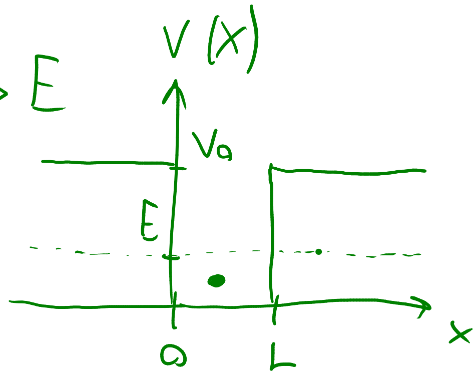
1) Pozo de potencial, $V_0 > E$



$$V(x) = \begin{cases} 0 & x \in (0, L) \\ V_0 & \text{else} \end{cases}$$

a) Formular $\Psi(x,t) \quad \forall x$

- Se define la ec. de schrödinger en una dimensión

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x) \cdot \Psi(x,t) = i \cdot \hbar \cdot \partial \Psi(x,t) \quad (1)$$

- Potencial de energía V no depende del tiempo.
  => Se plantea $\Psi(x,t)$ por separación de variables

$$\Psi(x,t) = \varphi(x) \cdot Z(t) \quad (2)$$

- Reemplazo (2) en (1) y distribuyo

$$\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} + V(x)}_{(3)} = \underbrace{i\hbar \cdot \frac{Z'(t)}{Z(t)}}_{(4)} = \text{Constante} = E$$

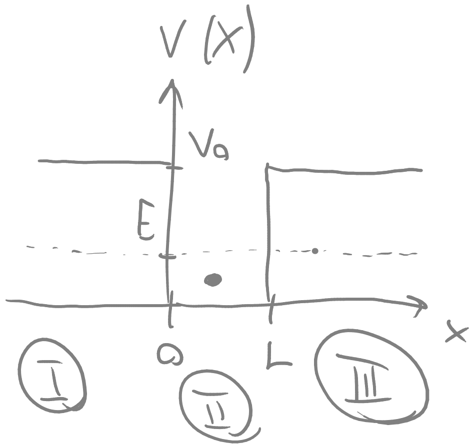
- Resuelvo (4):

$$Z'(t) = Z(t) \cdot \frac{E}{i\hbar} \Rightarrow \underline{Z(t) = e^{\frac{E}{i\hbar} \cdot t} = e^{-i \cdot \frac{E \cdot t}{\hbar}}}$$

• Clásicamente, no habría sol fuera del pozo pues $V_0 > E$

• Para encontrar una expresión (*) en la cuántica, divido el área en tres secciones.

(*) para $\varphi(x)$



• Comenzando por la región II: Donde $V(x) = 0$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \varphi_{II}''(x) = E \cdot \varphi_{II}(x)$$

$$\Rightarrow \varphi_{II}''(x) + \frac{2m \cdot E}{\hbar^2} \cdot \varphi_{II}(x) = 0$$

• Propongo $\varphi_{II}(x) = e^{\alpha x}$

$$\frac{\partial^2 e^{\alpha x}}{\partial x^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \cdot e^{\alpha x} = 0 = e^{\alpha x} \overbrace{\left(\alpha^2 + \frac{2mE}{\hbar^2} \right)}^{=0}$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \frac{2mE}{\hbar^2} = 0 \Rightarrow \alpha = \pm i \underbrace{\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}}_{= K}$$

• Y por el ppio de superposición:

$$\varphi_{II}(x) = A \cdot e^{ikx} + B \cdot e^{-ikx}$$

• Resuelvo ahora φ para la región I $\quad (V(x) = V_0)$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \varphi_I''(x) - (E - V_0) \cdot \varphi_I(x) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi_I''(x) + (E - V_0) \cdot \frac{2m}{\hbar^2} \cdot \varphi_I(x) = 0$$

• Nuevamente propongo $\varphi_I(x) = e^{\beta x}$

$$\frac{\partial^2 e^{\beta x}}{\partial x} + (E - V_0) \cdot \frac{2m}{\hbar^2} \cdot e^{\beta x} = 0 = e^{\beta x} \left(\beta^2 + (E - V_0) \cdot \frac{2m}{\hbar^2} \right)$$

$$\Rightarrow \beta^2 + \underbrace{(E - V_0)}_{<0} \cdot \frac{2m}{\hbar^2} = 0$$

$$\Rightarrow \beta^2 = \underbrace{(V_0 - E)}_{>0} \cdot \frac{2m}{\hbar^2} \Rightarrow \beta = \sqrt{(V_0 - E) \cdot \frac{2m}{\hbar^2}}$$

• Y por el ppio de sup:

$$\varphi_I(x) = C \cdot e^{\beta x} + D \cdot e^{-\beta x}$$

• Como $\Psi(x,t)$ debe ser acotada / $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,t)|^2 \cdot dx = 1$, es necesario que $D = 0$.

$$\Rightarrow \underline{\varphi_I(x) = C \cdot e^{\beta x}}$$

• La Función $\varphi(x)$ en la región III es un proceso análogo al anterior, por tener el mismo potencial.

$$\varphi_{III}(x) = F \cdot e^{\beta x} + G \cdot e^{-\beta x}$$

• Nuevamente, como $\Psi(x,t)$ es acotada, es necesario que $F = 0$

$$\Rightarrow \underline{\varphi_{III}(x) = G \cdot e^{-\beta x}}$$

• Con la expresión de φ en las tres regiones, y la expresión de Z, quedó definido $\Psi(x,t)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Psi(x,t) = \varphi(x) \cdot Z(t)$$

b) De ahora en más $V_0 = \infty$. Hallar coeficientes

• Como $V_0 = \infty$, la probabilidad de que la partícula esté en I o en III es nula.

$$\Rightarrow C = 0 , \quad G = 0$$

• Se plantean las condiciones de borde.

$$\rightarrow \varphi(0) = A + B = 0 \Rightarrow B = -A$$

$$\rightarrow \varphi(L) = A \cdot e^{ikL} - A \cdot e^{-ikL} = 0$$

$$= A\left(e^{ikL} - e^{-ikL}\right)$$

$$= 2 \cdot A \cdot \underbrace{\operatorname{Sen}(kL)}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \quad kL = n \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad k = \frac{n \cdot \pi}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

c) Mostrar que la consecuencia es la cuantif. de la energía. Hallar valores de E. ¿En qué difiere con el res. clásico?

- k se igualó a dos cosas

$$k = \frac{n \cdot \pi}{L} = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{n^2 \cdot \pi^2}{L^2 \cdot 2 \cdot m} \cdot \hbar^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

d) Hallar la frecuencia de onda asociada

- Es aquella asociada a $Z(t)$:

$$Z(t) = e^{-i \boxed{\frac{E}{\hbar}} t} \quad \Rightarrow \quad \text{Frecuencia } \omega = \frac{E}{\hbar}$$

- Reemplazando con los posibles E encontrados:

$$\omega = \frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot \hbar}{L^2 \cdot 2 \cdot m}$$

e) Escribir la ec. de onda de $\Psi(x,t)$ calculando todos sus coef.

• Ya resuelto

$$\Psi(x,t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n \cdot \pi}{L} \cdot x\right) \cdot e^{-i \cdot \frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot \hbar}{2 m \cdot L^2} \cdot t} \quad , \quad x \in [0, L]$$

F) Hallar y graficar la densidad de probabilidad para $n = 1, 2, 3$

• La densidad de prob. está dada por:

$$P(x) = \Psi(x,t) \cdot \overline{\Psi(x,t)}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n \cdot \pi}{L} \cdot x\right) \cdot \cancel{e^{-i \cdot \omega \cdot t}} \cdot \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n \cdot \pi}{L} \cdot x\right) \cdot \cancel{e^{i \omega t}}$$

$$= \frac{2}{L} \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{n \cdot \pi}{L} \cdot x\right)$$