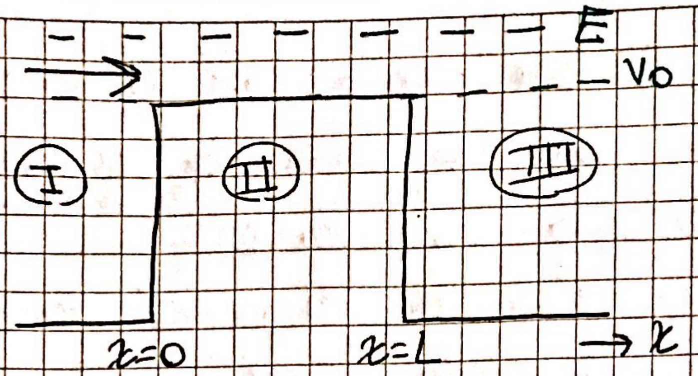
① 

a)

$\cdot\, V(x,t) = V(x)$

$\Rightarrow \psi(x,t) = \psi(x)\cdot\phi(t)$

$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}\left[E - V(x)\right]\psi(x) = k^2\psi(x)$$

$$\left[k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}\left[E - V(x)\right]\right]$$

$E = T + V_0$

↳ la energía de la partícula es la suma de la cinética y la potencial

Se proponen soluciones tipo partícula libre: ψ_1, ψ_2 y ψ_3 (una para cada sector) con

$$\cdot\, k_1 = \pm\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = k_3$$

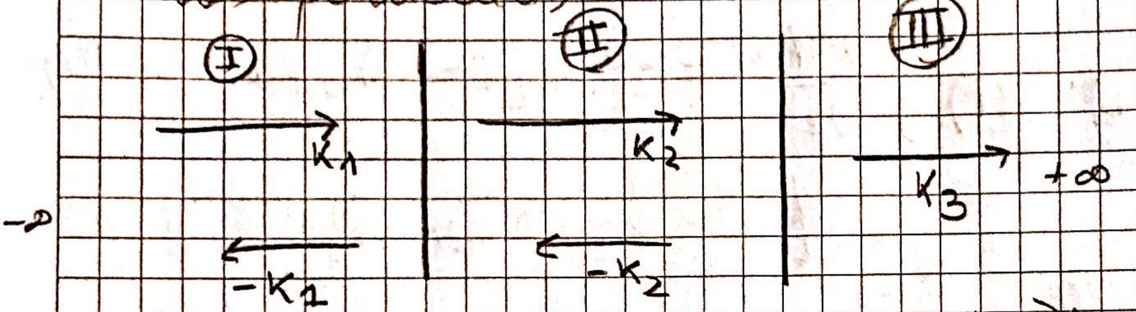
$$\cdot\, k_2 = \pm\sqrt{\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}}$$

$\cdot\, \psi_1 = A_0 e^{ik_1 x} + B e^{-ik_1 x}$

$\cdot\, \psi_2 = C e^{ik_2 x} + D e^{-ik_2 x}$

$\cdot\, \psi_3 = E e^{ik_3 x} + F e^{-ik_3 x}$

b) Clásicamente diríamos que todo el haz de partículas es capaz de atravesar la barrera de potencial ya que su energía es mayor. Sin embargo la mecánica cuántica nos muestra que se produce una reflexión de alguna de estas partículas.



flujo entrante y saliente de ondas.

(por enunciado sabemos que no hay partículas que vienen desde $+\infty$)

Además tanto k_1, k_2 y k_3 son colficientes reales ya que $E > V_0$. Entonces las soluciones ψ_1, ψ_2 y ψ_3 son una combinación de una onda que "va" y una que "viene".

c) caso $K_2 L = (2n+1)\pi$

$$T = \frac{I(x=L)}{I(x=0)} = \frac{|E|^2 k_3}{|A_0|^2 k_1} \overset{k_3 = k_1}{=} \frac{|E|^2}{|A_0|^2}$$

$R + T = 1$ (las partículas reflejadas más las transmitidas dan la totalidad de partículas)

$\Rightarrow R = 1 - T$

1)

d) Para hallar $\psi(x)$ debemos verificar que las soluciones propuestas ψ_1, ψ_2 y ψ_3 cumplen la ecuación de Schrödinger:

$$\psi_1 = A_0 e^{ik_1 x} + Be^{-ik_1 x}$$

$$\psi_2 = Ce^{ik_2 x} + De^{-ik_2 x}$$

$$\psi_3 = Ee^{ik_3 x} + Fe^{-ik_3 x}$$

Donde A_0 es conocido, y $F = 0$. Entonces:

(busco que se satisfagan las condiciones de continuidad)

- $\psi_1(0) = \psi_2(0)$

$$\left.\begin{aligned} \psi_1(0) &= A_0 + B \\ \psi_2(0) &= C + D \end{aligned}\right\} \; [A + B = C + D]$$

• $\psi_2(L) = \psi_3(L)$

$\hookrightarrow \psi_2(L) = Ce^{iK_2L} + De^{-iK_2L}$

$\psi_3(L) = Ee^{iK_3L}$

$\Rightarrow (K_2L = (n+1)\pi)$

$C(\underbrace{\cos(K_2L)}_{-1} + i\,\cancel{\operatorname{sen}(K_2L)}) + D(\underbrace{\cos(-K_2L)}_{-1} + i\,\cancel{\operatorname{sen}(-K_2L)}) = Ee^{iK_3}$

$$\left[-(C+D) = Ee^{iK_3L}\right]$$

• $\psi_1'(0) = \psi_2'(0)$

$AiK_1 - BiK_1 = CiK_2 - DiK_2$

$$\left[(A-B)K_1 = (C-D)K_2\right]$$

• $\psi_2'(L) = \psi_3'(L)$

$CiK_2e^{iK_2L} - DiK_2e^{-iK_2L} = Ee^{iK_3L}iK_3$

$$\left[(-C+D)K_2 = EK_3e^{iK_3L}\right]$$

Entonces tenemos 4 ecuaciones y 4 incógnitas:

1. $A+B = C+D$
2. $(A-B)K_1 = (C-D)K_2$
3. $-(C+D) = Ee^{iK_3L}$
4. $(-C+D)K_2 = EK_3e^{iK_3L}$

Estas ecuaciones podemos expresarlas de forma matricial $\left([\ ] \begin{pmatrix} B \\ C \\ D \\ E \end{pmatrix} = [\ ] \right)$ y obtener los resultados utilizando matlab

Estos resultados son:

- $B = \dfrac{-(AK_1^2 - AK_2^2)}{K_1^2 + K_2^2}$

- $C = \dfrac{AK_2^2 + AK_1K_2}{K_1^2 + K_2^2}$

- $D = \dfrac{-AK_2 \cdot (K_1 - K_2)}{K_1^2 + K_2^2}$

- $E = \dfrac{-(2AK_2^2 e^{(-LK_1 i)})}{K_1^2 + K_2^2}$

e) $w = \dfrac{\hbar^2 K^2}{2m} + V$, por lo que:

I $w_1 = \dfrac{\hbar^2 K_1^2}{2m}$

II $w_2 = \dfrac{\hbar^2 K_2^2}{2m} + V_0$

III $w_3 = w_4$

$$\psi(x,t) = \psi(x)\,\phi(t)$$

$$\psi(x,t) = \psi(x) \cdot e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \psi(x,t) = \begin{cases} \psi_1(x) \cdot e^{i\omega_1 t} & x < 0 \\ \psi_2(x) \cdot e^{i\omega_2 t} & 0 < x < L \\ \psi_3(x) \cdot e^{i\omega_3 t} & x > L \end{cases}$$

f) La densidad de probabilidad está dada por $|\psi(x,t)|^2 = \psi(x,t) \cdot \psi^*(x,t)$

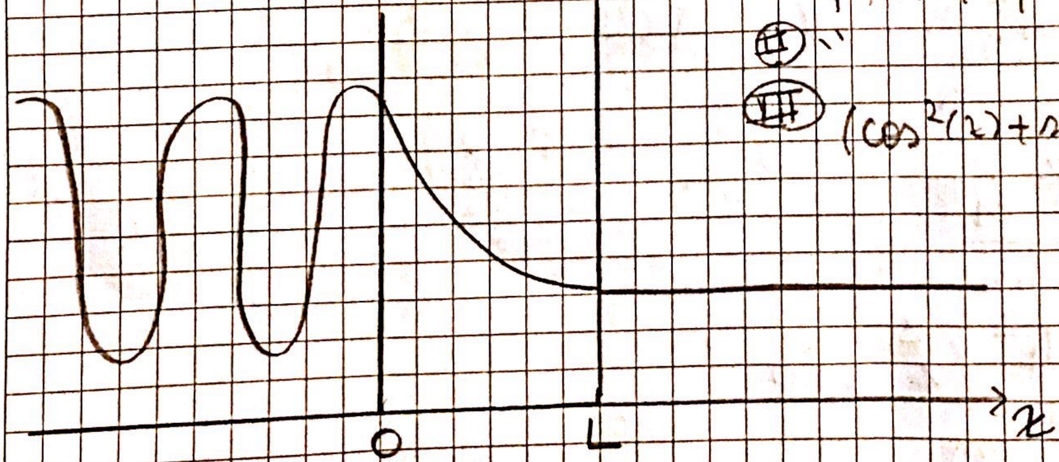
(con $\psi = \psi_1$ o ψ_2 o ψ_3 según la posición x)

g) Haciendo un análisis cualitativo, el gráfico de la densidad de probabilidad debería ser:

I queda la forma de 1 onda

II " " exponencial

III $(\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1)$



(con $n = 1 \Rightarrow K_2 L = 3\pi$)

② a) $\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$

$\cdot \ \langle x\rangle = 0$

$\cdot \ \langle x^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* x^2 \psi \, dx$

$$= \int_{-\frac{L}{2}}^{L/2} \left(\sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right)\right)^2 x^2 dx$$

$$= \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{L}\right) L^2}{6}$$

$$\Rightarrow \Delta x = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{L}\right) L}{\sqrt{6}}$$

$\Delta x_{MAX} = \frac{L}{\sqrt{6}}$

$\Delta x_{MIN} = \frac{-L}{\sqrt{6}}$

Δx siempre será menor que L (el tamaño del pozo)

b) $\Delta x \, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ } principio de incertidumbre

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{2\Delta x}$$

$$\frac{\hbar}{2\Delta x_{MIN}} \leq \Delta p \leq \frac{\hbar}{2\Delta x_{MAX}}$$