波形估计理论

赵丰

2018 年 5 月 22 日

$z(t)$ 为观测，$s(t)$ 为待估计的信号波形，具体可分为三种类型：

1. 预测问题：$g(t) = s(t+\alpha), \alpha > 0$
2. 滤波问题：$g(t) = s(t)$
3. 平滑（内插）问题：$g(t) = s(t), t \in$ 观测区间 I。

1 波形的线性最小均方估计

1.1 线性最小均方估计

寻找线性估值：$\hat{g}(t) = L[z(\xi)]$, 其中 $L[\cdot]$ 为线性算子。使得均方误差 $e^2 = \mathbb{E}[(g(t) - \hat{g}(t))^2]$ 最小。

定理 1. *假设 $L[z(\xi)]$ 满足正交性原理，即：$\mathbb{E}[(g(t) - L[z(\xi)])z(\xi_i)] = 0, \forall \xi_i \in I$ 则对于另一线性算子 $L_1[\cdot]$，有：*

$$\mathbb{E}[(g(t) - L[z(\xi)])^2] \leq \mathbb{E}[(g(t) - L_1[z(\xi)])^2] \tag{1.1}$$

证明.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(g(t) - L_1[z(\xi)])^2] &= \mathbb{E}[(g(t) - L[z(\xi)] + L[z(\xi)] - L_1[z(\xi)])^2] \\
&= \mathbb{E}[(g(t) - L[z(\xi)])^2] + \mathbb{E}[(L[z(\xi)] - L_1[z(\xi)])^2] \\
&\geq \mathbb{E}[(g(t) - L[z(\xi)])^2]
\end{aligned}$$

□

1.2 最佳线性滤波器

设观测区间为 $I=[0,T]$, $\hat{g}(t)=\int_0^T h(t,\xi)z(\xi)d\xi$,

1. 由正交性原理:$\mathbb{E}[(g(t)-L[z(\xi)])z(\tau)]=0, \forall\tau\in[0,T]$ 由此得到 Wiener-Hopf 方程:

$$R_{gz}(t,\tau)=\int_0^T h(t,\xi)R_z(\xi,\tau)d\xi, \tau\in[0,T] \tag{1.2}$$

   此时均方误差为

$$\begin{aligned} e^2_{\min} &= \mathbb{E}[(g(t)-\int_0^T h(t,\xi)z(\xi)d\xi)g(t)] \\ &= R_g(t,t)-\int_0^T h(t,\xi)R_{gz}(t,\xi)d\xi \end{aligned} \tag{1.3}$$

2. 由变分法求解:

   希望求最佳的 $h_1(t,\xi)$ 以使均方误差 $e^2=\mathbb{E}[(g(t)-\int_0^T h_1(t,\xi)z(\xi)d\xi)^2]$ 最小，其中 $h_1(t,\xi)=h(t,\xi)+\epsilon f(t,\xi)$, $h(t,\xi)$ 是最优解，ϵ 是小的扰动因子，$f(t,\xi)$ 是扰动函数。将均方误差重写为：$e^2=R_g(t,t)+\int_0^T\int_0^T h_1(t,\xi)h_1(t,\eta)R_z(\eta,\xi)d\eta d\xi-2\int_0^T h_1(t,\xi)R_{gz}(t,\xi)d\xi$.
   令 $\left.\frac{\mathrm{d}e^2(\epsilon)}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0}=0$ 可得：$\int_0^T f(t,\epsilon)[R_{gz}(t,\xi)-\int_0^T h(t,\eta)R_z(\eta,\xi)d\eta]d\xi=0$ 由 $f(t,\xi)$ 的任意性得：$R_{gz}(t,\xi)=\int_0^T h(t,\eta)R_z(\eta,\xi)d\eta, \xi\in[0,T]$

2 Wiener 滤波

假定 $z(t)$ 平稳, $g(t)$ 与 $z(t)$ 联合平稳, 则 $R_{gz}(t,\tau)=R(t-\tau), R_z(t,\tau)=R_z(t-\tau)$, 并且设 $h(t,\tau)=h(t-\tau)$，则 Wiener-Hopf 方程式(1.2) 可改写为:

$$R_{gz}(t-\tau)=\int_0^T h(t-\xi)R_z(\xi-\tau)d\xi, \tau\in[0,T] \tag{2.1}$$

由(1.3) 可得其均方误差为:

$$e^2_{\min}=R_g(0)-\int_0^T h(t-\xi)R_{gz}(t-\xi)d\xi \tag{2.2}$$

2.1 物理不可实现的 Wiener 滤波器

将观测区间从 $[0,T]$ 扩展到 $(-\infty,+\infty)$ 上，令 $u=t-\tau, v=t-\xi, \xi-\tau=u-v$ ，则 (2.1,2.2) 式可化为

$$R_{gz}(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(v)R_z(u-v)dv=h(u)*R_z(u) \tag{2.3}$$

$$e_{\min}^2=R_g(0)-\int_{-\infty}^{+\infty} h(v)R_{gz}(v)dv \tag{2.4}$$

等式(2.3) 右端为一卷积的形式，作双边拉氏变换可得

$$\Phi_{gz}(\omega)=H(\omega)\Phi_z(\omega) \tag{2.5}$$

。做如下符号约定:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} f(t)exp(-i\omega t)dt && \text{傅氏正变换}\\
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)exp(i\omega t)d\omega && \text{傅氏反变换}\\
F(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt && \text{拉氏正变换}\\
f(t) &= \frac{1}{2\pi i}\lim_{T\to\infty}\int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} e^{st}F(s)ds && \text{拉氏反变换}
\end{aligned}$$

由相关函数是功率谱函数的 Fourier 反变换和 Parseval 定理，(2.4) 可化为

$$e_{\min}^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_g(\omega)d\omega-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)\Phi_{gz}^*(\omega)d\omega$$

由(2.5)代入 $H(\omega)$ 的表达式可得:

$$e_{\min}^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(\Phi_g(\omega)-\frac{|\Phi_{gz}(\omega)|^2}{\Phi_z(\omega)})d\omega \tag{2.6}$$

2.1.1 加性噪声

$z(t)=s(t)+n(t)$, $s(t)$ 和 $n(t)$ 相互独立，$n(t)$ 的均值为零。考虑滤波问题 $g(t)=s(t)$, 从而可得 $\Phi_{gz}(\omega)=\Phi_s(\omega)$，$\Phi_z(\omega)=\Phi_s(\omega)+\Phi_n(\omega)$，所以传输函数为:

$$H(\omega)=\frac{\Phi_s(\omega)}{\Phi_s(\omega)+\Phi_n(\omega)}$$

例 1. 已知 $\Phi_s(s)=\frac{2}{1-s^2},\Phi_n(s)=1$，求物理不可实现的 *Wiener* 滤波器的冲激响应 $h(t)$ 及其估值均方误差 $e^2_{\min}$。

解. $H(s)=\frac{2}{3-s^2}$，已知 $\mathcal{L}(e^{-|t|})=\frac{2}{1-s^2}$，设 $\mathcal{L}(f(t))=F(s)$，则 $\mathcal{L}(f(\alpha t))=\frac{1}{\alpha}F(\frac{s}{\alpha})$。所以 $\mathcal{L}(e^{-\sqrt{3}|t|})=\sqrt{3}\frac{2}{3-s^2}\Rightarrow\mathcal{L}^{-1}(\frac{2}{3-s^2})=\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}|t|}$，由 (2.6) 可得

$$e^2_{\min}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi_s(\omega)\Phi_n(\omega)}{\Phi_s(\omega)+\Phi_n(\omega)}d\omega$$

代入 $\Phi_s(\omega)=\frac{2}{1+\omega^2},\Phi_n(\omega)=1$，求得 $e^2_{\min}=\frac{1}{\sqrt{3}}=0.577.$

2.2 物理可实现的 Wiener 滤波器

将观测区间由 $[0,T]$ 扩展到 $(-\infty,t)$，仿照 (2.3,2.4) 式有:

$$R_{gz}(u)=\int_0^{+\infty}h(v)R_z(u-v)dv,u\geq 0 \tag{2.7}$$

$$e^2_{\min}=R_g(0)-\int_0^{+\infty}h(v)R_{gz}(v)dv \tag{2.8}$$

2.2.1 频谱因式分解法

将 (2.7) 扩展到 $(-\infty,+\infty)$ 上，引入函数 $q(u)$

$$\int_0^{+\infty}h(v)R_z(u-v)dv-R_{gz}(u)=q(u) \tag{2.9}$$

满足 $q(u)=0,u\geq 0$，$Q(s)\triangleq\mathcal{L}(q(u))$ ，$Q(s)$ 的极点在 s 平面的右半平面。同时补充定义 $h(v)=0,v<0$，则 $H(s)$ 的极点在左半平面。

对 (2.9) 作双边拉氏变换可得: $H(s)\Phi_z(s)-\Phi_{gz}(s)=Q(s)$。假设 $R_z(\tau)$ 是实偶函数，则 $\Phi_z(s)$ 为有理谱（$\Phi_z(j\omega)$ 为实数），于是 $\Phi_z(s)$ 可以分解为

$$\Phi_z(s)=\Phi_z^+(s)\Phi_z^-(s) \tag{2.10}$$

其中 $\Phi_z^+(s)$ 的零极点在左半平面，$\Phi_z^-(s)=\Phi_z^+(-s)$ 的零极点在右半平面。从而可得

$$H(s)\Phi_z^+(s)=\frac{Q(s)}{\Phi_z^-(s)}+\frac{\Phi_{gz}(s)}{\Phi_z^-(s)} \tag{2.11}$$

式 (2.11) 右端第二项可以通过部分分式分解为两部分之和:

$$\frac{\Phi_{gz}(s)}{\Phi_z^-(s)}=\left[\frac{\Phi_{gz}(s)}{\Phi_z^-(s)}\right]^{t+}+\left[\frac{\Phi_{gz}(s)}{\Phi_z^-(s)}\right]^{t-}$$

其中 $[\cdot]^{t+}$ 的极点都在左半平面（$t+$ 是指时域响应只在 $t \geq 0$ 时有），而 $[\cdot]^{t-}$ 的极点都在右半平面，同时含部分分式分解中的常数项，且这种分解是唯一的。假设 $H(s), \Phi_z(s)$ 分母阶次比分子高，在等式 (2.11) 两端同时取 $[\cdot]^{t+}$ 可得：$H(s)\Phi_z^+(s) = [\frac{\Phi_{gz}(s)}{\Phi_z^-(s)}]^{t+}$ 即

$$H(s) = \frac{1}{\Phi_z^+(s)} \left[\frac{\Phi_{gz}(s)}{\Phi_z^-(s)}\right]^{t+} \tag{2.12}$$

2.2.2 预白化法

若 $z(t)$ 为白信号，即 $R_z(\tau) = \delta(\tau)$，由 Wiener-Hopf 方程 (2.7) 式得到：

$$h(t) = \begin{cases} R_{gz}(t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} H(s) = [\Phi_{gz}(s)]^{t+} \tag{2.13}$$

若 $z(t)$ 为非白信号，则可先将 $z(t)$ 通过白化滤波器 $H_W(s)$ 变成白信号 $x(t)$，再对 $x(t)$ 采用滤波器 $H_2(s) = [\Phi_{gx}(s)]^{t+}$，则总的滤波器 $H(s) = H_W(s)H_2(s)$ 就是我们要求的 Wiener 滤波器。

已知输入的随机信号 $x(t)$ 通过一个线性时不变系统（冲击响应为 $h(t)$），输出信号为 $y(t)$, 则输入输出信号的 PSD 满足 $\Phi_y(s) = \Phi_x(s)H(s)H(-s)$

因此若使得 $\Phi_x(s) = 1 = \Phi_z(s)H_W(s)H_W(-s)$, 根据 (2.10) 式，取 $H_W(s) = 1/\Phi_z^+(s)$ 即可。

$$\begin{aligned} R_{gx}(\tau) = \mathbb{E}[g(t)x(t-\tau)] \qquad & = \mathbb{E}[g(t)\int_{-\infty}^{+\infty} h_W(\xi)z(t-\tau-\xi)d\xi] \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} h_W(\xi)R_{gz}(\tau+\xi)d\xi \qquad & = h_W(-\tau) * R_{gz}(\tau) \end{aligned}$$

所以 $\Phi_{gx}(s) = H_W(-s)\Phi_{gz}(s) = \frac{\Phi_{gz}(s)}{\Phi_z^+(-s)} = \frac{\Phi_{gz}(s)}{\Phi_z^-(s)}$。最终得到的滤波器即为 (2.12) 所示。

2.2.3 Wiener 滤波器的估值方差

由 (2.8) 式可以求出：

$$e_{\min}^2 = R_g(0) - \int_0^{+\infty} R_{gx}^2(\tau)d\tau \tag{2.14}$$

例 2. *沿用例 1，求物理可实现的 Wiener 滤波器 $h(t)$ 及其估值方差 $e_{\min}^2$*

解.

$$\Phi_z(s) = \Phi_s(s) + \Phi_n(s) = \frac{3-s^2}{1-s^2}$$
$$\Phi_z^+(s) = \frac{\sqrt{3}+s}{1+s}$$
$$\Phi_z^-(s) = \frac{\sqrt{3}-s}{1-s}$$

由于 $\Phi_{gz}(s) = \Phi_s(s) = \frac{2}{1-s^2}$

$$\frac{\Phi_{gz}(s)}{\Phi_z^-(s)} = \frac{\sqrt{3}-1}{1+s} + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-s} \Rightarrow \left[\frac{\Phi_{gz}(s)}{\Phi_z^-(s)}\right]^{t+} = \frac{\sqrt{3}-1}{1+s}$$
$$H(s) = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+s} \Rightarrow h(t) = (\sqrt{3}-1)e^{-\sqrt{3}t}u(t)$$

由双边拉氏反变换求得 $R_s(\tau) = e^{-|\tau|} \Rightarrow R_s(0) = 1$

$$\Phi_{gx}(s) = \frac{\Phi_{gz}(s)}{\Phi_z^-(s)} \Rightarrow R_{gx}(s) = (\sqrt{3}-1)e^{\sqrt{3}t}u(-t) + (\sqrt{3}-1)e^{-t}u(t)$$

代入 (2.14)式中求得：$e^2_{\min} = \sqrt{3}-1 = 0.732$。由此可见：物理可实现的 $h(t)$ 的估值方差比物理不可实现的 $h(t)$ 的估值方差要大。

3 Kalman 滤波器

3.1 离散时间 Kalman 滤波

已知状态方程：

$$X_k = \Phi_{k,k-1}X_{k-1} + W_{k-1}, k \geq 1 \tag{3.1}$$

观测方程：

$$Z_k = H_kX_k + V_k, k \geq 1 \tag{3.2}$$

其中 $\Phi_{k,k-1}$ 是一步转移矩阵，W_k 是动态噪声，均值为 0，协方差矩阵是 $\mathrm{Cov}(W_k, W_i) = Q_k\delta_{ki}$；$V_k$ 是观测噪声，均值为 0，协方差矩阵是 $\mathrm{Cov}(V_k, V_i) = R_k\delta_{ki}$。$W_k$ 和 V_i 互不相关。H_k 是观测矩阵。初始状态 X_0 均值为 μ_0，方差为 P_0，与 W_k, V_i 均不相关。

设计 X_k 的线性估计器 $\hat{X}_k = \sum_{i=1}^{k} c_iZ_i$，使得均方误差 $\mathbb{E}[\widetilde{X}_k^T\widetilde{X}_k]$ 最小，其中 $\widetilde{X}_k = \hat{X}_k - X_k$。

采用直观推导的方法，假设 $\hat{X}_{k-1}$ 已经求出，且 $\hat{X}_k = \Phi_{k,k-1}\hat{X}_{k-1} + K_k(Z_k - H_k\Phi_{k,k-1}\hat{X}_{k-1})$，希望优化 Kalman 增益矩阵 K_k 使得 $\mathbb{E}[\widetilde{X}_k^T\widetilde{X}_k]$ 最小。

代入状态方程 (3.1) 式，观测方程 (3.2) 式有

$$\widetilde{X}_k = K_k(H_k\Phi_{k,k-1}\widetilde{X}_{k-1} + H_kW_{k-1} + V_k) + \Phi_{k,k-1}\widetilde{X}_{k-1} + W_{k-1}$$

因为 $\mathbb{E}[\widetilde{X}_k^T\widetilde{X}_k] = \mathrm{Tr}[P_k]$，记 $P_k = \mathbb{E}[\widetilde{X}_k\widetilde{X}_k^T]$，为估计误差的方差矩阵。

$$\begin{aligned}P_k = {} & K_k(H_k\Phi_{k,k-1}P_{k-1}\Phi_{k,k-1}^TH_k^T + H_kQ_{k-1}H_k^T + R_k)K_k^T \\ & + \Phi_{k,k-1}P_{k-1}\Phi_{k,k-1}^T + Q_{k-1} + K_kH_kQ_{k-1} + Q_{k-1}H_k^TK_k^T \\ & + K_kH_k\Phi_{k,k-1}P_{k-1}\Phi_{k,k-1}^T + \Phi_{k,k-1}P_{k-1}\Phi_{k,k-1}^TH_k^TK_k^T\end{aligned}$$

P_k 是关于 K_k 的二次型矩阵函数，可采用“配平方”法求“最小值”。设 $C = H_k\Phi_{k,k-1}P_{k-1}\Phi_{k,k-1}^TH_k^T + H_kQ_{k-1}H_k^T + R_k$，$B = \Phi_{k,k-1}P_{k-1}\Phi_{k,k-1}^TH_k^T + Q_{k-1}H_k^T$

$$P_k = (K_k - BC^{-1})C(K_k - BC^{-1})^T - BC^{-1}B^T + \Phi_{k,k-1}P_{k-1}\Phi_{k,k-1}^T + Q_{k-1}$$

因此取 $K_k = BC^{-1}$，记 $P_{k/k-1} = \Phi_{k,k-1}P_{k-1}\Phi_{k,k-1}^T + Q_{k-1}$，则 $B = P_{k/k-1}H_k^T, C = H_kP_{k/k-1}H_k^T + R_k \Rightarrow K_k = P_{k/k-1}H_k^T(H_kP_{k/k-1}H_k^T + R_k)^{-1}$
方差矩阵为 $P_k = (I - K_kH_k)P_{k/k-1}$