FIUBA 2016 Matemática Discreta 61.07 Integrador 2, 04.07.2016 **Curso:** **Cuat.:** **Año:**

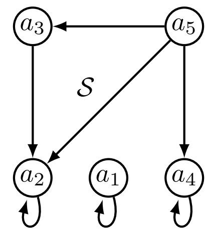
Alumno: L:

Duración: dos horas y media. Una condición suficiente de aprobación es la resolución ***completa*** y ***justificada*** de ***dos*** ejercicios cualesquiera. No se consideran cálculos dispersos o sin comentarios, ni diagramas sin la identificación completa de sus elementos.

1. La tabla muestra las distancias (km) de las rutas de tierra que conectan seis ciudades (B, L, M, P, R, S). Determinar, mediante el algoritmo de Prim iniciado en R , todas las posibles formas de conectar las ciudades minimizando la cantidad de kilómetros a asfaltar, y para cada una de esas formas obtenidas, determinar las ciudades que quedan en el centro y las que quedan en la periferia del sistema asfaltado.

	B	L	M	P	R	S
B	-	7	11	7	10	15
L	7	-	18	3	12	11
M	11	18	-	18	20	27
P	7	3	18	-	9	8
R	10	12	20	9	-	13
S	15	11	27	8	13	-

2. En el conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ sea $\mathcal{S}$ la relación determinada por el *digraph* de la figura, y $\mathcal{T}$ la relación definida por la matriz $M_{\mathcal{T}}$, y sea $\mathcal{R}$ la relación $\mathcal{R} = (\mathcal{S} + \mathcal{T})^{-1}$.

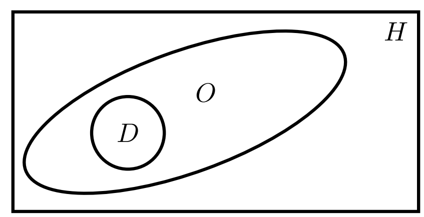


$$M_{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de orden en A y determinar, con las operaciones $x + y \overset{\text{def}}{=} \sup\{x, y\}, xy \overset{\text{def}}{=} \inf\{x, y\}$, *todos* los pares $(x, y) \in A^2$ tales que $xy + x = a_3, (x + y)\mathcal{R}(a_3 a_5)$.

   (b) Si $G = (V(G), E(G))$ es el *digraph* dado por la relación $\mathcal{R}^{-1}$ (inversa de $\mathcal{R}$), determinar la circunferencia de radio 1 centrada en $a_1 \in V(G) = A$ (esto es todos los $x \in A$ tales que $d(x, a_1) = 1$).

3. Sea D el conjunto de los grafos que satisfacen las hipótesis del teorema de Dirac, O el conjunto de los grafos que satisfacen las hipótesis del teorema de Ore, y H el conjunto de los grafos hamiltonianos. *Demostrar* que se dan la inclusiones estrictas de la figura, esto es que $D \subset O \subset H$ con $D \neq O, O \neq H$.



4. Sea el grafo *planar* $G = (V(G), E(G))$ de orden $n =\mid V(G) \mid$ y tamaño $m =\mid E(G) \mid$ y de f caras en una representación plana.

   (a) *Probar* la fórmula de Euler: $n - m + f = 2$ y deducir que si G es simple, conexo y planar de orden al menos tres, debe cumplirse que $m \leq 3n - 6$. ¿Cuál es el menor n para el que el grafo completo K_n no es planar?

   (b) Probar que si G es simple, conexo y planar sin triángulos de orden al menos tres, entonces se cumple $m \leq 2n-4$. ¿Cuál es el menor n tal que $K_{n,n}$ no es planar?