

# 连续时间 Kalman 滤波

赵丰

2018 年 5 月 22 日

连续时变系统模型：

连续的状态方程—

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t) \quad (1)$$

连续的观测方程—

$$Z(t) = H(t)X(t) + V(t) \quad (2)$$

$$\mathbb{E}[U(t)] = 0, \mathbb{E}[U(t)U^T(\tau)] = Q(t)\delta(t - \tau)$$

$$\mathbb{E}[V(t)] = 0, \mathbb{E}[V(t)V^T(\tau)] = R(t)\delta_{t-\tau}, \mathbb{E}[U(t)V^T(\tau)] = 0$$

已知初始状态  $X(t_0)$  均值为  $\mathbb{E}[X(t_0)] = \mu_X(t_0)$ ，方差为  $\text{Var}(X(t_0)) = P(t_0)$ ，与  $U(t), V(t)$  均不相关。

由 (1) 式解得

$$X(t) = \Phi(t, t_0)X(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)U(\tau)d\tau$$

其中  $\Phi(t, t_0) = \exp(\int_{t_0}^t A(\tau)d\tau)$ .

先将连续系统化为离散系统,  $t = k\Delta t, t_0 = (k-1)\Delta t, X_k = X(k\Delta t), X_{k-1} = X((k-1)\Delta t), \Phi_{k,k-1} = \Phi(k\Delta t, (k-1)\Delta t)$ ，则有

$$X_k = \Phi_{k,k-1}X_{k-1} + W_{k-1}$$

其中

$$\begin{aligned} W_{k-1} &= \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} \Phi(k\Delta t, \tau)B(\tau)U(\tau)d\tau \\ &\approx \Phi(k\Delta t, (k-1)\Delta t)B((k-1)\Delta t) \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} U(\tau)d\tau \end{aligned}$$

$\mathbb{E}[W_k] = 0$ , 并可以求出  $\mathbb{E}[W_k W_i^T] = Q_k \delta_{ki}$ ,

$$Q_k = \Phi(t + \Delta t, t) B(t) Q(t) B^T(t) \Phi^T(t + \Delta t, t) \Delta t \quad (3)$$

对 (2) 式两边在  $(t, t + \Delta t)$  区间积分再除以  $\Delta t$ , 令  $Z_k = z(t)$ ,  $H(k) = H(t)$ ,  $X_k = X(t)$ , 则

$$Z_k = H_k X_k + V_k$$

其中  $V_k = \frac{1}{\Delta t} \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} V(\tau) d\tau$ , 且  $\mathbb{E}[V_k] = 0$  并可以求出  $\mathbb{E}[V_k V_i^T] = R_k \delta_{ki}$ ,  $R_k = \frac{R(t)}{\Delta t}$

写出相应的离散 Kalman 滤波递推公式为

$$\hat{X}(t + \Delta t) = \Phi(t + \Delta t, t) \hat{X}(t) + K(t + \Delta t) [Z(t + \Delta t) - H(t + \Delta t) \Phi(t + \Delta t, t) \hat{X}(t)] \quad (4)$$

因为  $\Phi(t + \Delta t, t) = \exp(A\Delta t) = 1 + A(t)\Delta t + O((\Delta t)^2)$

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{X}(t)}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\hat{X}(t + \Delta t) - \hat{X}(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [\Phi(t + \Delta t, t) - 1] \hat{X}(t) \\ &\quad + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} K(t + \Delta t) [Z(t + \Delta t) - H(t + \Delta t) \Phi(t + \Delta t, t) \hat{X}(t)] \\ &= A(t) \hat{X}(t) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{K(t + \Delta t)}{\Delta t} [Z(t) - H(t) \hat{X}(t)] \end{aligned}$$

由相应的离散 Kalman 滤波增益矩阵公式:

$$K(t + \Delta t) = P(t + \Delta t) H^T(t + \Delta t) R^{-1}(t + \Delta t) \Delta t \quad (5)$$

设  $K(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{K(t + \Delta t)}{\Delta t}$ , 则我们得到连续情形下的滤波增益方程:

$$K(t) = P(t) H^T(t) R^{-1}(t) \quad (6)$$

以及连续情形下的状态估计方程:

$$\frac{d\hat{X}(t)}{dt} = A(t) \hat{X}(t) + K(t) [Z(t) - H(t) \hat{X}(t)] \quad (7)$$

由相应的离散 Kalman 滤波误差矩阵的递推公式:

$$\begin{aligned} P(t + \Delta t) &= [I - K(t + \Delta t) H(t + \Delta t)] (\Phi(t + \Delta t, t) P(t) \Phi^T(t + \Delta t, t) + Q_k) \\ &= [I - K(t + \Delta t) H(t + \Delta t)] (P(t) + A(t) P(t) \Delta t + P(t) A^T(t) \Delta t + Q_k + O((\Delta t)^2)) \end{aligned}$$

因为  $K(t + \Delta t) = O(\Delta t)$  我们进一步有

$$P(t + \Delta t) = P(t) + A(t)P(t)\Delta t + P(t)A^T(t)\Delta t + Q_k - K(t + \Delta t)H(t + \Delta t)P(t) + O((\Delta t)^2)$$

由 (3) 式可得  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Q_k}{\Delta t} = B(t)Q(t)B^T(t)$  因此, 结合 (5) 式

$$\frac{dP(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} \quad (8)$$

$$= A(t)P(t) + P(t)A^T(t) + B(t)Q(t)B^T(t) - P(t)H(t)^T R^{-1}(t)H(t)P(t) \quad (9)$$

(9) 式为误差方差方程, 也称为 Ricatti 方程。

我们用连续时间 Kalman 滤波针对加性噪声信道设计滤波器。设  $z(t) = s(t) + n(t)$ 。信号的 PSD 为  $\Phi_s(s) = \frac{2}{1-s^2}$ , 设噪声为高斯白噪声,  $\Phi_n(s) = 1$ 。则我们可以得到形成滤波器为  $H(s) = \frac{\sqrt{2}}{s+1}$  因此状态方程可写为

$$\dot{s}(t) = -s(t) + \sqrt{2}u(t)$$

观测方程为仍为  $z(t) = s(t) + n(t)$  由 (6) 可得到  $K(t) = P(t)$ 。我们寻找稳态解, 令 (9) 中  $\dot{P}(t) = 0$ , 舍去负根得  $P = \sqrt{3} - 1$ 。所以由 (7) 可得:

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} + \sqrt{3}\hat{x}(t) = (\sqrt{3} - 1)z(t)$$

滤波器传递函数为  $H(s) = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+s}$ , 与物理可实现的 Wiener 滤波器相同。