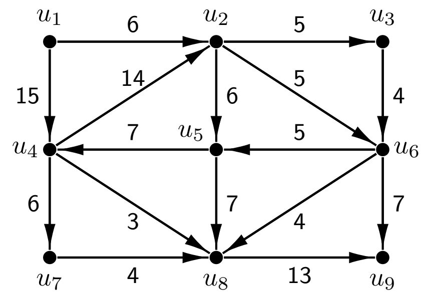
FIUBA 2015 **Matemática Discreta. Integrador 28.07.2015** **Profesor:**

ALUMNO: NL:

Duración: dos horas y media. Condición suficiente de aprobación: resolución ***completa*** y ***justificada*** de ***tres*** ejercicios cualesquiera. No son considerados cálculos o expresiones dispersas o sin justificaciones.

1. Sea $G = (V(G), E(G))$ la red de la figura con las capacidades indicadas por los números junto a cada arista.



   (a) Aplicar, detallando todos los pasos, el algoritmo de Ford-Fulkerson que permite obtener un flujo máximo de G. ¿En cuánto podría reducirse la capacidad de la arista $u_5\, u_4$ sin alterar el flujo máximo?

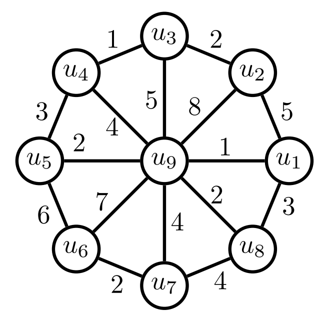
   (b) En $V(G)$ se define la relación $u_i \mathcal{R} u_j$ sii $i = j$ o ($i \neq j$) si existe un camino orientado de u_i a u_j. Determinar si $\mathcal{R}$ es una relación de orden en $V(G)$, y en caso afirmativo graficar su diagrama de Hasse.

2. (a) *Probar* que para cualquier número natural $n > 1$, se verifica la siguiente desigualdad.

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

   (b) Hay 3^n palabras de longitud n construidas con los tres dígitos $0, 1, 2$. ¿Cuántas tienen una cantidad impar de ceros?

3. La figura presenta el grafo $G = (V(G), E(G))$ con los vértices de $V(G)$ representados con un círculo, las aristas de $E(G)$ representadas con líneas, cada una con sus respectivos pesos.



   (a) Aplicar al grafo G el algoritmo de *Kruskal* para obtener un árbol generador mínimo T, detallando cada paso de la secuencia que permite construirlo.

   (b) Siendo $\bar{G}$ el complemento de G, sea $G_1 \stackrel{\text{def}}{=} (V(\bar{G}) - \{u_9\}, E(\bar{G}))$. Determinar si el grafo G_1 admite un ciclo de Hamilton, y en caso afirmativo dar un tal ciclo. ¿Es G_1 euleriano?

4. (a) Sea S un conjunto de n elementos. Determinar, para todo n natural, la cantidad de relaciones binarias que pueden definirse en S que sean a la vez reflexivas y antisimétricas. ¿De éstas, cuántas son *también* simétricas?

   (b) Analizar el valor de verdad de la siguiente proposición. Un grafo $G = (V, E)$ tiene exactamente dos vértices de grado impar solo si existe un camino entre esos dos vértices.

5. Un grafo $G = (V, E)$ se llama bipartito si existen dos conjuntos disjuntos V_1 y V_2 tales que $G = V_1 \cup V_2$ y toda arista del conjunto E une un vértice de V_1 con un vértice de V_2. (a) Determinar si el grafo de la figura es bipartito y si tiene un ciclo hamiltoniano. (b) Analizar el valor de verdad de la siguiente proposición: *ningún grafo bipartito con un número impar de vértices puede tener un ciclo hamiltoniano.*