FACULTAD
DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Universidad de Buenos Aires

(75.26) Simulación

Finales Virtuales

1. Final del 11/09/2020

1.1. Sistemas Dinámicos

Dado el siguiente sistema dinámico con tiempo continuo t, variable $x(t) \in$ y parámetro $\alpha > 0$.

$$\frac{dx}{\partial t} = x(x - \alpha) + 5x = x^2 + x(5 - \alpha)$$

1.1.1. ¿Puede el sistema manifestar comportamiento caótico?

1. Si.
2. No. ✔
3. Dependiendo de la condición inicial.
4. Dependiendo del valor del parámetro α.
5. Ninguna de las opciones.

Según el Teorema de Poincaré-Bendixson, para que el comportamiento de un sistema continuo sea caótico este debe tener al menos 3 dimensiones.

1.1.2. El sistema es:

1. De primer orden y lineal. ✔
2. De primer orden y no-lineal.
3. De segundo orden y lineal.
4. De segundo orden y no-lineal.
5. Ninguna de las opciones.

Con un simple análisis sobre la expresión de la derivada de x respecto del tiempo puede verse que es una función lineal, y al sólo haber una derivada de grado 1 en esta, diremos que es de primer orden.

1.1.3. El sistema tiene:

1. 1 punto fijo.
2. 2 puntos fijos. ✔
3. 3 puntos fijos.
4. Ninguna de las opciones.

Para analizar los puntos fijos, tendremos que igualar la derivada de x a 0 y encontrar que valores satisfacen la ecuación. De esta manera, tendremos:

$$0 = x^2 + x(5 - \alpha) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \alpha - 5 \end{cases}$$

1.1.4. Realice un análisis de bifurcación en función del parámetro α. El sistema:

1. No tiene bifurcaciones
2. Tiene una bifurcación de tipo transcrítica en $\alpha = 0$.
3. Tiene una bifurcación de tipo transcrítica en $\alpha = 5$. ✔
4. Tiene una bifurcación de tipo pitchork para $\alpha > 1$.
5. Tiene una bifurcación de Hopf.
6. Ninguna de las opciones.

Para analizar de que tipo son los puntos fijos del sistema (y así caracterizar su bifurcación), tendremos que analizar la parte real del ajuste lineal de nuestra derivada, es decir aplicando un nuevo orden de derivación y evaluadno en esos puntos. Considerando que esta nueva $F(x)$ es de la forma $2x + 5 - \alpha$ y que es una función real, llegamos a que:

$$\left.\frac{dF(x)}{\partial t}\right|_{x=0} = 5 - \alpha = 0$$

$$\left.\frac{dF(x)}{\partial t}\right|_{x=\alpha-5} = \alpha - 5 = 0$$

Así, vemos que x_1 será estable para $\alpha > 5$ e inestable para $\alpha < 5$, mientras que x_2 será estable para $\alpha < 5$ e inestable para $\alpha > 5$.

1.1.5. Para $\alpha = 2$:

1. $x = 0$ es un atractor.
2. $x = 0$ es un saddle point.
3. $x = 0$ es un repulsor. ✔
4. Ninguna de las opciones.

Con lo visto anteriormente, descubrimos que para ese α, x_0 será un repulsor por ser su autovalor dominante de parte real negativa.

1.1.6. Si $x(t)$ representa la posición en el instante t de un objecto de una trayectoria unidimensional, para $x(0) = 0$ y $\alpha = 2$ la aceleración del objeto es:

1. Positiva. ✔
2. Negativa.
3. Nula.

La aceleración viene dada por la segunda derivada de x respecto del tiempo, por lo que será $2x + 5 - \alpha$. Para unos valores de $\alpha = 2$ y $x = 0$, podremos ver que esta vale 3 y es positiva.

1.1.7. Para $\alpha = 5$ y condición inicial $x(0) = 0$, el sistema:

1. La variable x crecerá un poco para luego volver a la condición inicial.
2. La variable x crecerá tendiendo a $+\infty$.
3. La variable x decrecerá hasta converger a un punto fijo negativo.
4. No se apartará de su estado inicial. ✔
5. Ninguna de las opciones.

La variación del sistema viene dada por su velocidad, es decir, la derivada de x respecto del tiempo. Para unos valores de $\alpha = 5$ y $x = 0$, vemos que esta será nula, por lo que el sistema se mantendrá sin variar.

1.1.8. Para $\alpha = 2$ y condición inicial $x(0) = -1$, el sistema evolucionará:

1. Decreciendo en x hasta detenerse en $x = -3$. ✔
2. Creciendo en x hasta detenerse en $x = 0$.
3. Decreciendo en x y tendiendo a $-\infty$.
4. Creciendo en x y tendiendo a ∞.
5. Ninguna de las opciones.

En base a los análisis anteriores, con este valor de α nos encontraremos en este escenario con 2 puntos de equilibrio, uno en -3 (estable) y otro en 0 (inestable). Así, para un $x = -1$ podremos decir que el mismo decrecerá hasta el atractor en -3

1.1.9. Para $\alpha = 2$ y condición inicial $x(0) = 0{,}000001$, el sistema evolucionará:

1. Convergiendo a $x = 3$.
2. Convergiendo a $x = 0$.
3. Convergiendo a $x = -3$.
4. Ninguna de las opciones. ✔

Con el mismo análisis del punto anterior, pero esta vez para un $x = 1$, podremos decir que la variable divergerá (al ser $x = 0$ un repulsor).

1.1.10. Para $\alpha = 8$ y condición inicial $x(0) = 2{,}999999$, el sistema evolucionará:

1. Convergiendo a $x = 3$.
2. Convergiendo a $x = 0$. ✔
3. Convergiendo a $x = -3$.
4. Ninguna de las opciones.

Con un $\alpha = 8$ tendremos un punto fijo atractor en $x = 0$ y otro repulsor en $x = 3$, por lo que con una condición inicial de $x = 2{,}99999$ diremos que nuestra variable convergerá a $x = 0$.

1.2. Cadenas de Markov

Dado el siguiente algoritmo para simular un proceso estocástico de i iteraciones con dos estados posibles: $S_i = 0$ (apagado) y $S_i = 1$ (encendido). Además conocemos los 3 parámetros p, α y $\beta \in [0, 1]$.

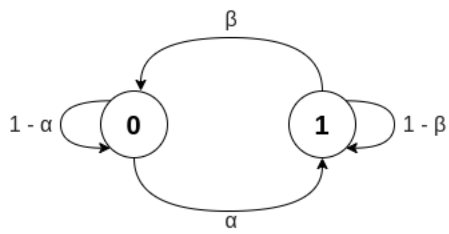
Algoritmo (pseudo-código):

```
- Se genera S_0 como variable Bernoulli de parámetro p = P[S_0 = 0]
- for i = 1 : I_MAX
      * Generar U ∈ [0,1] aleatoriamente de una distribución uniforme.
      * Si S_{i-1} = 0 entonces:
          * Si U < α entonces S_i = 1.
          * Sino S_i = 0
      * Si S_{i-1} = 1 entonces:
          * Si U < β entonces S_i = 0.
          * Sino S_i = 1
```

1.2.1. El proceso estocástico resultante es:?

1. Un proceso (o cadena) de Markov. ✔
2. Un proceso de Bernoulli.
3. Un proceso de Poisson.
4. Ninguna de las opciones.

Con los datos del pseudo-código rápidamente pueden verse las características de una cadena de Markov. Las transiciones podrán esquematizarse de la siguiente manera:



1.2.2. Con $\alpha = 0{,}3$, $\beta = 0{,}5$ y $p = 0{,}2$, ¿cuánto vale la probabilidad conjunta $P[S_2 = 0 \wedge S_1 = 0 \wedge S_0 = 1]$?

1. 0,82
2. 0,03
3. 0,97
4. 0,1
5. 0,07 ✔
6. Ninguna de las opciones.

Si consideramos que el sistema parte de un estado inicial $S_0 = 1$ con probabilidad p, sabremos que podrá llegar a $S_1 = 0$ con una probabilidad de β, y desde allí pasará a un $S_2 = 0$ con probabilidad $1 - \alpha$, por lo que tendremos:

$$P[S_2 = 0 \wedge S_1 = 0 \wedge S_0 = 1] = p\beta(1 - \alpha)$$

1.2.3. ¿Para cuál de las siguientes condiciones sobre α y β el proceso es convergente?

1. $\alpha + \beta < 1$ ✔
2. $\alpha = 0{,}6$ y $\beta = 0{,}3$
3. $\alpha = 0{,}5$ y $\beta = 0{,}5$
4. Para cualquier α y β en el intervalo $[0, 1]$.
5. Ninguna de las opciones.

Para analizar la convergencia de nuestro sistema, plantearemos la matriz de transiciones que quedará de la siguiente forma:

$$P = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}$$

Si hallamos los autovalores de esta matriz, tendremos que:

$$det(P - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\alpha-\lambda & \alpha \\ \beta & 1-\beta-\lambda \end{vmatrix} = (1-\alpha-\lambda)(1-\beta-\lambda) - \alpha\beta = (1-\lambda)(1-\alpha-\beta-\lambda)$$

De esta manera, fácilmente podremos ver que los autovalores de nuestra matriz de transiciones serán 1 y $1-\alpha-\beta$. Para que un sistema de este estilo converga, sabemos que el autovalor dominante debe ser 1 mientras que todos los demás deben cumplir que $|\lambda_k| < 1$, por lo que entonces encontramos la siguiente relación de convergencia:

$$|1-\alpha-\beta| < 1$$

1.2.4. ¿Cuánto tiene que valer el parámetro p para que sea posible la generación de un proceso de Bernoulli?

1. Sólo si $p = 0$.
2. Sólo si $p = 0{,}5$.
3. Sólo si $p = 1$.
4. Cualquier valor ya que no depende de p. ✔
5. Ninguna de las opciones.

Por definición, mientras p sea una probabilidad (es decir, esté en el rango $[0, 1]$) puede tomar cualquier valor para definir un proceso de Bernoulli.

1.2.5. Si $\alpha = 0{,}3$, $\beta = 0{,}5$ y $p = 0{,}2$, ¿cuánto vale la probabilidad $P[S_1 = 0]$?

1. 0,12
2. 0,66 ✔
3. 0,88
4. 0,34
5. 0,44
6. Ninguna de las opciones.

Por el Teorema de Bayes vemos que:

$$P[S_1 = 0] = P[S_1 = 0|S_0 = 0] * P[S_0 = 0] + P[S_1 = 0|S_0 = 1] * P[S_0 = 1] = (1-\alpha)p + \alpha(1-p)$$

1.2.6. Si $\alpha = 0{,}3$, $\beta = 0{,}5$ y $p = 0{,}2$, indique la respuesta correcta:

1. Un autovalor de la matriz de transición vale 1. ✔
2. La suma de los valores de cada columna de la matriz de transición es 1.
3. La matriz de transición tiene dimensiones 3x3.
4. La matriz de transición tiene al menos un valor 0.
5. Ninguna de las opciones.

Con las demostraciones realizadas anteriormente, se puede ver que uno de los autovalores del sistema es 1, siempre que este converja como es el caso del escenario con los parámetros planteados.

1.2.7. Si $\alpha = 0{,}3$, $\beta = 0{,}5$ y $p = 0{,}2$, ¿cuánto vale la probabilidad conjunta $P[S_1 = 0, S_0 = 1]$?

1. 0,5
2. 0,9
3. 0,2
4. 0,1 ✔
5. 0,3
6. Ninguna de las opciones.

Por la independencia de cada una de las iteraciones de una cadena de Markov, rápidamente puede verse que esta probabilidad conjunta se obtiene haciendo:

$$P[S_1 = 0, S_0 = 1] = P[S_1 = 0|S_0 = 1] * P[S_1 = 1] = \beta(1 - p)$$

1.2.8. Si $P[S_i = 1|S_{i-1} = 0] = 0{,}3$, $P[S_i = 0|S_{i-1} = 1] = 0{,}5$ y $p = 0{,}2$, entonces las probabilidades en el estado estacionario son:

1. $P[S_i = 0] = 3/8, P[S_i = 1] = 5/8$
2. $P[S_i = 0] = 1/2, P[S_i = 1] = 1/2$
3. $P[S_i = 0] = 3/4, P[S_i = 1] = 1/4$
4. $P[S_i = 0] = 1/4, P[S_i = 1] = 3/4$
5. $P[S_i = 0] = 5/8, P[S_i = 1] = 3/8$ ✔
6. Ninguna de las opciones.

El dato de que $P[S_i = 1 \wedge S_{i-1} = 0] = 0{,}3$ nos estaría dando el valor de α, mientras que $P[S_i = 0 \wedge S_{i-1} = 1] = 0{,}5$ nos daría β. Con esto, podemos plantear la condición de equilibrio para nuestro sistema, que sería hallar las probabilidades asintóticas de nuestro sistema con $\pi = \pi P$, las cuales quedarían planteadas como:

$$\pi_0 = \pi_0(1 - \alpha) + \pi_1\beta$$

$$\pi_1 = \pi_0\alpha + \pi_1(1 - \beta)$$

Ambas ecuaciones son redundantes por lo que tendríamos infinitas soluciones posibles, pero si consideramos además el hecho de que $\pi_0 + \pi_1 = 1$, podremos llegar a que:

$$\pi_0 = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$$

$$\pi_1 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

1.2.9. Si $\alpha = 0{,}3$, $\beta = 0{,}5$ y $p = 0{,}2$, ¿cuánto vale la probabilidad conjunta $P[S_i = 0, S_{i-1} = 0]$ en el estado estacionario?

1. 3/8
2. 5/8
3. 9/16
4. 1/2
5. 7/16 ✔
6. Ninguna de las opciones.

Con lo obtenido en el punto anterior y viendo que la matriz de transición no cambiará por más que estemos en el estado estacionario, obtenemos que:

$$P[S_i = 0, S_{i-1} = 0] = \pi_0(1 - \alpha)$$

1.2.10. ¿Para que valores de α y β se obtienen dos estados consecutivos estadísticamente independientes?

1. $\alpha = 1{,}0$ y $\beta = 1{,}0$
2. $\alpha = 1{,}0$ y $\beta = 0{,}0$
3. $\alpha = 0{,}0$ y $\beta = 1{,}0$
4. $\alpha = 0{,}5$ y $\beta = 0{,}5$ ✔
5. Ninguna de las opciones.

Con estos valores podrá verse que la matriz de transición tendrá todas las filas iguales, por lo que los estados consecutivos son estadísticamente independientes.

2. Final del 18/09/2020

2.1. Procesos de Poisson

Se desea simular un proceso de Poisson T_i con una tasa de arribos $\lambda = 0{,}5$ por segundo. Prestar atención a que T_i (con $i = 1, 2, ...$) son los instantes de tiempo en los que arriban los eventos.

2.1.1. Sabiendo que entre el tercer y cuarto evento transcurrieron 2 segundos, ¿cuál es la probabilidad de que entre el cuarto y quinto transcurran menos de 1 segundo?

1. 0,857
2. 0,3935 ✔
3. 0,111
4. 0,6065

Debido a que los eventos son independientes y la distancia entre los mismos sigue la propiedad de no tener memoria, sabremos que la probabilidad de que entre el cuarto y el quinto haya menos de un minuto es lo mismo a la probabilidad de que el primero llegue antes de ese tiempo. Siendo que ese tiempo sigue una distribución exponencial, usaremos la función de probabilidad acumulada de la exponencial.

$$P[T_5 - T_4 < 1 | T_4 - T_3 = 2] = P[T_5 - T_4 < 1] = P[T_1 < 1] = 1 - e^{-\lambda x} = 1 - e^{-0{,}5} = 0{,}3935$$

2.1.2. Sabiendo que en el intervalo $[0; 2]$ ocurrieron 0 eventos, ¿cuál es la probabilidad de que no ocurran eventos en el intervalo $[2; 4]$?

1. 0,632
2. 0,111
3. 0,368 ✔
4. 0,857

Nuevamente, por la propiedad de no tener memoria, sabemos que el arribo de eventos anteriores no modificará la probabilidad de arribos de eventos futuros. A su vez, distintos Procesos de Poisson de igual duración tendrán una probabilidad idéntica (es decir, las probabilidades dependend de la duración del segmento, no de donde empiece), por lo que la probabilidad de encontrar 0 eventos en el intervalo $[2; 4]$ es la misma a la de encontrarlos en el intervalo $[0; 2]$. Con esto entonces tendremos:

$$P(N(2;4) = 0 | N(0;2) = 0) = P(N(2;4) = 0) = P(N(0;2) = 0) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda k} = \frac{(0{,}5 \cdot 2)^0}{0!} e^{-0{,}5 \cdot 2} = 0{,}368$$

2.1.3. Considere las probabilidad P(A): probabilidad de que ocurran 3 eventos en el intervalo $[0; 2{,}5]$ segundos y P(B): la probabilidad de que ocurran 3 eventos en el intervalo $[4{,}5; 7]$ segundos. Elija la respuesta correcta:

1. $P(A) = 2P(B)$
2. $P(A) < P(B)$
3. $P(A) = P(B)$ ✔
4. Ninguna de las opciones.

Nuevamente, por la propiedad de no tener memoria, detectar la misma cantidad de eventos en un espacio de igual duración, tendrá la misma probabilidad.

2.1.4. ¿Cuál es la probabilidad de que entre el tercer y cuarto evento transcurran más de 2 segundos?

1. 0,111
2. 0,857
3. 0,368 ✔
4. 0,632

De la misma manera que como hicimos en el ejercicio 1, tendremos que:

$$P(T_4 - T_3 > 2) = P(T_1 > 2) = 1 - P(T_1 \leq 2) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-0,5 \cdot 2} = 0{,}368$$

2.1.5. Elija el método correcto para simular dicho proceso:?

1. Para cada instante de tiempo i se genera una variable U_i uniformemente distribuida en el intervalo $[0, 0{,}5]$ y se asigna $T_{i+1} = T_i + U_i$.
2. Para cada instante de tiempo i se genera una variable E_i exponencialmente distribuida con media 0,5 segundos y se asigna $T_{i+1} = T_i + E_i$.
3. Para cada instante de tiempo i se genera una variable U_i uniformemente distribuida en el intervalo $[0, 2]$ y se asigna $T_{i+1} = T_i + U_i$.
4. Para cada instante de tiempo i se genera una variable E_i exponencialmente distribuida con varianza 4 segundos$^{\mathbf{2}}$ y se asigna $T_{i+1} = T_i + E_i$. ✔
5. Ninguna de las opciones.

La suma de exponenciales es un Proceso de Poisson. Si la exponencial es de varianza 4 sabremos que su parámetro λ es 0,5, como el descripto en el enunciado.

2.1.6. ¿Cuál es la probabilidad de que arriben sólo 4 eventos en el intervalo $[0; 2{,}5]$*segundos*, distribuidos de la siguiente forma: 1 evento en el intervalo $[0; 1]$ y 3 eventos en el $[2; 2{,}5]$. segundos?

1. 0,000373 ✔
2. 0,001522
3. 0,557333
4. 0,000615

Ya que son sin memoria e independientes, podremos construir la probabilidad del evento descripto como:

$$P(N(0;1) = 1) \cdot P(N(1;2) = 0) \cdot P(N(2;2{,}5) = 3) = \frac{(0{,}5 \cdot 1)^1}{1!} e^{-0,5 \cdot 1} \cdot \frac{(0{,}5 \cdot 1)^0}{0!} e^{-0,5 \cdot 1} \cdot \frac{(0{,}5 \cdot 0{,}5)^3}{3!} e^{-0,5 \cdot 0,5} = 0{,}000373$$

2.1.7. ¿Cuál es la probabilidad de que entre el cuarto y quinto evento transcurran menos de 1 segundo??

1. 0,111
2. 0,3935 ✔
3. 0,6065
4. 0,857

De igual manera al primer ejercicio:

$$P[T_5 - T_4 < 1] = P[T_1 < 1] = 1 - e^{-\lambda x} = 1 - e^{-0,5} = 0{,}3935$$

2.1.8. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya arribos durante un período de longitud 2 segundos?

1. 0,111
2. 0,857
3. 0,638
4. 0,368 ✔

Como en el ejercicio 2, utilizaremos el Proceso de Poisson como:

$$P(N(0;2) = 0) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda k} = \frac{(0{,}5 \cdot 2)^0}{0!} e^{-0{,}5 \cdot 2} = 0{,}368$$

2.1.9. ¿Cuál es la probabilidad de que entre dos eventos consecutivos transcurra exactamente 1 segundo?

1. 0,111
2. 0,3935
3. 0,857
4. 0,6065
5. Ninguna de las opciones. ✔

Debido a que la distancia entre eventos es exponencial, la probabilidad de que esta sea exactamente 1 va a ser 0, ya que son funciones de distribución de probabilidad.

2.1.10. Sabiendo que entre el tercer y cuarto evento transcurrió exactamente 1 segundo, ¿cuál es la probabilidad que entre el cuarto y quinto evento transcurran menos de 1 segundo?

1. 0,6065
2. 0,3935 ✔
3. 0,111
4. 0,857

De igual manera que en el ejercicio 1:

$$P[T_5 - T_4 < 1 | T_4 - T_3 = 2] = P[T_5 - T_4 < 1] = P[T_1 < 1] = 1 - e^{-\lambda x} = 1 - e^{-0{,}5} = 0{,}3935$$

2.2. Sistemas Dinámicos

Dado el siguiente modelo que describe el movimiento de un péndulo:

$$\frac{^2\theta}{dt^2} = -\alpha \sin\theta$$

Se sabe que $\alpha > 0$ y θ es el ángulo respecto de la vertical.

2.2.1. El sistema:

1. Tiene 1 punto de equilibrio.
2. Tiene 2 puntos de equilibrio. ✔
3. Tiene 3 puntos de equilibrio.
4. No tiene puntos de equilibrio.

Para hallar los puntos de equilibrio, primero tendremos que pasar el sistema a uno de primer orden, que quedará definido por las siguientes funciones:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{dt} = \omega \\ \dfrac{\partial\omega}{dt} = -\alpha\sin\theta \end{cases}$$

Igualando a 0 ambas partes encontraremos 2 puntos fijos (con θ variando entre 0 y 2π):

$$\begin{cases} (\theta, \omega) = (0, 0) \\ (\theta, \omega) = (\pi, 0) \end{cases}$$

2.2.2. Analizar el comportamiento del sistema en función del parámetro α:

1. El sistema es caótico para algunos valores de α.
2. Hay una bifurcación de tipo Hopf.
3. No hay bifurcaciones. ✔
4. Ninguna de las opciones.

Para analizar la bifurcación, tendremos que hallar los autovalores del Jacobiano del sistema y ver para que α se vuelven 0. Así, tendremos:

$$\text{Autovalores para } (0,0) \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\alpha & -\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow \lambda^2 + \alpha \Rightarrow \lambda = \pm i\sqrt{\alpha} \tag{1}$$

$$\text{Autovalores para } (\pi,0) \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \alpha & -\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow \lambda^2 - \alpha \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\alpha} \tag{2}$$

Podemos ver que el único punto de bifurcación es cuando $\alpha = 0$, pero dado que por definición del enunciado $\alpha > 0$, tenemos que no hay bifurcaciones.

Chequear el tema de los autovalores para $(0, 0)$, debido a que en realidad esos tienen una parte real igual a 0 para cualquier α. No sé como se plantea en ese caso.

2.2.3. Identifique la sentencia falsa entre las siguientes:

1. Las trayectorias en el espacio de fase no se bifurcan.
2. El sistema puede presentar caos. ✔
3. Existen trayectorias cerradas en el espacio de fases.
4. Pequeñas bifurcaciones en las condiciones iniciales no producen grandes alteraciones de las trayectorias.

Para que un sistema continuo pueda presentar caos, este debería tener al menos 3 dimensione (cosa que en nuestro caso es de 2).

2.2.4. Indique la sentencia verdadera:

1. Existe un punto fijo con un autovalor real positivo y otro real negativo. ✔
2. Existe un punto fijo con los dos autovalores reales negativos.
3. Existe un punto fijo con los dos autovalores reales positivos.
4. Ninguna de las opciones.

Como se demostró antes, el punto fijo $(\pi, 0)$ tiene autovalores en $\pm\sqrt{\alpha}$.

2.2.5. El espacio de fases tiene:

1. 1 dimensión.
2. 2 dimensiones. ✔
3. Más de 2 dimensiones.
4. No existe el espacio de fases.
5. Ninguna de las opciones.

Claramente, el espacio de fases tiene sólo 2 dimensiones que son las variables del problema, θ y ω.

2.2.6. Para el caso del péndulo en posición vertical (ángulo 0 grados) y velocidad angular nula:

1. Es un punto fijo estable tipo espiral.
2. Es un saddle point.
3. Es un punto fijo Lyapunov estable. ✔
4. Es un punto fijo inestable.
5. Ninguna de las opciones.

Para el punto fijo en $(0, 0)$, sus autovalores son imaginarios puros por lo que es un punto Lyapunov estable.

2.2.7. Para el caso del péndulo en posición vertical (ángulo 180 grados) y velocidad angular nula:

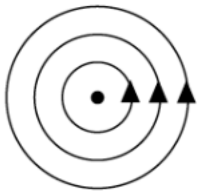
1. Es un punto fijo estable.
2. Es un punto fijo inestable tipo espiral.
3. Es un punto fijo inestable tipo saddle point. ✔
4. No es un punto fijo
5. Ninguna de las opciones.

Para el punto fijo en $(\pi, 0)$, sus autovalores son reales puros (uno positivo y uno negativo) por lo que es un saddle point.

2.2.8. Describa las trayectorias en el espacio de fases alrededor del punto fijo estable:

1. El ángulo oscila entre valores positivos y negativos indefinidamente. ✔
2. El sistea se mueve en trayectorias de tipo espiral.
3. El ángulo oscila entre valores positivos y negativos hasta detenerse en la posición vertical (ángulo 0).
4. Ninguna de las opciones.

Alrededor del punto fijo estable el ángulo oscilará indefinidamente en una circunferencia:



2.2.9. Indique la sentencia verdadera:

1. Existe un punto fijo con los dos autovalores reales negativos.
2. Existe un punto fijo con los dos autovalores imaginarios puros. ✔
3. Existe un punto fijo con los dos autovalores reales positivos.
4. Ninguna de las opciones.

Como se demostró antes, el punto fijo $(0, 0)$ tiene autovalores en $\pm i\sqrt{\alpha}$.