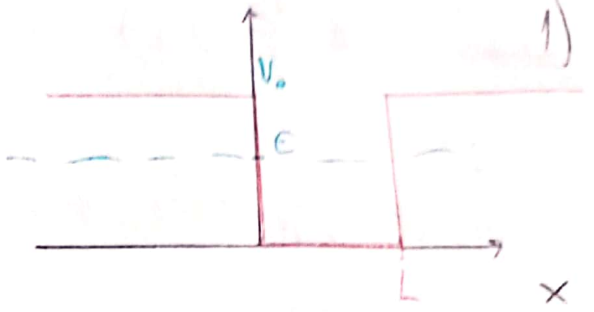
TOMÁS SZWARCBERG



1)

1)

La ecuación de Schrödinger unidimensional es

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial^2 x} + V(x,t)\cdot\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}$$

Tomando un potencial que depende unicamente de x, planteo separación de variables. Esto es:

$\Psi(x,t) = X(x)\,\mathcal{T}(t)$, quedando:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\mathcal{T}(t)\frac{d^2X(x)}{d^2x} + V(x)X(x)\mathcal{T}(t) = i\hbar\, X(x)\cdot\frac{d\mathcal{T}(t)}{dt}.$$

Dividiendo todo por $X(x)\mathcal{T}(t)$, queda:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{X(x)}\cdot X''(x) + V(x) = i\hbar\frac{\mathcal{T}'(t)}{\mathcal{T}(t)}$$

Cada lado de la igualdad depende de una variable distinta, entonces debe ser constante. Esto nos lleva al sistema

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{X(x)}X''(x) = C \\ i\hbar\frac{1}{\mathcal{T}(t)}\mathcal{T}'(t) = C \end{cases}$$

, con C constante.

• Para $i\hbar \frac{1}{\mathcal{T}} \mathcal{T}'(t) = C$, tenemos:

$$\frac{d\mathcal{T}(t)}{dt} = \frac{C}{i\hbar}\mathcal{T}(t) \Longrightarrow \mathcal{T}(t) = e^{-\frac{iC}{\hbar}t}$$

, donde $C = E_{TOT}$.

$$\therefore \boxed{\mathcal{T}(t) = e^{-\frac{iE}{\hbar}t} = e^{-i\omega t}}$$

Como $C = E$, la ecuación para la variable espacial X es:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{X(x)} \cdot X''(x) = E - V(x)$$

Multiplico por $X(x)$:

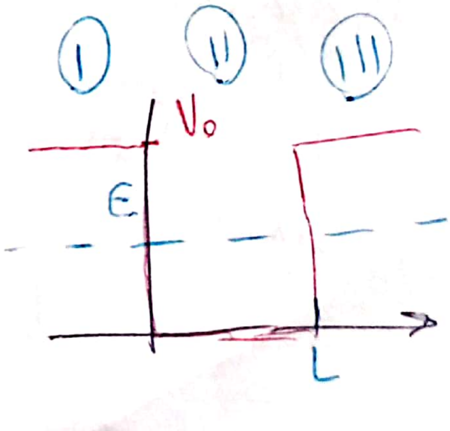
$$-\frac{\hbar^2}{2m} X''(x) = X(x)\left[E - V(x)\right]$$

$$X''(x) = \frac{-2m}{\hbar^2}\left[E - V(x)\right]X(x) = \frac{2m}{\hbar^2}\left[V(x) - E\right]X(x)$$

Sabemos que el potencial es

$$V(x) = \begin{cases} V_0, & 0 > x \\ 0, & 0 < x < L \\ V_0, & x > L. \end{cases}$$

Por lo tanto, podemos marcar 3 zonas distintas para la función de onda.



Como $V_0 - E > 0$ en las zonas I y III, tenemos

↓

$$X''(x) = \frac{2m}{\hbar^2}\underbrace{[V_0 - E]}_{>0} X(x)$$

Dentro del pozo (zona II) tenemos que $V(x) = 0$, entonces

$$X_2''(x) = \frac{-2mE}{\hbar^2} X(x).$$ Si llamamos $K_2 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, entonces

$$X_2''(x) = -K^2 X_2(x) \Rightarrow X_2(x) = A_2 \sin(K_2 x) + B_2 \cos(K_2 x)$$

Volviendo a las zonas I y III, tenemos entonces

$$X_1''(x) = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E) > 0,$$ llamando $K_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)$

queda $X_1''(x) = K_1^2 X(x)$. Esto es,

$$X_1(x) = A_1 e^{-K_1 x} + B_1 e^{K_1 x},$$ donde necesariamente

$B_3 = 0$ pues sino divergería. Entonces, es

$$X_1(x) = A_1 e^{-K_1 x} + \underbrace{B_1 e^{K_1 x}}_{0}$$

$$X_3(x) = A_3 e^{-K_1 x}.$$

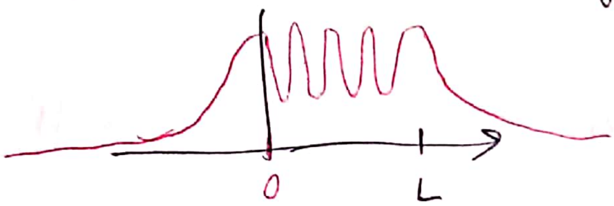
(Notar que como no pueden divergir a la derecha, y solo se mantienen los coeficientes acotados)

Entonces, las ecuaciones espaciales son:

$X_1^{(x)} = A_1 e^{-K_1 x}$ $\quad X_2^{(x)} = A_2 \operatorname{sen}(K_2 x) + B_2 \cos(K_2 x)$ $\quad X_3^{(x)} = A_3 e^{-K_1 x}$

con $K_1 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$ y $K_2 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

El gráfico de la parte real tendría la forma



Para calcular coeficientes, habría que pedir continuidad de $\Psi(x,t)$ en $x=0$ y $x=L$ y de su derivada, además de pedir $\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \Psi \, dx = 1$.

b) Si para $x<0$ y $x>L$ $V_0 = \infty$, tenemos que la partícula solo se puede mover entre 0 y L, rebotando. Esto hace que

$\Psi(x) = 0$ si $x<0$ y $x>L$. Como pedimos continuidad en la función,

$\Psi(0) = \Psi(L) = 0$. Volvemos entonces a la función de onda dentro del pozo, que es de la forma

$\Psi(x) = A \operatorname{sen}(Kx) + B \cos(Kx) \longrightarrow$

Si: $\psi(0) = 0$, $A\,sen(0) + B\cos(0) = 0$

$\longrightarrow \boxed{B = 0}$

Esto hace $(\psi(L) = 0)$ que las únicas posibles longitudes de onda sean tales que $\frac{\lambda}{2} \cdot n = L$, ~~llegando~~ con $n \in \mathbb{N}$, llegando a:

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m}\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{2m}\,\frac{h^2}{\left(\frac{2L}{n}\right)^2} = \frac{n^2 h^2}{2m\,4L^2}$$

$\Longrightarrow \boxed{E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}}$, son los valores permitidos de energía dentro del pozo. Como $K = \frac{\sqrt{2mE_n}}{\hbar}$, los posibles valores de K son

$$K_n = \frac{\sqrt{2mE_n}}{\hbar} = \frac{\sqrt{\frac{\cancel{2m}\, n^2 h^2}{\cancel{2m}\, 4L^2}}}{\hbar} = \frac{\frac{nh}{2L}}{\hbar} =$$

$$= \frac{n\cancel{h}}{\cancel{2}L}\,\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{h}} \Rightarrow \boxed{K_n = \frac{n\pi}{L}}, \; n \in \mathbb{N}.$$

c) Los posibles valores de E fueron encontrados en el punto b)

Como $E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}$, con $n \in \mathbb{N}$.

d) Por los postulados de De Broglie, la frecuencia ω está dada por $E = \hbar\omega$. Como $E = E_c$ para el pozo, entonces:

$$\omega = \frac{E}{\hbar} = \frac{1}{\hbar}\frac{n^2h^2}{8mL^2} = \frac{2\pi}{h}\frac{n^2h^2}{8mL^2} = \frac{2\pi n^2 h}{8mL^2}$$

$$\omega_n = \frac{\pi n^2 h}{4mL^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

e) Por continuidad de Ψ en 0 y L, vimos que tenía que estar dado por $X(x) = A \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ ya que $B = 0$.

Como $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx = 1$, tenemos:

$$\int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{L} \Psi^*\Psi\, dx + \int_{L}^{\infty} 0\, dx = \int_0^L A_n^2 e^{i\omega t - i\omega t} \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 1$$

$$\Rightarrow |A_n|^2 \int_0^L \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = |A_n|^2 \frac{1}{4} L \left(2 - \frac{\operatorname{sen}(2\pi n)}{\pi n}\right)$$

$$\rightarrow |A_n|^2 \frac{L}{2} = 1 \rightarrow A_n = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

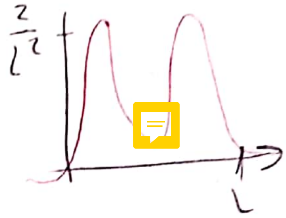
$$\therefore \boxed{\Psi(x,t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-i\omega_n t}} \quad 0<x<L, \text{ y } 0 \text{ e.o.c.}$$

f) La densidad es: $|\Psi(x,t)|^2 = \frac{2}{L^2}\,\text{sen}^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right), 0<x<L$

Con $n=1$, esto es:

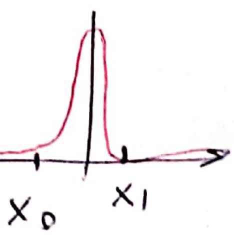
$P(x) = \frac{2}{L^2}\,\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{L}x\right)$:

Con $n=2$, $P(x) = \frac{2}{L^2}\,\text{sen}^2\left(\frac{2\pi}{L}\right)$



Si $n=3$, $P(x) = \frac{2}{L^2}\,\text{sen}^2\left(\frac{3\pi}{L}\right)$

2) El principio de incerteza dice que no es posible hacer una medición exacta de x y p o E y t simultáneamente para una partícula, sino que al conocer una de las 2 tenemos mucha incertidumbre en el otro parámetro. Por ejemplo, consideramos la siguiente función de onda:

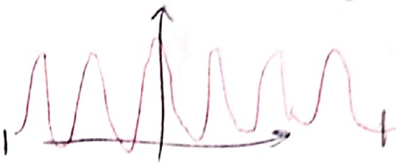


→ Sabemos que casi con total seguridad la partícula será encontrada entre x_0 y x_1, siendo Δx pequeño. Sin embargo, no sabemos con certeza por cuántas frecuencias está compuesta la función de onda. Es decir que en este caso Δk o Δp será muy grande, no los podemos conocer esos valores de p o k con exactitud.

En cambio, para funciones de onda donde la cantidad de frecuencias es claramente diferenciable, la incertidumbre espacial será grande

Hoja 8

Por ejemplo, si la función de onda fuese:



Aunque conocemos bien K, la incertidumbre de x es muy grande, no sabemos en qué zona está. Algo similar ocurre entre mediciones de energía y tiempo; no podemos conocer las 2 con exactitud.

La expresión matemática de esto es:

$$\begin{cases} \Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \\ \Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \end{cases}$$

Evaluamos entonces para $L = 1\,\mu m$ y $L = 1\,nm$.

~~Sea~~ $\Delta v = m \Delta p$, entonces $\Delta x\, m \Delta v \geq \frac{\hbar}{2}$, $\Delta x \geq \frac{\hbar}{2m\Delta v}$

Calculamos primero Δp, como $\langle p \rangle = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$

$$\langle p \rangle = \int_0^L \psi^* \frac{\hbar}{i} \psi'(x)\, dx = \int_0^L \frac{\hbar}{i} \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{\pi}{L} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx$$

$$= \frac{\hbar}{i} \frac{2}{L^2} \pi \int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = \cancel{\frac{-i\hbar 2\pi}{L^2} \int_0^L} \cdots$$

$$= \frac{\hbar 2\pi}{i L^2} \left[\frac{-L \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}{4\pi} \right]_0^L = \frac{\hbar 2\pi}{i L^2} \left[\frac{-L}{4\pi} + \frac{L}{4\pi} \right] = \boxed{0}$$

$$\langle p^2 \rangle = \int_0^L \sqrt{\frac{2}{L}}\, \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \frac{\hbar^2}{-1} \left(\sqrt{\frac{2}{L}}\frac{\pi}{L}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right)' dx =$$

$$= \int_0^L \frac{-2}{L} \cdot \frac{\hbar^2 \pi}{L}\, \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)\left(-\text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)\frac{\pi}{L}\right) dx = \frac{2\pi\hbar^2}{L^3}\int_0^L \text{sen}^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx =$$

$$= \frac{2\pi\hbar^2}{L^3}\left[\frac{x}{2} - \frac{\text{sen}\left(2\frac{\pi}{L}x\right)}{4\frac{\pi}{L}}\right]_0^L = \frac{2\pi\hbar^2}{L^3}\left[\frac{L}{2} - \frac{0}{\frac{4\pi}{L}} + \frac{\text{sen}(0)}{\frac{4\pi}{L}}\right] =$$

$$= \frac{\cancel{2}\pi\hbar^2}{L^{\cancel{3}2}}\frac{\cancel{L}}{\cancel{2}} = \boxed{\frac{\pi\hbar^2}{L}}$$

$$\Rightarrow \Delta p = \frac{\pi\hbar^2}{L} - 0 = \boxed{\frac{\pi\hbar^2}{L}}$$

como $\Delta p = m\,\Delta v$,

$$\Delta v = \frac{\pi\hbar^2}{L\,m} \quad y \quad \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}\frac{L}{\pi\hbar^{\cancel{2}}} = \frac{L}{2\pi\hbar}$$

Si $L = 1\mu m$,

$$\Delta v = \frac{\pi\hbar^2}{m_e 10^{-6} m} = \frac{\pi\cdot(6,62\cdot 10^{-34}\ J\cdot s)^2}{10^{-6} m\ \underbrace{m_e}_{9,1\cdot 10^{-31} Kg}} = 1,51\cdot 10^{-30}\ \frac{m}{s}$$

Si $L = 1nm$,

$$\Delta v = 1,51\cdot 10^{-27}\ \frac{m}{s}$$