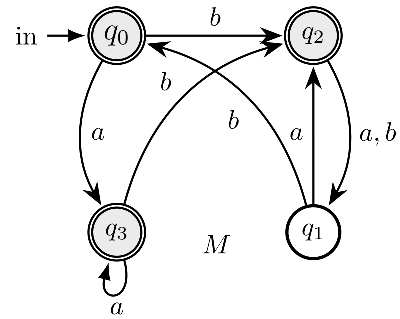
FIUBA 2016 Matemática Discreta 81.11 Integrador 1, 27.06.2016 | **Curso:** **Cuat.:** **Año:**

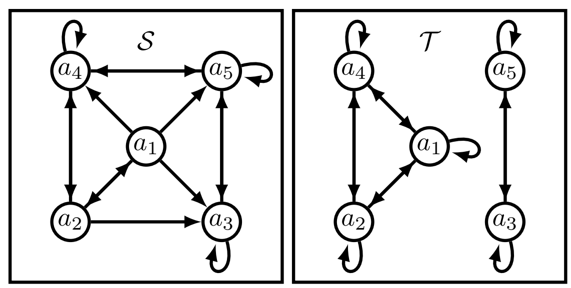
Alumno: L:

Duración: dos horas y media. Una condición suficiente de aprobación es la resolución ***completa*** y ***justificada*** de ***dos*** ejercicios cualesquiera. No se consideran cálculos dispersos o sin comentarios, ni diagramas sin la identificación completa de sus elementos.

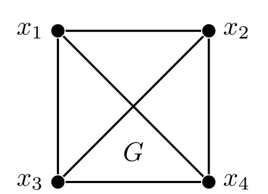
1. En un autómata $M = (\Sigma, Q, q_0, \Upsilon, F)$, dado $k \in \mathbb{N}_0$ se define en Q la relación de *k-equivalencia* $\mathcal{R}_k$ tal que $q\mathcal{R}_k r$ sii para cualquier $x \in \Sigma^\star :\mid x \mid \leq k$ se cumple que $\Upsilon^\star(q, x) \in F$ sii $\Upsilon^\star(r, x) \in F$ (con su correspondiente clausura, la *$\star$-equivalencia* $\mathcal{R}_\star$). Para el autómata M, determinar las clases de k-equivalencia, los conjuntos cociente $\bar{Q} = Q/\mathcal{R}_\star, \bar{F} = F/\mathcal{R}_\star$, la clase $\bar{q_0} = [q_0]$, la función $\bar{\Upsilon} : \bar{Q} \times \Sigma \to \bar{Q}$ y el *autómata cociente* $\bar{M} = (\Sigma, \bar{Q}, \bar{q_0}, \bar{\Upsilon}, \bar{F})$ y determinar el lenguaje $\bar{L} = L(\bar{M})$. Hallar *todas* las palabras $x \in \bar{L}$ tales que $\mid x \mid \leq 3$.



2. En el conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ sean $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ las relaciones determinadas por los correspondientes *digraphs* de la figura y sea $\mathcal{R}$ la relación complemento de $\mathcal{T} \circ \mathcal{S}$ (esto es $\mathcal{R} = (\mathcal{T} \circ \mathcal{S})'$).
   (a) Analizar si $\mathcal{T}^2$ es una relación de equivalencia en A, y en caso afirmativo hallar todos los $X \subset A$ tales que $[a_1]X + [a_3] = [a_5]$, donde $[a_k]$ es la clase de equivalencia del elemento a_k.
   (b) Si $G = (V(G), E(G))$ es el *digraph* que representa $\mathcal{R}$, determinar el círculo centrado en a_1 de radio 1 (esto es, los elementos x de $V(G) = A$ tales que la distancia $d(x, a_1)$ es a lo sumo 1).



3. Si A es la matriz de adyacencia del grafo simple dado por $G = (V(G), E(G))$, siendo $V(G) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de orden $n = |V(G)|$ y el tamaño $m = |E(G)|$, se *definen* los autovalores de G como los autovalores de A, siendo su espectro $\sigma(G) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$.
   (a) *Probar* las propiedades $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 0$, $\sum_{k=1}^n \lambda_k^2 = 2m$ y mostrar su efectivo cumplimiento en el grafo G de la figura.
   (b) *Probar* que es suficiente que dos grafos sean isomorfos para que tengan el mismo espectro, pero que la recíproca es falsa.



4. Sea el *digraph* $G = (V(G), E(G))$ fuertemente conexo. Su radio es $r(G) \stackrel{\text{def}}{=} \min_u \max_v d(u, v)$ y su diámetro $\phi(G) \stackrel{\text{def}}{=} \max_u \max_v d(u, v)$.
   (a) *Probar* que $r(G) \leq \phi(G) \leq 2r(G)$ y verificar el cumplimiento de estas desigualdades para aquellos de los siguientes *digraphs* que resulten fuertemente conexos, determinando además su *periferia* $P(G)$, su *centro* $C(G)$.
   (b) Si M_G es la matriz de incidencia de G, explicar (y probar) el significado de cada uno de los elementos (i, j) de la matriz $B = M_G M_G^T$ y ponerlo en evidencia mediante el cálculo directo en aquellos de los siguientes *digraphs* que no resulten hamiltonianos.