

**Evaluación integradora de Modelos y Optimización I (71.14)**

16 de julio de 2014

Apellido y nombre: Nro.de Padrón:

Cursó en el cuatrimestre del año

Turno de T.P.: (día y horario) Ayudante/s:

Oportunidad en la cual rinde (1ra, 2da, 3ra) Rinde como: Regular: Libre:

**A** La sociedad latinoamericana de proyectos literarios (SOLPLI) decidió organizar su simposio 2014 en Brasil (aprovechando las instalaciones de la Copa del Mundo de fútbol). Concurrirán los países de Sudamérica (a los cuales podemos ver en el gráfico de la derecha) y tienen que alquilar hoteles para su alojamiento en Río de Janeiro. Los delegados de Brasil van a ir a un hotel aparte (ellos solos) pero para los delegados de los demás países se quiere reservar alojamiento en hoteles pero con la condición de que no pueden estar alojados en el mismo hotel delegaciones de países que sean limítrofes (por ejemplo, la delegación de Ecuador no puede estar en el mismo hotel que la de Colombia o Perú). Como máximo pueden reservar alojamiento en 8 hoteles. No se quiere que la delegación de Colombia esté junto con la de Bolivia y no puede haber más de 3 delegaciones en un mismo hotel. Reservar un hotel cuesta \$MUCHO.



¿Qué es lo mejor que puede hacer SOLPLI con la información disponible?. Se pide:

**A1** Análisis del problema, Objetivo completo y claro. Hipótesis necesarias para su resolución, definición de variables. Modelo de programación lineal para su resolución óptima.

**A2** Héctor Timerman propone la siguiente heurística de construcción para resolver este problema:

*Se reserva un hotel para la Argentina y uno distinto para cada uno de los países que limitan con ella.*

*Se ordena el resto de los países en una lista a partir de Perú hacia el noreste (quedará primero Perú, luego Ecuador, luego Colombia y así sucesivamente hasta la Guyana Francesa)*

*Se coloca el primero de la lista en el mismo hotel que la Argentina, el siguiente en el hotel de uno de los países que limitan con la Argentina y así sucesivamente hasta ubicar todos los países.*

Indique qué inconvenientes tiene la heurística propuesta, si es que los tiene.

**A3** Plantee una heurística de construcción para el problema que no tenga los inconvenientes que criticó en la heurística propuesta por Timerman.

**B)** Una empresa fabrica dos productos ( $P_1$  y  $P_2$ ) a partir de dos materias primas ( $MP_1$  y  $MP_2$ ). Se exige que se produzca al menos 60 unidades de  $P_2$ . Se muestra el modelo de programación lineal y la estructura de la tabla óptima.

$$2x_1 + x_2 \leq 260 \text{ (MP1)}$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 480 \text{ (MP2)}$$

$$x_2 \geq 60$$

$$Z = 30x_1 + 20x_2 \text{ (max)}$$

(en  $Z$  están los beneficios de  $P_1$  y  $P_2$ )

Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
30	X1	20	1	0	1	-1/2	0
0	X5	160	0	0	-1	1	1
20	X2	220	0	1	-1	1	0
	Z =	5000	0	0	10	5	0

260 480 -60

Bk	Yk	Ck	A1	A2	A3	A4	A5
260	Y1	10	1	0	1	-1	1
480	Y2	5	0	1	-1	1/2	-1
	Z =	5000	0	0	-160	-20	-220

**B1)** Se puede fabricar otro producto  $P_3$  que es similar al  $P_2$  pero consume 2 unidades de  $MP_1$  en lugar de 1, mientras que el consumo de  $MP_2$  es igual al del producto 2. El  $P_3$  podría reemplazar al  $P_2$  en la demanda mínima exigida. El producto  $P_3$  tiene un beneficio de \$50 pero, si se produce, se deben producir al menos 5 unidades. ¿Me conviene producir  $P_3$ ?, ¿si me conviene, cuánto gano?, ¿Por qué me conviene o no?.

**B2)** Si se presenta la oportunidad de conseguir 50 kilos adicionales de  $MP_2$  pagando 180 pesos (en total) ¿es conveniente? Si no es conveniente ¿a qué precio sería conveniente conseguir 50 kilos adicionales de  $MP_2$ ?

**C)** En las clases teórico prácticas se vieron dos maneras de hacer el modelo para el problema del viajante: una usando variables  $U_i$  y la otra armando las restricciones (combinando las  $Y_{ij}$ ) que evitan todos los posibles subtours. ¿Según qué criterio el modelo de las  $U_i$  es el mejor de los dos y según qué criterio el modelo de evitar subtours es el mejor de los dos?

**Para aprobar debe tener Bien 2 puntos de A y uno de B. Además, A1 no puede estar Mal.**

## Algunas pistas para la resolución.

Atención: este documento no contiene el resuelto del examen, sino algunas pistas para ayudar a su resolución.

Parte A:

A1) Es un problema de coloreo, en el cual hay que determinar cuántos hoteles reservar y qué países van a estar alojados en cada uno para minimizar el costo de reserva (cada hotel se puede equiparar a un color con el cual “pintar” a cada país, siendo que los países que son limítrofes no pueden tener el mismo color –se excluye a Brasil que limita con casi todos-).

Las variables pueden ser:

HOTEL<sub>i</sub>: Vale 1 si se usa el hotel *i*, vale cero sino

Y<sub>ij</sub>: Vale 1 si en el Hotel *i* está alojada la delegación del país *j*, vale cero sino.

*Cada delegación tiene que estar en un hotel*

Por ejemplo, para Argentina

$$Y_{1A} + Y_{2A} + Y_{3A} + Y_{4A} + Y_{5A} + Y_{6A} + Y_{7A} = 1$$

Idem para los demás países

*Si los países son limítrofes no pueden estar en el mismo hotel*

Por ejemplo, para Argentina y Uruguay

$$Y_{iA} + Y_{iU} \leq 1 \quad \text{Para todo } i \text{ de } 1 \text{ a } 8$$

Idem para todos los demás pares de países limítrofes (y para Colombia y Bolivia)

*No más de tres en el mismo hotel y verificación de que se use un determinado hotel*

$$\text{HOTEL}_i \leq Y_{iA} + Y_{iU} + Y_{iPA} + Y_{iB} + Y_{iCH} + Y_{iPE} + Y_{iE} + Y_{iC} + Y_{iV} + Y_{iG} + Y_{iS} + Y_{iGF} \leq 3 \text{ HOTEL}_i$$

Para todo *i* de 1 a 8

$$\text{MIN } Z = \$\text{MUCHO} (\text{HOTEL}_1 + \text{HOTEL}_2 + \text{HOTEL}_3 + \text{HOTEL}_4 + \text{HOTEL}_5 + \text{HOTEL}_6 + \text{HOTEL}_7 + \text{HOTEL}_8)$$

A2) No se necesita un hotel distinto para cada uno de los que limitan con la Argentina porque no limitan entre sí (por ejemplo, Paraguay, Chile y Uruguay pueden estar en el mismo hotel).

Además, cuando dice “Se coloca el primero de la lista en el mismo hotel que la Argentina, el siguiente en el hotel de uno de los países que limitan con la Argentina y así sucesivamente...” no precisa en cuál de los países que limita con la Argentina va a poner el segundo (¿en el de Uruguay, en el de Chile, en cuál?) y es un problema de mala formulación de la heurística (el procedimiento tiene que ser claro y no dejar espacio para dudas).

A3) Se podría armar una lista de los países ordenada por cantidad de limítrofes (si hay empate, de norte a sur y si hay empate por orden alfabético) empezando por “colorear” (asignar hotel 1) por el que más limítrofes tiene y agruparlo en el mismo hotel con los dos siguientes de la lista, siempre que ninguno sea limítrofe de los otros dos. Se marcan esos países para sacarlos de la lista y se vuelve a recorrer la lista siguiendo el mismo procedimiento para el segundo hotel y así sucesivamente hasta que se ubique a todos los países. Si para algún hotel no se pueden completar 3 países se lo deja con la cantidad que sea (dos o uno) y se pasa al siguiente hotel. Se debe verificar que no se usen más de 8 hoteles.

NOTA: Aquí no planteamos un ejemplo de heurística, simplemente, siguiendo la idea de este documento, damos pistas para su elaboración

B1) El hecho de que el nuevo producto pueda reemplazar a P2 en la demanda mínima implica que ahora la tercera restricción puede ser satisfecha tanto por X2 como por el producto nuevo (pasaría a ser  $X_2 + X_6 \geq 60$ ). Premultiplicando por la matriz inversa óptima del directo (A3 A4 –A5) (tener en cuenta que la tercera restricción es de  $\geq$ ) al vector (2 2 1) del nuevo producto, se debe calcular si entra a la base el nuevo producto. Si entra hay que verificar si se producen 5 unidades al menos. Sino hay que obligar agregando una restricción para que fabrique 5 al menos. Luego hay que ver la diferencia entre el funcional actual y el anterior de 5000. Si esa diferencia es mayor que cero conviene, sino no conviene.

B2) En principio parece conveniente porque el valor marginal es 5 y cada kilo se paga a 3. Lo que no sabemos es si conviene conseguir 50 kilos o menos. Hay que verificar en la tabla dual qué sucede si aumentamos la disponibilidad de la segunda restricción en 50. Si el funcional aumenta más que 180 pesos, conviene.

C) Si bien la formulación de subtours tiene demasiadas restricciones (si queremos evitar TODOS los subtours) y por eso se agregan únicamente las restricciones de los subtours que se hayan formado (luego de resolverlo sin esas restricciones), la formulación con UI (también llamado modelo MZT del viajante) tiene un poliedro que incluye al de la formulación por subtours, por eso está más alejado de la cápsula convexa entera y desde el punto de vista de resolución es mejor el de subtours.