TOMÁS SZWARCBERG - 103755

1) Se tiene para el nivel más bajo de energía la función de onda:

$$\Psi_0(x) = \left(\frac{m \cdot \omega}{\pi \hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

a) Mostrar que satisface la ecuación de Schrödinger.

Sabemos que la ecuación UNIDIMENSIONAL (solo en x) es

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial^2 x} + V(x,t)\,\Psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t}.$$

Empiezo reemplazando por la ecuación de onda $\Psi_0(x)$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2}{\partial^2 x}\left(\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\right) + V(x,t)\left(\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\right) = i\hbar \underbrace{\frac{\partial \Psi_0}{\partial t}}_{0}$$

Como $\Psi_0(x)$ es independiente del tiempo, su derivada parcial es 0. Luego:

$$V(x,t) \cdot \Psi_0(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi_0(x)}{\partial^2 x}$$

Calculo su derivada segunda:

$$\frac{\partial^2 \Psi_0(x)}{\partial^2 x} = \left[\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\left(-\frac{m\omega}{\hbar}x\right) e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}\right]' =$$

$$\psi_0(x)'' = \underbrace{\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\left(\frac{-m\omega}{\hbar}\right)}_{a}\left[x\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\right]' =$$

$$= a\left[e^{\frac{-m\omega}{2\hbar}x^2} + x\, e^{\frac{-m\omega}{2\hbar}x^2}\cdot \cancel{2}x\left(\frac{-m\omega}{\hbar}\right)\right] =$$

$$= a\left[e^{\frac{-m\omega}{2\hbar}x^2} + x^2\left[\frac{-m\omega}{\hbar}\right]e^{\frac{-m\omega}{2\hbar}x^2}\right] =$$

$$= a\, e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}\left[1 - \frac{x^2 m\omega}{\hbar}\right] =$$

$$\therefore\ V(x)\,\psi_0(x) = \frac{\hbar^{\cancel{2}}}{2\cancel{m}}\left(\frac{-\cancel{m}\omega}{\cancel{\hbar}}\right)\overbrace{\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}\left[1 - \frac{x^2 m\omega}{\hbar}\right]}^{\varphi(x)} =$$

$$= \frac{-\hbar\omega}{2}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\varphi(x) = \cancel{\frac{-\hbar^{\frac{3}{4}}\omega^{\frac{5}{4}}}{2\sqrt[4]{\pi}}\varphi(x)} =$$

$$\rightarrow V(x)\cdot\cancel{\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}} = \frac{-\hbar\omega}{2}\cancel{\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}}\varphi(x)$$

$$V(x) = \frac{-\hbar\omega}{2}\, e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}\left[1 - \frac{x^2 m\omega}{\hbar}\right]$$

como $V(x) = \frac{1}{2}K_R x^2$, entonces:

↓

Escaneado con CamScanner

$$\frac{1}{\cancel{2}} K_R x^2 = -\frac{\hbar}{\cancel{2}} \underbrace{\sqrt{\frac{K_R}{m}}}_{\omega = \sqrt{\frac{K_R}{m}}} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \left[1 - \frac{x^2 m\omega}{\hbar}\right]$$

$$K_R x^2 = -\hbar \sqrt{\frac{K_R}{m}} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} + \cancel{\hbar} \sqrt{\frac{K_R}{m}} \frac{x^2 m\omega}{\cancel{\hbar}} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

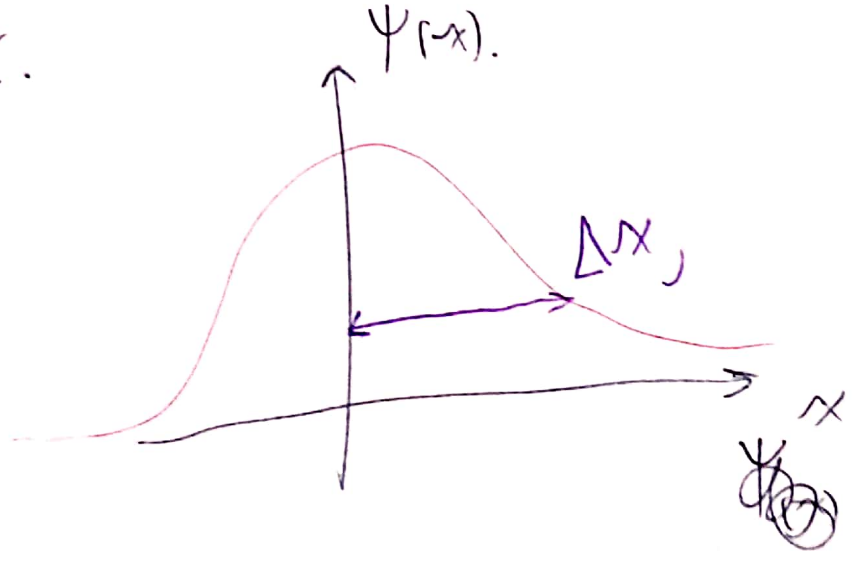
$$\hbar \omega e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} = e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \omega \frac{x^2 m\omega}{1} - K_R x^2$$

$$\hbar \omega e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} = x^2 \left[e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \omega^2 m - K_R\right] \rightarrow$$ ME TRABÉ EN EL DESARROLLO

b) Con $f_{(n)} = A e^{-\frac{(x-x_0)}{2\Delta x^2}}$, tenemos $\rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{m \cdot \omega}}$

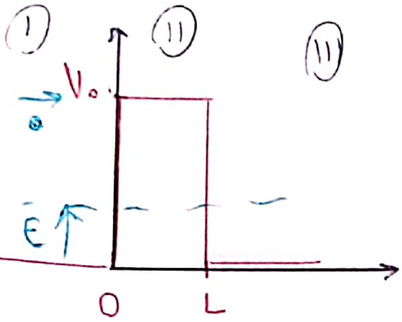
$$\Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{m} \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{K}}} = \boxed{\sqrt{\frac{\hbar}{\sqrt{K}} m^{-\frac{1}{2}}}}$$

En el Gráfico, sabemos que $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx = 1$, por normalización.



2) Mostrar que el coeficiente de Transmisión para una barrera de altura $V_0 > E$ y ancho L es:

$$T = 16x(1-x)e^{-2\sqrt{K(1-x)}} \quad \text{si} \quad x = \frac{E}{V_0} < 1, \; K = \frac{2mV_0L^2}{\hbar^2}$$



Como $V_0 > E$, entonces $E_{\text{CINÉTICO}} < 0$.

El coeficiente T es

Vemos que hay 3 Zonas: Antes del salto, el salto y lo siguiente ($x<0$, ~~x~~ $0<x<L$, $x>L$). En esta zona, sabemos que la ecuación de onda es la combinación lineal de una onda progresiva (se mueve en $+x$) y otra regresiva (se mueve en $-x$). entonces:

$$\Psi_1(x) = A\, e^{ik_1x} + B\, e^{-ik_1x} \quad (\text{Zona } 1)$$

$$\Psi_2(x) = C\, e^{ik_2x} + D\, e^{-ik_2x} \quad (\text{Zona } 2)$$

$$\Psi_3(x) = E\, e^{ik_1x} + F\, e^{-ik_1x}$$

Sabemos que la partícula viene del eje Negativo, entonces en la zona 3 No hay término Regresivo ($F=0$)

Tenemos entonces:

$$\Psi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \qquad (x<0)$$

$$\Psi_2(x) = Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x} \qquad (0<x<L)$$

$$\Psi_3(x) = Ee^{ik_1x}.$$

Por continuidad, tenemos que:

$$\begin{cases} \Psi_1(0)^+ = \Psi_2(0)^- \\ (\Psi_1(0)^+)' = \Psi_2'(0^-) \end{cases} \Longrightarrow \quad Ae^{0} + Be^{-0} = Ce^{0} + De^{-0}$$

$$\boxed{A+B = C+D.}$$

$$Aik_1e^{0} - Bik_1e^{0} = ik_2Ce^{0} - Dik_2e^{0}$$

$$(Ai - Bi)k_1 = (Ci - Di)k_2$$

$$A - B = (C-D)\frac{k_2}{k_1} \longrightarrow \frac{A-B}{C-D} = \frac{k_2}{k_1}$$

El coeficiente de transmisión es

$$T = \frac{I_{TRANS}}{I_{INC}}.$$ Como $I \propto |\text{AMPLITUD}|^2 k$ tenemos que se incide por A y transmite por E.

$$\therefore \quad T = \frac{|E|^2 k_1}{|A|^2 k_1} = \frac{|E|^2}{|A|^2} \longrightarrow$$

Despejando los coeficientes de las ecuaciones de continuidad,
DESARROLLO DEL SENH EN HOJA APARTE
tenemos →

$$T = \left(1 + \frac{\boxed{\left(\frac{e^{k_2' L} - e^{-k_2' L}}{2}\right)^2}^{*}}{4x(1-x)} \right)^{-1}$$

$*$ senh(z)

$x = \frac{E}{V_0}$

⇒ Como $k_2' L \gg 1$, Despreciamos ese término (los de $e^{-Lk_2'}$)

ADEMÁS, $x = \frac{E}{V_0}$

$$T = \frac{16 \frac{E}{V_0}\left(1 - \frac{E}{V_0}\right)}{e^{2k_2' L}}$$

Finalmente, $x = \frac{E}{V_0}$:

$$T = 16\, x\,(1-x)\, e^{-2k_2' L}$$

(Tuve algún error de cuentas porque no lo pude llevar a la expresión pedida).

* ANÁLISIS:

Reemplazando X por $\frac{E}{V_0}$, tenemos:

$$T = 16 \underbrace{\frac{E}{V_0}}_{<1} \underbrace{\left(1 - \frac{E}{V_0}\right)}_{>0,\ <1} e^{-2\sqrt{\frac{2m V_0 L^2}{\hbar^2}}}$$

Vemos que cuando aumentamos L, entonces: se agranda el término exponencial, pero como es <0, disminuye y tiende a 0. Entonces, cuando aumenta L disminuye T y cuando disminuye el ancho, aumenta T. Si la energía E se mantiene $< V_0$, tenemos:

$$T = \left(16 \frac{E}{V_0} - \frac{E^2}{V_0^2} 16\right) e^{\cdots}$$

, entonces mientras más se acerca E a V_0, menos es T.

b) Tengo entonces

$$T = 16\,\frac{E}{V_0}\left(1-\frac{E}{V_0}\right) e^{-2\sqrt{K\left(1-\frac{E}{V_0}\right)}}$$, reemplazo por

los datos: $L = 1\,nM$

$$\frac{E}{V_0} = \frac{10\,eV}{25\,eV} = \boxed{0,4} \qquad K = \frac{2\,m_e\,V_0 L^2}{(\hbar)^2} = \frac{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}\,KG \cdot 25\,eV \cdot (1\,nM)^2}{\left(\frac{4,136 \cdot 10^{-15}\,eVs}{2\pi}\right)^2}$$

(Calculo con la masa en reposo)

$$\longrightarrow T = 16 \cdot 0,4\,(0,6) \cdot e^{-2\sqrt{K\,0,6}} \qquad = \frac{4,55 \cdot 10^{-38}\,KG \cdot M^2 \cdot eV}{4,33 \cdot 10^{-31}\,eV^2 \cdot s^2}$$

$T \cong 3,83$ (Probablemente haya un error en el calculo de K) pues debería ser < 1)

$$K = \boxed{1,05 \cdot 10^{-16}}\,\frac{KG\,M^2}{eV\,s^2}$$

Para $0,2\,nM$, $K = \frac{1,82 \cdot 10^{-48}}{4,33 \cdot 10^{-31}} = 4,2 \cdot 10^{-18}$

$\longrightarrow T \cong 3,83$ (Da igual número pues el exponente no cambia para ese diferencia)