FACULTAD
DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

62.15 Física III D (curso 2)

Trabajo Practico N°1: Interferencia

Padrón	Alumno	Dirección de correo
94773	Condo, Alexander Emanuel	acondo@fi.uba.ar
102831	De Feo, Laura	ldefeo@fi.uba.ar
101148	Feijoo, Sofia	sfeijoo@fi.uba.ar
101456	Pérez Andrade, Violeta	viperez@fi.uba.ar

Índice

1. Pregunta 1 **2**

2. Pregunta 2 **2**

3. Pregunta 3 **3**

4. Pregunta 4 **3**

5. Pregunta 5 **4**
5.1. 4
5.2. 4

6. Pregunta 6 **5**

7. Pregunta 7 **5**

8. Pregunta 8 **6**

9. Pregunta 9 **7**

10. Pregunta 10 **8**
10.1. 8
10.2. 10
10.3. 10
10.4. 11
10.5. 11

11. Pregunta 11 **12**
11.1. 12
11.2. 13
11.3. 13

1. Pregunta 1

Las ecuaciones de Maxwell sin fuentes son:

- Gauss para campo eléctrico:
$$\nabla \cdot E = 0 \tag{1}$$

- Faraday:
$$\nabla \times E = -\frac{dB}{dt} \tag{2}$$

- Gauss para campo magnético:
$$\nabla \cdot B = 0 \tag{3}$$

- Ampere:
$$\nabla \times B = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{dE}{dt} \tag{4}$$

2. Pregunta 2

La ecuación de ondas se puede obtener a partir de las ecuaciones de Maxwell y asumiendo que no hay fuentes (es decir, tanto como J son nulos).
Entonces, sabiendo que:

$$\nabla \times (\nabla \times E) = \nabla(\nabla.E) - (\nabla.\nabla)E \tag{5}$$

donde

$$\nabla \cdot E = 0, \nabla \times E = -\frac{dB}{dt} \tag{6}$$

reemplazando llegamos a que

$$\nabla \times \left(-\frac{\delta B}{\delta t}\right) = -\nabla^2 \bar{E} \tag{7}$$

Además, B es un campo continuo por lo que

$$-\frac{\delta(\nabla \times B)}{\delta t} = -\nabla^2 \bar{E} \quad \text{donde} \quad \nabla \times B = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{dE}{dt} \tag{8}$$

Entonces reemplazando se obtiene

$$\begin{aligned}
&-\tfrac{d\left(\varepsilon_0 \mu_0 \frac{dE}{dt}\right)}{dt} = -\nabla^2 \bar{E} \\
&\varepsilon_0 \mu_0 \tfrac{d^2 E}{dt^2} = \nabla^2 \bar{E} \\
&\tfrac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = \nabla^2 \bar{E} c^2 \quad \text{con} \quad c^2 = \tfrac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}
\end{aligned} \tag{9}$$

3. Pregunta 3

La ecuación de onda para el campo eléctrico, que dedujimos a partir de las leyes de Maxwell para el caso de no tener fuentes, está dada por:

$$c^2\nabla^2\bar{E} = \frac{\delta^2\bar{E}}{\delta t^2} \tag{10}$$

Entonces, para verificar que dicha ecuación de ondas admite soluciones de tipo

$$E = f(kx \pm wt) \tag{11}$$

debemos realizar las derivadas pertinentes y verificar. Por un lado tenemos que

$$\frac{\partial^2 f}{\delta x^2} = f''(x \pm vt) \tag{12}$$

Y por otro lado que

$$\frac{\partial^2 f}{\delta t^2} = v^2 f''(x \pm vt) \tag{13}$$

Y siendo v = c la velocidad, es fácil ver que

$$\frac{\partial^2 f}{\delta t^2} = v^2\frac{\partial^2 f}{\delta x^2} \tag{14}$$

Es decir, verifica la ecuación de ondas (10)

4. Pregunta 4

Tenemos un campo E tal que

$$E = E_1 + E_2 \tag{15}$$

y queremos probar que es este campo solución de la ecuación de ondas. Entonces empiezo a operar. En primer lugar sabemos que

$$\frac{\partial^2 E}{\delta t^2} = \frac{\partial^2 E_1}{\delta t^2} + \frac{\partial^2 E_2}{\delta t^2} \tag{16}$$

Y por otro lado, también sabemos que E1 y E2 son soluciones. Entonces se cumple que

$$\frac{\partial^2 E_1}{\delta t^2} = c^2\frac{\partial^2 E_1}{\delta x^2} \tag{17}$$

$$\frac{\partial^2 E_2}{\delta t^2} = c^2\frac{\partial^2 E_2}{\delta x^2} \tag{18}$$

Reemplazando en (16) nos queda

$$\frac{\partial^2 E}{\delta t^2} = c^2\frac{\partial^2 E_1}{\delta x^2} + c^2\frac{\partial^2 E_2}{\delta x^2} = c^2(\frac{\partial^2 E_1}{\delta x^2} + \frac{\partial^2 E_2}{\delta x^2}) = c^2\frac{\partial^2 E}{\delta x^2} \tag{19}$$

Es decir, se cumple la ecuación de onda para E.

5. Pregunta 5

5.1.

Utilizando un sistema de coordenadas cartesianas, definimos que

$$\bar{E} = E_x \widehat{x} y \bar{k} = k_z \widehat{z}$$
$$\bar{E} = E_0 e^{i(k_z x - wt)} \widehat{x}) \tag{20}$$

a partir de las cuales calculamos sus derivadas respecto x y t.

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = E_0 e^{i(kx-wt)} ik$$
$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = E_0 e^{i(kx-wt)} \left(-k^2\right)$$
$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = E_0 e^{i(kx-wt)} (-iw)$$
$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = E_0 e^{i(kx-wt)} \left(-w^2\right) \tag{21}$$

Podemos ver que los resultados obtenidos son similares salvo por un factor para que se cumpla la igualdad de las ecuaciones de ondas

$$\left(c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) \tag{22}$$

5.2.

Utilizando un sistema de coordenadas polares, definimos que

$$\bar{E} = E_r \hat{r} \tag{23}$$

y además la onda esférica no tiene componente en θ y en ϕ , con lo cual el Laplaciano queda expresado como:

$$\nabla^2 E_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial E_r}{\partial r} \right) \tag{24}$$

A partir de ello, calculamos sus derivadas respecto de r y t

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial E_r}{\partial r} = A_0 \left(\frac{e^{i(kr-wt)} ikr - e^{i(kr-wt)}}{r^2} \right) = \frac{A_0}{r^2} e^{i(kr-1vt)} (ikr-1) \\
&\nabla^2 E_r = \frac{1}{r^2} \left[e^{i(kr-wt)} ik(ikr-1) + e^{i(kr-wt)} ik \right] \\
&\nabla^2 E_r = \frac{A_0}{r^2} \left[e^{i(kr-wt)} \left(-k^2 r \right) - e^{i(kr-wt)} ik + e^{i(kr-wt)} ik \right] \\
&\nabla^2 E_r = \frac{A_0}{r} e^{i(kr-1vt)} \left(-k^2 \right) \\
&\frac{\partial E_r}{\partial t} = \frac{A_0}{r} e^{i(kr-wt)} (-iw) \\
&\frac{\partial^2 E_r}{\partial t^2} = \frac{A_0}{r} e^{i(kr-wt)} \left(-w^2 \right)
\end{aligned} \tag{25}
$$

Vemos nuevamente que se cumple la ecuación para ondas esféricas utilizando un factor de multiplicación.

6. Pregunta 6

Los modos normales de la ecuación de ondas son soluciones de tipo

$$\psi(x,t) = f(x) e^{iwt} \tag{26}$$

Si reemplazamos esta solución en la ecuación de ondas obtenemos la relación

$$-w^2 f(x) = c^2 \frac{\delta^2 f(x)}{\delta x^2}, \text{ que tiene a } f(x) = e^{ikx} \text{ como solución} \tag{27}$$

Nuevamente, reemplazando la solución obtenemos la relación

$$-w^2 e^{ikx} = c^2 \frac{\delta^2 e^{llx}}{\delta x^2} \tag{28}$$

Despejando obtenemos

$$
\begin{aligned}
&-w^2 e^{ikx} = -c^2 k^2 e^{ikx} \\
&w^2 = c^2 k^2
\end{aligned} \tag{29}
$$

Conocida como la relación de dispersión.

7. Pregunta 7

Por el principio de superposición $E = E_1 + E_2$

$$
\begin{aligned}
&E = \frac{A}{r_1} e^{i(kr_1 - wt)} + \frac{A}{r_2} e^{i(kr_2 - wt)} = A e^{-iwt} \left(\frac{1}{r_1} e^{ikr_1} + \frac{1}{r_2} e^{ikr_2} \right) \\
&I = |E|^2 = A^2 \left(\frac{1}{r_1} e^{ikr_1} + \frac{1}{r_2} e^{ikr_2} \right) \left(\frac{1}{r_1} e^{-ikr_1} + \frac{1}{r_2} e^{-ikr_2} \right) \\
&I = |E|^2 = A^2 \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_1 r_2} e^{i(kr_1 - kr_2)} + \frac{1}{r_1 r_2} e^{-i(kr_1 - kr_2)} + \frac{1}{r_2^2} \right)
\end{aligned} \tag{30}
$$

Vemos que hay una suma entre una exponencial y su conjugada, pasándolas a cosenos y senos, obtenemos dos veces el coseno del argumento, y finalmente:

$$I = |E|^2 = A^2 \left(\tfrac{1}{r_1^2} + \tfrac{1}{r_2^2} + \tfrac{2}{r_1 r_2} \cos\left(kr_1 - kr_2\right) \right) \tag{31}$$

8. Preguntа 8

Queremos llegar a que:

$$|r_1 - r_2| \simeq \frac{dx}{D} \tag{32}$$

Además se sabe que:

$$|r_1 - r_2| = |\sqrt{\left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2 + D^2} - \sqrt{\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2 + D^2}| \tag{33}$$

Primero realizamos el siguiente cambio de variable:

$$u = \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2, v = \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2 \tag{34}$$

Aplicando el cambio de variable la ecuación queda de la siguiente forma:

$$\left| \sqrt{u + D^2} - \sqrt{v + D^2} \right| \tag{35}$$

Aproximamos cada termino con el desarrollo de Taylor de orden 1 respecto a u y v, respectivamente centrado en cero y obtenemos lo siguiente:

$$\text{taylor}\left(\sqrt{v+d^2}, v, 1, 0\right) \qquad \frac{v}{2\cdot|d|}+|d|$$

$$\text{taylor}\left(\sqrt{u+d^2}, u, 1, 0\right) \qquad \frac{u}{2\cdot|d|}+|d|$$

Entonces, a partir de esto, realizamos la siguiente aproximación, quitándole el módulo a D ya que siempre es > 0:

$$|r_1 - r_2| \cong \frac{u}{2D} + D - \frac{v}{2D} - D = \frac{u - v}{2D} \tag{36}$$

Volviendo a nuestras variables originales, queda entonces:

$$\begin{aligned} &= \tfrac{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2 + y^2 - \left(x+\frac{d}{2}\right)^2 - y^2}{2D} = \tfrac{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2 + \left(x+\frac{d}{2}\right)^2}{2D} = \\ &= \tfrac{-2dx}{2D} = \tfrac{-dx}{D} \end{aligned} \tag{37}$$

Como se mencionó en el enunciado, $d, x, y \ll D$, por lo que se puede decir que:

$$\frac{dx}{D} \cong 0 \cong -\frac{dx}{D} \tag{38}$$

9. Preguta 9

Tenemos dos ondas planas de igual amplitud y distinta frecuencia tales que:

$$\begin{aligned} E_1 &= Ae^{i(k_1 r_1 - w_1 t)} \\ E_2 &= Ae^{i(k_2 r_2 - w_2 t)} \end{aligned} \tag{39}$$

Por el principio de superposición, el campo resultante será la suma de ambos campos

$$E = E_1 + E_2 = Ae^{i(k_1 r_1 - w_1 t)} + Ae^{i(k_2 r_2 - w_2 t)} = A\left(e^{i(k_1 r_1 - w_1 t)} + e^{i(k_2 r_2 - w_2 t)}\right) \tag{40}$$

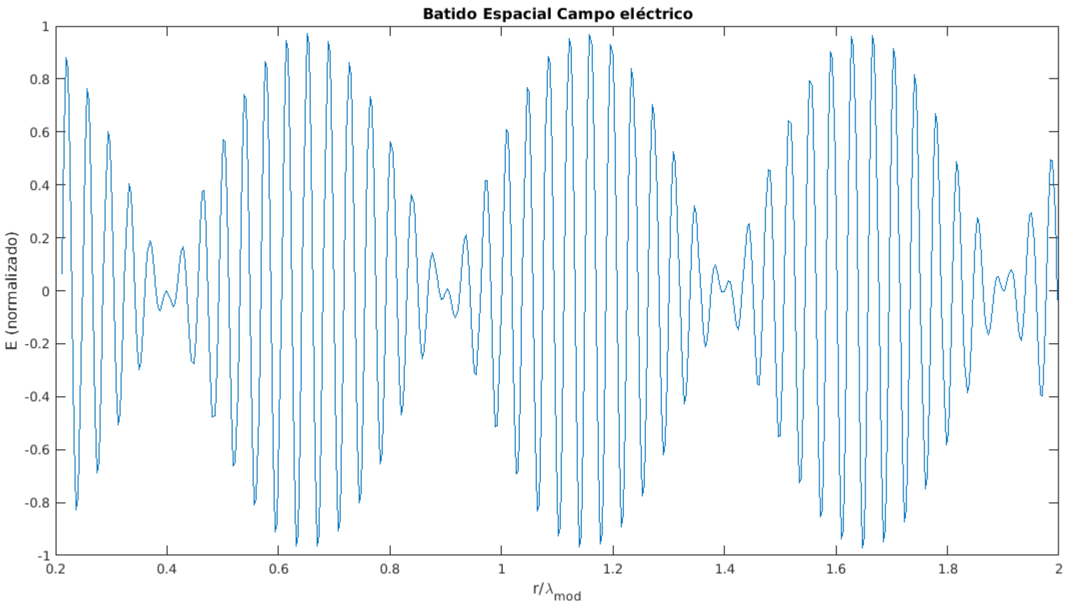
Además, si usamos los valores medios y las semidiferencias podemos decir que

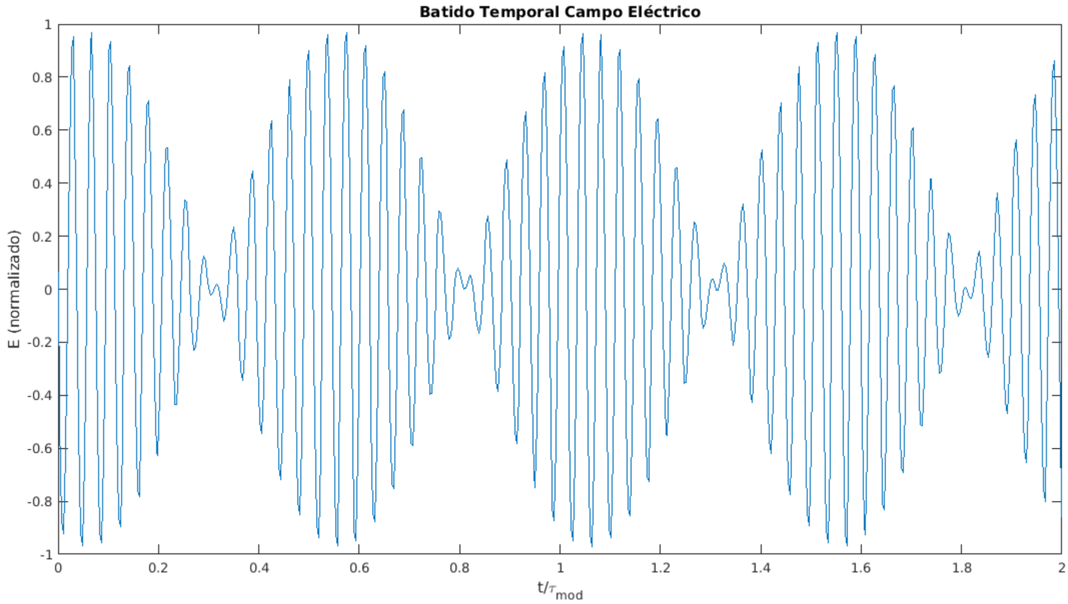
$$\begin{aligned} w_1 &= w + \Delta w \quad k_1 = k + \Delta k \\ w_2 &= w - \Delta w \quad k_2 = k - \Delta k \end{aligned} \tag{41}$$

y reemplazando:

$$\begin{aligned} E =& A\left(e^{i((k+\Delta k)r_1 - (w+\Delta w)t)} + e^{i((k-\Delta k)r_2 - (w-\Delta w)t)}\right) = \\ & A\left(e^{i(kr_1 - wt)}e^{i(\Delta k r_1 - \Delta w t)} + e^{i(kr_2 - wt)}e^{-i(\Delta k r_2 - \Delta w t)}\right) \end{aligned} \tag{42}$$

Además, la superposición de estas dos ondas con frecuencias distintas genera un batido. Más específicamente, genera un batido temporal y otro espacial en el campo resultante. Lo podemos ver en los siguientes gráficos.





10. Pregunta 10

10.1.

La función de intensidad proporcionada indica que hay tanto interferencia como difracción. El primer término, corresponde a la difracción:

$$\frac{\operatorname{sen}^2(\beta)}{\beta^2} \tag{43}$$

además, sabemos que:

$$\beta = b\frac{\pi}{\lambda}\operatorname{sen}\theta = 1\mu\frac{\pi}{6{,}10^{-7}} = 1{,}66\pi\operatorname{sen}(\theta) \tag{44}$$

Al estar el seno elevado al cuadrado, el valor mínimo que puede tomar la función es cuando el seno vale 0. Esto vale cuando β es cualquier múltiplo entero de π, menos cero dado que si vale cero la función resulta en una indeterminación.
Para mostrar esto de forma analítica, se deriva la función igualándola a cero:

$$\frac{2\cdot\sin(\beta)\cdot\cos(\beta)}{\beta^2} - \frac{(\sin(\beta))^2}{\beta^3} = \frac{2\beta\sin(\beta)\cos(\beta) - \sin(\beta)^2}{\beta^3} = 0 \tag{45}$$

Y por lo explicado anteriormente $\beta \neq 0$, entonces:

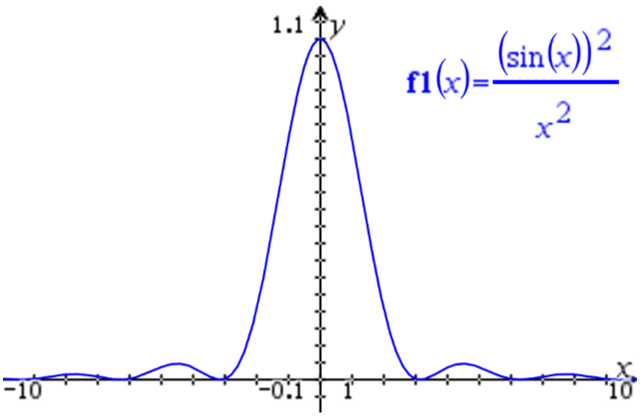
$$2\beta\sin(\beta)\cos(\beta) - \beta\sin^2(\beta) = 0 \Leftrightarrow \sin(\beta)[\cos(\beta)\cdot\sin(\beta)] = 0 \tag{46}$$

$$\Leftrightarrow \sin(\beta) = \theta \vee \cos(\beta) \cdot \sin(\beta) = 0 \tag{47}$$

$$\begin{aligned} &\cos(\beta) \cdot \sin(\beta) = 0 \Leftrightarrow \cos(\beta) = 0 \vee \sin(\beta) = 0 \\ &=> \beta = n \cdot \pi \end{aligned} \tag{48}$$

Por otra parte, la función alcanzara su valor máximo en uno, que es el valor máximo que puede alcanzar el seno.

A continuación se puede ver un gráfico de la función donde se puede apreciar tanto el máximo como los mínimos mencionados.



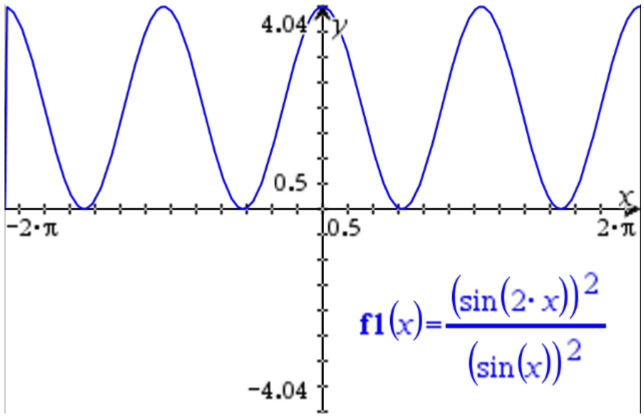
El segundo factor de la función corresponde a la interferencia:

$$\frac{\text{sen}^2\left(N_r \alpha\right)}{\text{sen}^2(\alpha)} \tag{49}$$

con N el número de rendijas, en este caso 2.
De la misma forma que para la difracción, los extremos se pueden hallar de forma analítica derivando la función e igualándola a cero:

$$\begin{aligned} &-8 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \cos(\alpha) = 0 \vee \sin(\alpha) = 0 \\ &=> \alpha = n \cdot \pi \end{aligned} \tag{50}$$

Por lo que los extremos de la función se dan para múltiplos enteros de π, a continuación se puede ver un gráfico de la función:



10.2.

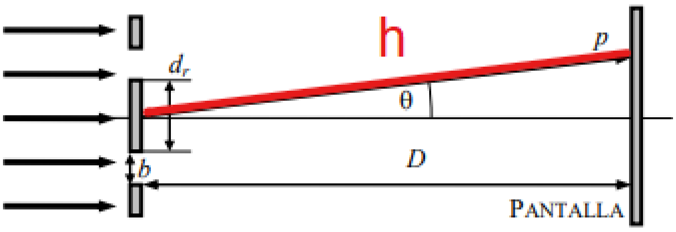
Como se mencionó en el ítem anterior, el término de la función que corresponde a difracción es:

$$\frac{\mathrm{sen}^2(\beta)}{\beta^2} \tag{51}$$

Este término puede ser despreciado y no aportará nada cuando su valor sea 1. Esto sucede cuando el valor de la longitud de onda de la luz es considerablemente mayor al ancho de las ranuras. Esto es, cuando las ranuras no se comportan como fuentes puntuales si no que tienen cierto ancho.

10.3.

A partir del diagrama del enunciado:



Se puede observar que:

$$\sin(\theta) = \frac{y_p}{h} \tag{52}$$

siendo y_p, la posición del punto p.

Por otra parte, $h = \sqrt{D^2 + y_p^2}$. Así, queda:

$$\sin(\theta) = \frac{y_p}{\sqrt{D^2 + y_p^2}} \tag{53}$$

De esta forma, una expresión para la intensidad obtenida en el punto p en función de los datos del problema y de la posición de p en la pantalla es:

$$I = I_0 \frac{\sin^2(\beta)}{\beta^2} \frac{\sin^2(N_r \alpha)}{\sin^2(\alpha)} \text{ con } \begin{cases} \alpha = d_r \frac{\pi}{\lambda} \frac{y_p}{\sqrt{D^2+y_p^2}} \\ \beta = b \frac{\pi}{\lambda} \frac{y_p}{\sqrt{D^2+y_p^2}} \end{cases} \tag{54}$$

10.4.

Para la interferencia los máximos se dan cuando:

$$d \operatorname{sen} \theta = n\lambda \tag{55}$$

Mientras que los mínimos se dan cuando:

$$d \operatorname{sen} \theta = n\frac{\lambda}{N} \tag{56}$$

Siendo:

- d: distancia entre las fuentes
- θ: ángulo formado en la pantalla
- n: número de máximo o mínimo
- N: cantidad de fuentes puntuales.

Como se puede observar, cuanto mayor sea la distancia entre las ranuras, menor sera el seno del ángulo que marca la posición del máximo/mínimo.
Respecto a λ, la relación es inversa a la de la distancia, dado que cuanto mayor sea el valor de la longitud de onda, mayor sera el seno del ángulo.

10.5.

Las franjas brillantes ocurren cuando se producen los máximos de interferencia, mientras que las franjas oscuras aparecen cuando se producen los mínimos. Tomando que los máximos de interferencia se obtienen como

$$y_{max} = \frac{n\lambda D}{d} \tag{57}$$

y los mínimos, como

$$y_{min} = \frac{(n - \frac{1}{2})\lambda D}{d} \tag{58}$$

la distancia entre dos franjas brillantes consecutivas sera la resta entre un máximo que llamaremos n y su siguiente, n+1. Entonces, obtenemos:

$$y_{n+1} = \frac{(n+1)\lambda D}{d} \tag{59}$$

$$y_n = \frac{n\lambda D}{d} \tag{60}$$

$$y_{n+1} - y_n = \frac{(n+1)\lambda D}{d} - \frac{n\lambda D}{d} = \frac{(n+1-n)\lambda D}{d} = \frac{\lambda D}{d} \tag{61}$$

Hacemos lo mismo con los mínimos:

$$y_{n+1} = \frac{((n+1) - \frac{1}{2})\lambda D}{d} \tag{62}$$

$$y_n = \frac{(n - \frac{1}{2})\lambda D}{d} \tag{63}$$

$$y_{n+1} - y_n = \frac{\lambda D}{d} \tag{64}$$

Podemos notar que la distancia entre maximos y minimos no depende de n(es decir, el numero de franja). A su vez podemos ver que las expresiones son equivalentes.

11. Pregunta 11

Las velocidades de grupo y de fase se definen como:

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} \tag{65}$$

$$V_f = \frac{\omega}{k} \tag{66}$$

11.1.

En el caso de una relación de dispersión definida por $\omega = ck$ tanto la velocidad de fase como de grupo serán iguales a la velocidad de la luz (c).

$$\begin{gathered} V_g = \tfrac{d\omega}{dk} = c \\ V_f = \tfrac{\omega}{k} = c \\ V_f = V_g \end{gathered} \tag{67}$$

11.2.

Ahora analicemos el caso de una relación de dispersión definida por $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + (ck)^2}$ Reacomodando un poco la ecuación tenemos que

$$\omega^2 = \omega_0^2 + c^2k^2 \tag{68}$$

Y si derivamos a ambos lados

$$2\omega d\omega = 2c^2kdk \tag{69}$$

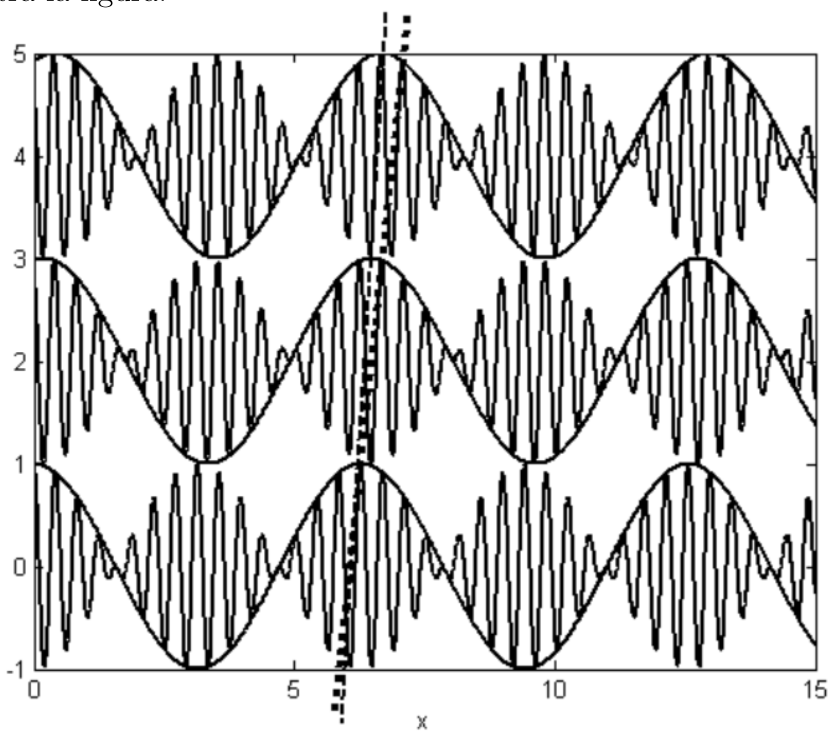
$$(\frac{w}{k})(\frac{dw}{dk}) = c^2 \tag{70}$$

Finalmente reemplazando obtenemos la relación

$$V_fV_g = c^2 \tag{71}$$

11.3.

En un medio dispersivo donde dos ondas se propagan a velocidades diferentes, la superposición de estas va a producir una onda envolvente sobre un conjunto de ondas como muestra la figura.



El grupo de ondas se moverá a una velocidad llamada velocidad de fase, mientras que la onda envolvente va a moverse a distinta velocidad (velocidad de grupo). Por ende también tendrán longitudes de onda distintas. La relación entre estas dos velocidades va a quedar determinada por la relación de dispersión.

En el primer caso donde tanto la velocidad de fase como la de grupo son iguales a la velocidad de la luz, se trata de radiación electromagnética en el vacío. Esto sucede siempre que ω sea directamente proporcional a k, y ocurre en medios no dispersivos.

En el segundo caso las velocidades no son iguales, por lo que la forma de la onda se distorsiona a medida que se propaga.