ha introducido un orden parcial $(\leq)$ que produce el diagrama de Hasse de la figura, se *definen* las operaciones suma $x + y \stackrel{\text{def}}{=} \sup(x, y)$ y producto $xy \stackrel{\text{def}}{=} \inf(x, y)$.

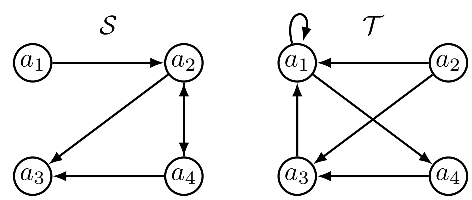
   Definir una operación unaria $' : B \to B$ y los elementos $\mathbf{0}, \mathbf{1}$ en B de modo que la séxtupla $(B, +, \cdot\,, \,', \mathbf{0}, \mathbf{1})$ resulte un álgebra de Boole y determinar *todas* sus subálgebras de Boole. Hallar además *todos* los x pertenecientes a B que satisfacen las tres siguientes condiciones:



$$\begin{cases} ax' \leq b \\ b'x + c = \omega \\ fx + e'x' + dx \geq \alpha \end{cases}$$

2. Para cualquier natural n hay 4^n palabras de longitud n construidas con los cuatro dígitos $0, 1, 2, 3$. Plantear y resolver la ecuación de recurrencia para determinar la cantidad x_n de palabras de longitud n, de esos cuatro dígitos, que tienen una cantidad impar de unos. Ahora *probar* por inducción que, para cualquier natural n mayor que 4, se verifica: $x_n > 3^n$.

3. *Probar* que si $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ son dos relaciones binarias en A, se cumple $(\mathcal{S} \circ \mathcal{T})^{-1} = \mathcal{T}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1}$ y mostrar (exhibiendo las operaciones parciales) el cumplimiento de la igualdad para las relaciones en el conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ definidas por los *digraphs* de la figura. Para la clausura transitiva ¿vale que $(\mathcal{S} \circ \mathcal{T})^\star = \mathcal{T}^\star \circ \mathcal{S}^\star$?



4. Sean A, B, C tres subconjuntos fijos del universal I. Determinar las condiciones necesarias y suficientes sobre A, B, C para que tenga solución el sistema de ecuaciones en la incógnita $X \subset I$ dado por $AX' \subset B, B'X + C = I$ y resolverlo (en función de A, B, C, I). En particular, dar la solución minimal para $I = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18\}$ ordenado con $x \leq y$ sii $x \mid y$, $A = \{x \in I : 6 \leq x\}, B = \{x \in I : x \leq x + 3\}, C = \{x \in I : x + 1 \leq 12\}$ y determinar si es acotada.