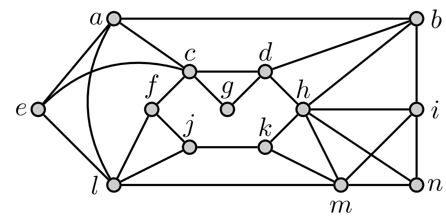
ALUMNO: NL:

Duración: dos horas y media. Condición suficiente de aprobación: resolución ***completa*** y ***justificada*** de ***tres*** ejercicios cualesquiera. No son considerados cálculos o expresiones dispersas o sin justificaciones.

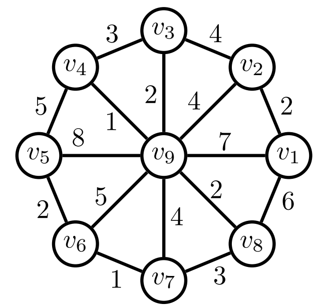
1. Sea el grafo $G = (V, E)$ de la figura, siendo V el conjunto de sus vértices y E el de sus aristas. En V se define la relación $u\mathcal{R}v$ sii existe un camino que no repite aristas de longitud 3 entre u y v.



   (a) Analizar si $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en V, y en caso afirmativo determinar el conjunto cociente $V/\mathcal{R}$.

   (b) Si se define $S_x \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V : v\mathcal{R}x\}$, determinar, siempre que existan, *todos* los vértices $x, y \in V$ tales que $S_x \cap S_y = V - \{a, e\}$.

2. La figura presenta el grafo ponderado $G = (V, E)$ con aristas en E de pesos indicados.



   (a) Con inicio en el nodo v_5, aplicar al grafo G el algoritmo de *Prim* para obtener un árbol generador mínimo T, detallando cada paso de la secuencia que permite construirlo.

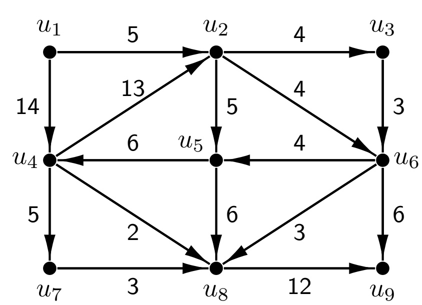
   (b) La *excentricidad* de un vértice v_k de Vse define como el $\max d(v_k, v_i)$ para todo $v_i \in V$, el *radio* de G es la menor excentricidad y el *centro* de G es el conjunto de vértices de excentricidad igual al radio. Determinar el radio y el centro del grafo G.

3. Determinar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones *y de sus recíprocas*. Utilizar *exclusivamente* axiomas y definiciones en la argumentación.

   (a) Sea $(B, +, \cdot, \bar{\ }, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ un álgebra de Boole. Si x e y son átomos de B, entonces $x \cdot y = \mathbf{0}$.

   (b) Sea el grafo $F = (V, E)$. El grafo F es un bosque solo si para cualquier par de vértices $x, y \in V$ hay a lo sumo un camino simple entre x e y.

4. Sea $G = (V(G), E(G))$ la red de la figura con las capacidades indicadas por los números junto a cada arista.



   (a) Aplicar, detallando todos los pasos, el algoritmo de Ford-Fulkerson que permite obtener un flujo máximo de G. ¿En cuánto podría reducirse la capacidad de la arista $u_5\, u_4$ sin alterar el flujo máximo?

   (b) En G el *alcance* $a(u_i)$ de un vértice u_i es el conjunto de vértices u_j tales que hay un camino (orientado) desde u_i a u_j. En V se define $u_i\mathcal{R}u_j$ sii $a(u_i) \subseteq a(u_j)$. Determinar si $\mathcal{R}$ es una relación de orden en $V(G)$, y en caso afirmativo graficar su diagrama de Hasse.

5. (a) *Probar* que para cualquier número natural $n > 1$, se verifica la siguiente desigualdad.

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2\,n} > \frac{13}{24}$$

   (b) Se disponen n discos de diámetro creciente apilados sobre un mástil (el mayor en el nivel inferior) y se requiere, moviéndolos de uno en uno, disponerlos del mismo modo en otro mástil ayudándose con un tercero, con la restricción de que en ninguna instancia del proceso un disco mayor se encuentre sobre uno menor. ¿Cuántos movimientos son al menos necesarios?