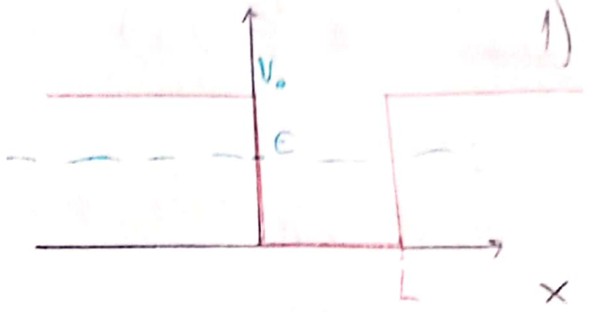
TOMÁS SZWARCBERG 1)



1)

La ecuación de Schrödinger (unidimensional) es

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial^2 x} + V(x,t)\cdot\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}$$

Tomando un potencial que depende unicamente de x, planteo separación de variables. Esto es:

$\Psi(x,t) = X(x)\,T(t)$, quedando:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}T(t)\frac{d^2X(x)}{d^2x} + V(x)X(x)T(t) = i\hbar X(x)\cdot\frac{dT(t)}{dt}.$$

Dividiendo todo por $X(x)T(t)$, queda:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{X(x)}\cdot X''(x) + V(x) = i\hbar\frac{T'(t)}{T(t)}$$

Cada lado de la igualdad depende de una variable distinta, entonces debe ser constante. Esto nos lleva al sistema

$$\begin{cases} -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{1}{X(x)}X''(x) = C \\[2ex] i\hbar\dfrac{1}{T(t)}T'(t) = C \end{cases}$$

, con C constante.

Escaneado con CamScanner

• Para $i\hbar \frac{1}{T} T'(t) = C$, tenemos:

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{C}{i\hbar} T(t) \Longrightarrow T(t) = e^{-\frac{iC}{\hbar}t}, \text{ donde } C = E_{TOT}.$$

$$\therefore \boxed{T(t) = e^{-\frac{iE}{\hbar}t} = e^{-i\omega t}}$$

Como $C = E$, la ecuación para la variable espacial x es:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{X(x)} \cdot X''(x) = E - V(x)$$

Multiplico por $X(x)$:

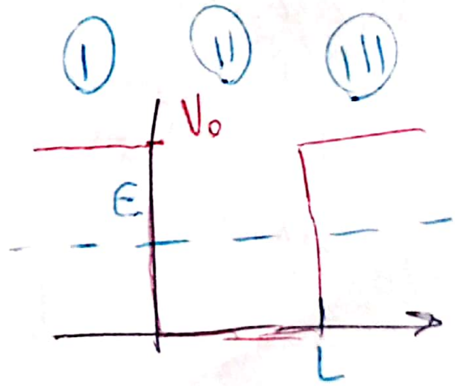
$$-\frac{\hbar^2}{2m} X''(x) = X(x)\left[E - V(x)\right]$$

$$X''(x) = \frac{-2m}{\hbar^2}\left[E - V(x)\right]X(x) = \frac{2m}{\hbar^2}\left[V(x) - E\right]X(x)$$

Sabemos que el potencial es

$$V(x) = \begin{cases} V_0, & 0 > x \\ 0, & 0 < x < L \\ V_0, & x > L. \end{cases}$$

Por lo tanto, podemos marcar 3 zonas distintas para la función de onda.



Como $V_0 - E > 0$ en las zonas I y III, tenemos

$\downarrow$

$$X''(x) = \frac{2m}{\hbar^2} \underbrace{[V_0 - E]}_{>0} X(x)$$

Dentro del pozo (zona II) tenemos que $V(x) = 0$, entonces

$$X_2''(x) = \frac{-2mE}{\hbar^2} X(x).$$ Si llamamos $K_2 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, entonces

$$X_2''(x) = -K^2 X_2(x) \Longrightarrow X_2(x) = A_2 \sin(K_2 x) + B_2 \cos(K_2 x)$$

Volviendo a las zonas I y III, tenemos entonces

$$X_1''(x) = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E) > 0,$$ llamando $K_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)$

queda $X_1''(x) = K_1^2 X(x)$. Esto es,

$\cancel{X_1(x) = A_1 e^{-K_1 x}}$

$$X_1(x) = A_1 e^{-K_1 x} + B_1 e^{K_1 x},$$ donde necesariamente

$A_3 = 0$ pues sino divergería. Entonces, es

$\cancel{X_1(x) = 0}$

$$X_1(x) = A_1 e^{-K_1 x} + \overset{0}{B_1 e^{K_1 x}}$$

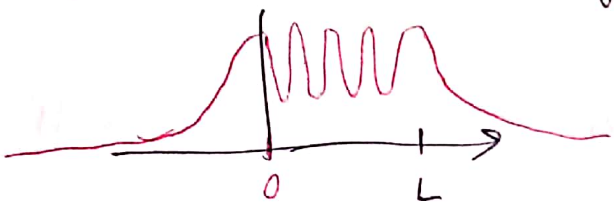
$$X_3(x) = A_3 e^{-K_1 x}.$$ (Notar que como no pued diverger a la derecha, ~~$~~ solo se mantienen los coeficientes acotados)

Entonces, las soluciones espaciales son:

$$X_1^{(x)} = A_1 e^{-K_1 x} \qquad X_2^{(x)} = A_2 \,\text{sen}(K_2 x) + B_2 \cos(K_2 x) \qquad X_3^{(x)} = A_3 e^{-K_1 x}$$

con $K_1 = \dfrac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$ y $K_2 = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

El gráfico de la parte real tendría la forma



Para calcular coeficientes, habría que pedir continuidad de $\Psi(x,t)$ en $x=0$ y $x=L$ y de su derivada, además de pedir $\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \Psi \, dx = 1$.

b) Si para $x<0$ y $x>L$ $V_0 = \infty$, tenemos que la partícula solo se puede mover entre 0 y L, rebotando. Esto hace que

$\Psi(x) = 0$ si $x<0$ y $x>L$. Como pedimos continuidad en la función,

$\Psi(0) = \Psi(L) = 0$. Volvemos entonces a la función de onda dentro del pozo, que es de la forma

$$\Psi(x) = A \,\text{sen}(Kx) + B \cos(Kx) \longrightarrow$$

Si: $\Psi(0)=0$, $A\sin(0)+B\cos(0)=0$

$\rightarrow \boxed{B=0}$

Esto hace $(\Psi(L)=0)$ que las únicas posibles $\Rightarrow$ longitudes de onda sean tales que $\frac{\lambda}{2}\cdot n = L$, ~~llegando~~ con $n\in\mathbb{N}$, llegando a:

$$E=\frac{p^2}{2m}=\frac{1}{2m}\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2=\frac{1}{2m}\frac{h^2}{\left(\frac{2L}{n}\right)^2}=\frac{n^2h^2}{2m4L^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_n=\frac{n^2h^2}{8mL^2}}$$, son los valores permitidos de energía dentro del pozo. Como $K=\frac{\sqrt{2mE_n}}{\hbar}$, los posibles valores de K son

$$K_n=\frac{\sqrt{2mE_n}}{\hbar}=\frac{\sqrt{\frac{\cancel{2m}n^2h^2}{\cancel{2m}4L^2}}}{\hbar}=\frac{\frac{nh}{2L}}{\hbar}=$$

$$=\frac{n\cancel{h}}{\cancel{2}L}\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{h}}\Rightarrow \boxed{K_n=\frac{n\pi}{L}}, n\in\mathbb{N}.$$

c) Los posibles valores de E fueron encontrados en el punto b)

Como $E_n=\frac{n^2h^2}{8mL^2}$, con $n\in\mathbb{N}$.

d) Por los postulados de De Broglie, la frecuencia ω está dada por $E = \hbar\omega$. Como $E = E_c$ para el pozo, entonces:

$$\omega = \frac{E}{\hbar} = \frac{1}{\hbar}\frac{n^2h^2}{8mL^2} = \frac{2\pi}{h}\frac{n^2h^2}{8mL^2} = \frac{2\pi n^2 h}{8mL^2}$$

$$\omega_n = \frac{\pi n^2 h}{4mL^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

e) Por continuidad de Ψ en 0 y L, vimos que tenía que estar dado por $X(x) = A \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ ya que $B = 0$.

Como $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx = 1$, tenemos:

$$\int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{L} \Psi^*\Psi\, dx + \int_{L}^{\infty} 0\, dx = \int_0^L A_n^2 e^{i\omega t - i\omega t} \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 1$$

$$\Rightarrow |A_n|^2 \int_0^L \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = |A_n|^2 \frac{1}{4} L \left(2 - \frac{\operatorname{sen}(2\pi n)}{\pi n}\right)$$

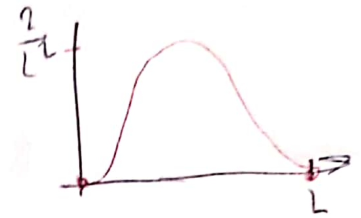
$$\rightarrow |A_n|^2 \frac{L}{2} = 1 \rightarrow A_n = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

$$\therefore \boxed{\Psi(x,t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-i\omega t}_{n}} \quad 0<x<L, \text{ y } 0 \text{ e.o.c.}$$

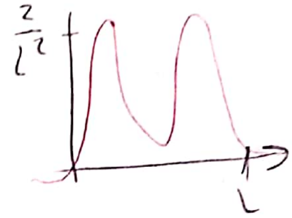
f) La densidad es: $|\Psi(x,t)|^2 = \frac{2}{L^2}\,\text{sen}^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$, $0<x<L$

Con $n=1$, esto es:

$$\rho(x) = \frac{2}{L^2}\,\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{L}x\right) :$$

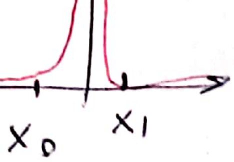


Con $n=2$, $\rho(x) = \frac{2}{L^2}\,\text{sen}^2\left(\frac{2\pi}{L}\right)$



Si $n=3$, $\rho(x) = \frac{2}{L^2}\,\text{sen}^2\left(\frac{3\pi}{L}\right)$

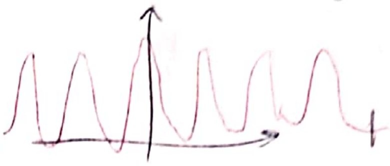
2) El principio de incerteza dice que no es posible tener una medición exacta de x y p o E y t simultáneamente para una partícula, sino que al conocer una de las 2 tenemos mucha incertidumbre en el otro parámetro. Por ejemplo, consideramos la siguiente función de onda:



→ Sabemos que casi con total seguridad la partícula será encontrada entre x_0 y x_1, siendo Δx pequeño. Sin embargo, no sabemos con certeza por cuántas frecuencias está compuesta la función de onda. Es decir que en este caso Δk o Δp será muy grande, no los podemos conocer esos valores de p o k con exactitud.

En cambio, para funciones de onda donde la cantidad de frecuencias es claramente diferenciable, la incertidumbre espacial será grande

Por ejemplo, si la función de onda fuese:



Aunque conocemos bien K, la incertidumbre de x es muy grande, no sabemos en que zona está. Algo similar ocurre entre mediciones de energía y tiempo; no podemos conocer las 2 con exactitud.

La expresión matemática de esto es:
$$\begin{cases} \Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \\ \Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \end{cases}$$

Evaluamos entonces para $L = 1\mu m$ y $L = 1nm$.

Si $\Delta V = m\,\Delta p$, entonces $\Delta x\, m\, \Delta v \geq \frac{\hbar}{2}$, $\Delta x \geq \frac{\hbar}{2m\Delta v}$

Calculamos primero Δp, como $\langle p \rangle = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$

$$\langle p \rangle = \int_0^L \psi^* \frac{\hbar}{i} \psi'(x)\, dx = \int_0^L \frac{\hbar}{i} \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{\pi}{L} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx$$

$$= \frac{\hbar}{i} \frac{2}{L^2} \pi \int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = \cancel{\frac{-i\hbar 2\pi}{L^2} \int_0^L} \dots$$

$$= \frac{\hbar 2\pi}{i L^2} \left[\frac{-L \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}{4\pi} \right]_0^L = \frac{\hbar 2\pi}{i L^2} \left[\frac{-L}{4\pi} + \frac{L}{4\pi} \right] = \boxed{0}$$

HOJA 9

$$\langle p^2 \rangle = \int_0^L \sqrt{\frac{2}{L}}\,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)\frac{\hbar^2}{-1}\left(\sqrt{\frac{2}{L}}\frac{\pi}{L}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right)' dx =$$

$$= \int_0^L \frac{-2}{L}\cdot\frac{\hbar^2}{L}\pi\,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)\left(-\text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)\frac{\pi}{L}\right)dx = \frac{2\pi\hbar^2}{L^3}\int_0^L \text{sen}^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)dX =$$

$$= \frac{2\pi\hbar^2}{L^3}\left[\frac{x}{2} - \frac{\text{sen}\left(2\frac{\pi}{L}x\right)}{4\frac{\pi}{L}}\right]_0^L = \frac{2\pi\hbar^2}{L^3}\left[\frac{L}{2} - \frac{0}{\frac{4\pi}{L}} + \frac{\text{sen}(0)}{\frac{4\pi}{L}}\right] =$$

$$= \frac{\cancel{2}\pi\hbar^2}{L^{\cancel{3}2}}\frac{\cancel{L}}{\cancel{2}} = \boxed{\frac{\pi\hbar^2}{L}}$$

$$\Rightarrow \Delta p = \frac{\pi\hbar^2}{L} - 0 = \boxed{\frac{\pi\hbar^2}{L}}$$

como $\Delta p = m\,\Delta v$,

$$\Delta v = \frac{\pi\hbar^2}{Lm} \quad y \quad \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}\frac{L}{\pi\hbar^{\cancel{2}}} = \frac{L}{2\pi\hbar}$$

Si $L = 1\mu m$,

$$\Delta v = \frac{\pi\hbar^2}{m_e 10^{-6}m} = \frac{\pi\cdot(6{,}62\cdot10^{-34}\ J\cdot s)^2}{10^{-6}m\,\underbrace{m_e}_{9{,}1\cdot10^{-31}\ Kg}} = 1{,}51\cdot10^{-30}\ \frac{m}{s}$$

Si $L = 1nm$,

$$\Delta v = 1{,}51\cdot10^{-27}\ \frac{m}{s}$$