Saito Rodrigo

1) Ecuación de Schrödinger: $\frac{\partial^2 \varphi_{(x)}}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_{(x)})\varphi_{(x)} = 0$

$$\begin{cases} \psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \\ E = \frac{\hbar\omega}{2} \quad ; \quad \omega = \sqrt{\frac{K_R}{m}} \\ V_{(x)} = \frac{1}{2}K_R x^2 \end{cases}$$

1.a)

$$\frac{\partial \psi_0(x)}{\partial x} = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\left(\frac{-m\omega 2x}{2\hbar}\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_0(x)}{\partial x^2} = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\left[\frac{-m\omega}{\hbar} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} + \frac{m^2\omega^2x^2}{\hbar^2} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\right]$$

Reemplazando $\frac{\partial^2\psi_0(x)}{\partial x^2}$, E y $\psi_0(x)$ en la ecuación de Schrödinger

$$\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\left[-\frac{m\omega}{\hbar} + \frac{m^2\omega^2x^2}{\hbar^2}\right] + \frac{2m}{\hbar^2}\left(\frac{\hbar\omega}{2} - V_{(x)}\right)\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} = 0$$

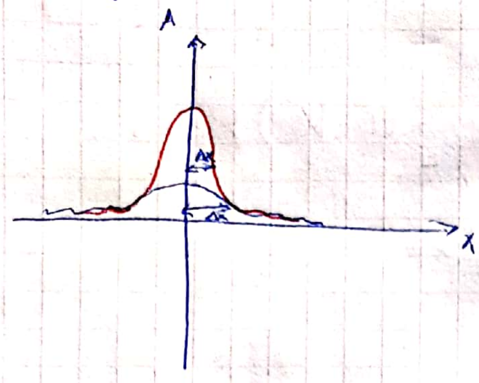
$$\underbrace{\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}}_{\text{Como solo se anula con } x\to\pm\infty\text{, fuera}}\left[\cancel{-\frac{m\omega}{\hbar}} + \frac{m^2\omega^2x^2}{\hbar^2} \cancel{+ \frac{m\omega}{\hbar}} - \frac{2m}{\hbar^2}V_{(x)}\right] = 0$$

$$\frac{m^2\omega^2x^2}{\hbar^2} - \frac{2m}{\hbar^2}V_{(x)} = 0 \Rightarrow V_{(x)} = \frac{m^{\cancel{2}}\omega^2x^2}{\cancel{\hbar^2}}\frac{\cancel{\hbar^2}}{2\cancel{m}}$$

$$V_{(x)} = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \xrightarrow[\omega = \sqrt{\frac{K_R}{m}}]{} V_{(x)} = \frac{1}{2}\cancel{m}\frac{K_R}{\cancel{m}}x^2$$

$$\boxed{\therefore V_{(x)} = \frac{1}{2}K_R x^2}$$

b) $\Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ (Porque la ecuación es $\psi(x) = A e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\Delta x^2}}$)



El significado físico de Δx, es cuán localizada está la posición de la partícula. Osea, la incerteza que tenemos para calcular la posición.

c) $\Delta p^2 = \langle (p - \langle p \rangle)\rangle^2 = \langle (p^2 - 2p\langle p \rangle + \langle p \rangle^2)\rangle = \langle p^2 \rangle$

$$\langle p^2 \rangle = \Delta p^2$$

$$\langle p^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \left(\frac{\hbar}{i}\right)^n \frac{\partial^n \psi(x)}{\partial x^n}\, dx$$

$\psi^*(x) = \psi(x)$

$$\langle p^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2}\, dx$$

$$= -\hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \cdot \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \left[-\frac{m\omega}{\hbar} + \frac{m^2\omega^2 x^2}{\hbar^2}\right] dx$$

$$= \left[\frac{m\omega}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2m\omega}{2\hbar}x^2} dx - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{2m\omega}{2\hbar}x^2} dx\right] \hbar^2 \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}$$

Resuelvo con la tabla que nos dieron. Puedo hacerlo porque las funciones a integrar son pares $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 2\int_0^{\infty} f(x)$

$$\boxed{\Delta p = \left[\frac{m\omega}{\hbar} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}} - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi\hbar^3}{m^3\omega^3}}\right] \hbar^2 \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}}$$

$$\Delta x \Delta p = \left[\frac{m\omega}{\hbar} \cdot \sqrt{\pi}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \cdot \overbrace{\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}}^{\Delta x} - \frac{m^2\omega^2}{2\hbar^2} \cdot \sqrt{\pi}\sqrt{\frac{\hbar^3}{m^3\omega^3} \cdot \frac{\hbar}{m\omega}}\right] \hbar^2 \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}$$

$$\left[\frac{m\omega\sqrt{\pi}}{\sqrt{\hbar}} \cdot \frac{\hbar}{m\omega} - \frac{m^2\omega^2\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\hbar^2}} \cdot \frac{\hbar^2}{m^2\omega^2}\right] \hbar^2 \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\hbar^2 \frac{\sqrt{m\omega}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\hbar}} \Rightarrow \boxed{\Delta x \Delta p = \frac{\hbar^{3/2}\sqrt{m\omega}}{2}}$$

Principio de incerteza de Heisenberg: $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2 \Rightarrow$ Entonces $\sqrt{m\omega} \cdot \sqrt{\hbar} \geq 1$

$$\Rightarrow \boxed{m\omega \geq \frac{1}{\hbar}}$$

Soto Rodrigo

2) $V_0 > E$ y ancho L

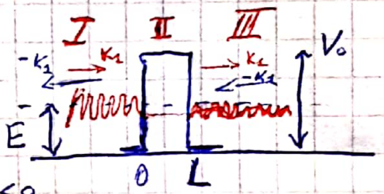
Siendo la ecuación de Schrodinger: $\dfrac{\partial^2 \varphi_{(x)}}{\partial x^2} + \dfrac{2m}{\hbar^2}(E - V_{(x)})\varphi_{(x)} = 0$

Propongo la solucion $\psi_{(x)} = A e^{ikx}$

$$-k^2 \psi_{(x)} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_{(x)})\psi_{(x)} = 0$$

$$k = \pm\sqrt{\frac{2m(E - V_{(x)})}{\hbar^2}}$$

Como $V_{(x)}$ no es constante, defino mi ψ como una función partida



$$\psi_{(x)} = \begin{cases} \psi_1(x) = A e^{+ik_1 x} + B e^{-ik_1 x} & x<0 \\ \psi_2(x) = D e^{ik_2 x} + C e^{-ik_2 x} & 0<x<L \\ \psi_3(x) = F e^{ik_1 x} + G e^{-ik_1 x} & L<x \end{cases}$$

Cumpliendo las condiciones de función de onda

$$\begin{cases} \psi_1(0) = \psi_2(0) \\ \dfrac{\partial \psi_1(0)}{\partial x} = \dfrac{\partial \psi_2(0)}{\partial x} \\ \psi_2(L) = \psi_3(L) \\ \dfrac{\partial \psi_2(L)}{\partial x} = \dfrac{\partial \psi_3(L)}{\partial x} \end{cases}$$

Con $k_1 = \sqrt{\dfrac{2m}{\hbar^2}E}$ y $k_2 = \sqrt{\dfrac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}}$

$\psi_{2(x)}$ se puede reescribir como $\psi_2(x) = C e^{k_2' x} + D e^{-k_2' x}$, con $k_2' = ik_2$

Siendo $T = \dfrac{I_{transmitida}}{I_{incidente}}$ con $I \propto |\text{amplitud}|^2 k$

$$T = \frac{|F|^2 k_1}{|A|^2 k_1} = \frac{|F|^2}{|A|^2}$$

Por $\psi_1(0) = \psi_2(0) \Rightarrow A + B = C + D$

$$\frac{\partial \psi_1(0)}{\partial x} = \frac{\partial \psi_2(0)}{\partial x} \Rightarrow A - B = (C - D)\frac{K_2'}{iK_1}$$

$\psi_2(L) = \psi_3(L) \Rightarrow$