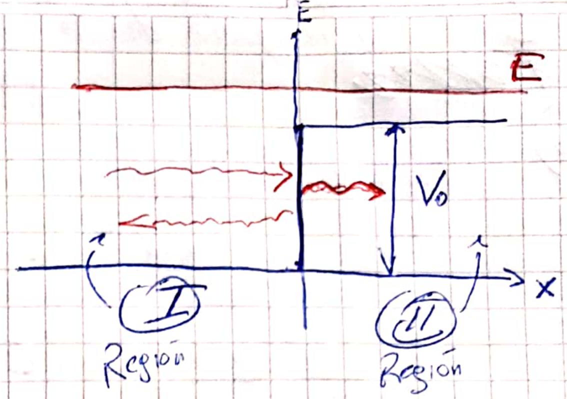
Souto Rodrigo
97649

1) $\psi_{(x)} = \begin{cases} \psi_1(x) & x \le 0 \\ \psi_2(x) & x > 0 \end{cases}$



$$\psi_1(x) = \underbrace{A_0 e^{ik_1x}}_{\text{Onda progresiva incidente}} + \underbrace{Ae^{-ik_1x}}_{\text{Onda reflejada}} \qquad k_1 \in \mathbb{R}$$

$$\psi_2(x) = \underbrace{Be^{ik_2x}}_{\text{Onda progresiva transmitida}} \qquad k_2 \in \mathbb{R}$$

a) Como ~~las~~ haz de partículas incide sobre el escalón de potencial, ~~por~~ como es el gráfico que pasaron entonces las ~~ondas~~ partículas vienen desde la izquierda.

Al encontrarse ~~este~~ este haz con una interrupción en el medio (el escalón de potencial), y modelando a este haz como una función de onda, parte de la onda se transmite y parte se refleja.

Viendo la función de ψ_1, si definimos que k_1 tiene que ser real, esta tiene sentido físico porque la parte $A_0 e^{ik_1x}$ represena a la onda progresiva incidente, y la parte Ae^{-ik_1x} representa a la onda reflejada al llegar al ~~pote~~ escalón de potencial.

Por el otro lado, si definimos que $k_2 \in \mathbb{R}$, entonces también tiene sentido físico esta función porque Be^{ik_2x} representa a la onda transmitida hacia la región $x>0$ y que avanza hacia la derecha.*

Lo que no tendría sentido es que $\psi_2(x)$ tenga una parte Ce^{-ik_2x} porque representaría a una onda que ~~se mueve~~ avanza hacia la izquierda, ya que la onda progresiva sobre la región II no tiene con que reflejarse.

Finalmente para aclarar, tiene sentido esta $\psi(x)$ como la ~~función~~ componente espacial de la función de Schrödinger, solo porque

* Notar que esto es un comportamiento permitido en la física clásica porque $E > V_0$ por ende puede penetrar en la región del escalón (II).

la energía potencial no depende del tiempo.

La función completa de la onda es $\psi_{(x,t)} = \psi_{(x)} \, \mathcal{T}_{(t)}$

~~Tomando~~

b)

Partiendo directamente de la ecuación de Schrödinger con respecto al eje x (siendo que $V_{(x)}$ ~~constante~~ no depende del tiempo)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi_{(x)}}{\partial x} = (E - V_{(x)})\,\psi_{(x)} \Rightarrow \text{Propongo la solución } \psi_{(x)} = Ce^{\alpha x}$$

Para la región I ~~Propongo~~

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2 \cancel{Ce^{\alpha x}} = (E - \cancel{V_{(x)}}^{0})\,\cancel{Ce^{\alpha x}}$$

$$\alpha^2 = -\frac{E\,2m}{\hbar^2} \Rightarrow \alpha = \pm i \underbrace{\sqrt{\frac{E\,2m}{\hbar^2}}}_{k_1}$$

~~Donde~~ ~~Ck_1~~ = Y defino k_1 como $k_1 = \sqrt{\frac{E\,2m}{\hbar^2}}$ (es real como ~~de~~ propuse en (a))

Para la región II

$$-\frac{\hbar}{2m}\alpha^2 \cancel{Ce^{\alpha x}} = (E - V_0)\,\cancel{Ce^{\alpha x}}$$

$$\alpha^2 = (E - V_0)\frac{2m}{\hbar^2} \Rightarrow \alpha = \pm i \sqrt{(E - V_0)\frac{2m}{\hbar^2}}$$

Donde $K_2 = \sqrt{(E - V_0)\frac{2m}{\hbar^2}}$ (es real porque $E > V_0$)

Como $E > E - V_0 \Rightarrow K_1 > K_2$, y sabemos que $k_1 = 2\pi/\lambda_1$, $k_2 = 2\pi/\lambda_2$

Entonces la longitud de onda λ_2 será mayor a λ_1

Y por De Broglie $p_1 = k_1 \hbar$ y $p_2 = k_2 \hbar \Rightarrow \underline{p_1 > p_2} \xrightarrow{E = p^2/2m} E_{c_1} > E_{c_2}$ (no relativista)

Esto tiene sentido según la mecánica clásica porque al entrar al escalón parte de la energía cinética se convierte en energía y por ende disminuye $(E = E_c + E_p)$ resultando en una onda con menor longitud de onda.

NOTA

c) La solución a la ecuación de Schrödinger tiene que ser continua y su $\frac{\partial \psi_{(x)}}{\partial x}$ también tiene que serlo.

Entonces por condiciones de contorno tenemos que

(A) $\psi_1(0) = \psi_2(0)$

(B) $\frac{\partial \psi_1(0)}{\partial x} = \frac{\partial \psi_2(0)}{\partial x}$

(A) $$A_0 \cancel{e^{ik_1 0}}^{1} + A \cancel{e^{-ik_1 0}}^{1} = B \cancel{e^{ik_2 0}}^{1}$$

$$A_0 + A = B$$

(B) $$ik_1 A_0 e^0 - ik_1 A e^0 = ik_2 B e^0$$

$$\cancel{i} k_1 A_0 - \cancel{i} k_1 A = k_2 A_0 + k_2 A$$

$$A_0 = \left(\frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2}\right) A$$

$$\psi_{(x)} = \begin{cases} A\left(\frac{k_1+k_2}{k_1-k_2}\right) e^{ik_1 x} + A e^{-ik_1 x} & \text{si } x \leq 0 \\ A\left(1 + \frac{k_1+k_2}{k_1-k_2}\right) e^{ik_2 x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

con $k_1 = \sqrt{\frac{E\,2m}{\hbar^2}}$

$k_2 = \sqrt{(E - V_0)\frac{2m}{\hbar^2}}$

$$\boxed{\begin{aligned} A &= A_0\left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right) \\ B &= A_0\left(1 + \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right) \end{aligned}}$$

NOTA

Escaneado con CamScanner

$A = |A| e^{i\alpha}$, $C = |A|$

d)

$$R = \frac{|A|^2}{|A_0|^2} = \frac{|A|^2}{\Big|A\underbrace{\left(\frac{k_1+k_2}{k_1-k_2}\right)}_{\in\mathbb{R}}\Big|^2} = \frac{\cancel{|A|^2}}{\left(\frac{k_1+k_2}{k_1-k_2}\right)^2 \cancel{|A|^2}} =$$

$$\boxed{R = \left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right)^2}$$

Tiene sentido porque está entre 0 y 1 ya que $k_1 > k_2$

$$T = \frac{\Big|A_0 \big(\overbrace{\tfrac{k_1-k_2}{k_1+k_2}}^{\in\mathbb{R}} + 1\big)\Big|^2 \cdot k_2}{|A_0|^2 k_1} = \frac{\cancel{|A_0|^2}}{\cancel{|A_0|^2}} \left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2} + 1\right)^2 \frac{k_2}{k_1}$$

$$\boxed{T = \left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2} + 1\right)^2 \frac{k_2}{k_1}}$$

Intente ~~llegar a calculo~~ sumar $R+T$ (en una hoja aparte) pero no pude algebraicamente llegar al resultado esperado, que es 1, así que probe en la calculadora con valores aleatorios de k_1 y k_2 y efectivamente la suma de estas dos relaciones da 1.

~~Esto tiene sentido porque el c~~

Esto es lo esperado ~~en~~ dado que se conserva la densidad de corriente, por ende ~~al~~ incidir el haz de partículas sobre el escalón de potencial, y al producirse una transmisión de una parte de este al nuevo medio, y con la otra parte que se refleja, teniendo un rendimiento perfecto (porque se conserva la densidad de corriente), entonces la suma de las intensidades de estas dos partes tiene que ser igual a la incidente.

2) a) Partiendo del principio de incertidumbre de Heisenberg

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2 \quad y \quad \Delta E \Delta t \geq \hbar/2$$

Como sabemos que el electrón está confinado en una zona de $4,3 \cdot 10^{-10}$ m, entonces como máximo su incerteza será exactamente esa $\Delta x = 4,3 \cdot 10^{-10}$ m

$\Delta p = m \Delta v$

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$$

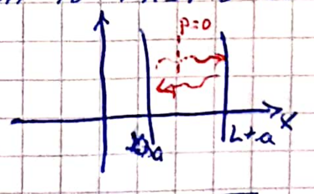
$$\Delta x \Delta v m \geq \hbar/2$$

$$\Delta v_e \geq \frac{\hbar/2}{\Delta x m_e} \geq \frac{\frac{1}{2} \cdot 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ J/s}}{4,3 \cdot 10^{-10} \text{ m} \cdot 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} \geq \boxed{134619 \text{ m/s}}$$

$$\Delta v_p \geq \frac{\hbar/2}{\Delta x m_e \cdot 1840} \geq \boxed{73,16 \text{ m/s}}$$

Por definición $\Delta p^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$

~~Ek~~ El valor medio de la cantidad de movimiento de una partícula confinada es cero. Esto se ve ya que modelando a la partícula como una onda sobre el eje x, ~~la parte que avanza hacia~~ la como está confinada es una onda estacionaria y la parte que avanza hacia la izq. y hacia la der. tienen la misma cantidad de movimiento se cancelan mutuamente



$$\Rightarrow \Delta p^2 = \langle p^2 \rangle$$

Por otro lado, usando la ecuación no relativista $E_c = \frac{p^2}{2m}$

Entonces $\langle E_c \rangle_{mínima} = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m}$

$\Delta p = m \Delta v \longrightarrow \Delta p_e = m_e \cdot \Delta v_e = 1,22 \cdot 10^{-25}$ kg m/s

$\Delta p_p = m_p \cdot \Delta v_p = \Delta p_e = 1,22 \cdot 10^{-25}$ kg m/s

Para ambos casos es el mismo $\Delta p = 1,22 \cdot 10^{-25}$ kg m/s

$$\langle E_c \rangle_{min} = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} = \frac{\Delta p^2}{2m}$$

$$\langle E_{c_e} \rangle_{min} = \frac{\left(1,22 \cdot 10^{-25}\ \mathrm{Kg}\,\frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 9,109 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{Kg}} = 8,17 \cdot 10^{-21}\ \mathrm{J} = \boxed{0,0510\ \mathrm{eV}}$$

$$\langle E_{c_p} \rangle_{min} = \frac{\left(1,22 \cdot 10^{-25}\ \mathrm{Kg}\,\frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 9,109 \cdot 10^{-31} \cdot 1840} = 4,44 \cdot 10^{-24}\ \mathrm{J} = \boxed{2 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{eV}}$$

Se ve que la energía cinética media mínima del electrón confinado es mucho mayor a la del protón

NOTA