

Física IIID Ayuda para preparar los temas:

I. Relatividad Transformaciones de Lorentz Dinámica
II. Naturaleza cuántica Introducción fotooléctrico , rayos X y Compton
III. Estructura atómica Primeras ideas Modelo de Rutherford Modelo de Bohr Ley de Moseley
IV. Ondas de materia Hipótesis de Broglie Comprobación experimental Concepto de partícula Hipótesis de Broglie y modelo atómico de Bohr Paquetes de ondas Paquetes de ondas en función de x y t Interpretación de la función de onda Principio de incerteza de Heisenberg Consecuencias
V. ECUACIÓN SCHRÖDINGER Expectación y operadores Ecuación de Schrödinger en 1D Principio superposición Estados cuánticos Ecuación de Schrödinger independiente de t Condiciones para $\psi(x)$ CASO Potencial escalón CASO Pozo Potencial Niveles discretos CASO Barrera Potencial CASO Potencial elástico, ejemplo V no <i>constante</i> .
VI ATOMOS Ecuación de Schrödinger para el átomo de hidrógeno. Significado físico de los resultados. Spin del electrón. La tabla periódica.
VII ELECTRONES LIBRES EN SÓLIDOS Modelo clásico, modelo cuántico
VIII. ELECTRONES EN UN POTENCIAL PERIÓDICO. Teoría de bandas en sólidos. Semiconductores
IX. JUNTURA P-N. DIODO. (VA A CHARLAS)

Se propone dar sugerencias para la lectura de los temas que se abordan en la materia.

El repaso de ondas ya realizado es esencial para poder trasladarlo a la mecánica cuántica aplicada a partículas.

Utilizaremos para los temas I a VI como base el libro

- **Física Moderna; P.A. Tipler (Ed. Reverte, Buenos Aires). (pg. WEB)** Lo que nos permitirá tener un lenguaje común. Sin embargo, cuando sea necesario, utilizar los textos sugeridos para mejorar la comprensión de los temas. Por ejemplo:
- **Physics for Computer Science Students; N. Garcia y A. Damask (Ed. Springer Verlag, N.Y) (pg. WEB).** también discute estos temas.

Este documento no es autocontenido, es solo una ayuda para poner en evidencia los conceptos más relevantes al tema en estudio.

A lo largo del texto encontrarán **frases en rojo** en las que se pide realicen alguna actividad.

I. Mecánica relativista

Ver Cap 1 y 2 de Tipler (1.1 a 1.3, 2.1 y 2.2)

Este es un resumen que pretende mostrar qué motivó la aparición de una mecánica relativista. Dar las ecuaciones relevantes surgidas a partir de esta teoría.

Antecedentes

1) Mecánica clásica de Galileo y Newton (aprox. Año 1600)

Dados dos sistemas de referencia S y S' (moviéndose con velocidad constante v , relativo a S), la posición de una partícula ubicada en P , medida por ambos sistemas (con orígenes O y O') será (x, y, z) (x', y', z') respectivamente. (Fig.1) y se transforman según las transformaciones de Galileo:

$$x' = [x - vt]; \quad y' = y; \quad z' = z \quad \text{y por supuesto } t' = t; \quad (\text{ec.1})$$

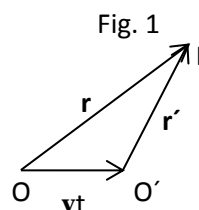
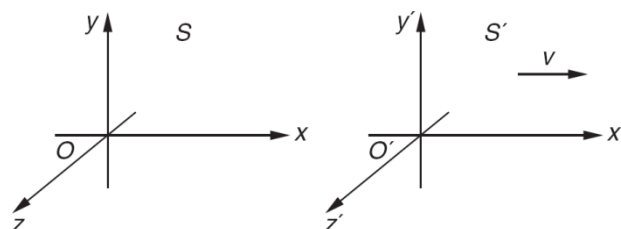
derivando se obtienen las componentes de la velocidad de la partícula (u'_x, u'_y, u'_z) en función de (u_x, u_y, u_z)

$$u'_x = [u_x - v]; \quad u'_y = u_y; \quad u'_z = u_z; \quad (\text{ec.2})$$

Notación: utilizamos \vec{u} para la velocidad de la partícula medido por el sistema S , reservamos “ v ” como la velocidad del sistema de referencia S' medido por S

derivando se obtienen las aceleraciones.

$$a'_x = a_x; \quad a'_y = a_y; \quad a'_z = a_z \quad (\text{ec.3})$$



Multiplicando por m (masa de la partícula) se obtiene que \mathbf{F} es independiente del sistema inercial y representa la suma de interacciones sobre el sistema. Entonces:

- El principio de relatividad de Galileo establece que todos los sistemas de referencia inerciales son equivalentes.
- $\vec{F} = m\vec{a}$ es la ecuación fundamental. La suma de todas las interacciones determina la aceleración que sufre una partícula. (Notar que esta relación no depende de la velocidad v del sistema de referencia).

2) Teoría de Maxwell del campo electromagnético. Aparece c (la velocidad de la luz en el vacío). Si lo comparo con el punto 1) tendría que modificar esta velocidad según el sistema de referencia utilizado!!!!

Si se construyera un análogo al sonido pensaríamos que las velocidades del sonido, fuente o detector deben estar referidas a un medio, por ejemplo el aire. Entonces para la velocidad de la luz debieran encontrar el medio equivalente.

El espectrómetro de Michelson* permitió descartar la existencia de un medio para la luz. Las conclusiones finales llevaron a las conclusiones:

- Las ecuaciones de Maxwell son válidas en todos los sistemas inerciales.
- El principio de relatividad de Galileo también es válido para el electromagnetismo.
- La velocidad de la luz c = constante en todos los sistemas inerciales.

Einstein concluye que estas son evidencias experimentales. Lo que no vale son las transformadas de Galileo, en particular $t \neq t'$, choca con la intuición pero no viola ningún experimento.

**El espectrómetro de Michelson (año 1881) sistema con alta resolución para medir diferencias en longitudes, del orden de la longitud de onda de la fuente utilizada. Con cierta similitud con los experimentos de interferencia en que se basa en generar diferencias de caminos ópticos de modo de obtener patrones de interferencia en los que se tiene la información de la longitud a medir.)*

Postulados de Einstein

- I) Las leyes de la electrodinámica y la mecánica son las mismas en todos los sistemas inerciales. (principio de relatividad de Galileo)
- II) Para cualquier observador la luz se propaga **en el vacío con velocidad “c”** independiente del estado de movimiento del emisor.

A partir de estos postulados se construyen las nuevas transformaciones, las que deben cumplir con las condiciones:

- a) Cumplir con los postulados de Einstein
- b) Reducirse a las transformaciones de Galileo para velocidades bajas relativas a la velocidad de la luz ($v/c \ll 1$)
- c) Ser lineales

Con estas condiciones se obtienen las

Transformadas de Lorentz

$$x' = \gamma[x - vt]$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma[t - x \frac{v}{c^2}] \quad \text{donde } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \text{ con } \beta = v/c \quad (\text{ec.4})$$

Con v velocidad de S' respecto de S ; por ende $(-v)$ velocidad de S respecto de S' .

Notar que el tiempo no transcurre igual en los dos sistemas de referencia S y S'

Derivando se obtienen las componentes de la velocidad de la partícula (u'_x, u'_y, u'_z) en función de (u_x, u_y, u_z).

Derivando las velocidades se obtienen las aceleraciones (a'_x, a'_y, a'_z) en función de (a_x, a_y, a_z).

Notar que si se quiere la transformación inversa basta con cambiar v por $-v$ en las ecuaciones. En particular γ (gamma) queda sin cambio.

Notar que no pueden existir velocidades superiores a la velocidad de la luz.

Notar que para bajos valores de velocidad se recuperan las transformaciones de Galileo.

Magnitudes típicas de velocidad

	m/s	$\beta=v/c$
Reptar de caracol	10^{-3}	3.33×10^{-12}
caminata	2	6.67×10^{-9}
Caminata rápida	11	3.67×10^{-8}
Carrera de leopardo	35	1.17×10^{-7}
Auto rápido	340	1.13×10^{-6}
Movimiento de moléculas en aire	500	1.67×10^{-6}
Avión más rápido	1000	3.33×10^{-6}
Satélite en órbita	3000	1.00×10^{-5}
Microscopio de He		2×10^{-5}
Electrón en un átomo de hidrógeno	2×10^6	6.67×10^{-3}
Partícula alfa	1.5×10^7	5.00×10^{-2}
SEM ⁽¹⁾		0.11
HRTEM ⁽²⁾		0.61
neutrino		$1 - 4 \times 10^{-12}$
Luz en el vacío	3×10^8	1

(1) Scanning electron microscope (Microscopio electrónico de barrido)

(2) High resolution electron microscope (Microscopio electrónico de alta resolución)

Tabla 1

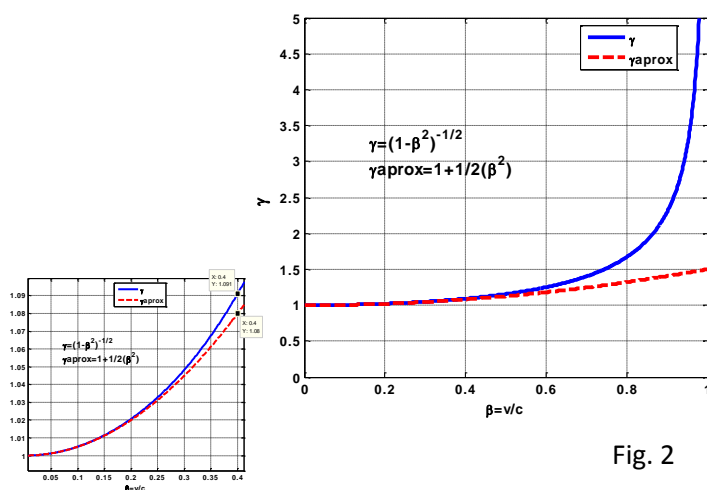


Fig. 2

Para analizar el comportamiento a bajas velocidades se puede observar que si $v=0$, $\gamma=1$. Pero normalmente las velocidades en las que estamos habituados a trabajar, son bajas, no cero (ver cuadro de valores típicos).

En la Fig 2 se grafica γ vs. $\beta=v/c$ y en línea punteada una aproximación en serie de Taylor a primer orden en un entorno del cero. En el detalle de la figura anexa se puede ver que para, por ejemplo, $\beta < 0.4$ el error relativo porcentual es menor al 1%. Si $\beta > 0.8$ el error relativo porcentual es mayor al 21%.

Volviendo a la transformación para las velocidades, se obtiene:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}; \quad u_y = \frac{u'_y}{\gamma(1 + \frac{v}{c^2} u'_x)}; \quad \text{idem } u_z \text{ cambiando } y \text{ por } z \quad (\text{ec.5})$$

A partir de la (ec.4) Hallar la transformación de velocidades (ec.5)

Volviendo a la transformación para las aceleraciones, se obtiene:

$$a_x = \frac{a'_x}{\gamma^3(1 + \frac{v}{c^2} u'_x)^3}; \quad a_y = \frac{1}{\gamma^2(1 + \frac{v}{c^2} u'_x)^2} [a'_y - \frac{\frac{v}{c^2} u'_y}{(1 + \frac{v}{c^2} u'_x)} a'_x]; \quad \text{idem } a_z \text{ cambiando } y \text{ por } z \quad (\text{ec.6})$$

Multiplicando por la masa como en (ec.3) no se cumple el principio de relatividad de Galileo!!. Hay que reformular la definición de fuerza.

$$\text{Por otro lado de la mecánica clásica } \vec{p} = m\vec{u} \quad \text{y} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad (\text{ec.7})$$

Con esta definición de \vec{p} no satisface que si la suma de las interacciones es cero ($\vec{F}=0$), \vec{p} se conserva. Hay que reformular la definición de \vec{p} .

Ver razonamiento en torno a la Fig 2.1 del Tipler.

Dinámica relativista (cap.2 del Tipler)

Esta situación se resuelve redefiniendo \vec{p} de modo que siga siendo paralelo a \vec{u} pero multiplicada por una función escalar de \vec{u} ($\vec{p} = f(u)\vec{u}$). Con esta propuesta se resuelve la conservación de \vec{p} con solución:

$$\vec{p} = m(u)\vec{u} \quad \text{con } m(u) = m\gamma(u) \quad (m \text{ es la masa en reposo}) \quad (\text{ec.8})$$

$$\gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad \beta = u/c \quad (\text{ec.9})$$

Como conclusión importante se obtiene que la masa de la partícula aumenta con su velocidad u .

Notar que de ahora en más trabajaremos dentro de un mismo sistema de referencia por lo que v (velocidad de S' respecto de S) ya no entra en nuestros cálculos. La función gama es la misma pero depende de la velocidad de la partícula u . Por lo que el gráfico de la Fig. 2 nos representa el cambio relativo de masa respecto de la masa en reposo, debido al aumento de β , que ahora es u/c .

Entonces nuestra nueva ecuación de Newton se convierte en:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\gamma(u)\vec{u})}{dt} \quad (\text{ec.10})$$

a) Graficar $P=p/mc$ en función de $\beta(u)=u/c$

Nota: es muy útil graficar en función de magnitudes adimensionales esto torna a la curva universal ya que en este caso escribimos la velocidad de la partícula en términos de la velocidad de la luz (esta es β) y el momento de la partícula en unidades de mc (el resultado resulta independiente de la masa en reposo de la partícula)

Ejemplo: Si entonces lo queremos particularizar para un electrón, supongamos que para $\beta=0.8$ nos da $P/mc=1.333$, encontraremos que $p_e=1.333*m_e c$ con $m_e=9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$; $c=3 \times 10^8 \text{ m/s}$

b) Hallar una aproximación a primer orden y a tercer orden para P (desarrollo de Taylor). Graficarlas junto con P sin aproximar (punto a)

¿Cuál de estas aproximaciones corresponde al caso no relativista?

c) Para un electrón generado en un microscopio electrónico de alta resolución (ver tabla 1) evaluar el error relativo porcentual que se comete al evaluar P clásicamente (no relativista).

Ayuda: Adjunto unas líneas en Matlab para graficar las tres funciones pedidas.

```
b=0:1/1000:1;
P=b./(1-b.^2).^(.5);
P2=b;
P3=b.*(1+.5*b.^2);
figure
plot(b,P,b,P2,b,P3)
```

Energía

Teniendo resuelta la expresión para \vec{F} , podemos calcular el cambio en la energía cinética al ir de un punto inicial a uno final, a partir del trabajo realizado sobre la trayectoria que une esos puntos.

$$\Delta T = T - T_0 = \int_{\text{trayectoria}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\text{trayectoria}} \frac{d(m\gamma(u)\vec{u})}{dt} \cdot d\vec{s} \quad (\text{ec.11})$$

Operando y partiendo de $T_0=0$ se obtiene:

$$T = (\gamma - 1)mc^2 = (\gamma - 1)E_0 \quad (\text{ec.12})$$

$T = \text{energía cinética}; E_0 = \text{energía en reposo} = mc^2$

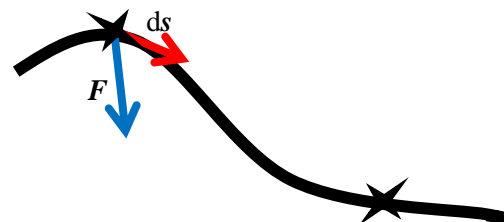


Fig. 3

Notar que la energía cinética depende de la velocidad a partir de $\gamma(u)$. En la Fig.4 se grafica la energía cinética adimensionalizada con la energía en reposo vs la velocidad de la partícula ($\beta=u/c$) adimensionalizada con la velocidad de la luz. En línea punteada se grafica la misma función (T/mc^2), si el cálculo se hiciera clásico, en función de $\beta=u/c$.

Notar que el resultado relativista otra vez fija un límite para la velocidad accesible por la partícula. Que el resultado clásico y el relativista son muy similares para bajas velocidades. ¿Qué es baja o no? depende del error que estemos dispuestos a tolerar en nuestros cálculos. Precisamente en el segundo gráfico de la Fig.4 se registra el error porcentual que se comete al utilizar el cálculo clásico (T_c) en vez del relativista (T_r).

Notar también que la curva punteada sobrepasa $\beta=1$.

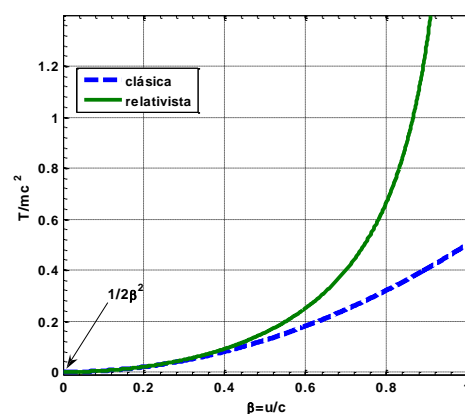
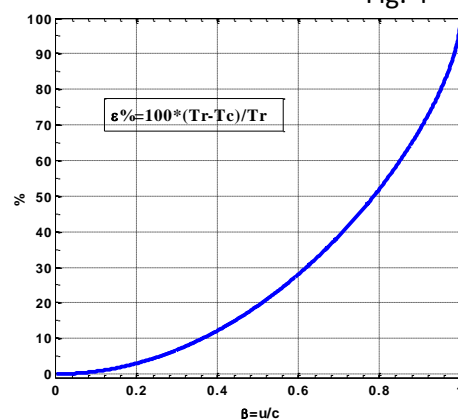


Fig. 4

La Fig.5 es el mismo gráfico que el de la Fig.4 pero con los ejes invertidos (absisa T/mc^2 , ordenada: $\beta=u/c$). Lo relevante de esta curva es que los puntos son resultados experimentales realizados con electrones sometidos a distintas velocidades en un acelerador de partículas, en un rango que va desde $0.86c$ hasta valores muy próximos a c . Notar que los datos experimentales no pueden ser correlacionados con la predicción no relativista.

Se pueden ver más detalles en:

Bertozzi, W. (1964). "Speed and Kinetic Energy of Relativistic Electrons". *American Journal of Physics*, 32(7), 551–555. doi:10.1119/1.1970770



Finalmente, definiendo $E = \text{energía}$ como la suma de la energía cinética, ganada por el trabajo de las fuerzas, + su energía en reposo, queda:

$$E = T + E_0 = \gamma(u)mc^2 = \gamma E_0; \quad (\text{ec.13})$$

$T = \text{energía cinética}; E_0 = \text{energía en reposo} = mc^2$

El trabajo que realiza la fuerza incrementa la energía en reposo mc^2 a γmc^2 .

Se puede inferir entonces que la energía en reposo puede convertirse en cinética y viceversa.

Relación útil:

Operando algebraicamente puede relacionarse el módulo de la cantidad de movimiento con la energía. Para mecánica no relativista teníamos $T = p^2/2m$.

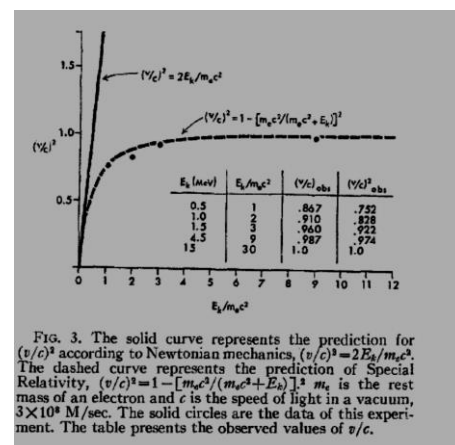


FIG. 3. The solid curve represents the prediction for $(v/c)^2$ according to Newtonian mechanics, $(v/c)^2 = 2E_0/m_0c^2$. The dashed curve represents the prediction of Special Relativity, $(v/c)^2 = 1 - [m_0c^2/(m_0c^2 + E_0)]^2$. m_0 is the rest mass of an electron and c is the speed of light in a vacuum, 3×10^8 M/sec. The solid circles are the data of this experiment. The table presents the observed values of v/c .

Fig. 5

* The experiment was performed at the Electron Linear Accelerator facility of the Laboratory for Nuclear Science, MIT.

A partir de ec.13 tenemos:

$$E^2 - p^2 c^2 = \gamma^2 E_0^2 (1 - u^2/c^2) = E_0^2$$

Queda entonces:

$$E^2 = E_0^2 + p^2 c^2 \quad (\text{ec.15})$$

Las ecuaciones 8 a 15 serán utilizadas en el curso cuando las condiciones energéticas sean tales que no se pueden usar relaciones no relativistas.

Para un electrón generado en un microscopio electrónico de alta resolución (ver tabla 1) evaluar el error relativo porcentual que se comete al evaluar T clásicamente (no relativista).

Criterios energéticos para usar relaciones no relativistas:

En la sección anterior usamos como criterio, el error que se tolera usando como comparación la velocidad de la partícula referida a la velocidad de la luz. Es más frecuente encontrar datos de energías cinéticas, en cuyo caso es más práctico realizar la comparación con la energía en reposo de la partícula en estudio. Partiendo de la (ec.15) tenemos:

$$p^2 c^2 = E^2 - E_0^2 = (T + E_0)^2 - E_0^2 = T(T + 2E_0)$$

Sea

$$x = T / (2E_0) \ll 1 \quad \text{La energía cinética es pequeña comparada con su energía en reposo.}$$

queda

$$p^2 c^2 = 2E_0 T = 2mc^2 T$$

Y recuperamos la expresión no relativista $T = p^2 / 2m$

Esta es una aproximación a ojo, para más precisión realizar un desarrollo en serie de Taylor.

Relaciones útiles

Constante	valor	unidad
c= velocidad de la luz en el vacío	$3,00 \cdot 10^8$	m /s
h= constante de Planck	$6,63 \cdot 10^{-34}$	J s
h= constante de Planck en eV s	$4,14 \cdot 10^{-15}$	eV s
h*c	1242	eV nm
$\hbar = h / 2\pi$ constante de Planck/ 2 pi en eV s	$6,58 \cdot 10^{-16}$	eV s
$\hbar c = hc / 2\pi$; c*constant de Planck/ 2 pi en eV nm	197	eV nm
$m_e c^2$ = Energía en reposo del electrón en MeV	0,511	MeV
Carga elemental	$1,60 \cdot 10^{-19}$	C
Masa del electrón	$9,11 \cdot 10^{-31}$	kg
e/m	$1,76 \cdot 10^{11}$	C/kg
$\lambda_c = h/m_e c$	$2,4 \cdot 10^{-12}$	m

$$1\text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{J}$$