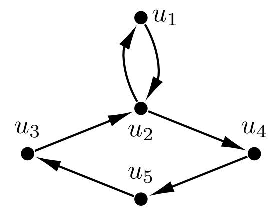
FIUBA 2016 Matemática Discreta 81.11 Integrador 4, 18.07.2016 **Curso: Cuat.: Año:**

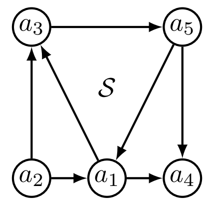
Alumno: L:

Duración: dos horas y media. Una condición suficiente de aprobación es la resolución ***completa*** y ***justificada*** de ***dos*** ejercicios cualesquiera. No se consideran cálculos dispersos o sin comentarios, ni diagramas sin la identificación completa de sus elementos.

1. Sea el grafo orientado $G = (V(G), E(G))$ de orden $n = |V(G)|$ y tamaño $m = |E(G)|$ representado en la figura. Proponer, siempre que exista, un grafo orientado H semieuleriano y fuertemente conexo que, no siendo isomorfo a G, tenga el mismo orden, tamaño, radio, diámetro, centro y periferia que el grafo G. Verificar que el grafo propuesto cumple todas estas características o probar que no existe ninguno que lo haga.

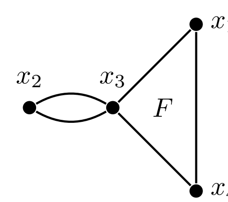


2. En el conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ sea $\mathcal{S}$ la relación determinada por el *digraph* de la figura, y $\mathcal{T}$ la relación definida por la matriz $M_{\mathcal{T}}$, y sea $\leq$ la relación $\leq \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{S} + \mathcal{T})'$ (el complemento de $\mathcal{S} + T$).
   (a) Determinar si $\leq$ es una relación de orden en A y, en caso afirmativo, representar su diagrama de Hasse.
   (b) Si $\leq$ es de orden y se definen $A_1 = \{x \in A : x \leq a_3\}, B = \{x \in A : x \leq a_5\}$ determinar *todos* los $X \subset A$ tales que $A_1 X = B$.



$$M_{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Las justificaciones en este ejercicio exigen definir precisamente los conceptos involucrados (planaridad, dualidad, coloración, grafo-arista).
   (a) Sea F el grafo representado en la figura. Dar, siempre que sea posible, una representación planar del *grafo-arista* $F_1 = L(F)$ y una representación planar de $(F_1)^\star$, el dual de F_1.
   (b) Sea $G = (V(G), E(G))$ el único (salvo isomorfismo) grafo simple con sucesión gráfica $d = (1, 2, 3, 3, 3)$. Determinar el índice cromático del grafo-arista de G (esto es $\kappa'(L(G))$), mostrando una $\kappa'(L(G))$-coloración.



4. (a) Si el grafo orientado $G = (V(G), E(G))$ tiene a K_n por grafo subyacente, d_k^+ es el grado entrante del vértice $v_k \in V(G)$ y d_k^- es el grado saliente del vértice $v_k \in V(G)$, probar que se cumple que:

$$\sum_{k=1}^{n} (d_k^+)^2 = \sum_{k=1}^{n} (d_k^-)^2$$

   (b) Dado el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$, definir, siempre que exista, un autómata finito determinista $(\Sigma, Q, q_0, \Upsilon, F)$ cuyo lenguaje reconocido $L = \{x \in \Sigma^\star : \Upsilon^\star(q_0, x) \in F\}$ sea $L = \{x \in \Sigma^\star : x = uba, u \in \Sigma^\star\}$ (la resolución debe mostrar no solo que el autómata propuesto acepta L, sino *también* que ningún otro es aceptado).