

## Apéndice A

# Problemas resueltos

### Índice

A.1. Advertencia . . . . .	1
A.2. Problema 1: osciloscopio con doble BdeT . . . . .	2
A.3. Problema 2: compensador de sonda pasiva . . . . .	5
A.4. Problema 3: medición de tiempo de transición . . . . .	12
A.5. Problema 4: puente de resistencias . . . . .	14
A.6. Problema 5: cálculo de constantes de tiempo . . . . .	19
A.7. Problema 6: disparador de Schmitt . . . . .	23
A.8. Problema 7: medición de resistencia con V y A . . . . .	27
A.9. Problema 8: conversor AD doble rampa . . . . .	29
A.10. Problema 9: adaptación de un cable . . . . .	31
A.11. Problema 10: conexión en serie de voltímetros . . . . .	33
A.12. Problema 11: incertidumbre en medición CBM . . . . .	34
A.13. Problema 12: línea de transmisión discreta . . . . .	39
A.14. Problema 13: medición X-Y con ORC . . . . .	42
A.15. Problema 14: comparación de sondas . . . . .	46
A.16. Problema 15: medición indirecta de ancho de banda . . . . .	56
A.17. Problema 16: medición de resistencias . . . . .	61

### A.1. Advertencia

Se pide encarecidamente que el lector tenga presente:

1. La mayoría de los problemas presentados han formado parte de evaluaciones integradoras tomadas desde 2007, lo cual se indica antes del enunciado; otros (véase A.6 en pág. 19, A.13 en pág. 39, y A.15 en pág. 46) representan un interés intrínseco, y sirven para ilustrar ciertos cálculos más “exóticos”.
2. El objeto de este documento es ofrecer *orientación* al estudiante de la asignatura **Laboratorio 66.02**, respecto al enfoque dado a la *solución de problemas para examen*; no supone, ni implícitamente ni explícitamente, que la presentada es la única y correcta forma de resolver un problema.

3. El estudiante puede *organizar* los cálculos y análisis de la forma que le resulte más conveniente; la presentada es una de las tantas posibles, y no pretende ser la mejor.
4. Se hace énfasis en la forma adecuada de *representar los resultados numéricos* de una medición; se usa también una ligera licencia de notación: a veces no se escriben las unidades de medida en los cálculos, aunque sí se enuncian en forma comentada, por ejemplo "... (tensiones en mV; tiempos en  $\mu s$ ; ...) ...".
5. Queda sobreentendido que los *gráficos* que un estudiante puede dibujar en un examen no poseen la precisión y arte gráfica de los presentados aquí; se sugiere, no obstante, que el estudiante haga el mayor esfuerzo para que dichos gráficos sean prolijos, a fin de *servir efectivamente como herramienta de análisis para la solución*, y no meras "decoraciones"; la cantidad de gráficos presentada es escasa a sabiendas; se sugiere hacer la mayor cantidad de ellos, en la medida que contribuyan a la comprensión del enunciado del problema y de los puntos a responder.
6. Se incluyen comentarios y notas que no necesariamente son los que el estudiante debería incluir en su respuesta para el examen; su función es contribuir a la *comprensión del desarrollo de la solución*.
7. Se han presentado mayoritariamente problemas que ya han sido incluidos en evaluaciones integradoras pasadas; queda claro entonces que *es poco probable que sean tomados en futuros exámenes*; por lo tanto, no tiene la menor utilidad memorizar el material, sino más bien *alcanzar una cabal comprensión*.
8. Este material también se ha preparado para utilizarse como base para *presentar dudas al docente auxiliar* durante las clases de Trabajos Prácticos; ésta es una tarea muy importante; a pesar de ser problemas de examen, sirven para estudiar durante el curso, y también como apoyo al docente auxiliar en las actividades de dichas clases, generando eventualmente discusiones alrededor de algunos temas.
9. Aunque es probable que inicialmente el estudiante no lo perciba, los problemas hacen referencia siempre a *situaciones de medición reales*, o sea problemas de medición en el "mundo real"; se pide al estudiante que intente hacer esta vinculación conceptual, lo cual ayudará a una comprensión más completa del temario de la asignatura.

## A.2. Problema 1: osciloscopio con doble BdeT

(En Evaluación Integradora del 23-DIC-2008.)

**Enunciado** Se mide la señal de la Fig. A.1 usando un ORC<sup>1</sup>. La configuración del instrumento es:

1. Escala vertical: 0,2 V/div;

---

<sup>1</sup>ORC = Osciloscopio de Rayos Catódicos.

A.2. PROBLEMA 1: OSCILOSCOPIO CON DOBLE BDET

3

2. Nivel y pendiente de disparo:  $+0,1$  V, negativa;
3. Velocidad de barrido de la BdeT<sup>2</sup> primaria (BdeT “A”): 100 ns/div;
4. Ídem BdeT secundaria (BdeT “B”): 20 ns/div;
5. Demora de la BdeT “B” respecto a la BdeT “A”: 25 % del tiempo de barrido de la BdeT “A”.

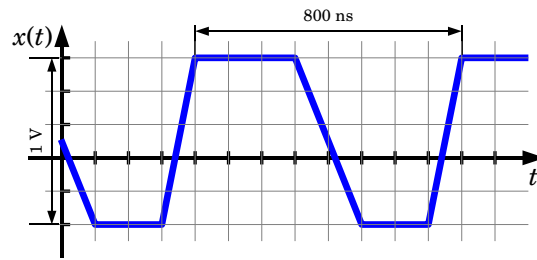


Figura A.1: Señal  $x$  que se quiere medir en el Prob. A.2.

Dibujar en correcta escala:

1. La imagen obtenida en la pantalla del ORC cuando “A” está intensificado por “B”;
2. Un gráfico con tres señales para comparar:
  - a) La señal medida (indicando nivel e instante de disparo),
  - b) La diente de sierra de “A”, y
  - c) La diente de sierra de “B”;

NOTA: en 2b y 2c la escala vertical puede ser arbitraria.

**Solución** Se deben hacer algunas observaciones iniciales.

- No se especifica cómo se acopla la señal; esto puede deducirse aproximadamente del dibujo (véase la Fig. A.2); la imagen en la pantalla sería distinta si se acoplara en CA<sup>3</sup>, dado que el valor medio quedaría “descartado”; el valor medio de la señal es 0,1625 V (este cálculo no es necesario para la resolución del problema).
- No se especifica la forma de la grilla en la pantalla; se supondrá que es la estándar: 10 div horizontales, 8 div verticales; cada div a su vez dividida en 5 partes (c/u, 0,2 div).
- No se indica si la señal es periódica (la parte visible en pantalla podría ser una pequeña región de una señal más compleja); se adoptará la hipótesis más sencilla: el periodo de la señal es el indicado en la figura:  $T = 800$  ns =  $8 \times 10^{-7}$  s.

<sup>2</sup>BdeT = Base de Tiempo.

<sup>3</sup>CA = Corriente Alterna; CC = Corriente Continua.

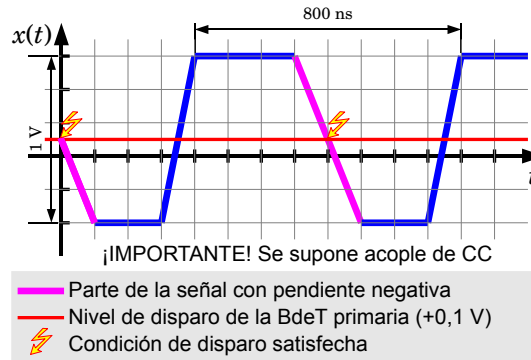


Figura A.2: Análisis de las condiciones de disparo para la señal  $x$  que se quiere medir en el Prob. A.2; se supone acople en CC, lo cual es coherente con el dibujo, siendo el “0” de medición coincidente con el eje de abscisas.

- Hay una serie de especificaciones del ORC que son habituales y que no se brindan, por ser innecesarias para la resolución del problema:  $AB^4$ , impedancia de entrada, etc..

El tiempo de barrido de “A” es:

$$t_{B1} = \underbrace{(10 \text{ div})}_{\text{hipótesis agregada}} \times \underbrace{(100 \text{ ns/div})}_{\text{dato del problema}} = 1 \mu\text{s};$$

es decir, la pantalla tiene un “ancho” de  $1 \mu\text{s}$ .

La demora en el inicio del barrido de “B” es:

$$t_D = \underbrace{25\%}_{\text{dato prob.}} \times \underbrace{1 \mu\text{s}}_{\text{cál. anterior}} = 250 \text{ ns};$$

es decir, el inicio del “barrido” de la BdeT secundaria ocurre 250 ns después de hacerlo la BdeT primaria.

El tiempo de intensificado es en realidad el tiempo de barrido de “B”:

$$t_{B2} = \underbrace{(10 \text{ div})}_{\text{hipótesis agregada}} \times \underbrace{(20 \text{ ns/div})}_{\text{dato del problema}} = 200 \text{ ns};$$

por lo tanto, en el modo “A int. B” la parte intensificada del trazo comienza en 2,5 div y “dura” 2 div; esto se muestra en la Fig. A.3.

Con esto se termina de responder la pregunta 1.

Las señales solicitadas en 2 se ven en la Fig. A.4.

Descripción de las mismas:

1. La señal  $x$  (gráfico superior) es la que está ingresando al canal vertical del ORC; como se supone que ésta se acopla en CC, cuando  $x$  toma el valor de disparo (+100 mV), y tiene pendiente negativa, se produce un evento de disparo; que dicho evento inicie efectivamente un barrido depende de

<sup>4</sup>AB = Ancho de Banda.

### A.3. PROBLEMA 2: COMPENSADOR DE Sonda PASIVA

5

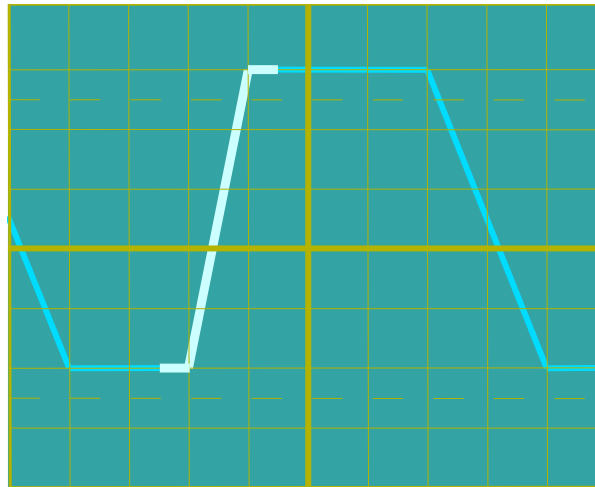


Figura A.3: Pantalla visible en el Prob. A.2. Escala vertical: 0,2 V/div (dato del problema); escala horizontal: 100 ns/div (dato del problema).

varias condiciones<sup>5</sup>, pero la más relevante es que no haya un barrido en progreso. En la figura se muestra que el primer evento inicia un barrido de “A”, mientras que el segundo evento, que ocurre un período después (800 ns), no, puesto que el barrido iniciado por el primer evento está en progreso. Cuando llega el tercer evento, el barrido y el retrazo ya han ocurrido, por lo que éste inicia efectivamente un barrido. En resumen, se tiene un barrido de “A” cada 1,6  $\mu$ s.

2. Dado que el tiempo de barrido de “A” es 1  $\mu$ s, la rampa de trazado de la DDS<sup>6</sup> dura éste tiempo desde la ocurrencia del evento de disparo; en todos los gráficos, se ha supuesto, ciertamente en forma arbitraria, que el retrazo dura 100 ns (tanto para “A” como para “B”). Del mismo modo, la duración de la rampa de trazado de “B” es 200 ns. Los tiempos de barrido están marcados en los gráficos de  $h_A$  y  $h_B$ .

### A.3. Problema 2: compensador de sonda pasiva

(En Evaluación Integradora del 23-DIC-2008.)

**Enunciado** Se tiene el esquema de medición de la Fig. A.5.

1. Antes de medir se ajusta el capacitor del compensador 2 para tener óptima respuesta transitoria. ¿Qué valor de capacitancia es necesaria?.
2. Luego se procede al ajuste del compensador 1. ¿Qué valor de capacitancia es necesaria?.
3. ¿Cuál es la atenuación *total* desde la punta de la sonda a la entrada del ORC?.

<sup>5</sup>Por ejemplo, posición del “hold-off”, modo de disparo, etc..

<sup>6</sup>DDS=Diente De Sierra.

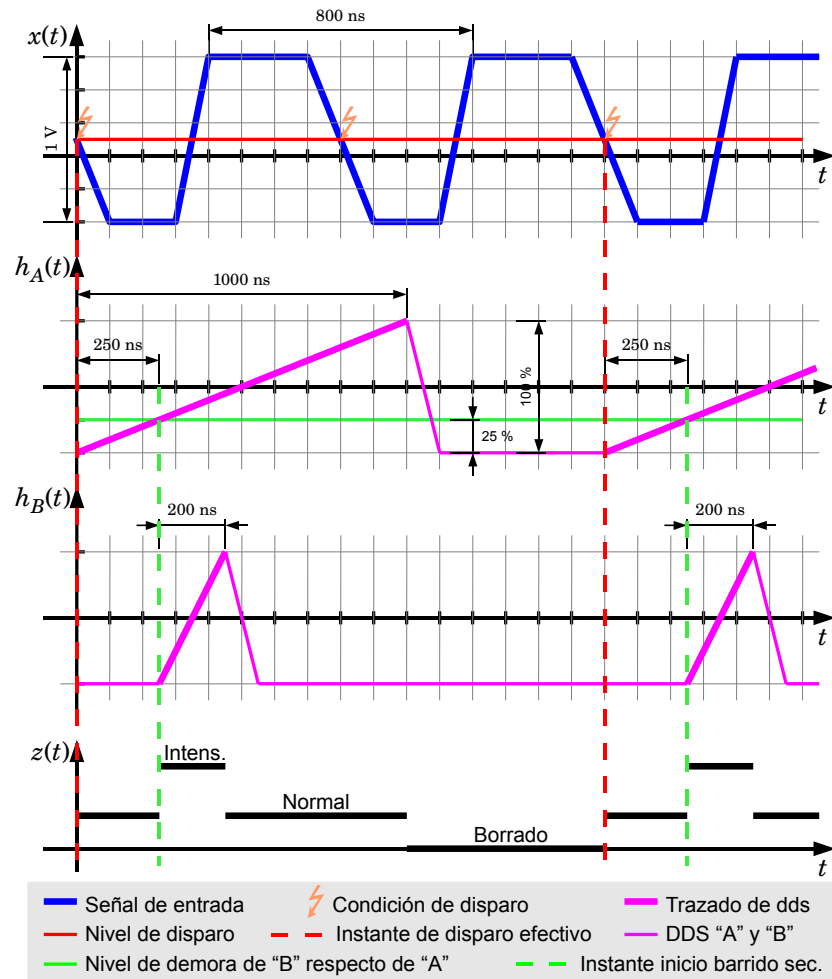


Figura A.4: Señal a medir  $x$ , DDS de barrido primario  $h_A$  y secundario  $h_B$ , e intensidad de trazo  $z$ , para el Prob. A.2.

A.3. PROBLEMA 2: COMPENSADOR DE Sonda PASIVA

7

4. Dibujar el modelo eléctrico *simplificado* de la impedancia “vista” por el generador.
5. Sabiendo que el TT<sup>7</sup> del generador es de 40 ns, y que el TT medido en la pantalla es de 60 ns, ¿cuál es el AB del ORC?
6. ¿Porqué es válido considerar al cable como un capacitor?.

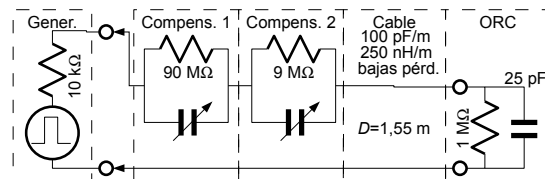


Figura A.5: Modelo de circuito de la medición del Prob. A.3.

**Solución** En primer lugar, se obtiene el modelo eléctrico del cable; se sabe que una descripción completa debería considerarlo como una línea de transmisión, pero antes debería comprobarse que un modelo más sencillo, representándolo como un capacitor, puede llegar a ser útil.

La capacitancia total del cable es:

$$C_{\text{cable}} = Dc = \underbrace{1,55 \text{ m} \times 100 \text{ pF/m}}_{\text{datos del problema}} = 155 \text{ pF},$$

y la velocidad de propagación de la onda de tensión o de intensidad de corriente es:

$$c = (cl)^{-\frac{1}{2}} = \left( \underbrace{100 \text{ pF/m} \times 250 \text{ nH/m}}_{\text{datos del problema}} \right)^{-\frac{1}{2}} = 2 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad (\text{A.1})$$

Se calcula un tiempo de referencia, igual al tiempo que tardaría la onda en hacer un “viaje” ida y vuelta por el cable:

$$t_{\text{ref}} = 2D/c = 2 \times \underbrace{1,55 \text{ m}}_{\text{dato del prob.}} / \left( \underbrace{2 \cdot 10^8 \text{ m/s}}_{\text{calc. en (A.1)}} \right) = 15,5 \text{ ns}$$

Si se sabe que el TT del generador,  $t_{Tg}$ , es mayor que  $t_{\text{ref}}$ , entonces la aproximación del cable por un capacitor es aceptable, y los errores en los cálculos son pequeños; en caso contrario, hay que trabajar con el modelo de línea de transmisión, lo cual convierte al problema en algo prácticamente intratable. En este problema, se pide un cálculo para  $t_{Tg} = 40 \text{ ns}$  (véase la pregunta 5); por lo tanto, se supondrá que el cable es equivalente con muy buena aproximación, a un capacitor cuya capacitancia es 155 pF.

Para responder la pregunta 1, se presenta el modelo eléctrico del compensador 2 y la entrada del ORC; esto se muestra en la Fig. A.6.

<sup>7</sup>TT = Tiempo de Transición.

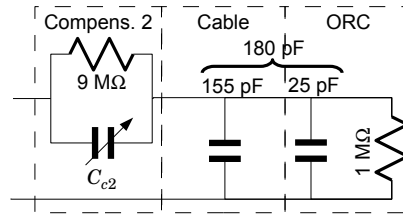


Figura A.6: Ajuste de la capacitancia del compensador 2.

La condición de compensación perfecta se escribe:

$$C_{c2} \times \underbrace{9 \text{ M}\Omega}_{\text{dato prob.}} = \underbrace{180 \text{ pF}}_{\text{cál. y datos prob.}} \times \underbrace{1 \text{ M}\Omega}_{\text{dato prob.}},$$

de donde:

$$C_{c2} = 180 \text{ pF} \times \frac{1}{9} = 20 \text{ pF}$$

La atenuación  $\alpha_2$  entre la entrada del compensador 2 y la entrada del ORC se determina en CC considerando el divisor de tensión correspondiente:

$$\alpha_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(\text{Tensión de entrada comp. 2})}{(\text{Tensión de entrada ORC})} = \frac{9 \text{ M}\Omega + 1 \text{ M}\Omega}{\underbrace{1 \text{ M}\Omega}_{\text{datos del prob.}}} = 10$$

Desde el punto de vista de la entrada del compensador 2, y en condición de compensación perfecta, el circuito de la Fig A.6 es eléctricamente equivalente al de la Fig. A.7

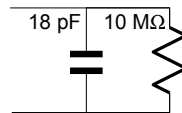


Figura A.7: Equivalente eléctrico desde el punto de vista de la entrada del compensador 2, cuando se está en la condición de compensación perfecta.

Ahora se presenta una situación similar con el compensador 1; se supondrá que el compensador 2 ya se ajustó para compensación perfecta; por lo tanto, se tiene el siguiente circuito equivalente, contemplando que la red de la Fig. A.7 es la carga para el compensador 1.

Se procede a continuación como en el caso del compensador 2; la condición de compensación perfecta se escribe:

$$C_{c1} \times \underbrace{90 \text{ M}\Omega}_{\text{dato prob.}} = \underbrace{18 \text{ pF} \times 10 \text{ M}\Omega}_{\text{modelo Fig. A.7}},$$

de donde:

$$C_{c1} = 18 \text{ pF} \times \frac{10}{90} = 2 \text{ pF}$$



A.3. PROBLEMA 2: COMPENSADOR DE Sonda PASIVA

9

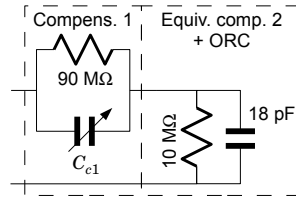


Figura A.8: Compensador 1 y efecto de carga del compensador 2, más ORC.

La atenuación  $\alpha_1$  entre la entrada del compensador 1 y la entrada del compensador 2 se determina en CC considerando el divisor de tensión correspondiente:

$$\alpha_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(\text{Tensión de entrada comp. 2})}{(\text{Tensión de entrada comp. 1})} = \frac{90 \text{ M}\Omega + 10 \text{ M}\Omega}{\underbrace{10 \text{ M}\Omega}_{\text{datos del prob.}}} = 10$$

Desde el punto de vista de la entrada del compensador 1, y en condición de compensación perfecta, el circuito de la Fig A.8 es eléctricamente equivalente al de la Fig. A.9

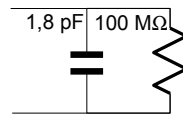


Figura A.9: Equivalente eléctrico desde el punto de vista de la entrada del compensador 1, cuando se está en la condición de compensación perfecta.

Ahora, el generador se enfrenta a una carga compuesta por el paralelo de un resistor de 100 MΩ con un capacitor de 1,8 pF. El circuito a analizar se muestra en la Fig. A.10.

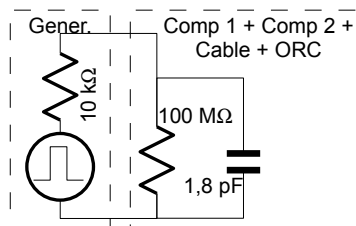


Figura A.10: Circuito equivalente asociado al generador, para el cálculo de la constante de tiempo característica,  $\tau_c$ .

Es un circuito de una sola constante de tiempo, de modo tal que el análisis es inmediato; la constante de tiempo característica es:

$$\tau_c = 1,8 \text{ pF} \times (100 \text{ M}\Omega \parallel 10 \text{ k}\Omega) = 18 \text{ ns}$$

Luego, el TT observado en la pantalla del ORC vendrá dado por:

$$t_{T,\text{obs}}^2 = t_{Tg}^2 + (2,2 \tau_c)^2 + \underbrace{t_{To}^2}_{\text{TT del ORC}} = t_{Tg}^2 + (2,2 \tau_c)^2 + \left(\frac{0,35}{BW}\right)^2,$$

donde  $BW$  es el AB del ORC, y se ha asumido (como normalmente ocurre en los ORC, dada la forma deseada de su respuesta transitoria y en frecuencia) que  $BW \times t_{To} = 0,35$ . Con los resultados numéricos obtenidos, y los datos del enunciado del problema, se puede escribir (usando como unidades ns y GHz):

$$60^2 = 40^2 + \underbrace{39,6^2 + \left(\frac{0,35}{BW}\right)^2}_{\text{error sistemático}} \Rightarrow \left(\frac{0,35}{BW}\right)^2 = 431,84$$

En consecuencia,

$$BW = \frac{0,35}{\sqrt{431,84}} \approx 0,0168 = 16,8 \text{ MHz} \quad (\text{A.2})$$

A modo ilustrativo, se calculará el *error sistemático* de esta medición; se considera que:

- El “verdadero valor” es  $t_{Tg}$ ; se sabe que es imposible determinarlo en forma “pura”, dado que el circuito de medición carga el generador
- El “valor medido” es  $t_{T,\text{obs}}$ ; esto es, la lectura obtenida al observar la pantalla del ORC; esto está idealizado, puesto que no se contempla la incertidumbre de lectura

Luego, el error sistemático es:

$$\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(\text{V. medido}) - (\text{V. verdadero})}{(\text{V. verdadero})} = \frac{\sqrt{t_{Tg}^2 + (2,2 \tau_c)^2 + \left(\frac{0,35}{BW}\right)^2} - t_{Tg}}{t_{Tg}}$$

Aunque el AB del ORC sea “infinito”, se tiene un error sistemático no nulo, debido al efecto de carga:

$$\varepsilon_{\text{mín}} = \frac{\sqrt{t_{Tg}^2 + (2,2 \tau_c)^2} - t_{Tg}}{t_{Tg}} = \sqrt{1 + \left(2,2 \frac{\tau_c}{t_{Tg}}\right)^2} - 1$$

Cuando se mide un generador “lento” (alto valor relativo de  $t_{Tg}$ ), se puede aproximar<sup>8</sup>  $\varepsilon_{\text{mín}} \approx 2,4 (\tau_c/t_{Tg})^2$ .

1. En la medición planteada por el problema, el error sistemático es:

$$\varepsilon = \frac{60 \text{ ns} - 40 \text{ ns}}{40 \text{ ns}} = 50 \%$$

2. Si se usa un ORC con “ $BW = \infty$ ”,

---

<sup>8</sup>En Matemática se deduce, usando la fórmula de Taylor, que  $\sqrt{1+y} \approx 1 + \frac{1}{2}y$ , si  $|y| \ll 1$ ; luego,  $\sqrt{1+x^2} - 1 \approx \frac{1}{2}x^2$ , mientras  $|x| \ll 1$ .

A.3. PROBLEMA 2: COMPENSADOR DE Sonda PASIVA

11

a) Usando la fórmula exacta:

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \left(2,2 \frac{18 \text{ ns}}{40 \text{ ns}}\right)^2} - 1 \approx 41 \%$$

b) Usando la aproximación correspondiente a un generador relativamente “lento”,

$$\varepsilon \approx 2,4 \left(18 \text{ ns}/40 \text{ ns}\right)^2 \approx 49 \%$$

Se concluye que, para los datos que se tienen, el “gran culpable” del apreciable error sistemático es la degradación provocada por la CTC<sup>9</sup> de entrada,  $\tau_c$ . En la Fig. se muestran los resultados del simulador<sup>10</sup> LTSpice/SwitcherCAD III.

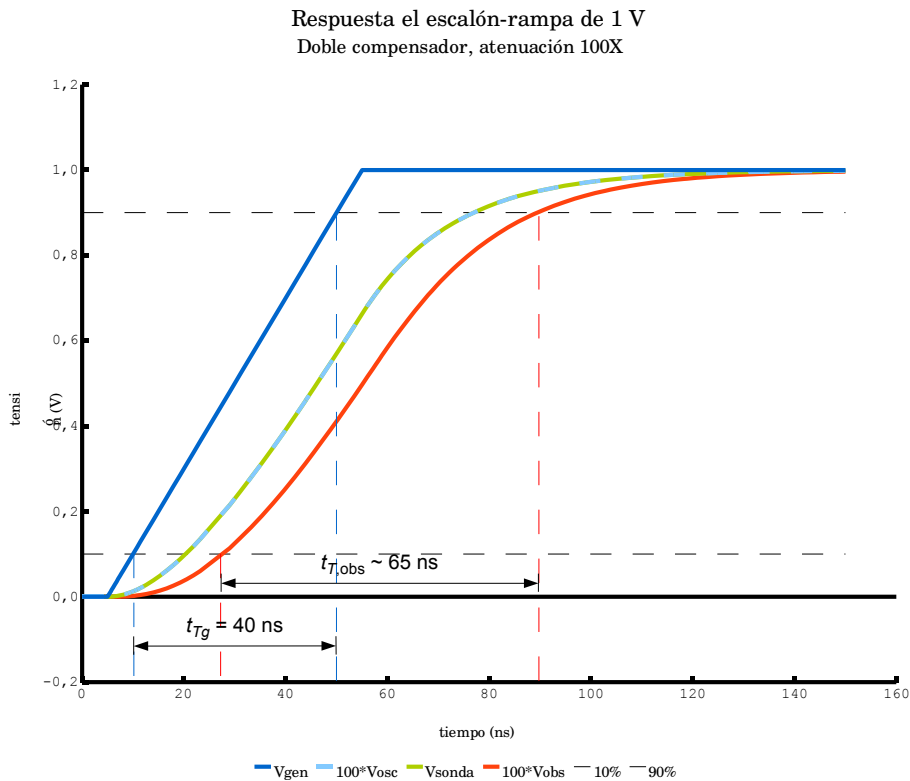


Figura A.11: Resultados del simulador de circuitos (LTSpice/SwitcherCAD III v2.22d) para los resultados obtenidos en el problema, es decir, un AB del ORC de 16,8 MHz; obsérvese que se ha asumido una forma de onda idealizada para la señal del generador; ambos compensadores se han ajustado para compensación perfecta.

<sup>9</sup>CTC = Constante de Tiempo Característica.

<sup>10</sup>SPICE (del inglés **S**imulation **P**rogram with **I**ntegrated-Circuit **E**mphasis), es el estándar “de facto” en los simuladores de circuitos eléctricos/electrónicos, aunque actualmente existen simuladores más sofisticados o dedicados a otros aspectos de los dispositivos y circuitos electrónicos, y no basados en SPICE, que es software de dominio público.

### A.4. Problema 3: medición de tiempo de transición

(En Evaluación Integradora del 16-DIC-2008.)

**Enunciado** Se tiene el esquema de medición de la Fig. A.12. El símbolo  $t_T$  indica el TT de la señal (todas básicamente ondas cuadradas unipolares de 1 V de amplitud, con flancos “suaves”). El cable que conecta la sonda activa es un coaxil de 3 m, con  $Z_0 = 50 \Omega$ , y  $c = 200\,000$  km/s. Si la incertidumbre general vertical y horizontal del ORC es de 8 %,

1. ¿Cuál es el mínimo TT del generador que se medirá con una incertidumbre no mayor al 15 %?.
2. ¿Puede mejorar el desempeño de esta medición, sin cambiar los instrumentos?. ¿Cómo?.

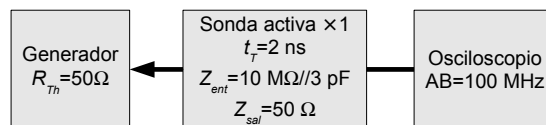


Figura A.12: Modelo de circuito de la medición del Prob. A.4.

**Solución** Un cálculo de orden práctico: el tiempo de propagación del cable es:

$$t_D = \frac{D}{c} = \frac{3 \text{ m}}{\underbrace{2 \cdot 10^8 \text{ m/s}}_{\text{datos del prob.}}} = 15 \text{ ns}$$

Si el TT del generador es mayor a  $2t_D = 30$  ns, podemos suponer que el cable equivale a un capacitor para todos los fines prácticos; sin embargo, y aunque en el enunciado del problema no se lo explicita, podemos suponer que la línea de transmisión que es materializada por el cable está adaptada tanto en el extremo de la sonda como en el extremo del ORC:

- Que está adaptada en el extremo de la sonda es evidente, dado que los datos del problema indican que la impedancia de salida de la sonda es igual a la impedancia característica del cable.
- No se indica la impedancia de entrada del ORC; sin embargo, es sabido que si ella es distinta a la impedancia característica del cable, ocurren fenómenos de reflexión de la onda, lo cual afecta la “calidad” de la medición; se puede suponer entonces que el diseñador del experimento conoce ésto, y ha procurado adaptar ambas impedancias.

A continuación, se dibuja el modelo eléctrico del esquema de medición; esto se ve en la Fig. A.13.

A.4. PROBLEMA 3: MEDICIÓN DE TIEMPO DE TRANSICIÓN

13

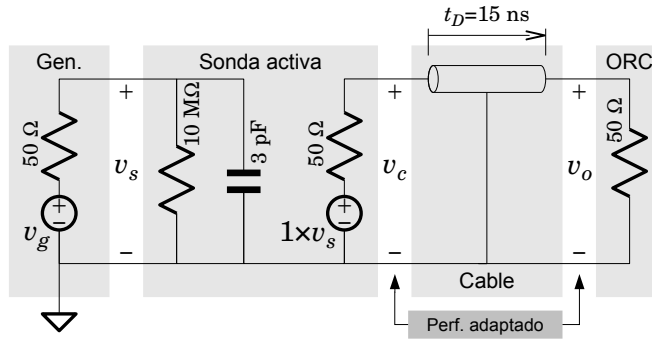


Figura A.13: Modelo eléctrico del esquema de medición de la Fig. A.12.

Dado el grado de adaptación del cable, se puede afirmar que la señal  $v_o$  presente a la entrada del ORC “copia” perfectamente en su forma a la señal presente en la punta de la sonda,  $v_s$ ; más específicamente, la amplitud de  $v_o$  es exactamente la mitad de  $v_s$ .

Se procede ahora a determinar la CTC asociada al generador:

$$\tau_c = 3 \text{ pF} \times \underbrace{(50 \Omega \parallel 10 \text{ M}\Omega)}_{\text{datos del prob.}} = 0,15 \text{ ns}$$

Entonces, considerando todos los factores que afectan la velocidad de transición de la señal en cada punto de su recorrido desde el generador hasta el ORC, se puede escribir:

$$t_{T,\text{obs}}^2 = \underbrace{t_{To}^2 + t_{Ts}^2 + (2,2 \tau_c)^2}_{\text{error sistemático, } t_e^2} + t_{Tg}^2$$

Se calcula  $t_e$ , sabiendo que  $t_{To} = 0,35/BW = 0,35/10^8 = 3,5 \text{ ns}$ :

$$\begin{aligned} t_e &= \sqrt{t_{To}^2 + t_{Ts}^2 + (2,2 \tau_c)^2} = \sqrt{3,5^2 + 2^2 + 0,33^2} \\ &= \sqrt{12,3 + 4 + 0,109} = 4,04 \text{ ns} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

El mayor peso en el resultado lo tiene el TT del ORC; de hecho, si se ignoran los otros dos tiempos, resulta  $t_e = t_{To}$ , cuyo desvío relativo con el resultado “exacto” es  $(3,5 - 4,04)/4,04 = -13 \%$ ; lo que sí es enteramente despreciable es el efecto de la CTC del generador; si se ignora esta cantidad (pero no el TT de la sonda), el desvío relativo respecto al valor “exacto” es  $-0,33 \%$ . Mejorar  $t_e$  exige disminuir alguno(s) de los tiempos involucrados en el cálculo; sin embargo, tanto  $t_{To}$  como  $t_{Ts}$  son TT de instrumentos, y el enunciado del problema impide cambiarlos; luego, no hay forma de mejorar la medición sin cambiar alguno de los instrumentos (es evidente que mejorar la CTC del generador no tiene efecto apreciable).

Se retoma el problema en la condición  $t_{T,\text{obs}}^2 = t_e^2 + t_{Tg}^2$ , donde  $t_e$  ya se ha calculado (véase (A.3)); una cuestión importante es que  $t_e$  no posee incertidumbre, dado que las cantidades que llevan a su cálculo tampoco la

tienen; esta es una situación ciertamente idealizada, aunque no hay elementos de juicio para asignar una cifra a dicha incertidumbre. Luego, dado<sup>11</sup> que  $t_{T,obs} = \bar{t}_{T,obs} (1 \pm u_{t_{T,obs}})$  y  $t_{Tg} = \bar{t}_{Tg} (1 \pm u_{t_{Tg}})$ , y que  $\bar{t}_{T,obs}^2 = \bar{t}_e^2 + \bar{t}_{Tg}^2$ , se podrá escribir:

$$u_{t_{T,obs}} \bar{t}_{T,obs}^2 = u_{t_{Tg}} \bar{t}_{Tg}^2 \Rightarrow \left( \frac{\bar{t}_e}{\bar{t}_{Tg}} \right)^2 = \frac{u_{t_{Tg}}}{u_{t_{T,obs}}} - 1,$$

de donde se deduce:

$$\bar{t}_{Tg} = \bar{t}_e \sqrt{\frac{u_{t_{T,obs}}}{u_{t_{Tg}} - u_{t_{T,obs}}}}$$

Ahora bien, se sabe que  $u_{t_{T,obs}} \geq 0,08$ , que  $\bar{t}_e = 4,04$  ns, y que el enunciado requiere que  $u_{t_{Tg}} \leq 0,15$ ; esto implica que

$$\bar{t}_{Tg} \geq 4,04 \sqrt{\frac{8}{15 - 8}} \approx 4,3 \text{ ns}$$

También se puede escribir:

$$u_{t_{Tg}} [\%] = \frac{131}{(t_{Tg}[\text{ns}])^2} + 8$$

## A.5. Problema 4: puente de resistencias

(En Evaluación Integradora del 6-AGO-2007. Se han cambiado algunas cantidades.)

**Enunciado** Se tiene el circuito de la figura, que se utiliza para medir resistencias con alta precisión; el galvanómetro es un IBM<sup>12</sup> cuya resistencia interna es de 1 kΩ y una deflexión simétrica ( $\pm 5 \mu\text{A}$  a fondo de escala). Inicialmente, todas las resistencias tienen idéntico valor: 100 kΩ; esto provee una condición de equilibrio en donde  $I_G = 0$ . Por diversos motivos (envejecimiento, cambio de temperatura, acciones mecánicas, etc.) los valores de las resistencias cambian independientemente, y se determinan con una incertidumbre de  $\pm 0,1 \%$ . Se pide estimar la nueva indicación del IBM.

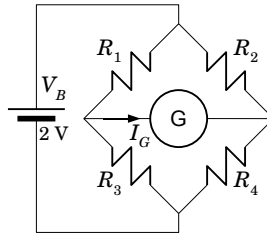


Figura A.14: Circuito del Prob. A.5

<sup>11</sup>El símbolo  $u_x$  se usa para indicar la *incertidumbre relativa* de la magnitud  $x$ .

<sup>12</sup>IBM = Instrumento de Bobina Móvil.

A.5. PROBLEMA 4: PUENTE DE RESISTENCIAS

15

**Solución** Este problema puede resolverse de varias formas; se mostrará la que se cree más sencilla, y se explorarán otras alternativas. Se someterá el circuito a ciertas transformaciones de “forma”, pero que no cambian la solución; e decir, se formularán varias configuraciones “topológicamente” (y eléctricamente) equivalentes. La primera transformación lleva al circuito de la Fig. A.15.

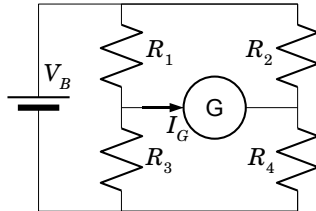


Figura A.15: El circuito del problema, al cual se le aplicó una ligera transformación geométrica, dejándolo completamente equivalente al inicial.

La segunda transformación es más “violenta”, y lleva al circuito de la Fig. A.16.

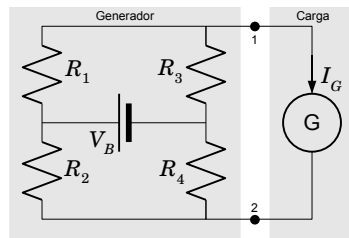


Figura A.16: El circuito del problema, al cual se le aplicó una segunda transformación geométrica, a partir del de la Fig. A.15, y sigue siendo completamente equivalente al inicial.

En el modelo de la Fig. A.16 se han agrupado todos los elementos distintos al galvanómetro en un bloque (denominado “Generador” en el dibujo), y el galvanómetro por su lado. El escenario está preparado para determinar un modelo Thévenin de la configuración; esto es razonable, habida cuenta de que el instrumento es un receptor de energía, y por lo tanto opera como una “Carga” (y así se ha designado el bloque distinto del “generador”).

Para obtener el modelo Thévenin del “generador”, se procede al análisis siguiente, basado en la Fig. A.17.

Del circuito se deduce:

$$V_{Th} = V_1 - V_2 = (V_1 - V_{REF}) - (V_2 - V_{REF}) = V_B \frac{R_3}{R_1 + R_3} - V_B \frac{R_4}{R_2 + R_4} = V_B \left( \frac{R_3}{R_1 + R_3} - \frac{R_4}{R_2 + R_4} \right), \quad (A.4)$$

y

$$R_{Th} = (R_1 \parallel R_3) + (R_2 \parallel R_4) = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} \quad (A.5)$$

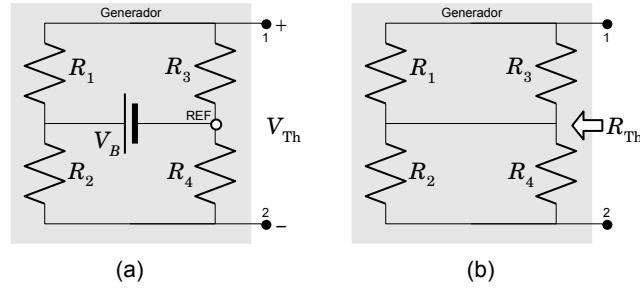


Figura A.17: Análisis para hallar el modelo Thévenin del “generador”; (a) Tensión Thévenin (se retira la “carga” y se “mide”  $V_1 - V_2$ ); (b) Resistencia Thévenin (se “mide” la resistencia entre 1 y 2 con la batería pasivada).

Ahora, el enunciado del problema indica que  $R_k = R(1 + \eta_{R_k})$ , donde  $R$  es el valor de las resistencias cuando se tiene el equilibrio, y  $\eta_{R_k}$  es el *desvío relativo* de la resistencia  $k$  respecto al valor de equilibrio (nótese que no se habla de *incertidumbre*). El enunciado del problema establece que  $-0,001 \leq \eta_{R_k} \leq +0,001$ , cualquiera sea el motivo que cause el desvío del valor nominal.

Se debe prestar atención a los signos y valores de los desvíos que producen los valores extremos de  $V_{Th}$  y  $R_{Th}$ ; el caso de  $R_{Th}$  es simple:

$$R_{Th} \text{ es mínimo(máximo) cuando } \begin{cases} R_1 & \text{es mínimo(máximo)} \\ R_2 & \text{es mínimo(máximo)} \\ R_3 & \text{es mínimo(máximo)} \\ R_4 & \text{es mínimo(máximo)} \end{cases} \quad (A.6)$$

Por lo tanto:

$$R_{Th, \min} = \frac{R \times 0,999 \times R \times 0,999}{R \times 0,999 + R \times 0,999} + \frac{R \times 0,999 \times R \times 0,999}{R \times 0,999 + R \times 0,999} = R \times 0,999$$

Similarmente,

$$R_{Th, \max} = R \times 1,001$$

Por lo tanto,  $R_{Th} = R(1 \pm 0,001)$ ; este cálculo no ofrece ninguna clave acerca de la distribución de probabilidad de valores de  $R_{Th}$  en términos de las correspondientes distribuciones de las resistencias componentes, sólo brinda los extremos del intervalo de variación. En principio, esto es todo lo que se necesita.

El caso de  $V_{Th}$  es sólo un poco más complejo:

$$V_{Th} \text{ es máximo(mínimo) cuando } \begin{cases} R_1 & \text{es mínimo(máximo)} \\ R_2 & \text{es máximo(mínimo)} \\ R_3 & \text{es máximo(mínimo)} \\ R_4 & \text{es mínimo(máximo)} \end{cases} \quad (A.7)$$

Por lo tanto:



$$V_{Th,m\acute{a}x} = V_B \left( \frac{R \times 1,001}{R \times 0,999 + R \times 1,001} - \frac{R \times 0,999}{R \times 1,001 + R \times 0,999} \right) = V_B \times 0,001$$

Tambi3n

$$V_{Th,m\acute{i}n} = V_B \times (-0,001)$$

Por lo tanto,  $V_{Th} = V_B(\pm 0,001)$ ; valen las mismas consideraciones que las hechas para  $R_{Th}$  respecto a la distribuci3n de valores dentro del intervalo de variaci3n. Se comprueba que  $\Delta V_{Th} \stackrel{\text{def}}{=} V_{Th,m\acute{a}x} - V_{Th,m\acute{i}n}$  est3 casi directamente relacionado con los desv\ios de las resistencias, siendo la constante de proporcionalidad la tensi3n de la bater\ia

A partir del modelo Th\evenin se obtiene (resistencias expresadas en k $\Omega$ ; intensidades en  $\mu$ A, y las tensiones en mV):

$$I_G = V_{Th} \frac{1}{R_G + R_{Th}} = 2000 \frac{\pm 0,001}{1 + 100(1 \pm 0,001)} = \frac{\pm 2}{101 \pm 0,1} \quad (\text{A.8})$$

Los desv\ios indicados en el numerador y el denominador est3n relacionados de tal manera que no puede afirmarse sin m3s que un extremo de uno de ellos ocurra coincidentemente con un extremo del otro; esto es f3cil de entender si se observa de A.7 y A.6 que las condiciones para extremos son distintas. Teniendo en cuenta esto, y para simplificar la cuesti3n, se asumir3 un caso extremo, pero *imposible*<sup>13</sup>: las “peores” condiciones para A.8:

$$I_{G,m\acute{a}x} = \frac{+2}{101 - 0,1} = +0,01982 \mu\text{A}, \quad \text{y} \quad I_{G,m\acute{i}n} = \frac{-2}{101 + 0,1} = -0,01978 \mu\text{A}$$

En resumen, la intensidad de corriente en el galvan3metro est3 dada por  $I_G = 0 \pm 20 \text{ nA} = 0,4 \% \text{FS}$ <sup>14</sup>.

**Soluci3n alternativa 2** Se empieza con las relaciones (A.4) y (A.5), que se escriben en forma gen3rica:

$$\begin{aligned} V_{Th} &= V_B \left( \frac{R(1 + \eta_{R_3})}{R(1 + \eta_{R_1}) + R(1 + \eta_{R_3})} - \frac{R(1 + \eta_{R_4})}{R(1 + \eta_{R_2}) + R(1 + \eta_{R_4})} \right) = \\ &= V_B \left( \frac{1 + \eta_{R_3}}{2 + \eta_{R_1} + \eta_{R_3}} - \frac{1 + \eta_{R_4}}{2 + \eta_{R_2} + \eta_{R_4}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} V_B \left( \frac{1 + \eta_{R_3}}{1 + \frac{1}{2}(\eta_{R_1} + \eta_{R_3})} - \frac{1 + \eta_{R_4}}{1 + \frac{1}{2}(\eta_{R_2} + \eta_{R_4})} \right) \end{aligned}$$

Dado que los desv\ios relativos  $\eta_{R_k}$  son muy peque\ios, es v3lido utilizar la siguiente aproximaci3n<sup>15</sup>:

<sup>13</sup>Se toman cuatro cifras significativas para poder apreciar la asimetr\ia (muy peque\ia) del intervalo de variaci3n.

<sup>14</sup>La notaci3n %FS deber\ia leerse “porciento del fondo de escala”.

<sup>15</sup>Si el lector no est3 convencido de la validez de la aproximaci3n, se le sugiere probar con algunos ejemplos.

Si  $|x| \ll 1$  y  $|y| \ll 1$ , entonces  $\frac{1+x}{1+y} \approx 1+x-y$

Por lo tanto,

$$V_{Th} \approx \frac{1}{2}V_B \left( 1 + \eta_{R_3} - \frac{1}{2}(\eta_{R_1} + \eta_{R_3}) - \left( 1 + \eta_{R_4} - \frac{1}{2}(\eta_{R_2} + \eta_{R_4}) \right) \right) = V_B \frac{-\eta_{R_1} + \eta_{R_2} + \eta_{R_3} - \eta_{R_4}}{4}$$

En forma similar se procede con  $R_{Th}$ , resultando:

$$R_{Th} \approx R \left( 1 + \frac{\eta_{R_1} + \eta_{R_2} + \eta_{R_3} + \eta_{R_4}}{4} \right)$$

Defínase  $\eta = \max_{1 \leq k \leq 4} (|\eta_{R_k}|)$ ; entonces se tienen las siguientes acotaciones, no simultáneamente válidas:

$$-V_B \eta \leq V_{Th} \leq +V_B \eta, \quad R(1 - \eta) \leq R_{Th} \leq R(1 + \eta)$$

Por lo tanto, se escribirá:

$$V_{Th} \approx \pm \eta V_B, \quad R_{Th} \approx R(1 \pm \eta)$$

Finalmente, la intensidad de corriente en el galvanómetro es<sup>16</sup>:

$$I_G = \frac{V_{Th}}{R_G + R_{Th}} \approx \frac{\pm \eta V_B}{R_G + R(1 \pm \eta)} = \frac{V_B}{R_G + R} \frac{\pm \eta}{1 \pm \frac{\eta R}{R_G + R}} \approx \pm \eta \frac{V_B}{R_G + R}$$

En concreto:

$$I_G \approx \pm 0,0198 \mu A$$

**Comentarios adicionales** Nótese la simplificación lograda mediante la construcción del modelo Thévenin del circuito “ajeno” al galvanómetro; si esto no se hiciera, la intensidad de dicho instrumento debería hallarse como solución del sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} V_B &= (R_1 + R_3) I_1 - R_1 I_2 - R_3 I_3 \\ 0 &= -R_1 I_1 + (R_1 + R_2 + R_G) I_2 - R_G I_3 \\ 0 &= -R_3 I_1 - R_G I_2 + (R_3 + R_4 + R_G) I_3 \\ I_G &= I_3 - I_2 \end{cases}$$

Las tres primeras se resuelven en  $I_1$ ,  $I_2$ , e  $I_3$ , para luego usar la última y calcular  $I_G$ ; además, cada resistencia (exceptuando  $R_G$ ) debe expresarse en términos de su desvío relativo,  $R_k = \overline{R_k} (1 + \eta_{R_k})$  ( $1 \leq k \leq 4$ ).

El sistema de ecuaciones se ha escrito usando una técnica de formulación llamada “método de las mallas”, que es una síntesis de las Reglas de Kirchhoff y la hipótesis de linealidad del circuito.

<sup>16</sup>La última parte de la cadena surge de cortar los términos que son de orden 2 o mayores, aproximación que es correcta, puesto que  $\eta \ll 1$ .

A.6. PROBLEMA 5: CÁLCULO DE CONSTANTES DE TIEMPO

19

La “moraleja” es la siguiente: *antes de plantear ecuaciones en forma apresurada y (tal vez) desordenada, conviene observar atentamente el circuito, para evaluar si se tiene a mano alguna técnica mejor, antes de correr el riesgo de meterse en un lío algebraico.*

## A.6. Problema 5: cálculo de constantes de tiempo

(No se ha incluido en ninguna evaluación; da una idea de determinación de la dinámica de un circuito.)

**Enunciado** Se tiene el circuito CR que muestra la Fig. A.18. Suponiendo que el circuito está relajado en  $t < 0$ , y que el generador  $v_G$  es un escalón de 10 V aplicado en  $t = 0$ , representar cualitativamente (pero calculando los valores estimados) la variación de la intensidad de corriente  $i_{R_b}$  para  $t > 0$ .

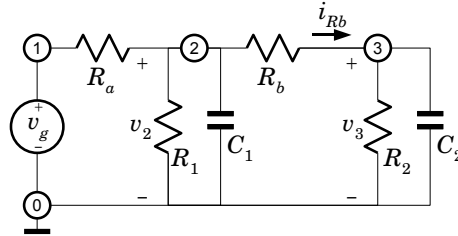


Figura A.18: Circuito CR con 2 constantes de tiempo; se pide determinar  $i_{R_b}(t)$ .

Los valores de los elementos son:  $C_1 = 100$   $C_2 = 1$   $\mu\text{F}$ ,  $R_a = 9R_b = 9$   $\text{k}\Omega$ ,  $R_1 = 2$   $R_2 = 2$   $\text{k}\Omega$ .

**Solución** La intensidad de corriente que se debe calcular viene dada por la Ley de Ohm:  $i_{R_b} = R_b^{-1}(v_2 - v_3)$ . Los primeros cálculos que se pueden hacer son sencillos (tensiones en V, resistencias en  $\text{k}\Omega$ , intensidades en mA):

$$i_{R_b}(0-) = R_b^{-1}(v_2(0-) - v_3(0-)) \equiv 0 \text{ (Circ. relajado en } t = 0)$$

$$v_2(+\infty) = v_g(+\infty) \frac{R_1 \parallel (R_2 + R_b)}{R_1 \parallel (R_2 + R_b) + R_a} = 10 \times \frac{2 \parallel 2}{2 \parallel 2 + 9} = 1 \quad (\text{A.9})$$

$$v_3(+\infty) = v_2(+\infty) \frac{R_2}{R_2 + R_b} = 1 \times \frac{1}{2} = 0,5 \quad (\text{A.10})$$

$$(\text{A.9}) \text{ y } (\text{A.10}) \Rightarrow i_{R_b}(+\infty) = R_b^{-1}(v_2(+\infty) - v_3(+\infty)) = 1 \times (1 - 0,5) = 0,5$$

Otro cálculo que puede resultar útil es el de las CT<sup>17</sup> a circuito abierto, para observar si existe una CTD<sup>18</sup> (capacitancias en  $\mu\text{F}$ , tiempos en ms):

<sup>17</sup>CT=Constante de Tiempo.

<sup>18</sup>CTD=CT Dominante.

$$\tau_1 = C_1 R_{eq,1} = C_1 (R_a \parallel R_1 \parallel (R_b + R_2)) = 1 \times (9 \parallel 2 \parallel 2) = 0,9$$

$$\tau_2 = C_2 R_{eq,2} = C_2 (R_2 \parallel (R_b + R_a \parallel R_1)) = 0,01 \times (1 \parallel (1 + 9 \parallel 2)) = 0,00725 \quad (= 7,25 \mu s)$$

donde  $R_{eq,1} \parallel R_{eq,2}$  es la resistencia “vista” por el capacitor  $C_1 \parallel C_2$  cuando el otro capacitor se extrae del circuito y los generadores se pasivan. Resulta evidente que  $\tau_1$  es la CTD:  $\tau_1 \gg \tau_2$ .

En la primer parte de la evolución del circuito, esto es para instantes positivos, pero mucho menores que  $\tau_2$ , como  $C_1$  es el capacitor “lento”, se puede suponer que éste permanece con la carga inicial (en este caso, igual a 0); por otra parte,  $C_2$  es el capacitor “rápido” y su carga varía con mucha mayor velocidad que la de  $C_1$ ; una determinación que orienta mejor en la estimación de la respuesta es la velocidad de variación de  $i_{R_b}$ .

Para esto se plantean algunas ecuaciones, partiendo de  $\frac{d}{dt} i_{R_b} = G_b (v_2 - v_3)$ ; se tiene

$$\dot{v}_2(0+) = C_1^{-1} i_{C_1}(0+) = C_1^{-1} (G_a (v_g(0+) - v_2(0+)) - G_1 v_2(0+) - i_{R_b}(0+))$$

$$\dot{v}_3(0+) = C_2^{-1} i_{C_2}(0+) = C_2^{-1} (-G_2 v_3(0+) + i_{R_b}(0+))$$

Dado que  $v_2(0+) = 0$ ,  $v_3(0+) = 0$ ,  $v_g(0+) = 10$  e  $i_{R_b}(0+) = 0$ , resulta

$$\frac{d}{dt} i_{R_b}(0+) = G_b C_1^{-1} G_a v_g(0+) = \frac{1}{1} \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{9} \times 10 = \frac{10}{9}$$

Si  $C_2$  no existiera, la velocidad de variación de  $i_{R_b}$  sería menor, dado que al inicio,  $C_2$  cortocircuita a  $R_2$ ; es un efecto similar a que  $R_{eq,1}$  fuera menor; la conclusión es que la carga de  $C_2$  “acelera” durante un breve intervalo (del orden de  $\tau_2$ ) la variación de  $i_{R_b}$ .

El ritmo de variación de  $v_2$  es lento; esto físicamente se manifiesta como que la CT efectiva para  $C_2$  es la que se obtiene suponiendo que en el nudo 2 hay una pila cuya tensión es  $v_2$  —i.e., no se comete un gran error suponiendo que  $C_1$  hace las veces de una pila—; entonces, la resistencia equivalente para  $C_2$  en estas condiciones es  $R'_{eq,2} \approx R_b \parallel R_2 = 0,5$ , y por lo tanto,  $\tau'_2 = 5 \mu s$  (nótese que es diferente que la CT a circuito abierto que se calculó antes para  $C_2$ ).

Cuando se analiza qué pasa en el intervalo  $3\tau_2 \approx 28 \mu s \leq t \leq \tau_1/3 = 300 \mu s$ , se asume que  $C_2$  adquirió su “carga final” —i.e., a los fines prácticos  $C_2$  no toma corriente— y que está evolucionando la tensión en  $C_1$  como en un circuito de una sola CT, precisamente  $\tau_1$ ; siendo así, resulta que  $i_{R_b} \approx v_2/(R_b + R_2)$ , y este comportamiento es el que se tiene para  $t \rightarrow +\infty$ .

En resumen, la evolución de  $i_{R_b}$  ocurre como si  $C_2$  no existiera, salvo en los tiempos comparables con  $\tau_2$ , en donde la velocidad de crecimiento está ligeramente incrementada respecto a la que habría si  $C_2$  no existiera.

**Comentarios adicionales** Si se hiciera al cálculo de la solución de la ecuación diferencial asociada al circuito<sup>19</sup>, se encontraría que

<sup>19</sup>El lector podrá encontrarse con el método de solución si cursa la asignatura Análisis de Circuitos; es simple formular la solución si se usa el análisis nodal y la Transformada de Laplace; ninguna de estas herramientas se suponen conocidas en nuestra asignatura.

A.6. PROBLEMA 5: CÁLCULO DE CONSTANTES DE TIEMPO

21

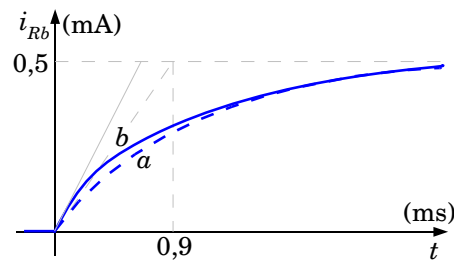


Figura A.19: Intensidad de corriente por  $R_b$ ; la línea a trazos  $a$  representa la respuesta para el caso en que  $C_2 = 0$ , es decir, cuando se tiene una sólo CT, y ésta es por supuesto la dominante; la segunda CT tiene intervención en los instantes iniciales, tal como indica la línea continua  $b$ . El dibujo es cualitativo, no está en correcta escala horizontal; otro factor que depende del tratamiento cualitativo es si la curva “correcta” está por encima o por debajo de la de primer orden; asunto que depende de las condiciones iniciales.

$$i_{R_b}(t) = i_{R_b}(+\infty) + \underbrace{K_1 \exp\left(-\frac{t}{\tau_{lenta}}\right)}_{\text{Evolución lenta}} + \underbrace{K_2 \exp\left(-\frac{t}{\tau_{rápida}}\right)}_{\text{“Corrección” rápida}},$$

donde  $K_1$  y  $K_2$  dependen de las condiciones iniciales; concretamente,  $i_{R_b}(0+) = i_{R_b}(+\infty) + K_1 + K_2$  y  $\frac{d}{dt}i_{R_b}(0+) = -\frac{K_1}{\tau_{lenta}} - \frac{K_2}{\tau_{rápida}}$ ; este sistema de ecuaciones se resuelve para dar:

$$K_1 = \frac{-i_{R_b}(+\infty) + \tau_{rápida} \frac{d}{dt}i_{R_b}(0+)}{1 - \frac{\tau_{rápida}}{\tau_{lenta}}} \stackrel{\text{(CTD)}}{\approx} -i_{R_b}(+\infty) + \tau_{rápida} \frac{d}{dt}i_{R_b}(0+)$$

$$K_2 = \frac{i_{R_b}(+\infty) - \tau_{lenta} \frac{d}{dt}i_{R_b}(0+)}{\frac{\tau_{lenta}}{\tau_{rápida}} - 1} \stackrel{\text{(CTD)}}{\approx} \frac{\tau_{rápida}}{\tau_{lenta}} i_{R_b}(+\infty) - \tau_{rápida} \frac{d}{dt}i_{R_b}(0+)$$

Remplazando por los valores ya obtenidos, resulta  $K_1 \approx -0,494$ ,  $K_2 \approx -0,00278$ .

Véase que los cálculos hechos por análisis cualitativo, dan resultados muy próximos:

Cuadro A.1: Comparación de resultados (análisis cualitativo) ↔ (cálculo exacto)

CT	Cualitativo	Exacto	Comentarios
$\tau_{lenta}$ (ms)	0,9	0,902 (+0,22 %)	A circ. abierto; dominante
$\tau_{rápida}$ (ms)	0,005	0,00499 (-0,2 %)	Con $C_1$ cortocirc.
$\tau_2$ (ms)	0,00725	NA	Con $C_1$ abierto

Esto valida el método utilizado; nótese que  $\tau_{lenta}$  es muy parecida a la CTD (de circuito abierto), mientras que  $\tau_{rápida}$  es la CT calculada (en el caso cualitativo) con el capacitor “lento”  $C_1$  puesto en cortocircuito, que puede ser muy distinta de la CT de circuito abierto que le corresponde al capacitor “rápido”  $C_2$ .

Aún cuando  $\tau_1$  no sea tan fuertemente dominante ( $\tau_1/\tau_2 \approx 124$ ), los cálculos provenientes del análisis cualitativo pueden seguir sirviendo; por ejemplo, si  $C_2$  tuviera un valor 10 veces mayor que el del enunciado inicial, esto es, 100 nF, se obtendría la tabla siguiente:

Cuadro A.2: Comparación de resultados, cuando  $C_2 = 0,1 \mu\text{F}$  ( $\tau_1/\tau_2 \approx 12,4$ )

CT	Cualitativo	Exacto	Comentarios
$\tau_{\text{lenta}}$ (ms)	0,9	0,924 (+2,7 %)	A circ. abierto; dominante
$\tau_{\text{rápida}}$ (ms)	0,05	0,0487 (-2,6 %)	Con $C_1$ cortocirc.
$\tau_2$ (ms)	0,0725	NA	Con $C_1$ abierto

El límite práctico que define una CTD es una relación 10:1. Cuando  $C_2 = C_1 = 1 \mu\text{F}$ , no hay una CTD, y los errores son inaceptables, aunque para una estimación los cálculos todavía podrían ser útiles:

Cuadro A.3: Comparación de resultados, cuando  $C_2 = 1 \mu\text{F}$  (errores grandes;  $\tau_1/\tau_2 \approx 1,24$ )

CT	Cualitativo	Exacto	Comentarios
$\tau_{\text{lenta}}$ (ms)	0,9	1,27 (+41 %)	A circ. abierto; dominante
$\tau_{\text{rápida}}$ (ms)	0,5	0,354 (-29 %)	Con $C_1$ cortocirc.
$\tau_2$ (ms)	0,725	NA	Con $C_1$ abierto

**Cálculos de respuesta en frecuencia** En régimen senoidal permanente, se usa el análisis fasorial para encontrar la siguiente función de circuito<sup>20</sup>:

$$H \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\hat{I}_{R_b}}{\hat{V}_g} = \frac{Y_2}{R_a Y_2 + (1 + R_a Y_1)(1 + R_b Y_2)},$$

donde  $Y_i = R_i^{-1} + jC_i\omega$  ( $i = 1, 2$ ); también se puede escribir, haciendo  $\tau_{11} = C_1 R_1$ , y  $\tau_{22} = C_2 R_2$  (no se confunda  $\tau_i$  [CT a circuito abierto del capacitor  $C_i$ ] con  $\tau_{ii}$  [definida de la forma presentada]):

$$H(\omega) = \frac{1 + j\tau_{22}\omega}{R_a(1 + j\tau_{22}\omega) + R_2(1 + R_a G_1(1 + j\tau_{11}\omega))(1 + R_b G_2(1 + j\tau_{22}\omega))}$$

Remplazando por los valores originales de los elementos dados en el enunciado, queda (redondeando simétricamente a tres cifras significativas, usando como unidad de pulsación el krad/s, y como unidad de tiempo el ms)

$$H(\omega) \approx 0,113 \frac{0,01^{-1} + j\omega}{(0,907^{-1} + j\omega)(0,0049^{-1} + j\omega)}$$

Esta función de circuito se puede aproximar a bajas frecuencias (por ejemplo, para  $\omega \leq 1$ ) con la siguiente expresión

<sup>20</sup>Tómese como un ejercicio interesante para poner en práctica los conocimientos de TdeC, calcular la función de circuito propuesta.

$$H(\omega) \stackrel{\text{bajas frec.}}{\approx} 0,0554 \frac{1}{0,907^{-1} + j\omega},$$

que se asemeja a la función de circuito de un sistema pasa-bajos de primer orden con una CTC  $\tau_c = 0,907$  ms. Obsérvese que esta CT es muy parecida a  $\tau_{\text{lenta}} = 0,902$  ms; esta semejanza no es para nada una casualidad: *cuando hay una CTD, el sistema se comporta en forma parecida a uno de primer orden cuya CTC tiene el mismo valor que la CTD, al menos en pulsaciones relativamente bajas (menores a la inversa de la CTD), o bien en instantes de tiempo posteriores a unas 4 veces la CT rápida; este hecho se puede demostrar rigurosamente en la TdeC.*

## A.7. Problema 6: disparador de Schmitt

(En Evaluación Integradora del 29-FEB-2008.)

**Enunciado** Se analizará un *circuito disparador de Schmitt*<sup>21</sup> (véase la Fig. A.20) de un CU<sup>22</sup>, con umbrales de conmutación de +1 V y +2 V y una característica entrada-salida como la indicada en la figura, y se ingresa una *señal triangular bipolar de 20 V pap*<sup>23</sup> sin componente de CC, con una frecuencia de 1 kHz.

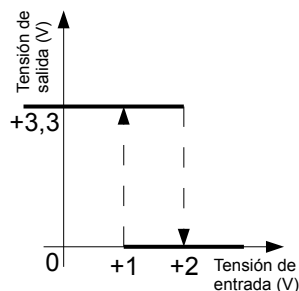


Figura A.20: Característica entrada-salida de un comparador con histéresis.

1. ¿Cómo es la variación temporal de la salida del circuito (grafique y calcule)?;
2. Ahora suponga que la amplitud pap varía  $\pm 10\%$ ;
  - a) ¿Cuál es la incertidumbre con la que se conoce el intervalo de tiempo  $T_1$  en el que la salida está en estado alto (3,3 V)?;
  - b) Esta incertidumbre, ¿afecta el resultado de una medición de período?

<sup>21</sup>También denominado *comparador con histéresis*.

<sup>22</sup>CU=Contador Universal.

<sup>23</sup>pap=pico a pico.

**Solución** Se deben hacer algunas observaciones iniciales.

- La frecuencia de la señal de entrada no parece ser al principio un dato relevante, habida cuenta de que se supone que la característica de entrada-salida del comparador es independiente de la frecuencia; se supondrá que esto último se cumple siempre; sin embargo, para contestar correctamente a la preg. 2b habrá que tener en cuenta la relación entre el período de la señal y el ritmo de variación que tiene la amplitud de la señal de entrada.
- No se han explicitado los motivos por los cuales varía la amplitud de la señal de entrada; éstos pueden ser diversos:
  1. El operador del generador de la señal cambia la amplitud actuando manualmente sobre un control
  2. La amplitud varía en forma impredecible pero en saltos y con intervalos de cambio muy espaciados en el tiempo
  3. La amplitud varía en forma impredecible como si hubiera ruido en la señal

Según sea la opción, la respuesta a la preg. 2b puede cambiar.

- Se supone que las incertidumbres en el conocimiento de los umbrales de conmutación y del nivel de salida son nulas, lo cual no es muy realista; sin embargo simplifica la solución del problema.

Se presenta en la Fig. A.21 un análisis gráfico para responder a la preg. 1.

Con base en la Fig. A.22, se puede formular:

$$\begin{aligned} \frac{A}{T/4} = \frac{V_2}{t_B} &\Rightarrow t_B = \frac{T}{4} \frac{V_2}{A} \\ \frac{A}{T/4} = \frac{V_1}{t_S} &\Rightarrow t_S = \frac{T}{4} \frac{V_1}{A} \\ T_1 = \frac{T}{2} + t_B + t_S &= \frac{T}{4} \left( 2 + \frac{V_2 + V_1}{A} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Luego (tiempos en ms; tensiones en V),  $T_1 = \frac{1}{4} \left( 2 + \frac{2+1}{10} \right) = \frac{23}{40} = 0,575$ ; entonces,  $\delta = \frac{T_1}{T} = 57,5\%$ .

La fórmula obtenida para  $T_1$  en general, con lo cual la preg. 2a es fácil de contestar; en efecto:

$$T_1 = \frac{T}{4} \left( 2 + \frac{V_2 + V_1}{A} \right) = \frac{T}{4} \left( 2 + \frac{V_2 + V_1}{A(1 \pm u_A)} \right) = \frac{T}{4} \left( 2 + \frac{V_2 + V_1}{A} \frac{1}{1 \pm u_A} \right)$$

Se puede aproximar esta expresión, si consideramos que  $u_A = 0,1 \ll 1$  (en términos vagos, la incertidumbre es “pequeña”), a

$$T_1 \stackrel{u_A \ll 1}{\approx} \frac{T}{4} \left( 2 + \frac{V_2 + V_1}{A} (1 \mp u_A) \right) = \frac{T}{4} \left( 2 + \frac{V_2 + V_1}{A} \right) \left( 1 \mp \frac{\frac{V_2 + V_1}{A}}{2 + \frac{V_2 + V_1}{A}} u_A \right)$$



A.7. PROBLEMA 6: DISPARADOR DE SCHMITT

25

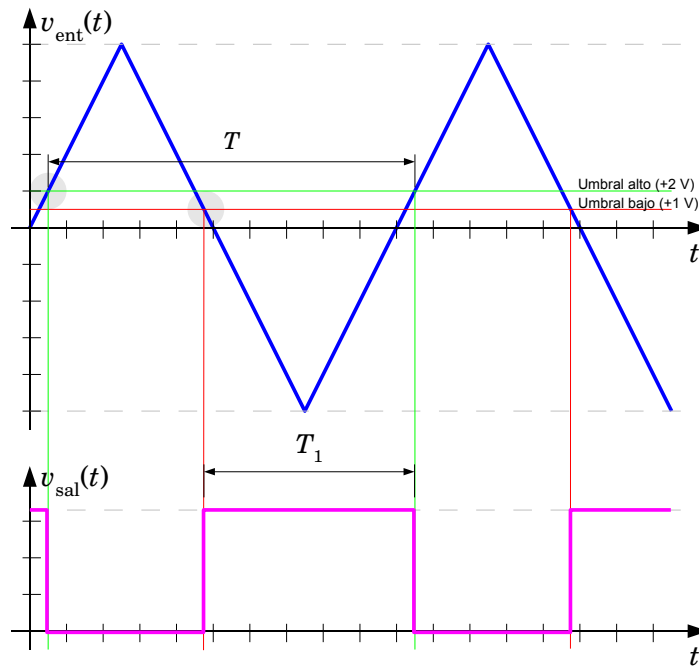


Figura A.21: Análisis de la señal de salida; escala horizontal para ambos gráficos:  $100 \mu\text{s}/\text{div}$ ; escala vertical para el gráfico de  $v_{\text{ent}}$ :  $2 \text{ V}/\text{div}$ ; escala vertical para el gráfico de  $v_{\text{sal}}$ :  $1 \text{ V}/\text{div}$ . Los círculos grises indican regiones que se analizan ampliadas en la siguiente figura; las líneas verticales de color verde marcan los instantes de conmutación por cruce del nivel alto ( $+2 \text{ V}$ ), de  $+3,3 \text{ V}$  a  $0 \text{ V}$ ; las líneas verticales de color rojo marcan los instantes de conmutación por cruce del nivel bajo ( $+1 \text{ V}$ ), de  $0 \text{ V}$  a  $+3,3 \text{ V}$ . Debido a la histéresis del comparador,  $T_1 \neq T/2$ , a pesar de lo que la figura pudiera sugerir a primera vista.

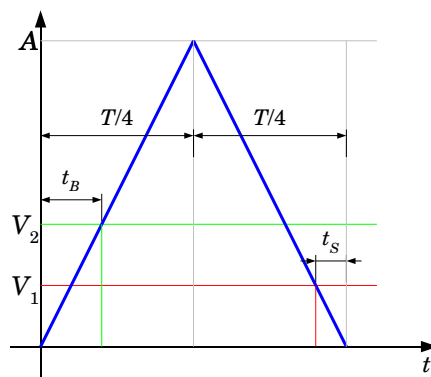


Figura A.22: Análisis de la conmutación de la señal de salida.

De aquí se obtiene<sup>24</sup>

$$u_{T_1} \approx \frac{\frac{V_2+V_1}{A}}{2 + \frac{V_2+V_1}{A}} u_A = \frac{3/10}{2 + 3/10} \times 0,1 \approx 0,013 = 1,3 \%$$

Es bastante evidente que la incertidumbre de  $T_1$  es tanto menor cuanto mayor sea la amplitud de la señal en comparación con los umbrales de conmutación.

**Cálculo alternativo** Sin necesidad de aplicar el cálculo aproximado rigurosamente, se entiende que:

$$\text{Extremos de } T_1: \begin{cases} T_1 & \text{es máximo cuando } A \text{ es mínimo} \\ T_1 & \text{es mínimo cuando } A \text{ es máximo} \end{cases}$$

Esto se entiende fácilmente a partir de la Fig. A.22, o bien aritméticamente a partir de (A.11).

Luego (tiempos en ms, cálculos aproximados a tres dígitos significativos):

$$T_{1,\min} = \frac{T}{4} \left( 2 + \frac{V_2 + V_1}{1,1 \times A} \right) = \frac{T}{4} \times \left( 2 + \frac{3}{11} \right) \approx 0,568$$

$$T_{1,\max} = \frac{T}{4} \left( 2 + \frac{V_2 + V_1}{0,9 \times A} \right) = \frac{T}{4} \times \left( 2 + \frac{3}{9} \right) \approx 0,583$$

$$\text{Por lo tanto, } \begin{cases} \overline{T_1} &= \frac{T_{1,\min} + T_{1,\max}}{2} \approx 0,576 \\ u_{T_1} &= \left| \frac{T_{1,\max} - T_{1,\min}}{2\overline{T_1}} \right| \approx 0,0130 = 1,3 \% \end{cases}$$

**Observaciones finales** A partir de los cálculos anteriores, queda claro que *la incertidumbre en la amplitud de la entrada induce incertidumbre en el intervalo de tiempo durante el cual la salida está en nivel alto*; cabe preguntarse si dicha incertidumbre temporal:

1. Se manifiesta como incertidumbre en el factor de servicio  $\delta$
2. Se manifiesta como incertidumbre en el período  $T$

Se verá por separado cada caso, sin perjuicio de que ambas situaciones se puedan manifestar simultáneamente.

Respecto al ítem 1 de la lista: admitiendo que el período permanece invariable (cuestión que se presenta a debate, pero puede ser zanjado sugiriendo que la incertidumbre de  $T$  es mucho menor que cualquier otra que se presente en los cálculos<sup>25</sup>), incertidumbre en  $T_1$  se traduce automáticamente en incertidumbre en  $\delta$ ; como  $T_1 + T_0 = T$ , resulta  $U_{T_1} = U_{T_0} \Leftrightarrow u_{T_1} = u_{T_0}$ , y  $u_\delta = u_{T_1/T} = u_{T_1} + u_T \equiv u_{T_1}$ ; obsérvese que cuando hay fluctuación en  $T$ , los cálculos hechos anteriormente deben ser ajustados a la nueva situación, y se complican un poco.

<sup>24</sup>Está claro que la fórmula es válida si los umbrales de conmutación son *menores* que el menor valor posible de la amplitud.

<sup>25</sup>De cualquier manera, la incertidumbre de  $T$  es una propiedad de la señal, es decir, “externa” a la operación del comparador.

Respecto al ítem 2 de la lista: se refiere acá a la incertidumbre de origen “interno”, esto es, a la incertidumbre de un CU midiendo en modo Período la señal propuesta; las variaciones de la amplitud pueden ser “lentas”, esto es  $\Delta A/A$  es extremadamente pequeña durante un período de la señal; en este caso, desde el punto de vista práctico, la incertidumbre en la determinación experimental del período es casi 0, puesto que la variación de amplitud se manifiesta en una variación del instante de transición de la salida en forma “pareja” período tras período; no obstante, cuando la variación relativa de  $A$  no es pequeña y ocurre en un intervalo de tiempo comparable con el período, ya existe una incertidumbre apreciable inducida en la medición de  $T$ ; el caso más claro de visualizar es aquél en el cual las variaciones de  $A$  están relacionadas con ruido, en el cual variaciones importantes de amplitud ocurren en intervalos de tiempo que pueden ser comparables con  $T$  o aun más breves; en este caso, la medición de período sí se ve afectada.

## A.8. Problema 7: medición de resistencia con V y A

(En Evaluación Integradora del 18-FEB-2009.)

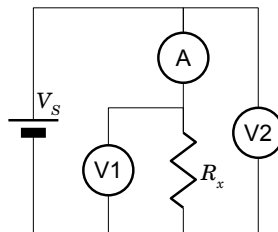


Figura A.23: Circuito de medición de resistencia con conexión mixta.

**Enunciado** Se trata de la medición de resistencia con voltímetro y amperímetro. La conexión corta (TBM<sup>26</sup>) siempre da un resultado menor que el valor verdadero, mientras que lo contrario ocurre con la conexión larga (CBM<sup>27</sup>); es decir, ambos métodos provocan *error sistemático*. Un experimentador construye una conexión combinada, pretendiendo obtener un balance entre los dos comportamientos; esto se muestra en la figura (en la cual no hay TBM ni CBM). Dicho experimentador define al valor *medido* como la media aritmética entre  $R_{m1} = V_{V1}/I_A$  y  $R_{m2} = V_{V2}/I_A$ , es decir,  $R_m = \frac{1}{2}(R_{m1} + R_{m2})$ . Aunque parece una decisión razonable, este resultado sigue teniendo error sistemático; demostrar esta afirmación; ¿el error sistemático depende de la ddp de la batería?. No obstante, hay un valor de  $R_x$  para el cual el error sistemático se anula; ¿cuál es ese valor? DATOS:  $V_S = 20$  V;  $R_{v1} = R_{v2} = 200$  k $\Omega$ ;  $R_A = 100$   $\Omega$ .

<sup>26</sup>TBM=Tensión Bien Medida.

<sup>27</sup>CBM=Corriente Bien Medida.

**Solución** El objetivo en esta parte es obtener una expresión para el error sistemático en el que incurre la medición; este es un problema casi puro de TdeC<sup>28</sup>, en el cual reemplazamos cada instrumento por su resistencia equivalente; se formulan entonces las siguientes ecuaciones:

$$\text{Intens. de corr. en el amperímetro: } I_A = \frac{V_S}{R_A + R_{V1} \parallel R_x} \quad (\text{A.12})$$

$$\text{Tensión en voltímetro V1: } V_{V1} = (R_{V1} \parallel R_x) I_A \stackrel{(\text{A.12})}{=} \frac{R_{V1} \parallel R_x}{R_A + R_{V1} \parallel R_x} V_S$$

$$\text{Tensión en voltímetro V2: } V_{V2} = V_S$$

Las resistencias medidas correspondientes son:

$$\text{Resistencias medidas: } \begin{cases} R_{m1} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{V_{V1}}{I_A} = R_{V1} \parallel R_x \\ R_{m2} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{V_{V2}}{I_A} = R_A + R_{V1} \parallel R_x \end{cases}$$

El valor de resistencia medida definida por el experimentador es la media aritmética de estos dos valores:

$$R_m = \frac{1}{2} R_A + R_{V1} \parallel R_x = \frac{1}{2} R_A + \frac{R_{V1} R_x}{R_{V1} + R_x}$$

Luego, el error sistemático relativo incurrido es

$$\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \frac{R_m - R_x}{R_x} = \frac{R_m}{R_x} - 1 = \frac{1}{2} \frac{R_A}{R_x} + \frac{R_{V1}}{R_{V1} + R_x} - 1 = \frac{1}{2} \frac{R_A}{R_x} - \frac{\frac{R_x}{R_{V1}}}{1 + \frac{R_x}{R_{V1}}}$$

A partir del análisis de esta expresión queda claro que

1. La medición tiene error sistemático; es más:
  - a) Si  $R_x$  es muy pequeño, entonces  $\varepsilon \approx \frac{1}{2} \frac{R_A}{R_x} \rightarrow \infty$ ;
  - b) Si  $R_x$  es muy grande, entonces  $\varepsilon \approx -1$ .
2. El error sistemático *no depende de la tensión de la batería*; esto surge de las ecuaciones planteadas, aunque intuitivamente puede encontrarse el mismo resultado, dado que todas las variables (tensiones e intensidades de corriente) son proporcionales a  $V_S$ .
3. Existe un valor para  $R_x$  que anula el error sistemático; en efecto, si

$$\frac{1}{2} \frac{R_A}{R_x} = \frac{\frac{R_x}{R_{V1}}}{1 + \frac{R_x}{R_{V1}}},$$

entonces resulta  $\varepsilon = 0$ ; esta afirmación se debe tomar con cierto cuidado, habida cuenta de que no hemos incluido en el análisis las inevitables *incertidumbres* de cada instrumento.

<sup>28</sup>TdeC=Teoría de Circuitos.

La condición de error sistemático nulo conduce a la siguiente ecuación algebraica para obtener el valor correspondiente de  $R_x$ , que se simbolizará con  $R_{x0}$ :

$$R_{x0}^2 - \frac{1}{2}R_A R_{x0} - \frac{1}{2}R_A R_{V1} = 0,$$

cuya única solución positiva es  $R_{x0} = \frac{1}{4}R_A \left(1 + \sqrt{1 + 8\frac{R_{V1}}{R_A}}\right)$ ; considerando que normalmente  $R_{V1} \gg R_A$  (la resistencia interna de un voltímetro es muchísimo mayor que la de un amperímetro), se puede aproximar esta expresión a:

$$R_x \text{ que produce error sistemático 0: } R_{x0} \approx \frac{1}{\sqrt{2}}R_{V1}$$

Con los datos del problema se calcula (resistencias en  $\Omega$ , precisión del cálculo 1 %)  $R_{x0} \approx 200000/\sqrt{2} \approx 140000$ . No es una medición muy “inteligente”, dado que las resistencias internas de los voltímetros dependen del rango de medición, y que éste no “sigue” al valor de la resistencia a medir; entonces, la condición de anulación del error sistemático es más una casualidad que una ocurrencia natural. Las conexiones de TBM ó CBM son *más simples* y cumplen igualmente con el objetivo.

## A.9. Problema 8: conversor AD doble rampa

(En Evaluación Integradora del 08-AGO-2007.)

**Enunciado** Explique el principio de funcionamiento de un ADC<sup>29</sup> que usa la técnica de *doble rampa* (este circuito es la base de muchos MMD<sup>30</sup> de bajo costo); use un diagrama de bloques y una explicación tan poco matemática como le resulte posible; indique cada intervalo del ciclo de conversión, y explique conceptualmente qué ocurre en cada uno de ellos.

**Solución** El objetivo básico de este tipo de conversor es transformar una *medición absoluta de tensión*, en una *medición relativa de tensión en combinación con una medición absoluta de una relación de intervalos de tiempo*; como tecnológicamente es mucho más fácil obtener una medición precisa de tiempo que de tensión (al menos en el terreno de la instrumentación de bajo y mediano costo), la medición resultante es *precisa* (la *exactitud* requerirá de una calibración), con el beneficio adicional de proveer una medición desprovista de *incertidumbre de lectura*. Ahora a los detalles.

Los bloques funcionales que componen este conversor son:

1. Una *referencia de tensión* (abrev. REF), calibrada para brindar una tensión bien conocida (exacta y precisa), con alta estabilidad ante factores internos (ruidos y derivas), y alta inmunidad ante influencias externas (temperatura, tensión de alimentación, etc.);

<sup>29</sup>ADC=*Analog to Digital Converter*=conversor analógico-digital (la frase más correcta sería “convertidor analógico a digital”).

<sup>30</sup>MMD=Múltímetro Digital.

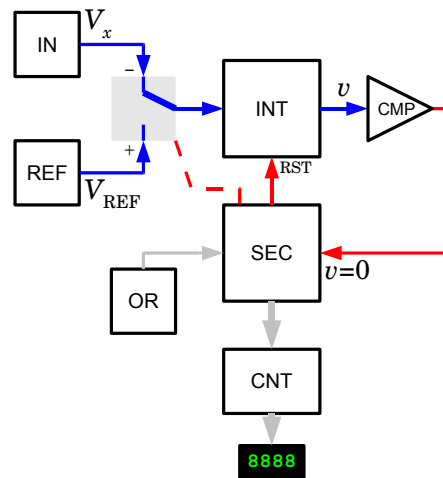


Figura A.24: Conversor de doble rampa; los caminos en azul son señales analógicas, en rojo, digitales.

2. Un *integrador* (abrev. INT), que provee una salida de tensión que es proporcional a la integral de la tensión de entrada (incluye la constante de integración, que se fija como condición inicial)
3. Un *comparador* de tensión de precisión (abrev. CMP);
4. *Llaves* electrónicas, para cambiar la configuración del circuito presentada en las distintas fases del proceso de conversión;
5. Un *oscilador de referencia* (abrev. OR), con una frecuencia altamente estable;
6. Un sistema digital de conteo de pulsos (abrev. CNT) entregados por el OR;
7. Un sistema digital de control de la secuencia de operaciones (abrev. SEC), también llamado *secuenciador*.

El procedimiento de conversión puede dividirse en tres fases, comandadas por SEC, cuya operación se explica a continuación:

1. **Ajuste a cero.** En esta fase todas las tensiones y corrientes se ajustan a valores que permitan definir el comportamiento de las dos siguientes fases sin errores residuales, como ejemplo:
  - INT se inicializa para que la salida sea 0 con entrada 0
  - CMP se inicializa para reducir a 0 los residuos de tensión de salida
2. **Integración.** Esta fase tiene una duración de tiempo prefijada, medida en pulsos del OR, y se aplica al integrador la tensión a medir (que se supone constante durante toda esta fase) invertida,  $-V_x$ ; dado que la condición

#### A.10. PROBLEMA 9: ADAPTACIÓN DE UN CABLE

31

inicial del integrador es nula (se lo ajustó en la fase anterior), la salida resulta:

$$v_S(t) = -K_i V_x t,$$

donde  $K_i$  es una constante estructural de INT; al finalizar la fase de integración un tiempo  $T_i$  después, la salida es  $v_S(T_i) = V_{xi} = -K_i V_x T_i$ ; este es el valor inicial de la salida para la fase siguiente.

3. **Des-integración** En esta fase se aplica la tensión de REF,  $V_{REF}$  a la entrada del integrador, con polaridad inversa a la de  $V_x$  y entonces:

$$v_S(t) = V_{xi} + K_i V_{REF} t = -K_i V_x T_i + K_i V_{REF} t = K_i V_{REF} \left( t - \frac{V_x}{V_{REF}} T_i \right)$$

CMP determina cuándo  $v_S$  alcanza a 0, siendo este tiempo  $T_d$  medido (contando los pulsos del OR que transcurren durante esta fase); se tiene  $T_d = \frac{V_x}{V_{REF}} T_i$ , de donde se deduce que:

$$V_x = \frac{T_d}{T_i} V_{REF} = \frac{N_d}{N_i} V_{REF},$$

donde  $(N_d | N_i)$  es la cantidad de pulsos contados por CNT (de la misma referencia de temporización) durante el intervalo de tiempo de (des-)integración.

Para que la lectura sea directa en un visualizador, se puede hacer que  $V_{REF} = 2$  V y  $N_i = 2000$ ; luego, si por ejemplo,  $V_x = 0,497$  V, resulta  $N_d = 1000 \times V_x = 497$ , así que se deben contar los pulsos ocurridos sólo durante el intervalo de tiempo de des-integración.

Dado que los pulsos se cuentan de *la misma fuente*, y si se supone que la estabilidad de OR es muy buena, no es difícil encontrar que  $u_{V_x} \approx u_{V_{REF}}$ , y la *exactitud* se resuelve con un ajuste hecho contra un *patrón* de tensión. Luego, la incertidumbre en la medida de tensión está limitada por la de la tensión de referencia; ésta se convierte en el elemento más crítico de un voltímetro basado en la técnica de doble rampa.

### A.10. Problema 9: adaptación de un cable

(En Evaluación Integradora del 25-FEB-2009.)

#### Enunciado

1. ¿Qué entiende por impedancia característica de un cable?;
2. ¿Qué entiende por desadaptación de un cable?;
3. ¿Cuántas variantes de desadaptación conoce?;
4. ¿Cuál es el problema con la desadaptación cuando se hace una medición?;
5. ¿Cómo puede resolverse?;
6. Ud. ha hecho mediciones con los cables desadaptados en casi todos los experimentos; ¿porqué no ha tenido problemas con esto?

**Solución** Se asume que un cable no es ni más ni menos que una línea de transmisión de longitud finita  $D$ ; se asume también que las pérdidas son muy bajas, o bien que la longitud del cable es lo suficientemente “pequeña” como para ignorar las pérdidas de energía en el cable, en comparación con la energía provista por la fuente de señal, o la energía entregada por el cable a su carga; luego, hay muy poca *atenuación* y/o *dispersión*<sup>31</sup>.

Respuestas a las preguntas:

1. La impedancia característica de un cable puede definirse de varias maneras, físicamente equivalentes:
  - a) Es la resistencia equivalente “vista” por un generador cuando excita un cable de las mismas características físicas intrínsecas, pero de longitud infinita;
  - b) Es la resistencia con la cual hay que cargar el cable para que no haya reflexión de la onda de tensión o de intensidad de corriente en el extremo de la carga;
  - c) Es la resistencia con la cual hay que cargar el cable para que en el extremo generador se “vea” esta misma resistencia, con cualquier tipo de señal;
  - d) Es el parámetro intrínseco del cable determinado por la siguiente fórmula  $R_0 = \sqrt{l/c}$ , donde  $l$  es la inductancia específica y  $c$  es la capacitancia específica.
2. El cable de longitud finita tiene dos extremos:
  - a) El extremo “generador”, que es donde se inyecta señal hacia dentro del cable por medio de un circuito *productor* de energía;
  - b) El extremo “carga”, que es de donde sale la energía del cable para proveer a un circuito *receptor* de energía.

Si la resistencia de Thévenin del generador, o la resistencia de carga tienen valores *distintos* de la resistencia característica del cable, éste se considera “desadaptado”:

3.
  - a) Cuando  $R_{Th} \neq R_0$ , se dice que está **desadaptado en el generador**;
  - b) Cuando  $R_{carga} \neq R_0$ , se dice que está **desadaptado en la carga**.

Naturalmente, se pueden dar ambas desadaptaciones al mismo tiempo.

4. Por lo visto en la respuesta 1b, si el cable está desadaptado, hay reflexiones de la onda de tensión o corriente; esto implica por sí solo una *distorsión* de la señal cuando llega a la carga, o cuando entra al cable en el extremo generador; *el sistema de medición mide una señal que no es la que originalmente se generó*, si no que contiene superpuestas perturbaciones, generadas por el proceso indeseado de reflexión en alguno de los extremos; esto es un problema para la medición, agregando incertidumbre.

<sup>31</sup>No siempre estas condiciones se cumplen en una medición; es importante reconocer cuál es el caso antes de hacer mediciones.



A.11. PROBLEMA 10: CONEXIÓN EN SERIE DE VOLTÍMETROS 33

5. La desadaptación se puede resolver agregando en el extremo generador o en el extremo carga *circuitos de adaptación*; por ejemplo, si la resistencia Thévenin del generador  $R_{Th}$  es menor que la resistencia característica del cable, se puede agregar una resistencia en serie  $R_s$  con el generador, de tal forma que  $R_0 = R_{Th} + R_s$ ; el costo de esto es agregar atenuación (pérdida de energía en  $R_s$ ).
6. En los experimentos hechos en el laboratorio casi siempre las señales tienen tiempos de transición no nulos, del orden de unas *decenas* de ns; los cables son *cortos* (algunos pocos m), y por lo tanto, a las velocidades de propagación esperadas (entre 50 % y 80 % de la velocidad de la luz), el tiempo que tarda el frente de onda para recorrer el cable de extremo a extremo, ida y vuelta (igual a  $2t_D = 2D/c$ , no más de 15 a 20 ns) es *menor* que el TT intrínseco del generador; luego, cualquier distorsión de la señal ocurrida por desadaptación queda relativamente “escondida” en los flancos “lentos” de la señal; este es el motivo por el cual no se han afectado visiblemente las mediciones hechas.

### A.11. Problema 10: conexión en serie de voltímetros

(En Evaluación Integradora del 20-AGO-2009.)

**Enunciado** Se conectan dos voltímetros basados en un IBM *en serie* con el fin de aumentar el alcance de una medición:

1. V1 tiene un alcance de 200 V, una sensibilidad de 100 k $\Omega$ /V, y es de clase 0,5
2. V2 tiene un alcance de 100 V, una sensibilidad de 10 k $\Omega$ /V, y es de clase 2

Responda a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es el alcance del voltímetro compuesto?;
2. ¿Cuál es la sensibilidad del voltímetro compuesto?;
3. ¿Cuál es la clase del voltímetro compuesto?.

**Solución** En primer lugar, con los datos de cada instrumento se pueden determinar:

- Intensidad de fondo de escala de cada voltímetro:

$$V1: I_1^{FS} = 1 / (100 \text{ k}\Omega/\text{V}) = 10 \text{ }\mu\text{A}$$

$$V2: I_2^{FS} = 1 / (10 \text{ k}\Omega/\text{V}) = 100 \text{ }\mu\text{A}$$

- Resistencia interna de cada voltímetro:

$$V1: R_{V1} = S_{V1} V_1^{FS} = 100 \text{ k}\Omega/\text{V} \times 200 \text{ V} = 20 \text{ M}\Omega$$

$$V2: R_{V2} = S_{V2} V_2^{FS} = 10 \text{ k}\Omega/\text{V} \times 100 \text{ V} = 1 \text{ M}\Omega$$

Se responden las preguntas:

- Respuesta a 1: Cuando se conectan en serie:
  1. los voltímetros *suman* sus resistencias internas; consecuentemente, la resistencia interna del voltímetro compuesto es  $R_V = R_{V1} + R_{V2} = 20 \text{ M}\Omega + 1 \text{ M}\Omega = 21 \text{ M}\Omega$ ;
  2. la intensidad de fondo de escala es la menor de los dos, dado que de lo contrario, uno de los voltímetros se iría de alcance; esto es  $I^{\text{FS}} = \min(I_1^{\text{FS}}, I_2^{\text{FS}}) = \min(10 \text{ }\mu\text{A}, 100 \text{ }\mu\text{A}) = 10 \text{ }\mu\text{A}$ .

En la condición de fondo de escala del voltímetro compuesto, la caída de tensión total es  $V^{\text{FS}} = I^{\text{FS}} R_V = 10 \text{ }\mu\text{A} \times 21 \text{ M}\Omega = 210 \text{ V}$ ; en resumen, *el alcance del voltímetro compuesto es de 210 V*.

- Respuesta a 2: *La sensibilidad del voltímetro compuesto es, como siempre, la inversa de la intensidad de corriente de fondo de escala*, es decir,  $1/(10 \text{ }\mu\text{A}) = 100 \text{ k}\Omega/\text{V}$ ; otra forma de verlo es pensar que  $S_V = 1/I^{\text{FS}} = R_V/V^{\text{FS}} = (21 \text{ M}\Omega)/(210 \text{ V}) = 100 \text{ k}\Omega/\text{V}$ .
- Respuesta a 3: Como no se especifica la cantidad de divisiones de la escala, no se puede conocer la incertidumbre de lectura; arbitrariamente se supondrá que ésta es cero. La incertidumbre absoluta de cada voltímetro queda definida por su clase:  $U_{V1} = \text{Clase}_{V1} V_1^{\text{FS}} = 0,5\% \times 200 \text{ V} = 1 \text{ V}$ ;  $U_{V2} = \text{Clase}_{V2} V_2^{\text{FS}} = 2\% \times 100 \text{ V} = 2 \text{ V}$ ; asumiendo el peor caso, y dado que las tensiones medidas deben sumarse, resulta que la incertidumbre absoluta del voltímetro compuesto es  $U_V = U_{V1} + U_{V2} = 1 \text{ V} + 2 \text{ V} = 3 \text{ V}$ ; *la clase del voltímetro compuesto es esta incertidumbre referida al correspondiente fondo de escala*:  $\text{Clase}_V = U_V/V^{\text{FS}} = 3 \text{ V}/210 \text{ V} = 1,4\%$ .

## A.12. Problema 11: incertidumbre en medición CBM

(En Evaluación Integradora del 27-AGO-2009.)

**Enunciado** Se efectúa el experimento de *medición de resistencia* con voltímetro (V) y amperímetro (A), usando la *conexión larga* (CBM<sup>32</sup>). La fuente de alimentación  $V_S$  es variable con un rango desde 5 V hasta 15 V. Tanto A como V son de *clase 1* en CC. La sensibilidad de V es de  $50 \text{ k}\Omega/\text{V}$ , y se le puede dar dos alcances: 10 V y 50 V; A tiene una resistencia equivalente de  $1 \text{ k}\Omega$ , y un alcance de 1 mA; ambos instrumentos tienen una escala con 50 divisiones. Si se requiere que la incertidumbre de la medición de  $R_x$  sea siempre menor a 5% para cualquier valor de  $V_S$  dentro de su rango, determinar el intervalo práctico de valores medibles para  $R_x$ .

**Solución** Hay que dividir la solución en dos partes, dado que mientras se varía  $V_S$  dentro del rango enunciado, es necesario cambiar el alcance de V.

La siguiente relación (véase la Fig. A.26):

<sup>32</sup>CBM=Corriente Bien Medida.

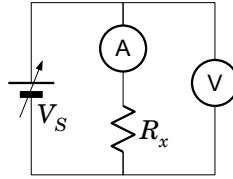


Figura A.25: Circuito del Problema 11.

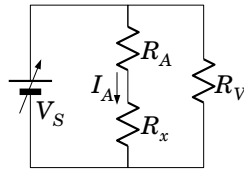


Figura A.26: Diagrama de análisis; se han remplazado los instrumentos por sus resistencias equivalentes

$$R_x = \frac{V_S}{I_A} - R_A, \quad (\text{A.13})$$

se usará para el cálculo de incertidumbres; asumiendo que cada magnitud con incertidumbre se puede escribir  $X = \bar{X}(1 \pm u_X)$ , y que  $u_X \ll 1$  en todos los casos, resultará (nótese que  $R_A$  no tiene incertidumbre, según la especificación brindada en el enunciado)

$$u_{R_x} = \frac{\bar{V}_S}{\bar{R}_x \bar{I}_A} (u_{V_S} + u_{I_A}) = \frac{1}{\bar{R}_x \bar{I}_A} \left( U_{V_S} + \frac{\bar{V}_S}{\bar{I}_A} U_{I_A} \right)$$

Si se tiene en cuenta que  $\bar{V}_S/\bar{I}_A = \bar{R}_x + R_A$  (véase (A.13)), también se podrá escribir la incertidumbre de  $R_x$  como función de la tensión de la fuente:

$$u_{R_x} = \frac{1}{\bar{V}_S \bar{R}_x} (R_A + \bar{R}_x) (U_{V_S} + (R_A + \bar{R}_x) U_{I_A}) \quad (\text{A.14})$$

Esta fórmula indica, razonablemente, que la peor situación respecto a la incertidumbre de medición de  $R_x$  es tener una tensión de fuente baja. Obsérvese que las incertidumbres absolutas  $U_{V_S}$  y  $U_{I_A}$  son las que introducen los instrumentos V y A, respectivamente; éstas serán calculadas en lo que sigue.

**Parte 1:**  $5 \text{ V} \leq V_S \leq 10 \text{ V}$  Lo primero que hay que verificar es que A no exceda su alcance, esto es, que la intensidad de corriente por A sea menor a 1 mA. Ahora bien,

$$I_A = \frac{V_S}{R_A + R_x} \quad \Leftrightarrow \quad I_A^{\text{FS}} \geq \frac{V_{S,\text{máx}}}{R_A + R_x},$$

de donde se desprende que hay un valor mínimo para  $R_x$ ; en efecto, para que A no exceda su alcance, debe cumplirse que

$$R_x \geq \frac{V_{S,\text{máx}}}{I_A^{\text{FS}}} - R_A = \frac{10 \text{ V}}{1 \text{ mA}} - 1 \text{ k}\Omega = 9 \text{ k}\Omega$$

Cualquier valor de  $R_x$  por encima de  $9 \text{ k}\Omega$  produce una intensidad de corriente por A que es menor que su fondo de escala; pero esto también indica que, si  $R_x$  es muy grande,  $I_A$  puede llegar a ser tan baja (relativa a  $I_A^{\text{FS}}$ ) que la incertidumbre de su medida crece hasta superar su límite aceptable; se calcularán a continuación las incertidumbres *absolutas* de A y de V:

$$\text{Amperímetro: } \begin{cases} U_A^{\text{Clase}} &= \text{Clase}_A I_A^{\text{FS}} = 0,01 \times 1 \text{ mA} = 10 \text{ }\mu\text{A} \\ U_A^{\text{Lect.}} &= \frac{1}{2} \frac{I_A^{\text{FS}}}{\text{Div}_A} = \frac{1}{2} \frac{1 \text{ mA}}{50} = 10 \text{ }\mu\text{A} \\ U_A &= U_A^{\text{Clase}} + U_A^{\text{Lect.}} = 10 \text{ }\mu\text{A} + 10 \text{ }\mu\text{A} = 20 \text{ }\mu\text{A} \end{cases}$$

$$\text{Voltímetro: } \begin{cases} U_V^{\text{Clase}} &= \text{Clase}_V V^{\text{FS}} = 0,01 \times 10 \text{ V} = 0,1 \text{ V} \\ U_V^{\text{Lect.}} &= \frac{1}{2} \frac{V^{\text{FS}}}{\text{Div}_V} = \frac{1}{2} \frac{10 \text{ V}}{50} = 0,1 \text{ V} \\ U_V &= U_V^{\text{Clase}} + U_V^{\text{Lect.}} = 0,1 \text{ V} + 0,1 \text{ V} = 0,2 \text{ V} \end{cases}$$

Cuando se está midiendo  $R_x$  según este método, hay tanto *error sistemático* como *incertidumbre*; el error sistemático puede ser fácilmente *corregido* puesto que se dispone de una fórmula, la (A.13), que vincula las lecturas de A y V con  $R_x$ : se vé que el error sistemático es positivo, es decir, la relación entre la lectura nominal de V y la de A,  $\bar{V}_S/\bar{I}_A$ , es mayor que el “verdadero valor” de  $R_x$ , siendo la diferencia precisamente  $R_A$ . Para la incertidumbre se usará (A.14) en el peor caso para  $V_S$  dentro del rango, que adaptada a esta situación es (usando como unidades V, mA y  $\text{k}\Omega$ ):

$$u_{R_x} = \frac{1}{5 \times \bar{R}_x} (1 + \bar{R}_x) (0,2 + (1 + \bar{R}_x) \times 0,02) = \frac{\bar{R}_x^2 + 12\bar{R}_x + 11}{250\bar{R}_x}$$

Es importante comprobar que para los valores válidos de  $\bar{R}_x$  se cumpla que la incertidumbre sea menor que 5 %, que es el requisito del problema; primero obsérvese que  $u_{R_x}$  como función de  $\bar{R}_x$  tiene un mínimo cuando  $\bar{R}_x = 3,32 \text{ k}\Omega$ ; entonces, para  $\bar{R}_x \geq 9 \text{ k}\Omega$ , la función está en su sección creciente (esto es,  $u_{R_x}$  crece cuando  $\bar{R}_x \geq 9 \text{ k}\Omega$ ); ahora bien, para  $\bar{R}_x = 9 \text{ k}\Omega$  se tiene:

$$u_{R_x} = \frac{9^2 + 12 \times 9 + 11}{250 \times 9} = \frac{200}{2250} = 0,0889 = 8,89 \% > 5 \%$$

La consecuencia es que cualquier valor de  $R_x$  que se use en el experimento, y que mantenga a los instrumentos dentro de sus alcances, da una incertidumbre de medición mayor al 5 %.

**Parte 2:**  $10 \text{ V} \leq V_S \leq 15 \text{ V}$  Se verifica nuevamente que A no exceda su alcance, esto es, que la intensidad de corriente por A sea menor a 1 mA; se tiene  $I_A^{\text{FS}} \geq \frac{V_{S,\text{máx}}}{R_A + R_x}$ , de donde resulta  $R_x \geq 14 \text{ k}\Omega$ .

A.12. PROBLEMA 11: INCERTIDUMBRE EN MEDICIÓN CBM

37

Se recalculan las incertidumbres *absolutas* de V, puesto que ha cambiado el alcance:

$$\text{Voltímetro: } \begin{cases} U_V^{\text{Clase}} &= \text{Clase}_V V^{\text{FS}} = 0,01 \times 50 \text{ V} = 0,5 \text{ V} \\ U_V^{\text{Lect.}} &= \frac{1}{2} \frac{V^{\text{FS}}}{\text{Div}_V} = \frac{1}{2} \frac{50 \text{ V}}{50} = 0,5 \text{ V} \\ U_V &= U_V^{\text{Clase}} + U_V^{\text{Lect.}} = 0,5 \text{ V} + 0,5 \text{ V} = 1 \text{ V} \end{cases}$$

Para la incertidumbre recalculada se usa nuevamente (A.14) (usando como unidades V, mA y kΩ):

$$u_{R_x} = \frac{1}{10 \times \bar{R}_x} (1 + \bar{R}_x) (1 + (1 + \bar{R}_x) \times 0,02) = \frac{\bar{R}_x^2 + 52\bar{R}_x + 51}{500\bar{R}_x},$$

que tiene un mínimo cuando  $\bar{R}_x = 7,14 \text{ k}\Omega$ ; entonces, para  $\bar{R}_x \geq 14 \text{ k}\Omega$ ,  $u_{R_x}$  como función de  $\bar{R}_x$  está en su sección creciente; cuando  $\bar{R}_x = 14 \text{ k}\Omega$  resulta

$$u_{R_x} = \frac{14^2 + 52 \times 14 + 51}{500 \times 14} = \frac{975}{7000} = 0,139 = 13,9\% > 5\%$$

Al igual que en la Parte 1, la consecuencia es que cualquier valor de  $R_x$  que se use en el experimento, y que mantenga a los instrumentos dentro de sus alcances, da una incertidumbre de medición mayor al 5 %.

La respuesta final del problema puede enunciarse así:

*No hay ningún valor de  $R_x$  que se pueda medir con una incertidumbre menor a 5 %, dadas las características de los instrumentos y la tensión de alimentación variable en el rango especificado.*

Esto deja en evidencia que a veces no es posible hacer mediciones con una dada incertidumbre objetivo; y que el remedio puede ser cambiar las características de algunos elementos del experimento.

**Observaciones** El gráfico de la Fig. A.27 muestra  $u_{R_x}$  en función de  $R_x$  para el esquema de medición del presente problema (CBM).

El valor marcado como  $R_{x,\text{mín}}$  es el límite impuesto por el alcance de A, y se muestra tal que es mayor que el mínimo valor de  $u_{R_x}$  (bien podría estar “al otro lado” del punto de mínimo: es el caso en el cual el alcance de A es muy grande; el problema que tiene esto es que el método es poco apropiado, dado que la caída de tensión en  $R_A$  se hace muy notoria, esto es, el error sistemático de la medición comienza a ser relevante).

El valor  $R_{x,\text{máx}}$  es el límite impuesto por la incertidumbre de la medición: cuanto mayor es  $R_x$ , menor es la deflexión de A, y las incertidumbres de clase y lectura crecen sustancialmente. Obsérvese que cuando  $R_x \gg R_A$ , el error sistemático introducido por el amperímetro es completamente despreciable, y se llega a la relación “evidente”  $u_{R_x} \approx u_V + u_A$ , y la incertidumbre de A comienza a dominar sobre la de V.

El caso de este problema tiene que el valor especificado de incertidumbre,  $u_{R_x,\text{esp}}$  es menor que la mínima incertidumbre posible de alcanzar; en el gráfico, la línea de  $u_{R_x,\text{esp}}$  estaría por debajo de la línea de  $u_{R_x,\text{mín}}$ ; en otras palabras,

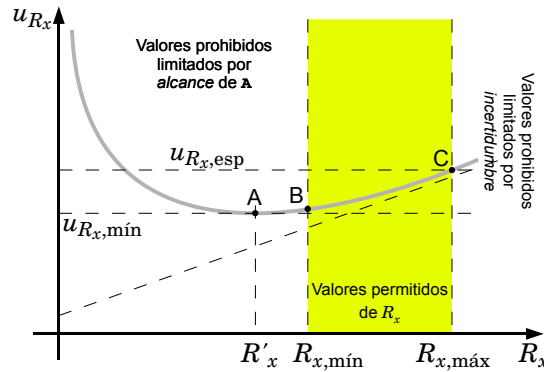


Figura A.27: Incertidumbre en la medición de  $R_x$  por el método de CBM; el gráfico representa la función  $u_{R_x} = \frac{1}{V_S \bar{R}_x} (R_A + \bar{R}_x) (U_V + (R_A + \bar{R}_x) U_A)$ , donde  $U_A$  ( $U_V$ ) representa la incertidumbre absoluta del amperímetro (voltímetro), suma de la de clase y la de lectura ( $\frac{1}{2}$  división mínima). Para  $R_x$  muy pequeño,  $u_{R_x} \approx \frac{R_A(U_V + R_A U_A)}{V_S \bar{R}_x}$ ; mientras que, para  $R_x$  muy grande,  $u_{R_x} \approx \frac{U_V + \bar{R}_x U_A}{V_S}$ .

la “zona permitida” es nula. Se calculará este último valor; para ello se deriva la expresión de  $u_{R_x}$  respecto de  $\bar{R}_x$  y se iguala a 0:

$$\frac{\partial u_{R_x}}{\partial \bar{R}_x} = \frac{U_A \bar{R}_x^2 - R_A (U_V + R_A U_A)}{V_S \bar{R}_x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{R}'_x = R_A \sqrt{1 + \frac{U_V}{R_A U_A}}$$

En la Parte 1, la raíz cuadrada vale 3,32, mientras que en la parte 2 vale 7,14. Se puede calcular la incertidumbre mínima alcanzable:

$$u_{R_x, \text{mín}} = u_{R_x} |_{\bar{R}_x = \bar{R}'_x} = 2 \frac{U_V}{V_S} \frac{1}{\alpha} \left( 1 + \frac{\alpha}{2} + \sqrt{1 + \alpha} \right), \text{ donde } \alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{U_V}{R_A U_A}$$

Usando el criterio de peor caso, en la Parte 1 se tiene  $\alpha = 10$ , y por lo tanto,  $u_{R_x, \text{mín}} = 1,86 U_V / \bar{V}_S = 1,86 \times 0,2/5 = 0,0745 = 7,45\%$ ; en la parte 2,  $\alpha = 50$ , y  $u_{R_x, \text{mín}} = 1,33 U_V / \bar{V}_S = 1,33 \times 1/10 = 0,133 = 13,3\%$ ; en ninguno de los dos casos la incertidumbre mínima está por debajo de la especificada, aún si A no saliera de su alcance, haciendo imposible cumplir con el requisito de la medición en lo que a incertidumbre se refiere.

Está claro que cuanto mayor sea la tensión de la fuente para ensayo,  $V_S$ , menores serán las incertidumbres, siempre y cuando no salgamos del alcance de los instrumentos; este experimento hubiera mejorado si a  $V_S$  se le da la oportunidad de variar desde 10 V hasta 50 V; por ejemplo, para  $V_S = 50$  V se hubiera tenido  $u_{R_x, \text{mín}} = 1,33 U_V / \bar{V}_S = 1,33 \times 1/50 = 0,0266 = 2,66\%$ , menor que el 5% especificado en el enunciado. Además, cuanto mayor sea la relación  $\alpha = U_V / (R_A U_A)$ , mejor será el resultado de la medición.

### A.13. Problema 12: línea de transmisión discreta

(No se ha incluido en ninguna evaluación; da una descripción simple del comportamiento teórico de una línea de transmisión.)

**Enunciado** El modelo de una *línea de transmisión sin pérdidas no balanceada semi-infinita* consiste en una cascada de etapas idénticas con forma de letra L invertida, tal como se muestra en la Fig. A.28.

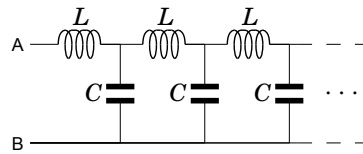


Figura A.28: Modelo discreto de una línea de transmisión sin pérdidas, no balanceada, y semi-infinita.

$L$  representa el almacenamiento de energía magnética asociada a la corriente que tiene que existir para “llenar” de carga eléctrica a la línea;  $C$  representa el almacenamiento de energía electrostática asociada al campo eléctrico en el dieléctrico que separa a los dos conductores de la línea (por haber exceso de carga en un conductor, y defecto de carga en el otro). Demuestre que la impedancia equivalente  $Z_{eq}$  que “vería” una fuente conectada entre los terminales A y B está dada por

$$Z_{eq} = R_0 \sqrt{1 - \left( \frac{\omega}{\omega_{crít}} \right)^2} + j \frac{L}{2} \omega, \quad (A.15)$$

donde  $R_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{L/C}$  se denomina **resistencia característica**, y  $\omega_{crít} = 2/\sqrt{CL}$  se denomina **pulsación crítica**.

**Solución** Véase la Fig. A.29. La cascada de secciones elementales CL es una estructura *iterativa*; el resultado de separar de la cascada infinita una *sección elemental* CL, deja como “resto” una cascada semi-infinita, idéntica en todos los aspectos a la original. La cascada semi-infinita tiene una impedancia equivalente  $Z_{eq}$ , pero también tiene esta impedancia el “resto” antedicho.

Entonces, se debe cumplir

$$Z_{eq} = jL\omega + \frac{1}{jC\omega + Z_{eq}^{-1}} \quad \Leftrightarrow \quad Z_{eq} (jC\omega + Z_{eq}^{-1}) = jL\omega (jC\omega + Z_{eq}^{-1}) + 1$$

O bien  $jC\omega Z_{eq} = -CL\omega^2 + jL\omega Z_{eq}^{-1}$ ; para determinar el valor de  $Z_{eq}$  se deben hallar las soluciones de la ecuación cuadrática:

$$Z_{eq}^2 - jL\omega Z_{eq} - \frac{L}{C} = 0$$

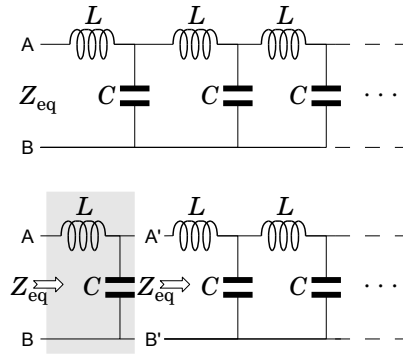


Figura A.29: Una cascada semi-infinita de secciones CL se puede concebir como una cascada de una sólo sección elemental CL con otra cascada infinita; ambas cascadas infinitas tienen una impedancia equivalente  $Z_{eq}$ .

Dichas soluciones vienen dadas por la siguiente fórmula<sup>33</sup>:

$$Z_{eq} = j\frac{L}{2}\omega + \sqrt{-\left(\frac{L\omega}{2}\right)^2 + \frac{L}{C}} = j\frac{L}{2}\omega + \sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{2/\sqrt{CL}}\right)^2}$$

Definiendo  $R_0 = \sqrt{L/C}$  y  $\omega_{crít} = 2/\sqrt{CL}$ , resulta lo pedido, es decir, la fórmula (A.15).

**Observaciones** Primero se verá cómo se interpreta (A.15) en los extremos de pulsación.

**Frecuencias “bajas”** Para  $\omega \ll \omega_{crít}$ , se puede asumir que  $Z_{eq} \approx j\frac{L}{2}\omega + R_0$ ; pero  $\frac{L}{2}\omega \ll \frac{L}{2}\omega_{crít} = \frac{L}{2} \frac{2}{\sqrt{CL}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = R_0$ . Esto es, para pulsaciones mucho menores que la crítica, la impedancia equivalente “vista” entre A y B es la de una composición en serie de un inductor de inductancia  $L/2$  con un resistor de resistencia  $R_0$ , donde la reactancia del inductor es mucho menor que la resistencia, es decir, *la impedancia equivalente es prácticamente resistiva pura de valor  $R_0$* .

**Frecuencias “altas”** Para  $\omega \gg \omega_{crít}$ , se puede asumir que  $Z_{eq} \approx j\frac{L}{2}\omega + jR_0\frac{\omega}{\omega_{crít}}$ ; pero  $\frac{R_0}{\omega_{crít}} = \frac{L}{2}$ , de modo que  $Z_{eq} \approx jL\omega$ . Esto es, para pulsaciones mucho mayores que la crítica, la impedancia equivalente “vista” entre A y B es la de un inductor de inductancia  $L$  (cuya reactancia es mucho mayor que  $R_0$ ).

Para  $\omega = \omega_{crít}$ , la impedancia equivalente es precisamente la de un inductor de inductancia  $L/2$ , pero este hecho no tiene relevancia para el análisis.

En resumen, si  $\omega \geq \omega_{crít}$ , la línea de transmisión discreta no absorbe energía en promedio; dicha absorción sólo ocurre si la pulsación es menor que la crítica, siendo el extremo las muy bajas frecuencias, en el cual la cascada se comporta

<sup>33</sup>La raíz cuadrada en  $\mathbb{C}$  tiene siempre dos valores; sobreentendiendo ésto, no se ha usado el signo “ $\pm$ ” como es habitual en la fórmula de las raíces de la ecuación cuadrática.



A.13. PROBLEMA 12: LÍNEA DE TRANSMISIÓN DISCRETA

41

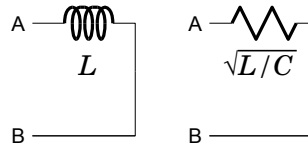


Figura A.30: Modelos de la línea para frecuencias altas (izquierda,  $\omega \gg \omega_{\text{crít}}$ ) y frecuencias bajas (derecha,  $\omega \ll \omega_{\text{crít}}$ ); la línea absorbe energía —y por lo tanto, la propaga alejándose de la fuente— sólo si opera en frecuencias menores a la crítica.

prácticamente como un *resistor puro*, es decir, un elemento que absorbe *toda* la energía que se le cede. La línea discreta no debería operarse con señales de pulsaciones mayores o cercanas a la crítica, puesto que en ese caso no habría energía transmitida, o bien sería muy pequeña en relación con la que “va y viene” entre generador y línea. Véase la Fig. A.30.

Considérese a continuación el caso de una línea de transmisión genuina (i.e., no discreta); ésta puede imaginarse como un caso límite de línea discreta, en donde cada sección elemental corresponde a un tramo muy corto de línea, de longitud  $\Delta x$  que se hace tender a 0; la inductancia del tramo es  $\Delta L = l\Delta x$ , y la capacitancia es  $\Delta C = c\Delta x$ , donde  $c$  y  $l$  son respectivamente la capacitancia e inductancia específicas (es decir, por unidad de longitud); cuando se hace  $\Delta x \rightarrow 0$ , resulta  $Z_{\text{eq}} \rightarrow \sqrt{l/c} = R_0$ , mientras que la frecuencia crítica se “va” hacia el infinito (la línea puede transmitir apropiadamente señales de cualquier frecuencia); en efecto:  $\omega_{\text{crít}} = 2/\sqrt{cl}\Delta x^2 = (2/\sqrt{cl})\Delta x^{-1}$ , y cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\omega_{\text{crít}} \rightarrow \infty$ .

La relación de tensiones entre A'-B' ( $\hat{V}'$ ) y A-B ( $\hat{V}$ ) (véase nuevamente la Fig. A.29) se calcula de la siguiente forma:

$$H_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\hat{V}'}{\hat{V}} = \frac{Z_{\text{eq}} \parallel \left(\frac{1}{jC\omega}\right)}{Z_{\text{eq}} \parallel \left(\frac{1}{jC\omega}\right) + jL\omega} = \frac{Z_{\text{eq}}}{(1 - CL\omega^2) Z_{\text{eq}} + jL\omega}$$

Admitiendo que sólo trabajamos en bajas frecuencias ( $\omega \ll \omega_{\text{crít}}$ ), se puede hacer  $Z_{\text{eq}} \approx R_0$ , con lo cual

$$H_1 \approx \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{\text{crít}}/2}\right)^2\right) + j\left(\frac{\omega}{\omega_{\text{crít}}/2}\right)} \approx \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_{\text{crít}}/2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{\text{crít}}/2}\right)^2}} \exp\left(-j \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_{\text{crít}}/2}\right)\right)$$

Para  $N$  etapas en cascada la relación de tensiones entre la tensión a la salida de la etapa  $N$  y la tensión a la entrada de la etapa 1 es  $H_1^N = H_N$ , esto es:

$$H_N \approx \frac{1}{\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{\text{crít}}/2}\right)^2}\right)^N} \exp\left(-jN \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_{\text{crít}}/2}\right)\right)$$

La frecuencia de corte es aquella a la cual  $|H_N(\omega_c)/H_N(0)| = 1/\sqrt{2}$ , o sea

$$\left| \frac{H_N(\omega_c)}{H_N(0)} \right| \approx \frac{1}{\left( \sqrt{1 + \left( \frac{\omega_c}{\omega_{\text{crít}}/2} \right)^2} \right)^N} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_c = \omega_{\text{crít}} \frac{\sqrt{2^{1/N} - 1}}{2}$$

Si se considera  $N$  un número muy grande<sup>34</sup>, se puede hacer la aproximación  $\sqrt{2^{1/N} - 1} = \sqrt{\exp\left(\frac{\ln(2)}{N}\right) - 1} \stackrel{N \rightarrow \infty}{\approx} \sqrt{\left(1 + \frac{\ln(2)}{N}\right) - 1} = \sqrt{\frac{\ln(2)}{N}}$ , y entonces  $\omega_c \approx \sqrt{\frac{N \ln(2)}{C_{\text{tot}} L_{\text{tot}}}}$ , donde  $C_{\text{tot}}|L_{\text{tot}}$  es la capacitancia|inductancia total de  $N$  secciones ( $C_{\text{tot}} = NC$ ;  $L_{\text{tot}} = NL$ ).

Para las  $N$  secciones en cascada, el retardo de grupo a frecuencia 0,  $\tau_g(0)$  viene dado por:

$$\tau_{g,N}(0) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{d}{d\omega} \angle H_N(\omega) = \frac{N}{\omega_{\text{crít}}/2} = \sqrt{C_{\text{tot}} L_{\text{tot}}}$$

Las dos cantidades de diseño, pulsación de corte  $\omega_c$ , y retardo de grupo a frecuencia 0,  $\tau_{g,N}(0)$ , se relacionan de la siguiente forma:

$$N = \frac{(\omega_c \tau_{g,N}(0))^2}{\ln(2)}$$

Una vez determinada la cantidad de secciones necesaria para brindar una dada frecuencia de corte y dado retardo de grupo, se determinan la capacitancia e inductancia de cada sección:

$$C = \frac{C_{\text{tot}}}{N}; \quad L = \frac{L_{\text{tot}}}{N}$$

Ejemplo: una línea de transmisión discreta con  $\omega_c = 2\pi \times 100$  MHz y  $\tau_g(0) = 100$  ns, requiere 5695 secciones (!).

## A.14. Problema 13: medición X-Y con ORC

(En Evaluación Integradora del 29-SET-2009.)

**Enunciado** Se tiene un ORC de doble canal vertical, que se usa en *modo* X-Y; el AB del eje Y es 50 MHz, y el del eje X es 5 MHz; para cada canal, la impedancia de entrada se supone modelada por el paralelo de una resistencia de 1 M $\Omega$  con una capacitancia de 25 pF. Se tienen dos sondas pasivas, una *directa* y otra que *atenúa 100 veces* (y está perfectamente compensada); para ambas, la capacitancia del cable es de 75 pF. Cuando se conectan simultáneamente las sondas a la salida de un generador senoidal de 2 MHz con una resistencia de salida de 600  $\Omega$ , se aprecia en la pantalla una *elipse*.

1. ¿Porqué ocurre esto?

<sup>34</sup>Para  $N \geq 18$ , la aproximación “erra” en menos de 1%; para  $N \geq 9$  el error es menor al 2%; para  $N \geq 4$  es menor al 5%.

A.14. PROBLEMA 13: MEDICIÓN X-Y CON ORC

43

2. ¿Cómo conviene conectar las sondas a cada canal para minimizar este error sistemático?
3. En las condiciones “óptimas” de 2, ¿cuánto vale el defasaje entre X e Y a 200 kHz y a 10 MHz?

**Solución** Primero conviene tener una representación pictórica del esquema de conexión descrito por el enunciado; esto se ve en la Fig. A.31.

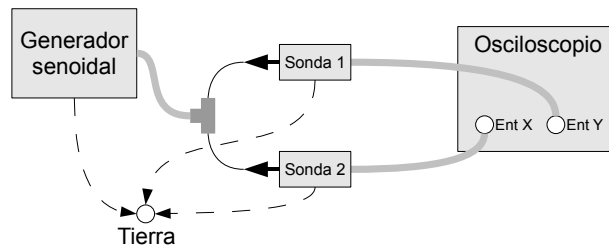


Figura A.31: Representación de la conexión propuesta en el Problema 13.

El modelo eléctrico de la conexión se ve en la Fig. A.32; este será el esquema utilizado para análisis y cálculo.

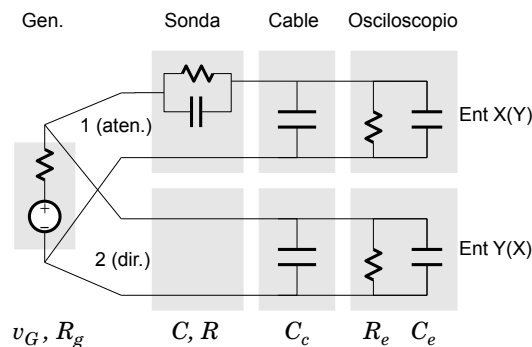


Figura A.32: Modelo eléctrico de la conexión propuesta; hay dos caminos para la señal con idéntico inicio (el generador) y con una terminación de iguales características (cada entrada del ORC): el camino 1 pasa por la sonda atenuada; el camino 2 pasa por la sonda directa.

Obsérvese que por estar la sonda atenuada perfectamente compensada, el defasaje producido por la misma (entre la punta de la sonda y la entrada del ORC) es nulo; también es nulo el defasaje producido por la sonda directa (es meramente un cable); esto implica que la *diferencia de fase*, que podría haber por tener los caminos sondas en diferentes configuraciones, es nula. La conclusión es que la señal que llega a una entrada del ORC está en fase con la señal que llega a la otra entrada, y esto es independiente de qué entrada (X ó Y) se esté considerando; la primera conclusión es que la elipse (que indica un defasaje entre las tensiones de deflexión en el TRC<sup>35</sup>) que se vé en la pantalla es un

<sup>35</sup>TRC=Tubo de Rayos Catódicos.

resultado sólo relacionado con el proceso de las señales dentro del propio ORC.

A partir de los datos, se llega a la conclusión de que *la única diferencia interna entre X e Y es el AB*; el alejamiento de la elipse de su forma degenerada “ideal” (una recta de pendiente positiva) es un indicador evidente de la diferencia de fase causada por la diferencia de anchos de banda. La amplificación de tensión desde el conector BNC de entrada del ORC hasta las placas de deflexión puede escribirse (se supone acople en CC en ambos canales, y se usa la expresión más simple posible para el perfil de la respuesta en frecuencia):

$$\begin{aligned} A_x(\nu) &= \frac{A_x(0)}{1 + j \frac{\nu}{\nu_{cx}}} \\ A_y(\nu) &= \frac{A_y(0)}{1 + j \frac{\nu}{\nu_{cy}}} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Los defasajes de cada canal se deducen de las (A.16), y son, respectivamente,

$$\begin{aligned} \phi_x(\nu) &= -\arctan\left(\frac{\nu}{\nu_{cx}}\right) \\ \phi_y(\nu) &= -\arctan\left(\frac{\nu}{\nu_{cy}}\right) \end{aligned}$$

Entonces, la diferencia de fase entre Y y X resulta ser:

$$\Delta\phi(\nu) \stackrel{\text{def}}{=} \phi_y(\nu) - \phi_x(\nu) = -\arctan\left(\frac{\nu}{\nu_{cy}}\right) + \arctan\left(\frac{\nu}{\nu_{cx}}\right) \quad (\text{A.17})$$

El resultado se ve en la Fig. A.33.

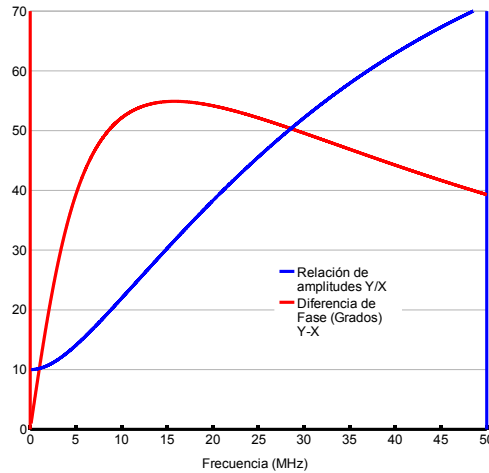


Figura A.33: Relaciones de amplitud y fase de Y respecto de X.

Se hacen a continuación los cálculos (frecuencias expresadas en MHz, ángulos en radianes [medida natural], resultados redondeados simétricamente a tres cifras significativas):

A.14. PROBLEMA 13: MEDICIÓN X-Y CON ORC

45

■ **Caso 1:**  $\nu = 200 \text{ kHz}$

$$\Delta\phi(0,2) = \arctan\left(\frac{0,2}{5}\right) - \arctan\left(\frac{0,2}{50}\right) = \arctan(0,04) - \arctan(0,004) \approx 0,0360$$

■ **Caso 2:**  $\nu = 2 \text{ MHz}$

$$\Delta\phi(1) = \arctan\left(\frac{2}{5}\right) - \arctan\left(\frac{2}{50}\right) = \arctan(0,4) - \arctan(0,04) \approx 0,341$$

■ **Caso 3:**  $\nu = 10 \text{ MHz}$

$$\Delta\phi(10) = \arctan\left(\frac{10}{5}\right) - \arctan\left(\frac{10}{50}\right) = \arctan(2) - \arctan(0,2) \approx 0,910$$

Véase la Fig. A.34; obsérvese que la amplitud Y prácticamente no varía, aunque sí lo hace pronunciadamente la amplitud X.

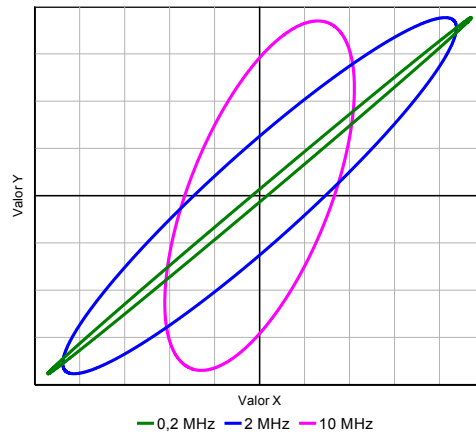


Figura A.34: Figuras de Lissajous para las tres frecuencias especificadas

La diferencia de fase tiende a 0 cuando  $\nu \rightarrow \infty$ .

En resumen, las respuestas a las preguntas, en orden, son:

1. Por la diferencia de anchos de banda entre los canales X e Y;
2. Da lo mismo conectar las sondas en los canales: atenuada en X, directa en Y, o viceversa;
3. A 200 kHz, el defasaje es 0.0360 ( $\approx 2,1^\circ$ ); a 10 MHz, el defasaje es 0.910 ( $\approx 52^\circ$ ).

**Observaciones** Utilizando la identidad trigonométrica

$$\arctan(a) - \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a-b}{1+ab}\right),$$

se podrá escribir

$$\Delta\phi(\nu) = \arctan\left(\nu \frac{\nu_{cy} - \nu_{cx}}{\nu_{cx}\nu_{cy} + \nu^2}\right)$$

Evidentemente, si  $\nu_{cx} = \nu_{cy}$ , el defasaje relativo es idénticamente nulo.

### A.15. Problema 14: comparación de sondas

(No se ha incluido en ninguna evaluación; da una comparación simple entre los distintos tipos de sondas de tensión.)

**Enunciado** Suponga que tiene que medir una fuente (DUT<sup>36</sup>) cuyo modelo Thévenin tiene una resistencia  $R_{Th} = 1 \text{ k}\Omega$ , y dispone de un ORC cuyo AB es  $BW_{ORC} = 50 \text{ MHz}$ , con una impedancia de entrada de  $Z_i = 1 \text{ M}\Omega \parallel 20 \text{ pF}$ ; compare la medición que haría en cada una de las siguientes circunstancias:

1. **Conexión directa.** Dos sub-casos:

- El ORC se conecta directamente sobre el DUT;
- Ídem, pero se agrega un resistor  $R_1 = 50 \text{ }\Omega$  entre los terminales de salida de la fuente.

2. **Sonda sin atenuación.** Dos sub-casos:

- La señal del DUT pasa por una sonda sin atenuación, y 1,5 m de cable de  $80 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1}$  de capacitancia específica y una impedancia característica de  $50 \text{ }\Omega$ ;
- Ídem, pero se agrega un resistor  $R_1 = 50 \text{ }\Omega$  entre los terminales de salida de la fuente.

3. **Sonda con atenuación.** La señal del DUT pasa por una sonda con una atenuación de 10, perfectamente *compensada*, y el mismo cable que en el caso 2;

4. **Sonda activa.** La señal del DUT pasa por una sonda activa con un AB  $BW_{sonda} = 150 \text{ MHz}$ , una amplificación en bajas frecuencias igual a 1, una resistencia de salida  $R_o = 50 \text{ }\Omega$ , y una impedancia de entrada de  $Z_s = 5 \text{ M}\Omega \parallel 3 \text{ pF}$ , y el mismo cable que en el caso 2.

**Solución** Se verá primero el caso 1, donde no hay cable, y se utilizará como referencia.

**Casos 1a y 1b** El circuito completo DUT-ORC es uno de primer orden, véase Fig. A.35, cuya CTC en el sub-caso 1a es:

$$\tau_{1a} = \underbrace{C_i (R_{Th} \parallel R_i)}_{\text{Datos del prob.}} = 20 \text{ pF} \times (1 \text{ k}\Omega \parallel 1 \text{ M}\Omega) \approx 20 \text{ pF} \times 1 \text{ k}\Omega = 20 \text{ ns},$$

y en el sub-caso 1b:

$$\tau_{1b} = \underbrace{C_i (R_{Th} \parallel R_i \parallel R_1)}_{\text{Datos del prob.}} = 20 \text{ pF} \times (1 \text{ k}\Omega \parallel 1 \text{ M}\Omega \parallel 50 \text{ }\Omega) \approx 20 \text{ pF} \times 50 \text{ }\Omega = 1 \text{ ns}$$

<sup>36</sup>DUT=Device Under Test, en inglés significa “dispositivo bajo prueba|ensayo|medición”.

A.15. PROBLEMA 14: COMPARACIÓN DE SONDAS

47

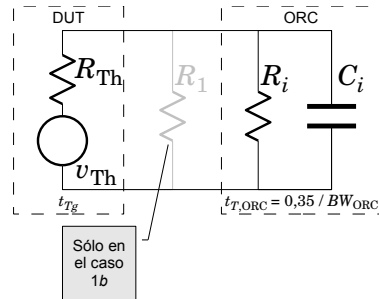


Figura A.35: Modelo eléctrico correspondiente al caso 1; no hay cable de conexión entre el DUT y el ORC.

Luego, si la señal del DUT es pulsada con un TT intrínseco del generador  $t_{Tg} = x$  (a priori no especificado), el TT observado (aproximado) en la pantalla del ORC será:

$$t_{T,obs} \approx \sqrt{\underbrace{x^2}_{\text{No esp.}} + \left( \underbrace{\frac{0,35}{BW_{ORC}}}_{\text{Dato prob.}} \right)^2 + \left( 2,2 \underbrace{\tau}_{\text{Calc.}} \right)^2}$$

Resulta (con 3 cifras significativas):

$$t_{T,obs} \approx \begin{cases} \sqrt{x^2 + (7 \text{ ns})^2 + (44 \text{ ns})^2} = \sqrt{x^2 + \left( \underbrace{44,6 \text{ ns}}_{\stackrel{\text{def}}{=} T} \right)^2} & (\text{Sub-caso 1a}) \\ \sqrt{x^2 + (7 \text{ ns})^2 + (2,2 \text{ ns})^2} = \sqrt{x^2 + \left( \underbrace{7,34 \text{ ns}}_{\stackrel{\text{def}}{=} T} \right)^2} & (\text{Sub-caso 1b}) \end{cases}$$

Se vé que en el sub-caso 1a predomina el error sistemático por causa del efecto de carga del instrumento (básicamente, la CTC de entrada), mientras que en el sub-caso 1b predomina el error sistemático por causa del AB limitado del ORC. Supóngase que se quiere mantener el error sistemático  $\varepsilon$  menor a un 5%; esto es, se pretende que  $t_{T,obs} \leq 1,05 x$ ; entonces debe ser  $x^2 + T^2 \leq (1,05 x)^2$ , o bien  $(1,05^2 - 1) x^2 = 0,1025 x^2 \geq T^2$ , o también:

$$x \geq 3,12 T \Leftrightarrow \begin{cases} t_{Tg} \geq 139 \text{ ns} & (\text{Sub-caso 1a, err. sist. menor a 5 \%}) \\ t_{Tg} \geq 22,9 \text{ ns} & (\text{Sub-caso 1b, err. sist. menor a 5 \%}) \end{cases}$$

(Si no se considera en absoluto la CTC,  $T = 7 \text{ ns}$  y entonces, el mínimo TT intrínseco del generador que es posible medir con un error sistemático menor al 5 % es  $t_{Tg,min} = 21,9 \text{ ns}$ .) En general, el análisis conduce a la fórmula:

$$t_{Tg} \geq \frac{\varepsilon^{-1}}{\sqrt{1+2\varepsilon^{-1}}} T \approx \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} T, \text{ para un error sistemático menor a } \varepsilon$$

Se hace una representación de (A.15) en el Cuadro A.4.

Cuadro A.4: TT intrínseco mínimo relativo del generador, para un dado error sistemático; la fórmula de referencia es  $t_{T,\text{obs}}^2 = t_{Tg}^2 + T^2$ .

Err. sist.	$t_{Tg}/T$ mínimo	Observación
1 %	7.05	Probablemente “tapado” por incertidumbre
2 %	4.98	ídem
3 %	4.05	ídem
4 %	3.50	Razonable
5 %	3.12	ídem
6 %	2.84	ídem
7 %	2.63	ídem
8 %	2.45	ídem
9 %	2.31	Medición bastante “mala”
10 %	2.18	ídem
15 %	1.76	ídem
20 %	1.51	ídem
25 %	1.33	ídem

NOTAS

1. Como criterio rápido, se puede decir que para mantener un error sistemático razonable, el TT del generador debe estar comprendido entre 2,5 y 4 veces el tiempo total (composición de los TT intrínsecos y de los efectos de carga).
2. El error sistemático es  $\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \left| \frac{t_{T,\text{obs}} - t_{Tg}}{t_{Tg}} \right|$ .

**Características del cable** Se tratará ahora el caso 2; la diferencia básica con el caso 1 es que se agrega al efecto de carga la capacitancia del cable de conexión sonda-ORC; se tiene que determinar este valor:

$$C_{\text{cable}} = \underbrace{cD}_{\text{Datos prob.}} = 80 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1} \times 1,5 \text{ m} = 120 \text{ pF}$$

La capacitancia total presentada al DUT es  $C_o \stackrel{\text{def}}{=} C_i + C_{\text{cable}} = 20 \text{ pF} + 120 \text{ pF} = 140 \text{ pF}$ ; de paso, se determina la velocidad de propagación en el cable:

$$c = \frac{1}{\underbrace{cR_0}_{\text{Datos prob.}}} = \frac{1}{80 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1} \times 50 \Omega} = \frac{10^{12}}{4000} \text{ m/s} = 2,5 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 0,83 c_0$$



A.15. PROBLEMA 14: COMPARACIÓN DE SONDAS

49

Luego, el tiempo de demora para el frente de onda en un viaje de extremo a extremo del cable es

$$t_D = \frac{D}{c} = \frac{1,5 \text{ m}}{2,5 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 6 \text{ ns}$$

Se está suponiendo, dado que se carece de información adicional, que el cable es una línea de transmisión sin pérdidas, y por lo tanto la onda no sufre dispersión. Mientras el TT del generador sea mayor que  $5 t_D = 30 \text{ ns}$ , se puede decir que la representación del cable como un capacitor es bastante exacta en los cálculos; de lo contrario, habría que tratar el cable como lo que verdaderamente es: una línea de transmisión; obsérvese que el cable no está adaptado ni en generador ni en carga en los casos analizados (i.e., 1 y 2), razón por la cual se debe prestar especial atención a la citada restricción para el TT del generador.

Por otra parte, la atenuación agregada por el efecto de carga de  $R_1$  es  $\alpha_{ad} = 1 + R_{Th}/(R_i \parallel R_1) \approx 1 + 1/0,05 = 21$ . Sin  $R_1$  prácticamente no hay atenuación.

**Caso 2** Las CTC en esta nueva situación se calculan como sigue (véanse las Figs. A.36 y A.37):

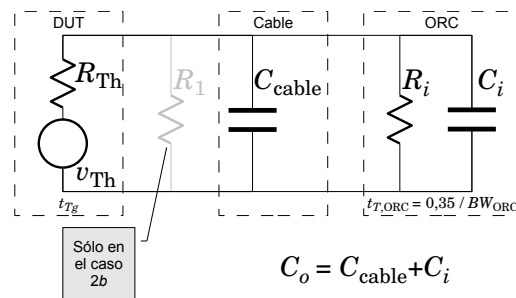


Figura A.36: Modelo eléctrico correspondiente al caso 2; ahora hay cable de conexión entre el DUT y el ORC, con capacitancia  $C_{\text{cable}}$ .

La Fig. A.37 muestra una simplificación del modelo que es útil cuando se quiere determinar la CTC.

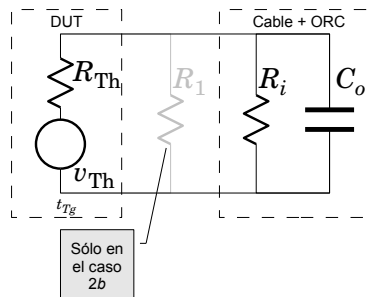


Figura A.37: Modelo eléctrico simplificado correspondiente a la Fig. A.36; útil solamente para el cálculo de la CTC.

$$\tau_{2a} = \underbrace{C_o}_{\text{Calc. Datos del prob.}} \underbrace{(R_{Th} \parallel R_i)}_{\text{Calc. Datos del prob.}} = 140 \text{ pF} \times (1 \text{ k}\Omega \parallel 1 \text{ M}\Omega) \approx 140 \text{ pF} \times 1 \text{ k}\Omega = 140 \text{ ns}$$

$$\tau_{2b} = \underbrace{C_o}_{\text{Calc. Datos del prob.}} \underbrace{(R_{Th} \parallel R_i \parallel R_1)}_{\text{Calc. Datos del prob.}} = 140 \text{ pF} \times (1 \text{ k}\Omega \parallel 1 \text{ M}\Omega \parallel 50 \Omega) \approx 140 \text{ pF} \times 50 \Omega = 7 \text{ ns}$$

Las CTC son 7 veces mayores que las respectivas a la conexión directa, puesto que la capacitancia del cable eleva la capacitancia total de 20 pF a 140 pF. Se tiene ahora (con 3 cifras significativas):

$$t_{T, \text{obs}} \approx \begin{cases} \sqrt{x^2 + (7 \text{ ns})^2 + (308 \text{ ns})^2} = \sqrt{x^2 + (308 \text{ ns})^2} & (\text{Sub-caso } 2a), T = 308 \text{ ns} \\ \sqrt{x^2 + (7 \text{ ns})^2 + (15,4 \text{ ns})^2} = \sqrt{x^2 + (16,9 \text{ ns})^2} & (\text{Sub-caso } 2b), T = 16,9 \text{ ns} \end{cases}$$

En ambos casos, el efecto de la capacitancia cable+ORC es el que predomina, haciendo que el AB del ORC no represente un limitante de la medición.

Por otra parte, la atenuación agregada por el efecto de carga de  $R_1$  es  $\alpha_{ad} = 1 + R_{Th}/(R_i \parallel R_1) \approx 1 + 1/0,05 = 21$ . Sin  $R_1$  prácticamente no hay atenuación.

**Caso 3** Ahora se verá el caso 3; de partida, se sabe que la señal llega al ORC atenuada en amplitud en un factor de 10; véase la Fig. A.38.

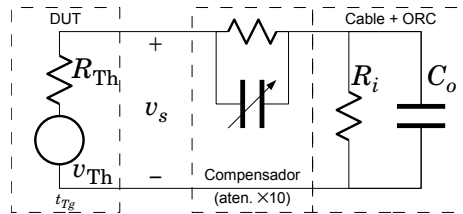


Figura A.38: Conexión en el caso 3; el compensador está ajustado para compensación perfecta; la atenuación por diseño se ha fijado en 10 veces.

Como la sonda está perfectamente compensada, la carga que presenta al DUT consiste en un paralelo de un resistor de resistencia  $R'_i = \frac{\alpha R_i}{\text{Dato prob.}} = 10 \times 1 \text{ M}\Omega = 10 \text{ M}\Omega$ , con un capacitor de capacitancia  $C'_i = \frac{C_o}{\text{Calc. Dato prob.}} = 140 \text{ pF}/10 = 14 \text{ pF}$ ; esto se muestra en la Fig. A.39.

La CTC asociada a la conexión DUT-sonda es:

$$\tau_3 = \underbrace{C'_i}_{\text{Calc. Dato p.}} \left( \underbrace{R_{Th}}_{\text{Dato p.}} \parallel \underbrace{R'_i}_{\text{Calc. Dato prob.}} \right) = 14 \text{ pF} \times (1 \text{ k}\Omega \parallel 10 \text{ M}\Omega) \approx 14 \text{ pF} \times 1 \text{ k}\Omega = 14 \text{ ns}$$

A.15. PROBLEMA 14: COMPARACIÓN DE SONDAS

51

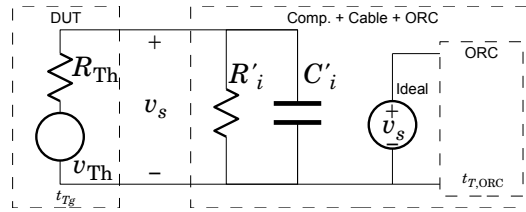


Figura A.39: Modelo eléctrico equivalente para el caso 3; las relaciones que se cumplen son:  $R'_i = \alpha R_i$ ,  $C'_i = C_o/\alpha$ .

La CTC es ligeramente menor que la respectiva a la conexión directa sin resistor  $R_1$  agregado, puesto que la compensación de la sonda reduce la capacitancia de 20 pF a 14 pF. Se tiene ahora (con 3 cifras significativas):

$$t_{T,obs} \approx \sqrt{x^2 + (31,6 \text{ ns})^2} \text{ (Caso 3), } T = 31,6 \text{ ns}$$

El efecto de la capacitancia cable+ORC, aunque reducido por el compensador, predomina, haciendo que el AB del ORC no represente un limitante de la medición.

Por otra parte, la atenuación agregada a la provocada intencionalmente por la sonda, es  $\alpha_{ad} = 1 + R_{Th}/R'_i = 1 + 0,001/10 = 1,0001 \approx 1$ ; esto es, en la práctica la sonda carga muy poco al DUT.

**Caso 4** Ahora se verá el caso 4; en esta configuración se tienen que calcular dos CTC, que afortunadamente corresponden a circuitos no interactuantes; véase la Fig. A.40

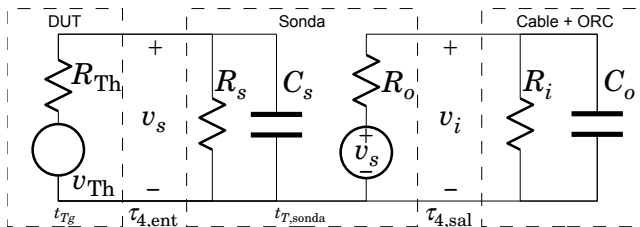


Figura A.40: Modelo eléctrico de la conexión de sonda activa; hay dos constantes de tiempo no interactuantes:  $\tau_{4,ent}$  a la entrada, y  $\tau_{4,sal}$  a la salida.

La primera CTC es la de la conexión DUT-entrada de sonda, y se calcula como en los casos anteriores:

$$\tau_{4,ent} = \underbrace{C_s (R_{Th} \parallel R_s)}_{\text{Datos prob.}} = 3 \text{ pF} \times (1 \text{ k}\Omega \parallel 5 \text{ M}\Omega) \approx 3 \text{ pF} \times 1 \text{ k}\Omega = 3 \text{ ns}$$

La segunda CTC es la de la conexión salida de sonda-cable, y se calcula como:

$$\tau_{4,\text{sal}} = \underbrace{C_o}_{\text{Calc.}} \left( \underbrace{R_o \parallel R_i}_{\text{Datos prob.}} \right) = 140 \text{ pF} \times (50 \Omega \parallel 1 \text{ M}\Omega) \approx 140 \text{ pF} \times 50 \Omega = 7 \text{ ns}$$

Se observa que las dos CTC son relativamente pequeñas; para  $\tau_{4,\text{ent}}$ , la causa es la reducida capacitancia de entrada que ofrece la entrada de la sonda; para  $\tau_{4,\text{sal}}$ , la causa es la reducida resistencia de salida de la sonda, que a su vez la adapta perfectamente a la impedancia característica del cable, anulando posibles reflexiones del frente de onda en la conexión salida de sonda-cable.

El efecto combinado de dos CTC o interactuantes es equivalente al de una sólo CTC que se calcula como:

$$\tau_4 = \sqrt{\tau_{4,\text{ent}}^2 + \tau_{4,\text{sal}}^2} = \sqrt{(3 \text{ ns})^2 + (7 \text{ ns})^2} \approx 7,62 \text{ ns}$$

En la cadena de medición hay dos sistemas/circuitos con limitación de AB, de modo tal que el TT observado en la pantalla del ORC es:

$$t_{T,\text{obs}} \approx \sqrt{\underbrace{x^2}_{\text{No esp.}} + \left( \underbrace{\frac{0,35}{BW_{\text{ORC}}}}_{\text{Dato prob.}} \right)^2 + \left( \underbrace{\frac{0,35}{BW_{\text{sonda}}}}_{\text{Dato prob.}} \right)^2 + \left( 2,2 \underbrace{\tau_4}_{\text{Calc.}} \right)^2}$$

O sea, en este caso, la corrección al TT intrínseco del generador es:

$$\begin{aligned} T &\approx \sqrt{\left( \underbrace{\frac{0,35}{BW_{\text{ORC}}}}_{\text{Dato prob.}} \right)^2 + \left( \underbrace{\frac{0,35}{BW_{\text{sonda}}}}_{\text{Dato prob.}} \right)^2 + \left( 2,2 \underbrace{\tau_4}_{\text{Calc.}} \right)^2} = \\ &\sqrt{\left( \frac{0,35}{0,05 \text{ GHz}} \right)^2 + \left( \frac{0,35}{0,15 \text{ GHz}} \right)^2 + (2,2 \times 7,62 \text{ ns})^2} = \\ &\sqrt{(7 \text{ ns})^2 + (2,33 \text{ ns})^2 + (16,8 \text{ ns})^2} = 18,3 \text{ ns} \end{aligned}$$

En resumen:

$$t_{T,\text{obs}} \approx \sqrt{x^2 + (18,3 \text{ ns})^2} \text{ (Caso 4), } T = 18,3 \text{ ns}$$

La atenuación agregada por efecto de carga de la impedancia característica del cable sobre la sonda, es  $\alpha_{\text{ad}} = 1 + R_o/R_0 = 1 + 50/50 = 2$ ; pero este efecto de carga se produce sólo en los primeros instantes de la transición de la señal, entre 0 y  $2t_D$ , luego, la atenuación prácticamente no existe. En general, con el fin de eliminar reflexión de la onda en la salida del cable, debería agregarse un adaptador de impedancia que “muestre” al ORC como un instrumento con una impedancia de entrada resistiva pura igual a la resistencia característica del cable.

## A.15. PROBLEMA 14: COMPARACIÓN DE SONDAS

53

Cuadro A.5: Resumen del análisis del presente problema.

Caso	Atenuación - (dB)	$t_{T,obs}$ ns (%)	$\tau$ ns	$T$ ns	$t_{T,g}$ ns	Observaciones	FDM MHz	Ranking Absol. (relat.)
		1	2		3		4	5
1a	1 (0)	53,8 (79,3)	20	44,6	139	Conex. directa	9,1	3 (1)
1b	21 (-26)	30,9 (3)	1	7,34	22,9	Conex. directa (50 $\Omega$ )	69	2 (7,6)
2a	1 (0)	309 (930)	140	308	961	Sonda directa	0,11	6 (0,012)
2a	21 (-26)	34,4 (14,7)	7	16,9	52,7	Sonda directa (50 $\Omega$ )	6,1	4 (0,67)
3	10 (-20)	43,6 (45,3)	14	31,6	98,6	Sonda atenuada $\times 10$	2,2	5 (0,24)
4	1 (0)	35,1 (17)	7,62	18,3	57,1	Sonda activa	100	1 (11)

NOTAS

1. TT nominal observado en la pantalla del osciloscopio, para un TT intrínseco del generador igual a  $5t_D = 30$  ns, se indica entre paréntesis el error sistemático resultante de la medición.
2. CTC equivalente a la de un sistema de primer orden.
3. TT intrínseco mínimo del generador, que da un error sistemático menor al 5 % (se exceptúan incertidumbres de medición).
4. FDM=Figura De Mérito; se la define como  $FDM = ((Aten.) \times (Err. sist. @ 30 ns) \times TT \text{ gen. mín.})^{-1}$ ; cuanto mayor es la FDM, mejor es el desempeño de la medición.
5. El ranking del desempeño de la medición; menor número, mejor desempeño; entre paréntesis se da la relación con la medición del caso 1a (por ejemplo, el caso 4 es 11 veces "mejor" que el caso de referencia; el caso 2a es 0,012 veces "mejor" [83 veces "peor"] que el de referencia).

**Resumen** Se presenta un resumen en el Cuadro A.5 de la pág. 53.

Se han simulado los comportamientos de los modelos planteados, usando LTSpice/SwitcherCAD III v2.22d, en las siguientes condiciones:

1. Señal del generador en vacío: escalón de pendiente de crecimiento constante (rampa) con un tiempo de transición 10 %-90 % de 30 ns
2. Se ha supuesto que la respuesta intrínseca de la sonda es la de un sistema de primer orden con frecuencia de corte superior igual a  $BW_{\text{sonda}} = 150 \text{ MHz}$
3. Se ha supuesto que la respuesta intrínseca del ORC es la de un sistema de primer orden con frecuencia de corte superior igual a  $BW_{\text{ORC}} = 50 \text{ MHz}$

Los resultados se muestran en el Cuadro A.6, junto con los correspondientes del Cuadro A.5.

Cuadro A.6: Comparación entre el resultado de la fórmula de suma cuadrática, y la simulación con SPICE.

Caso	$t_{T,\text{obs}}$ ns	$t_{T,\text{obs}}$ ns	Diferencia %
	$\sum t^2$	Simul. SPICE	$100 \times (\sum t^2 - \text{Simul}) / \text{Simul}$
1a	53,8	55	-2,2
1b	30,9	30	+3
2a	309	310	-0,32
2a	34,4	34	+1,2
3	43,6	44	-0,91
4	35,1	35	+0,29

### Observaciones finales

- La comparación de los desempeños de los distintos esquemas de medición se ha efectuado sobre la base del TT observado en la pantalla del ORC; esto supone que el generador entrega una señal pulsada; también se podría haber hecho la comparación utilizando el “AB de la medición”, que se podría definir como la frecuencia de una señal senoidal, más allá de la cual el error sistemático por limitaciones dinámicas se hace mayor que un cierto valor.
- El generador tiene un TT intrínseco  $t_{Tg}$ , que es aquél que se determinaría con un instrumento de AB infinito y con un efecto de carga despreciable sobre dicho generador; la forma en que ocurre la transición no se especifica, aunque tiene un ligero efecto sobre la exactitud de los cálculos; sin embargo, esto no se analiza con detalle puesto que la fórmula de suma cuadrática es, en el mejor de los casos, un *estimador*; en la simulación con SPICE se ha supuesto que la transición ocurre a velocidad constante.
- El ORC tiene un TT intrínseco  $t_{T,\text{ORC}}$ , que es aquél que se determinaría con un generador de tensión ideal en la entrada que entregara una señal

pulsada con TT nulo —o, al menos, con TT mucho menor que el estimado para el ORC—; la forma en que ocurre la transición no se especifica, aunque tiene un ligero efecto sobre la exactitud de los cálculos; como el ORC es un sistema complejo, a veces es adecuado suponer que la respuesta al escalón es de tipo *gaussiana*, con sobreimpulso inexistente; con la respuesta gaussiana, el producto TT-frecuencia de corte es algo menor a 0,35 (más cerca de 0,30 que de 0,35), pero a pesar de esto, se ha seguido suponiendo que el *estimador* es  $t_T \nu_c = 0,35$ ; en la simulación con SPICE se ha supuesto que el ORC se comporta como un sistema de primer orden con una frecuencia de corte  $\nu_c = 1/(2\pi\tau)$ , donde  $\tau$  podría llamarse CTC del ORC —no utilizada en el presente análisis—; caben consideraciones similares respecto al TT intrínseco de la sonda activa.

- Como síntesis del *error sistemático* en la determinación del TT que se incurre en los distintos esquemas de medición, se puede establecer que  $t_{T,obs}^2 = t_{Tg}^2 + T^2$ , donde  $T$  representa una corrección al TT observado ideal —que sería evidentemente  $t_{Tg}$ —; obsérvese que la corrección no es lineal; el parámetro  $T$  tiene dos componentes
  1. Las contribuciones de las CTC asociadas a capacitores que están en derivación con el camino de la señal; estas contribuciones tienen la forma  $2,2\tau$  —un estimador, simplemente—; es importante resaltar que estas constantes de tiempo deben estar desacopladas o, como se suele afirmar en Teoría de Circuitos, que los capacitores no sean interactuantes, situación que no siempre se da, y que hay que analizar puntualmente;
  2. Las contribuciones de los TT intrínsecos de los subsistemas que están en cascada en el camino de la señal; éstas tienen la forma  $0,35/BW$ , en los casos en que el sistema no sea del tipo generador (es decir, sea tal que haya una entrada y una salida<sup>37</sup>) —también un estimador—

Entonces, se tiene

$$T^2 = \sum_{\text{Capacitores}} (2,2\tau)^2 + \sum_{\text{Subsistemas}} (0,35/BW)^2$$

- El error sistemático incurrido en esta medición es

$$\varepsilon = \frac{t_{T,obs} - t_{Tg}}{t_{Tg}} = \sqrt{1 + \left(\frac{T}{t_{Tg}}\right)^2} - 1$$

Está claro que si  $T$  es comparable o mayor a  $t_{Tg}$ , lo que se observa no tiene nada que ver con lo deseado, esto es, el TT intrínseco del generador; en otras palabras, el error “tapa” casi completamente lo que se quiere medir; por lo tanto, la regla general para hacer mediciones de señales “rápidas” —es decir, una medición con amplio AB— es: 1) usar sistemas “rápidos” (i.e., con gran AB), 2) tener las CTC bien por debajo del TT que se quiere medir; por otra parte, considerando el nivel de precisión alcanzable con

<sup>37</sup>En el caso del eslabón final de la cadena, el ORC, la “salida” se corresponde con la imagen en pantalla de la señal.

un ORC, se puede determinar que una buena medición es posible si  $T$  es al menos 4 veces menor que el  $t_{Tg}$  esperable.

- Antes de decidir hacer una medición con una sonda activa (que por lo general es costosa), conviene determinar si el simple expediente de *bajar la CTC más alta o dominante* resuelve el problema; también se debe decidir si es *necesario* usar un cable (en la gran mayoría de los casos, lo es; pero hay circunstancias especiales en las cuales no es complicado conectar el DUT directamente al ORC, por medio de un conector adecuado).
- Debe tenerse siempre presente que el intento de medir TT muy pequeños se encontrará con la dificultad de disponer de un cable perfectamente adaptado en sus extremos; en esta situación es conveniente trabajar con instrumentos cuya impedancia de entrada sea igual a la impedancia característica del cable; la sonda activa provee de partida una adaptación perfecta en la interfaz sonda-cable; el criterio se basa en calcular ante todo el tiempo de propagación de la señal por el cable (siempre será mayor que el tiempo que se tendría en caso de suponer que la propagación sucede a la velocidad de la luz).

### A.16. Problema 15: medición indirecta de ancho de banda

(En Evaluación Integradora del 28-DIC-2009.)

**Enunciado** Se construye el banco de medición de la Fig. A.41, con el objetivo de medir el AB del DUT; cada entrada del ORC puede modelarse con un resistor de  $1\text{ M}\Omega$  en paralelo con un capacitor de  $25\text{ pF}$ ; los cables que conectan a las sondas (configuradas *directas*) con cada canal del ORC tienen una capacitancia de  $125\text{ pF}$ ; en una medición previa se determinó que la *impedancia de entrada* del DUT se puede modelar con un resistor de  $50\text{ k}\Omega$  en paralelo con un capacitor de  $10\text{ pF}$ , y que su *impedancia de salida* es resistiva con un valor de  $50\text{ }\Omega$ ; por último, se sabe que la impedancia de salida del generador es resistiva con un valor de  $50\text{ }\Omega$ . Si sólo se consideran los TT observados en cada canal, la fórmula  $t_{T,\text{obs},2}^2 = t_{T,\text{obs},1}^2 + \left(\frac{0,35}{BW_{\text{DUT,obs}}}\right)^2$  brindaría el AB “estimado” de la medición; pero se sabe que el AB del ORC (idéntico en ambos canales) y el efecto de carga de cada dispositivo “tapan” parcialmente el “verdadero” comportamiento del DUT. Si  $BW_{\text{DUT,obs}} = 15\text{ MHz}$ , determine el AB “verdadero” del DUT,  $BW_{\text{DUT}}$ .

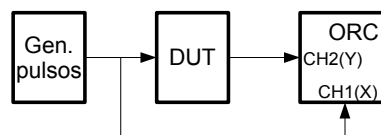


Figura A.41: Banco de medición para determinar el AB del DUT en base a los TT de pulsos de entrada y salida.



A.16. PROBLEMA 15: MEDICIÓN INDIRECTA DE ANCHO DE BANDA 57

**Solución** Corresponde hacer ciertas clarificaciones sobre el enunciado.

1. Se supone que el experimento es válido, en el sentido que la medición de los TT de los pulsos en la entrada y salida del DUT brinda una idea correcta de su ancho de banda; esto es cierto si:
  - a) el DUT y el ORC son sistemas lineales invariantes en el tiempo
  - b) el DUT y el ORC son sistemas con respuesta del tipo pasabajos
  - c) los pulsos tienen escaso sobrepico (menor a un 5 %)
  - d) la respuesta en frecuencia del DUT no presenta resonancias pronunciadas

Entonces, se puede suponer con buena aproximación que es cierto el estimador (exacto sólo para un sistema pasabajos de 1<sup>er</sup> orden)  $BW t_T = \frac{\ln(9)}{2\pi} \approx 0,35$ ; en la práctica, este estimador tiene un valor comprendido entre 0,3 y 0,4 para una gran variedad de sistemas.

2. Los TT de las señales son lo suficientemente “largos” como para considerar que los cables se comportan como dispositivos de constantes concentradas; esto es, los cables “funcionan” como capacitores; ciertamente, esto es una idealización, puesto que no considera ni siquiera la resistencia del conductor, que puede tener un valor de algunas decenas de  $\Omega$ , habida cuenta de que esta resistencia se incorpora intencionalmente en el cable, para reducir la resonancia de dicha capacitancia con la inductancia de los cables de interconexión de la sonda con el DUT.
3. Está claro que el AB “observado” no es tal, en el sentido que no se “lee” directamente en el visualizador del instrumento; se ha denotado con  $BW_{DUT,obs}$  porque surge de dos valores que sí son observados, es decir, *lecturas directas* producidas por una medición; en concreto:

$$BW_{DUT,obs} = \frac{0,35}{\sqrt{t_{T,obs,2}^2 - t_{T,obs,1}^2}}$$

Si la diferencia entre estos dos TT es pequeña (en términos relativos), la incertidumbre con que se obtiene  $BW_{DUT,obs}$  puede ser inaceptablemente alta; sin embargo, el objeto del presente problema no es juzgar la “calidad” de la medición, sino más bien entender cómo se puede medir un atributo de un sistema con una medición de un sólo paso.

4. Se supone válido con buena aproximación el estimador de “suma vectorial” para los TT<sup>38</sup>; esto es:
  - a) La salida del generador se “empeora” por efecto de carga de la entrada del sistema que está conectado a la salida de aquél:

$$t_{Tg,ef}^2 = t_{Tg}^2 + (2,2 \tau_c)^2, \quad (A.18)$$

donde  $\tau_c$  es la CTC asociada al nodo de conexión generador-banco de medición, y  $t_{Tg}$  es el TT intrínseco del generador (i.e., el que

<sup>38</sup>En todas las fórmulas presentadas, los valores son *nominales*; es decir, si son resultados de mediciones, o bien datos que tienen incertidumbre, son valores que surgen de un procedimiento para obtener la mejor estimación.

corresponde al generador en vacío), y  $t_{Tg,ef}$  es el TT que se tiene efectivamente en la salida del generador una vez que se lo conecta al resto del banco de medición;

- b) El pulso observado en la pantalla del ORC está “empeorado” por el AB del canal correspondiente:

$$t_{T,obs}^2 = t_{T,ent. ORC}^2 + \left( \frac{0,35}{BW_{ORC}} \right)^2, \quad (A.19)$$

donde  $t_{T,obs}$  es el TT del pulso que se observa en la pantalla del ORC,  $BW_{ORC}$  es el AB del correspondiente canal en donde se conecta la señal medida, y  $t_{T,ent. ORC}$  es el TT del pulso presente en la entrada del ORC (que ya ha sido corregido por el efecto de carga sobre la salida del sistema conectado en dicha entrada);

- c) El pulso que es amplificado por un sistema cualquiera está “empeorado” por el AB de dicho sistema, y también por el efecto de carga a la salida:

$$t_{T,sal}^2 = t_{T,ent}^2 + \left( \frac{0,35}{BW} \right)^2 + (2,2 \tau_c)^2, \quad (A.20)$$

donde  $BW$  es el AB intrínseco del sistema en cuestión (cuyo cálculo no incluye el efecto de carga a su salida),  $t_{T,ent}$  es el TT del pulso a la entrada del sistema,  $t_{T,sal}$  es el TT a la salida del sistema, y  $\tau_c$  es la CTC asociada a la salida (suponiendo que se puede reducir el circuito de salida a un modelo de 1<sup>er</sup> orden, o bien que la aproximación de primer orden es buena).

**Modelo completo** Inicialmente, conviene disponer de un esquema del modelo eléctrico del banco de medición; éste se ve en la Fig. A.42.

Todas las consideraciones anteriores llevan fácilmente a la solución del problema, siempre que se proceda en forma ordenada.

1. Conexión en la entrada Y (canal 2) del ORC:

- a) Por efecto del AB limitado del ORC, usando el criterio (A.19), se tiene:

$$t_{T,obs,Y}^2 = t_{T,ent. Y ORC}^2 + \left( \frac{0,35}{BW_{ORC,Y}} \right)^2$$

- b) El ORC carga al DUT, más específicamente, la entrada Y del ORC se conecta a la salida del DUT, luego hay un “empeoramiento” del TT que contribuye un término  $2,2 \tau_{c,sal. DUT}$ ; además, el DUT contribuye un término más a dicho “empeoramiento”, por efecto de su AB limitado,  $0,35/BW_{DUT}$ ; usando el criterio (A.20) se tiene (como la salida del DUT es la entrada Y del ORC, se identifica “ent. Y ORC” con “sal. DUT”):

$$t_{T,ent. Y ORC}^2 = t_{T,ent. DUT}^2 + \left( \frac{0,35}{BW_{DUT}} \right)^2 + (2,2 \tau_{c,sal. DUT})^2$$

A.16. PROBLEMA 15: MEDICIÓN INDIRECTA DE ANCHO DE BANDA 59

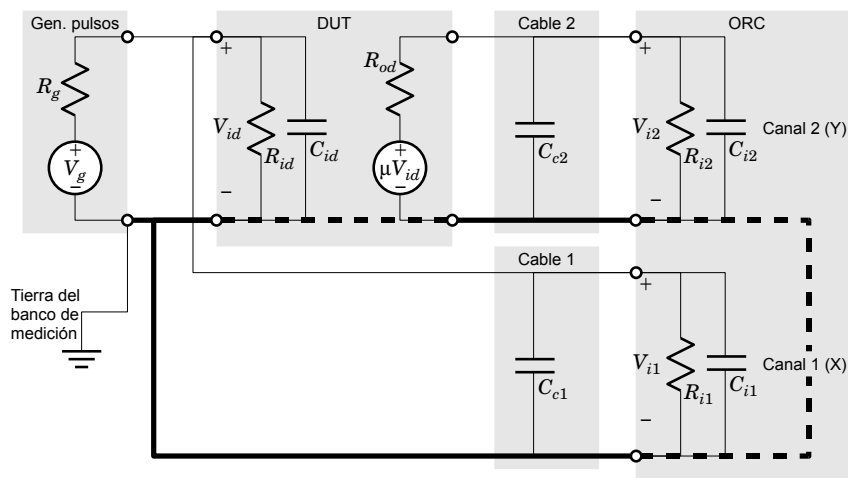


Figura A.42: Modelo eléctrico del banco de medición; las líneas gruesas (continuas o a trazos) indican conductores al potencial de referencia (i.e., tierra o común); se supone en este esquema que el DUT es unilateral: esto se indica con una fuente gobernada  $\mu V_{id}$ , de tal forma que la salida del DUT está determinada (controlada) por una tensión proporcional a la tensión de entrada del DUT; se supone también que la conexión del generador de pulsos con el DUT no agrega efecto de carga en la medición, asunto que debería reverse si se quiere hacer un análisis más preciso de la situación; el modelo supone implícitamente que los TT de las señales son suficientemente “largos” como para suponer que los cables de conexión al ORC se comportan como capacitores.

c) Juntando los resultados de 1a y 1b resulta:

$$t_{T,obs,Y}^2 = t_{T,ent. DUT}^2 + \left(\frac{0,35}{BW_{DUT}}\right)^2 + (2,2 \tau_{c,sal. DUT})^2 + \left(\frac{0,35}{BW_{ORC,Y}}\right)^2 \quad (A.21)$$

2. Conexión en la entrada X del ORC:

a) Como la entrada del DUT y la entrada X del ORC están en paralelo, la señal es la misma en ambas entradas; luego, vale la identificación:

$$t_{T,ent. X ORC} \equiv t_{T,ent. DUT}$$

b) Por efecto del AB limitado del ORC, usando el criterio (A.19), se tiene a su vez:

$$t_{T,obs,X}^2 = t_{T,ent. DUT}^2 + \left(\frac{0,35}{BW_{ORC,X}}\right)^2 \quad (A.22)$$

3. Según la formulación experimental original, en la que se estima el AB del DUT usando los TT *observados* en X e Y:

$$t_{T,obs,Y}^2 - t_{T,obs,X}^2 = \left(\frac{0,35}{BW_{DUT,obs}}\right)^2$$

Esta relación se “desarrolla” usando (A.22) y (A.21), recién obtenidas:

$$\left(t_{T,ent. DUT}^2 + \left(\frac{0,35}{BW_{DUT}}\right)^2 + (2,2 \tau_{c,sal. DUT})^2 + \left(\frac{0,35}{BW_{ORC,Y}}\right)^2\right) - \left(t_{T,ent. DUT}^2 + \left(\frac{0,35}{BW_{ORC,X}}\right)^2\right) = \left(\frac{0,35}{BW_{DUT,obs}}\right)^2 \quad (A.23)$$

Esta es la relación general, pasible de simplificaciones, dado que hay términos que se cancelan; se puede simplificar un poco asumiendo (por el enunciado del problema) que los AB de ambos canales son idénticos, llegándose a la siguiente relación:

$$BW_{DUT,obs}^{-2} = BW_{DUT}^{-2} + (2\pi\tau_{c,sal. DUT})^2 \quad (A.24)$$

La relación (A.24) es interesante, pero debe tomarse con el debido cuidado:

1. Como el término dependiente de  $\tau_{c,sal. DUT}$  es positivo, resultará que el AB “intrínseco” del DUT es mayor que el “observado”:  $BW_{DUT} > BW_{DUT,obs}$ ; se verá si esto es razonable. Para ello, supóngase por el momento que el AB intrínseco del DUT es “infinito”; luego, cualquier pulso que entra al DUT sale de éste sin ningún empeoramiento de los flancos por causa de mecanismos *internos*; sin embargo, si el efecto de carga a la salida es “fuerte” (i.e., una CTC relativamente grande), sí hay empeoramiento de los flancos antes de entrar al ORC para ser medido; esto se interpretará como que el AB observado es finito, es decir,  $BW_{DUT,obs} < BW_{DUT}$ , de hecho el ancho de banda es aparentemente  $BW_{DUT,obs} \approx (2\pi\tau_{c,sal. DUT})^{-1}$ ; esto es, si bien la fórmula “funciona”, queda muy claro que el AB observado es puramente la manifestación del efecto de carga sobre la salida del DUT, que poco tiene que ver con su comportamiento intrínseco.

2. Si se sabe que la CTC asociada a la salida del DUT es muy pequeña en términos relativos, entonces resulta que la observación manifiesta el comportamiento intrínseco:  $BW_{DUT,obs} \approx BW_{DUT}$ ; pero, ¿cómo se obtienen garantías de la “pequeñez” de dicha CTC?; estas garantías sólo se pueden obtener por medio de un análisis independiente de los resultados de la medición; si a partir de este análisis independiente (que puede resultar no trivial) se puede demostrar que  $2\pi\tau_{c,sal. DUT}BW_{DUT,obs} \ll 1$ , entonces vale la identificación de lo observado con lo intrínseco.
3. Si no se tienen garantías de que los AB de ambos canales son iguales, entonces se debe recurrir a una fórmula más general:

$$BW_{DUT,obs}^{-2} = BW_{DUT}^{-2} + BW_{ORC,Y}^{-2} - BW_{ORC,X}^{-2} + (2\pi\tau_{c,sal. DUT})^2$$

Los términos agregados pueden contribuir una cantidad negativa, positiva o nula, y complican las conclusiones que se pueden extraer de la medición; podría ocurrir que lo observado sea mejor que lo intrínseco, lo cual resulta un poco chocante.

Se procederá a calcular la CTC asociada a la salida del DUT; observando el modelo eléctrico de la Fig. A.42 (véase la pág. 59), se obtiene:

$$\tau_{c,sal. DUT} = (R_{od} \parallel R_{i2})(C_{c2} + C_{i2}) = (50 \Omega \parallel 1 \text{ M}\Omega)(125 \text{ pF} + 25 \text{ pF}) \approx 50 \Omega \times 150 \text{ pF} = 7,5 \text{ ns} \Rightarrow 2\pi\tau_{c,sal. DUT} \approx 47,1 \text{ ns}$$

Además,  $BW_{DUT,obs}^{-1} = 1/(15 \text{ MHz}) \approx 66,7 \text{ ns}$ ; luego, aplicando (A.24), resulta:

$$BW_{DUT} = \frac{1}{\sqrt{(66,7 \text{ ns})^2 - (47,1 \text{ ns})^2}} \approx 21,1 \text{ MHz}$$

Esta es la respuesta al problema.

## A.17. Problema 16: medición de resistencias

(En Evaluación Integradora del 9-FEB-2010.)

**Enunciado** En la figura se muestra un circuito que podría servir como instrumento para medir resistencias de valores altos (medición que con un óhmetro analógico común presenta dificultades); consiste en un puente de resistores (equilibrado cuando “ $R_x = \infty$ ”) y un galvanómetro muy sensible; asuma que  $I_g^{FS} = 10 \mu\text{A}$  y  $R_g = 20 \text{ k}\Omega$ ; los resistores del puente son idénticos, y su resistencia es de  $100 \text{ k}\Omega$ ; la batería es de  $12 \text{ V}$ .

1. Dibuje en escala la curva  $I_g$  vs.  $R_x$
2. ¿Cuál es el valor mínimo medible de  $R_x$ ?
3. Si se marca la escala del galvanómetro con la resistencia medida, ¿esta escala es lineal?

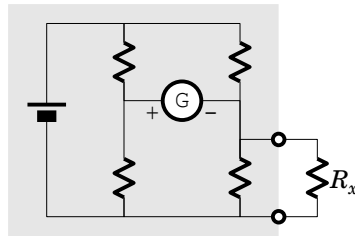


Figura A.43: Medición de resistencia con alta sensibilidad.

**Solución** Se puede analizar intuitivamente la operación del “instrumento” de la siguiente forma:

- Si “ $R_x = \infty$ ”, y se supone que el puente está equilibrado, entonces la intensidad de corriente del galvanómetro es nula
- Si  $R_x = 0$ , es fácil determinar que  $I_g = (V_B/2) / (R/2 + R_g) = 6 \text{ V} / 0,07 \text{ M}\Omega \approx 86 \mu\text{A}$ , que es mucho mayor que  $I_g^{\text{FS}}$
- A medida que el valor de  $R_x$  va variando desde  $\infty$  hacia 0, la intensidad de corriente del galvanómetro crece monótonamente; es decir, la gráfica de  $I_g$  como función de  $R_x$  representa una función estrictamente monótona decreciente

La lectura del instrumento se toma de la escala del galvanómetro, de tal forma que se puede afirmar que el objeto que concentra la atención en este problema es dicho instrumento; éste hace las veces de receptor de energía, es decir, de carga; el resto de circuito funciona como suministrador de dicha energía, es decir, funciona como un sistema generador. Con esta conceptualización, no es difícil entender que la simplificación de la solución del problema surge de encontrar el equivalente Thévenin de dicho sistema generador; esto es lo que se hace a continuación.

Se simboliza con  $V_B$  la tensión de la batería, y con  $R$  la resistencia de cada uno de los resistores del puente.

**Tensión Thévenin** El circuito utilizado para el cálculo es el de la Fig. A.44.

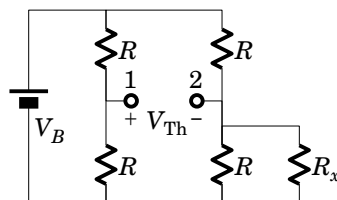


Figura A.44: Circuito que permite determinar la tensión Thévenin.

Se obtiene:

$$V_{Th} = V_1 - V_2 = \frac{V_B}{2} - V_B \frac{R \parallel R_x}{R + R \parallel R_x} = V_B \left( \frac{1}{2} - \frac{\frac{RR_x}{R+R_x}}{R + \frac{RR_x}{R+R_x}} \right) =$$

$$V_B \left( \frac{1}{2} - \frac{RR_x}{R^2 + 2RR_x} \right) = \frac{V_B}{2} \left( 1 - \frac{1}{1 + \frac{R}{2R_x}} \right) = \frac{V_B}{2} \frac{\frac{R}{2R_x}}{1 + \frac{R}{2R_x}}$$

**Resistencia Thévenin** El circuito utilizado para el cálculo es el de la Fig. A.45.

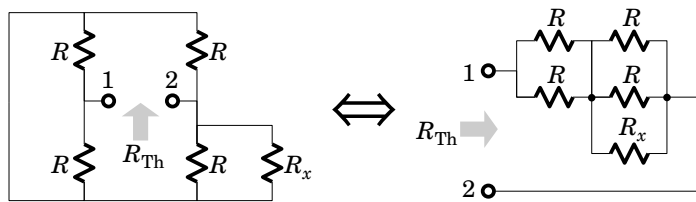


Figura A.45: Circuito que permite determinar la resistencia Thévenin; a la derecha se aprecia un circuito topológicamente equivalente, pero que permite escribir en forma directa la expresión para  $R_{Th}$ .

Se obtiene:

$$R_{Th} = \frac{R}{2} + \left( \frac{R}{2} \parallel R_x \right) = \frac{R}{2} + \frac{\frac{R}{2} R_x}{\frac{R}{2} + R_x} = \frac{R}{2} \left( 1 + \frac{1}{1 + \frac{R}{2R_x}} \right) = \frac{R}{2} \frac{2 + \frac{R}{2R_x}}{1 + \frac{R}{2R_x}}$$

**Intensidad por el galvanómetro** Reemplazando el circuito externo al galvanómetro por su equivalente Thévenin resulta:

$$I_g = \frac{V_{Th}}{R_g + R_{Th}}$$

Hacemos para simplificar  $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2R_x}{R}$  (una medida de la magnitud relativa de  $R_x$  respecto a las resistencias del puente); entonces:

$$I_g = \frac{\frac{V_B}{2} \frac{1/\alpha}{1+1/\alpha}}{R_g + \frac{R}{2} \frac{2+1/\alpha}{1+1/\alpha}} = \frac{V_B}{2} \underbrace{\frac{1}{R_g + R/2}}_{I_g(R_x=0)} \frac{1}{1 + \frac{R_g + R}{R_g + R/2} \alpha}$$

Reemplazando por los valores hallados:

$$I_g \approx 86 \mu\text{A} \times \frac{1}{1 + \frac{12}{7}\alpha} \quad (\text{A.25})$$

Se debe procurar que no se sobrepase la intensidad de corriente de plena escala del galvanómetro, por lo tanto (intensidades expresadas en  $\mu\text{A}$ ):

$$I_g \leq I_g^{\text{FS}} \Leftrightarrow 86 \frac{1}{1 + \frac{12}{7}\alpha} \leq 10 \Leftrightarrow 1 + \frac{12}{7}\alpha \geq 8,6 \Leftrightarrow \alpha \geq 4,43$$

Así que, para no superar el alcance del galvanómetro,  $R_x \geq (4,43/2)R = 222 \text{ k}\Omega$ .

En resumen, las respuestas al problema son:

1. Véase la Fig. A.46, donde se grafica (A.25)

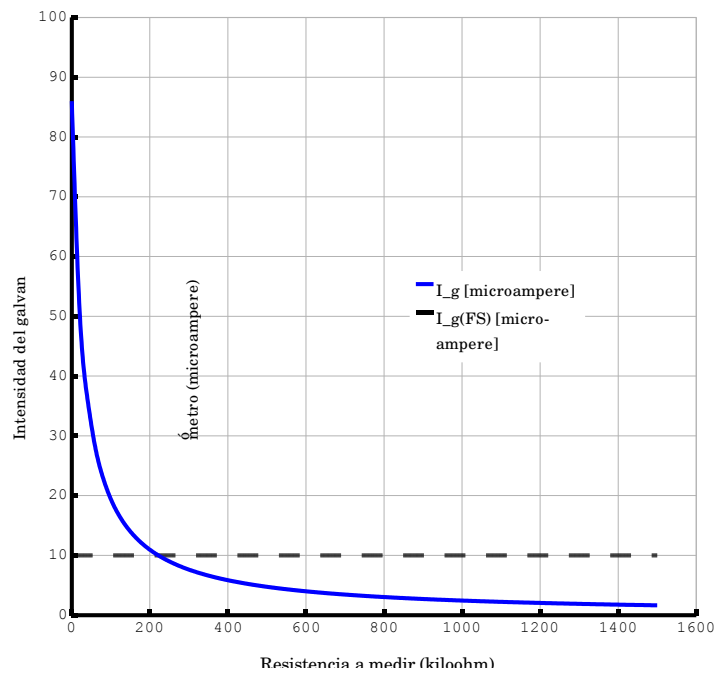


Figura A.46: Intensidad de corriente por el galvanómetro como función de la resistencia a medir.

2.  $R_{x,\text{mín}} \approx 222 \text{ k}\Omega$
3. La escala *no* es lineal; en realidad, cualquier escala que incluya a  $\infty$  como lectura, no puede ser lineal



# Índice de figuras

A.1. Señal Prob. A.2 . . . . .	3
A.2. Análisis disparo señal Prob. A.2 . . . . .	4
A.3. Pantalla Prob. A.2 . . . . .	5
A.4. Señales en el Prob. A.2 . . . . .	6
A.5. Circuito Prob. A.3 . . . . .	7
A.6. Ajuste compensador 2 . . . . .	8
A.7. Equivalente del compensador 2 más el ORC . . . . .	8
A.8. Compensador 1 . . . . .	9
A.9. Equivalente del compensador 1 más el ORC . . . . .	9
A.10. Circuito del generador . . . . .	9
A.11. Simulación de los resultados . . . . .	11
A.12. Circuito Prob. A.4 . . . . .	12
A.13. Modelo eléctrico . . . . .	13
A.14. Circuito del Prob. A.5 . . . . .	14
A.15. Circuito del Prob. A.5, segunda versión . . . . .	15
A.16. Circuito del Prob. A.5, tercera versión . . . . .	15
A.17. Análisis de Thévenin . . . . .	16
A.18. Circuito CR del Prob. 5 . . . . .	19
A.19. Respuesta del circuito para $i_{R_b}$ . . . . .	21
A.20. Característica E-S de un comparador de Schmitt . . . . .	23
A.21. Señal de salida . . . . .	25
A.22. Análisis de conmutación . . . . .	25
A.23. Medición de resistencia . . . . .	27
A.24. Conversor de doble rampa . . . . .	30
A.25. Circuito . . . . .	35
A.26. Diagrama análisis . . . . .	35
A.27. Incertidumbre de $R_x$ . . . . .	38
A.28. Línea de transmisión discreta . . . . .	39
A.29. Análisis de la línea infinita . . . . .	40
A.30. Modelo de línea . . . . .	41
A.31. Conexiones . . . . .	43
A.32. Modelo . . . . .	43
A.33. Relaciones Y-X . . . . .	44
A.34. Fig. de Lissajous . . . . .	45
A.35. Modelo del caso 1 . . . . .	47
A.36. Modelo del caso 2 . . . . .	49
A.37. Modelo simplificado del caso 1 . . . . .	49
A.38. Conexión caso 3 . . . . .	50

A.39.Modelo equivalente caso 3 . . . . .	51
A.40.Modelo caso 4 . . . . .	51
A.41.Banco de medición . . . . .	56
A.42.Modelo eléctrico . . . . .	59
A.43.Medición de resistencia . . . . .	62
A.44.Determinación de la tensión Thévenin . . . . .	62
A.45.Determinación de la resistencia Thévenin . . . . .	63
A.46. $I_g$ vs. $R_x$ . . . . .	64

# Índice de cuadros

A.1. Comparación de resultados (análisis cualitativo)↔(cálculo exacto)	21
A.2. Comparación de resultados, cuando $C_2 = 0,1 \mu\text{F}$ ( $\tau_1/\tau_2 \approx 12,4$ )	22
A.3. Comparación de resultados, cuando $C_2 = 1 \mu\text{F}$ (errores grandes; $\tau_1/\tau_2 \approx 1,24$ )	22
A.4. TT intrínseco mínimo relativo del generador, para un dado error sistemático; la fórmula de referencia es $t_{T,\text{obs}}^2 = t_{Tg}^2 + T^2$ .	48
A.5. Resumen del análisis del presente problema.	53
A.6. Comparación entre el resultado de la fórmula de suma cuadrática, y la simulación con SPICE.	54

# Índice alfabético

- Acoplamiento, 4
- Adaptación, 13, 14
- Amplitud, 25
- Análisis fasorial, 23
- Ancho de banda, 4
  
- Barrido, *véase* Barrido horizontal
- BdeT, *véase* Base de tiempo
- BdeT primaria, 5
- BdeT secundaria, 5
  
- Cálculo aproximado, 27
- Cable, 8
- Canal vertical, *véase* Eje Y
- CC, *véase* Corriente continua
- Compensador, 8
- Condición de compensación perfecta, 8–10
- Condición inicial, 22
- Constante de tiempo, 10
- Constante de tiempo a circuito abierto, 20
- Constante de tiempo característica, 10
- Constante de tiempo dominante, 20
- CTC, *véase* Constante de tiempo característica, 11, 14
- CTD, *véase* Constante de tiempo dominante
  
- DDS, *véase* Diente de sierra
- Desvío, 18
- Desvío relativo, 14, 17, 18
- Diente de sierra, 7
- Distribución de probabilidad, 17
  
- Ecuación diferencial, 21
- Efecto de carga, 11
- Error sistemático, 11
- Evento de disparo, 5
  
- Factor de servicio, 27
  
- Fuente de señal, 13, 25
- Función de circuito, 23
  
- Galvanómetro, 16
- Generador, *véase* Fuente de señal
  
- Impedancia característica, 13
- Impedancia de entrada, 4, 13
- Incertidumbre, 14, 27
  
- Línea de transmisión, 8, 13
- Ley de Ohm, 20
- Linealidad, 19
  
- Modelo Thévenin, 16, 18, 19
  
- Onda de intensidad de corriente, 8
- Onda de tensión, 8
- ORC, *véase* Osciloscopio de rayos catódicos, 8, 14
- Osciloscopio de rayos catódicos, 4
  
- Período, 4, 25
  
- Régimen senoidal permanente, 23
- Reglas de Kirchhoff, 19
- Retrazado, 7
  
- Señal, 14
- Señal periódica, 4
- Sonda, 13, 14
- SPICE, 11
  
- TdeC, *véase* Teoría de los circuitos
- Teoría de los circuitos, 24
- Tiempo de barrido, 5
- Tiempo de propagación, 13
- Tiempo de transición, 8
- TT, *véase* Tiempo de transición, 13
  
- Umbral de conmutación, 25, 27
  
- Valor medio, 4

*ÍNDICE ALFABÉTICO*

69

Velocidad de propagación, 8

Velocidad de transición, 14