USO INTERNO

Nota de este examen: [ ]

Nota de Cursada: [ ]    Nota en la libreta: [ ]

---

## Evaluación integradora de Modelos y Optimización I (71.14)

31 de julio de 2013

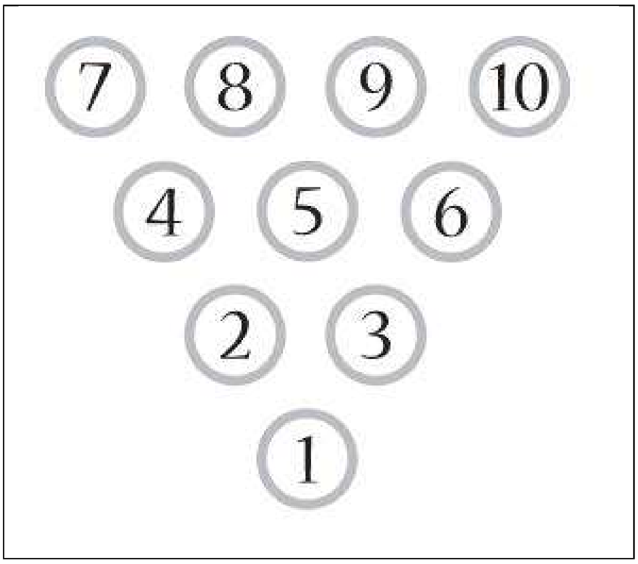
Apellido y nombre:........................................................................ Nro.de Padrón:..........................

Cursó en el [ ] cuatrimestre del año [ ]

Turno de T.P.: (día y horario) ................................................. Ayudante/s:.....................................

Oportunidad en la cual rinde (1ra, 2da, 3ra) [ ]    Rinde como:    Regular: [ ]    Libre: [ ]

**A** En las pistas en las cuales se juega al bowling están dispuestos en el fondo 10 bolos dispuestos en forma de triángulo, como se ve a la derecha. Como se advierte, uno puede construir muchos triángulos equiláteros usando estos números como vértices. Por ejemplo, el triángulo formado por 8, 5 y 9. O el 6, 8 y 2. O bien el más grande 1,7 y 10.




Supongamos ahora que los bolos son de dos posibles colores: azul y rojo. Adrián Paenza en su último libro (*) quiere averiguar si es posible distribuirlos de manera tal que ningún triángulo equilátero quede formado con bolos del mismo color. Por ejemplo, si los lugares 7 y 10 están ocupados por bolos de color rojo, entonces el 1 debería ser de color azul. Sin embargo, Adrián sabe que tal vez no se pueda llegar a distribuir los diez bolos de la forma que indica la figura, de manera que ningún triángulo equilátero (de todos los posibles) tenga los tres vértices con bolos del mismo color, pero piensa que un modelo le podría responder cuántos triángulos de ese tipo se pueden formar.

**A1** Análisis del problema, Objetivo completo y claro. Hipótesis necesarias para su resolución, definición de variables. Modelo de programación lineal para su resolución óptima.

**A2** Diego Golombek propone una heurística para resolver el problema. Consiste en poner bolos azules en las posiciones impares y bolos rojos en las posiciones pares.
Indique qué inconvenientes o fallas tiene esta heurística con respecto al problema dado, si es que los tiene.

**A3** Plantee una heurística de construcción para resolver el problema. Recuerde que su heurística debe tender al mejor resultado y que no debe tener los problemas que criticó en el punto A2.

**B)** Una empresa fabrica los productos X1 y X2 a partir de los recursos R1 y R2. Además hay una restricción de producción mínima para X2 de 10 unidades por mes. Aquí vemos el planteo del problema:

**2 X1 + 2 X2 <= 80 (kilos de R1/mes)**
**X1 + 2 X2 <= 50 (kilos de R2/mes)**
**X2 >= 10 (unidades/mes)**

**Z = 60 X1 + 40 X2 (MAXIMO)** (60 es el beneficio unitario de X1 y 40 es el beneficio unitario de X2)

**Optima Directo** 60 40

| C | X | B | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 60 | X1 | 30 | 1 | 0 | 1/2 | 0 | 1 |
| 0 | X4 | 0 | 0 | 0 | -1/2 | 1 | 1 |
| 40 | X2 | 10 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 |
| | Z= | 2200 | 0 | 0 | 30 | 0 | 20 |

**Óptima Dual** 80 50 -10

| C | Y | B | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 80 | Y1 | 30 | 1 | 1/2 | 0 | -1/2 | 0 |
| -10 | Y3 | 20 | 0 | -1 | 1 | -1 | 1 |
| | Z= | 2200 | 0 | 0* | 0 | -30 | -10 |

**B1)** Se sabe que el beneficio de $40 para X2 se compone de un precio de venta de $70 y un costo de fabricación de $30. Nos ofrecen vendernos producto X2 ya elaborado a $P. ¿Cuál debería ser el valor de P para que convenga comprar producto X2? ¿Cómo determinaría la cantidad de producto X2 a comprar?. Analice claramente y justifique.

**B2)** Para este problema, se decide analizar la conveniencia de agregar un nuevo recurso (R6) para producir X1 y X2. El producto X1 consume 4 kg. de R6 por unidad y X2 consume 1 kg. de R6 por unidad. Existe una disponibilidad de 140 kg. de R6 por mes y se pagan 6 $/kg. consumido de R6 (sólo se paga lo que se consume).

La incorporación de este nuevo recurso haría que el beneficio de X1 aumentara en $12 y el beneficio de X2 aumentara en $22. Se quiere saber cuál es la estructura óptima de producción luego de analizar la conveniencia.

***NOTA:*** *Los puntos B1 y B2 se resuelven en forma independiente. Detalle en todos ellos los cálculos efectuados.*

***Para aprobar debe tener Bien 2 puntos de A y uno de B. Además, A1 no puede estar Mal.***

***(*) "Matemática para todos" páginas 156 a 159.***
***http://cms.dm.uba.ar/material/paenza/libro7/matematica_para_todos.pdf***

**Algunas pistas para la resolución.**
Atención: este documento no contiene el resuelto del examen, sino algunas pistas para ayudar a su resolución.

Parte A:
A1) El objetivo del problema es minimizar la cantidad de triángulos equiláteros que se pueden formar en el diagrama de bolos tales que tengan tres bolos en el mismo color (también se podría averiguar si la cantidad es cero o no y tener una variable bivalente que va en el z y que vale 1 si no hay ninguno y cero si hay alguno, en ese caso se maximizaría el valor de esa variable).
Las variables pueden ser:
YiA: Vale 1 si el bolo i es azul
YIR: Vale 1 si el bolo i es rojo (también se puede hacer una sola, si vale cero el bolo es rojo y si vale 1 es azul)
YijkR: Vale 1 si el triángulo formado por los bolos i, j y k tiene los tres bolos de color rojo (ídem YijkA para azul)

*Cada bolo debe ser de un solo color.*
YiA + YiR = 1 Para todo i de 1 a 10
*Si el triángulo tiene todos de color rojo*
Por ejemplo, para el triángulo 4, 7, 8 3 Y478R <= Y4R + Y7R + Y8R <= 2 + Y478R
Ídem para todos los demás triángulos que se puedan formar. Idem para los triángulos de color azul
*Min* Z= Y478R + Y478A + Y589R + Y589A + Y6910R + Y6910A + Y458R + Y458A + Y569R + Y569A + Y245R + Y245A + Y356R + Y356A + Y123R + Y123A + Y279R + Y279A + Y3810R + Y3810A + Y268A + Y268R + Y349R + Y349A + Y279A + Y279R + Y3810R + Y3810A + Y1710R + Y1710A

A2) Dado que hay triángulos en los cuales todos los vértices son pares (como el 6, 8 , 2) con el procedimiento propuesto quedará algún triángulo con tres vértices del mismo color.

A3) Si bien nuestra idea no es que tengan que resolver la heurística, sino plantearla, les comentamos lo que indica Paenza en su libro acerca del problema:
*"Empecemos con el número bolo que está sobre el número 5. Voy a suponer que es de color rojo, pero el mismo razonamiento serviría si fuera azul. Los bolos 3, 4 y 9 forman un triángulo equilátero. No quiero que sean los tres azules porque si no ya habría un triángulo equilátero con bolos del mismo color. Por lo tanto, al menos uno de ellos tiene que ser rojo. Supongamos que el 3 es rojo. Entonces, sabemos que el 3 y el 5 son rojos. Luego, el 2 y el 6 tienen que ser azules (ya que, si no, cualquiera de ellos formaría con el 3 un triángulo equilátero de color rojo). Pero si el 2 y el 6 son azules, como el 8 forma con ellos un triángulo equilátero también, el 8 tiene que ser rojo. Pero como el 3 y el 8 son rojos, entonces el 10 tiene que ser azul. Pero ahora, como el 6 ya era azul y el 10 lo es, entonces al 9 no le queda más remedio que ser rojo. Pero si el 9 es rojo, entonces el triángulo 9, 5 y 8 tiene los tres vértices rojos y es equilátero. Luego, como usted advierte, la conclusión es que no importa cómo haga uno la distribución de los bolos, no es posible evitar que en algún lugar quede formado un triángulo equilátero con vértices del mismo color. Es decir, cuando empecé seleccionando el color del bolo que lleva el número 5, al avanzar en la distribución de los otros, fui tratando de evitar que quedaran formados triángulos equiláteros con vértices del mismo color. Como usted advirtió, así como sucede cuando uno tiene una hilera de fichas de dominó que al caer una empieza a producir una reacción en cadena, aquí sucedió lo mismo. En cada paso uno está poco menos que forzado a ubicar los bolos de una cierta forma, pero en el final queda atrapado por los colores que había antes y no puede evitar que quede formado un triángulo equilátero de los que quería eludir.*
*Este tipo de razonamientos lógicos, en donde uno va tomando decisiones a cada paso hasta terminar encerrado en lo que no quería que pasara, es muy útil para la vida cotidiana también. En situaciones en las que uno necesita imaginar un escenario en donde hay varios argumentos encadenados que van determinando lo que va a pasar en el futuro, sirve para tomar decisiones más educadas, o en todo caso, más pensadas, más elaboradas. Y para terminar quiero enfatizar que esto fue… hacer matemática también."*

B1) Además de la ganancia que se obtiene como (Precio de Venta – Costo de Compra) hay una ganancia adicional. Como X2 tiene una demanda mínima, comprar X2 ya hecho permite bajar la cantidad que estamos obligados a hacer. Dado que la restricción de demanda mínima tiene un valor marginal de 20, el funcional aumentará en 20 por cada unidad en la cual bajemos la demanda mínima. Como la fórmula (Precio de Venta – Costo de Compra + Valor Marginal de la demanda mínima) debe ser mayor o igual que cero, tenemos que el Costo de Compra debe ser menor o igual que 70 (Precio de Venta) más 20 (Valor Marginal de la demanda mínima). Para saber cuánto producto X2 comprar hay que obtener el rango de variación del coeficiente -10 de la tercera restricción.

B2) En primer lugar hay que calcular el ingreso del nuevo recurso, usando la matriz inversa óptima del dual (ojo que los vectores de las slacks no eran básicos en la primera tabla, los de las artificiales eran básicos) y el vector de la restricción en la primera tabla dual. Igual se puede ver que manteniendo la producción actual no restringe.
Una vez incorporado, se pasa al directo y se modifican los coeficientes de X1 y X2, considerando no solamente el aumento en el beneficio ($12 para X1 y $22 para X2) sino el aumento en el costo por el costo de R6 (como el producto X1 consume 4 kilos por unidad y cada kilo cuesta $6 el costo de X1 aumenta en 24 pesos). Análogamente se puede ver que el costo de X2 aumenta en 6 pesos. Es decir que al pasar desde el dual al directo (recordar que el directo es el dual del dual, con lo que pasando al dual la tabla óptima del dual obtendremos la tabla óptima del directo) el nuevo coeficiente de X1 será 48 y el nuevo coeficiente de X2 será 56. Con estos beneficios se calcula si la tabla del directo sigue siendo óptima, sino se debe pivotear hasta llegar a la tabla óptima del directo.