

USO Nota de este examen: INTERNO Nota de Cursada: Nota en la libreta: **Evaluación integradora de Modelos y Optimización I (71.14)**

8 de agosto de 2013

Apellido y nombre:..... Nro.de Padrón:.....

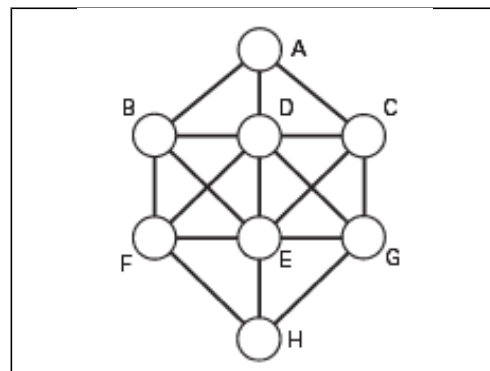
Cursó en el cuatrimestre del año

Turno de T.P.: (día y horario) Ayudante/s:.....

Oportunidad en la cual rinde (1ra, 2da, 3ra) ☐Rinde como: Regular: ☐Libre: ☐

A En uno de sus libros (*), Adrián Paenza plantea un problema que, si bien está enunciado como un problema recreativo, es utilizado en comunicaciones para el armado de redes.

El objetivo del problema es distribuir los primeros ocho números (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8) en los círculos indicados en el dibujo, de manera tal de que no haya ningún par de números consecutivos unidos por un segmento. Además, para su aplicación al área de comunicaciones, se quiere que los números que estén ubicados en B y C difieran lo menos posible entre sí.



A1 Análisis del problema, Objetivo completo y claro. Hipótesis necesarias para su resolución, definición de variables. Modelo de programación lineal para su resolución óptima.

A2 Marcus du Sautoy propone una heurística para resolver el problema. Consiste en lo siguiente:

Se toman los números por orden numérico del 1 al 8.

Se coloca el número 1 en el círculo A

Hasta haber colocado los 8 números, colocar el siguiente número en el círculo más alejado de aquél en el cual acaba de poner el último número colocado.

Indique qué inconvenientes o fallas tiene esta heurística con respecto al problema dado, si es que los tiene.

A3 Plantee una heurística de construcción para resolver el problema. Recuerde que su heurística debe tender al mejor resultado y que no debe tener los problemas que criticó en el punto A2.

B) Una empresa fabrica los productos X1 y X2 a partir de los recursos R1, R2 y R3. Aquí vemos el planteo del problema y las tablas óptimas del directo y del dual:

$$X1 - X2 \leq 50 \text{ (kg. R1/mes);}$$

$$X1 + X2 \leq 100 \text{ (kg. R2/mes);}$$

$$3 X1 + X2 \leq 150 \text{ kg. R3/mes);}$$

$$Z = 120 X1 + 60 X2 \text{ (MAXIMO)}$$

(120 es el precio de venta de X1 y 60 es el precio de venta de X2)

Óptima Directo

120 60

Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
0	X3	100	0	0	1	2	-1
60	X2	75	0	1	0	3/2	-1/2
120	X1	25	1	0	0	-1/2	1/2
	Z=	7500	0	0	0	30	30

Óptima Dual

50 100 150

Ck	Yk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
100	Y2	30	-2	1	0	1/2	-3/2
150	Y3	30	1	0	1	-1/2	1/2
	Z=	7500	-100	0	0	-25	-75

B1) Se debe agregar un nuevo recurso al producto X2 para que cumpla con el standard de calidad internacional. Si se sabe que de dicho recurso se consumen 2 hs por cada unidad fabricada de X2 y tiene una disponibilidad máxima de 120 horas. La empresa ha decidido que pedirá una indemnización en una cantidad suficiente como para compensar las pérdidas que provoque cumplir con ese nuevo estándar ¿Cuál será el plan de producción con el nuevo recurso incorporado y cuál es el valor de la indemnización, si corresponde pedirla?

B2) Le ofrecen a la empresa conseguir kg. de R3. Para conseguir 1 kg. de R3 hay que entregar 1 kg. de R1 más \$25 ¿Es conveniente este intercambio?. ¿Cuántos paquetes de R3 es conveniente conseguir de este modo?.

NOTA: Los puntos B1 y B2 se resuelven en forma independiente. Detalle en todos ellos los cálculos efectuados.

Para aprobar debe tener Bien 2 puntos de A y uno de B. Además, A1 no puede estar Mal.

Algunas pistas para la resolución.

Atención: este documento no contiene el resuelto del examen, sino algunas pistas para ayudar a su resolución.

Parte A:

A1) El objetivo del problema es determinar cuál de los números del 1 al 8 va en cada círculo de manera que no haya ningún par de números consecutivos unidos por un segmento y de modo de minimizar la diferencia entre los números ubicados en B y C.

Las variables pueden ser:

Y_{ij} . Vale 1 si el número i está en el círculo j .

DIFPOS. Tiene el valor de la diferencia positiva entre el valor del círculo B y el valor del círculo C (ídem DIFNEG)

Cada círculo debe tener un solo número.

$$Y_{i1} + Y_{i2} + Y_{i3} + Y_{i4} + Y_{i5} + Y_{i6} + Y_{i7} + Y_{i8} = 1 \quad \text{Para todo } i \text{ de A a H}$$

Cada número debe estar en un círculo solamente

$$Y_{Aj} + Y_{Bj} + Y_{Cj} + Y_{Dj} + Y_{Ej} + Y_{Fj} + Y_{Gj} + Y_{Hj} = 1 \quad \text{Para todo } j \text{ de 1 a 8}$$

Diferencia entre B y C

$$(1 Y_{B1} + 2 Y_{B2} + \dots + 8 Y_{B8}) - (1 Y_{C1} + 2 Y_{C2} + \dots + 8 Y_{C8}) = \text{DIFPOS} - \text{DIFNEG}$$

$$\text{Min } Z = \text{DIFPOS} + \text{DIFNEG}$$

A2) En primer lugar no sabemos la longitud de los segmentos, pero aún suponiendo que todos tienen la misma longitud, no sabemos a ciencia cierta cuál es “el más alejado” porque puede haber empate de valores. Además, no dice que lo coloque en el más alejado que aún no tenga número colocado, con lo que puede superponer valores y no cumple con las condiciones del problema. Tampoco tiene en cuenta la diferencia entre el valor de B y el de C.

A3) Si bien nuestra idea no es que tengan que resolver la heurística, sino plantearla, les comentamos lo que indica Paenza en su libro acerca del problema:

“Analícemos la situación de cada vértice, y veamos cuántos segmentos llegan o salen de él.

A los vértices A y H llegan (o salen, pero es lo mismo) tres segmentos. A los vértices B, C, F y G llegan cuatro segmentos. A los vértices D y E llegan seis segmentos. Es decir que, si bien hay mucha simetría en el dibujo, podemos agrupar los vértices en tres, de acuerdo con el número de segmentos que llegan o salen a ellos:

a) A y H

b) B, C, F, y G

c) D y E

Analícemos los números que tenemos que distribuir: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8. ¿Cuántos consecutivos tiene cada uno?

El número 1 tiene un solo consecutivo: el 2. El número 8 tiene un solo vecino: el 7. En cambio, los restantes (2, 3, 4, 5, 6 y 7) tienen dos consecutivos cada uno. Es decir, en el lugar donde ponga, digamos el 2, ¿qué números pueden estar conectados con él? Hay cinco números:

el 4, 5, 6, 7 y 8. O sea que el número 2 sólo puede estar ubicado en un vértice que no tenga más que cinco segmentos que entran o salen. Luego, no puede ir ni en D ni en E. Lo interesante de esto que acabo de escribir es que no sólo ocurre con el número 2, sino también con el 3, 4, 5, 6 y 7. MORALEJA: los números 2, 3, 4, 5, 6 y 7 no pueden estar ubicados ni en el vértice D ni en E. Esto nos deja en una buena posición, porque ahora sabemos que si el problema va a tener solución, la única alternativa para D y E es que hacia allí vayan –indistintamente– los números 1 y 8...” A partir de aquí podemos inferir pistas para el tratamiento de los distintos vértices en un algoritmo heurístico.

B1) Si actualmente se fabrican 75 unidades de X2 y cada unidad consume 2 horas del nuevo recurso, la disponibilidad mínima del nuevo recurso debe ser de 150 horas, pero es de 120, así que vamos a tener una baja en el funcional. Para calcularla se debe incorporar la restricción en el dual, como el vector (0 1) tomando la matriz inversa óptima del dual (recordar que, dado que en el dual hay dos restricciones de mayor o igual, la matriz inversa óptima serán los vectores $-A_4$ y $-A_5$ de la tabla óptima del dual). Una vez llegado al óptimo del dual veremos cuánto ha bajado el funcional y en el z5-c5 tenemos (cambiado de signo) el valor de la cantidad de X2 fabricada. Lo que bajó el funcional nos da la cantidad que tenemos que pedir como indemnización.

B2) En principio el intercambio conviene, porque recibimos algo que tiene valor marginal de 30 y entregamos algo que tiene valor marginal cero, además de 25 pesos, con lo que ganamos 5 pesos. En la tabla, va a aparecer una ganancia de 30 cuando planteemos la variación simultánea, porque los \$25 deben calcularse por afuera del modelo. Se calcula el valor de alfa hasta que la tabla óptima actual deje de serlo y pasamos a la otra tabla. Si en la siguiente tabla el recurso R3 tiene valor marginal cero, el negocio terminó. Sino, tendremos que calcular cuánto nos queda por el negocio ($1 \text{ kg} \times \text{VM R3} - 1 \text{ kg} \times \text{VM R1}$) y si es más que \$25 seguimos hasta llegar a una tabla en la cual nos queden menos de \$25, con lo cual deja de convenir el negocio.