

USO Nota de este examen:

INTERNO Nota de Cursada:

Nota en la libreta:

### Evaluación integradora de Modelos y Optimización I (71.14)

27 de febrero de 2013

Apellido y nombre:..... Nro.de Padrón:.....

Cursó en el  cuatrimestre del año

Turno de T.P.: (día y horario) ..... Ayudante/s:.....

Oportunidad en la cual rinde (1ra, 2da, 3ra) ☐

Rinde como: Regular: ☐

Libre: ☐

**A** Se deben acomodar 5 paquetes que tienen forma de cubo (es decir que tienen todos sus lados iguales, por eso se indica una sola medida como lado), poniendo uno encima del otro, es decir, formando una especie de "torre" que tenga la mayor cantidad de cubos posible.

A continuación se indican los datos de los 5 paquetes y las características del problema.

Paquete	Peso del paquete (kg.)	Peso máximo que puede soportar encima el paquete (kg.)	Lado del paquete (cm.)
A	5	F	a
B	4	G	b
C	7	H	c
D	9	I	d
E	3,5	J	e

Cada paquete puede soportar encima hasta un determinado peso, que es lo indicado en la tabla en la tercera columna.

Por razones físicas, la medida del lado de cada paquete debe ser, como máximo, un 10% mayor que la medida del lado del paquete sobre el cual está apoyado (es decir, puede ser más grande, pero hasta un 10% mayor)

**A1** Análisis del problema, Objetivo completo y claro. Hipótesis necesarias para su resolución, definición de variables. Modelo de programación lineal para su resolución óptima.

**A2** Blas Pascal propone una heurística para resolver el problema. Consiste en ordenar los paquetes según el tamaño del lado de mayor a menor y apilarlos en ese orden (poniendo abajo el de mayor tamaño y apilándole por orden decreciente de tamaño todos los demás).

Indicá qué condiciones se tienen que dar en los datos del problema para que esta heurística funcione mal (si es que las hay) y qué condiciones se tienen que dar en los datos del problema para que esta heurística funcione bien (si es que las hay).

**A3** Planteá una heurística de construcción para resolver el problema. Recordá que tu heurística debe tender al mejor resultado y que no debe tener los problemas que criticaste en el punto A2.

**B)** Una empresa fabrica dos productos X1 y X2 sujetos a restricciones de consumo de horas hombre (como máximo 54 hh por día), demanda mínima conjunta (3 unidades diarias) y consumo diario de materia prima MP1 y de materia prima MP2. A continuación se muestran las ecuaciones iniciales del modelo de producción diaria y las tablas óptimas directa y dual de dicho Programa Lineal:

$$\begin{aligned}
 9X_1 + 6X_2 &\leq 54 \text{ [hh/día]} \\
 X_1 + X_2 &\geq 3 \text{ [un/día]} \\
 X_1 &\leq 5 \text{ [kg MP1/día]} \\
 X_2 &\leq 6 \text{ [kg MP2/día]} \\
 Z = 60X_1 + 120X_2 &\text{ (máx) [$/día]}
 \end{aligned}$$

Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5	A6
60	X1	2	1	0	1/9	0	0	-2/3
120	X2	6	0	1	0	0	0	1
0	X5	3	0	0	-1/9	0	1	2/3
0	X4	5	0	0	1/9	1	0	1/3
	Z =	840	0	0	60/9	0	0	80

Bk	Yk	Ck	A1	A2	A3	A4	A5	A6
54	Y1	60/9	1	-1/9	1/9	0	-1/9	0
6	Y4	80	0	-1/3	-2/3	1	2/3	-1
	Z =	840	0	-5	-3	0	-2	-6

**B1)** La empresa está analizando la posibilidad de comenzar a fabricar un nuevo producto llamado X7. La fabricación de una unidad de X7 insume 1 kilo de MP1 y 3 kilos de MP2. Se puede obtener un beneficio de \$300 por unidad de X7 ¿Cuántas horas hombre debería consumir cada unidad de X7 para que sea conveniente fabricarlo?.

**B2)** ¿A qué precio y en qué cantidad será conveniente vender MP1?

**B3)** ¿Cómo cambia el problema y cuál será la solución si se agrega la siguiente restricción:

$X_2 \geq 10$  ?

**NOTA:** Los puntos B1, B2 y B3 se resuelven en forma independiente. Detalle en todos ellos los cálculos efectuados.

**Para aprobar debe tener Bien dos puntos de A y dos de B. Además, A1 no puede estar Mal.**

### Algunas pistas para la resolución.

Atención: este documento no contiene el resuelto del examen, sino algunas pistas para ayudar a su resolución.

Parte A:

A1) Es un problema de asignación cuadrática. El objetivo es determinar cuáles son los paquetes que se van a apilar y en qué orden se apilan para maximizar la cantidad de paquetes apilados.

Las variables pueden ser:

$Y_i$ : Vale 1 si se coloca el paquete  $i$

$Y_iPOS_j$ : Vale 1 si el paquete  $i$  se coloca en la posición  $j$  (1 es la posición de debajo de todo)

$YPOS_j$ : Vale 1 si se colocó algún paquete en la posición  $j$

$PESOPOS_j$ : Peso del paquete que está en la posición  $j$ .

$Y_iPOS_jkPOS_l$ : Vale 1 si el paquete  $i$  está en la posición  $j$  y el paquete  $k$  está en la posición  $l$

*Cada paquete puede ir solamente en una posición:*

Por ejemplo para A

$$YA_1 + YA_2 + YA_3 + YA_4 + YA_5 = YA$$

Idem para los demás paquetes

*En cada posición debe ir a lo sumo un paquete*

Por ejemplo para la posición 2

$$YA_2 + YB_2 + YC_2 + YD_2 + YE_2 = YPOS_2$$

Idem para las demás posiciones

*Si no se colocó un paquete en la posición  $i$ , no se puede colocar uno en la posición  $i+1$*

$$YPOS_2 \leq YPOS_1 \quad YPOS_3 \leq YPOS_2 \quad YPOS_4 \leq YPOS_3 \quad YPOS_5 \leq YPOS_4$$

*Peso por posición*

Por ejemplo, la posición 2 (la 1 no hace falta, todas las demás se calculan de manera análoga)

$$PESOPOS_2 \leq 5YA_2 + 4YB_2 + 7YC_2 + 9YD_2 + 3,5YE_2$$

*Control del peso que puede soportar encima un paquete*

Por ejemplo la posición 1:

$$PESOPOS_2 + PESOPOS_3 + PESOPOS_4 + PESOPOS_5 \leq F YA_1 + G YB_1 + H YC_1 + I YD_1 + J YE_1$$

Posición 2:

$$PESOPOS_3 + PESOPOS_4 + PESOPOS_5 \leq F YA_2 + G YB_2 + H YC_2 + I YD_2 + J YE_2$$

Y así sucesivamente...

*Control del lado*

Por ejemplo entre A y B:

$$2YAPOS_1BPOS_2 \leq YAPOS_1 + YBPOS_2 \leq 1 + YAPOS_1BPOS_2$$

$1,1b \leq a + M(1 - YAPOS_1BPOS_2)$  Idem para las demás posiciones y para los demás pares de bloques

$$Max Z = YA + YB + YC + YD + YE$$

A2) La heurística propuesta funciona bien si los paquetes que tienen el lado de menor dimensión son más livianos que los que tienen el lado de mayor dimensión. Además el peso que soportan tiene que alcanzar para armar la pila como indica la heurística. Si una de esas condiciones (o ambas) no se cumplen, funcionará mal.

A3) Una idea es ordenar los paquetes de mayor a menor según el peso que soportan. Colocar debajo de todo el paquete que más peso soporta e ir apilándoles los demás en orden. Siempre que se apila un paquete hay que controlar que el lado del que va arriba cumpla la condición del enunciado, sino hay que saltar ese paquete. Idem con la cuestión del peso del paquete (si no soporta ese peso se saltea ese paquete) Cuando se haya terminado de chequear todos los paquetes la heurística finaliza y se cuenta cuántos paquetes se ubicaron.

NOTA: Aquí no planteamos un ejemplo de heurística, simplemente, siguiendo la idea de este documento, damos pistas para su elaboración

Parte B)

B1) Cuidado al armar la matriz inversa óptima para premultiplicarla por el vector  $(a \ 0 \ 1 \ 3)$ , porque al ser la segunda restricción de mayor o igual, la columna A4 va cambiada de signo (la matriz es  $A_3 - A_4 \ A_5 \ A_6$ ). Con el vector indicado se supone que el producto nuevo no interviene en la restricción de demanda mínima. Se debe calcular cuál es el valor de  $a$  para que el  $z_j - c_j$  del producto nuevo sea menor o igual que cero.

B2) La materia prima 1 se puede regalar (sobran 3 kilos) mientras no regalemos más de esa cantidad. Luego se pasa a la siguiente tabla en la cual se verá el valor marginal de los otros 2 kilos (si los vendemos no podemos fabricar X1)

B3) De la última restricción se ve que el problema dará incompatible.