信号检测理论

赵丰

2018 年 7 月 2 日

1. Bayes 准则符号约定：$P_F = P(D_1|H_0), P_M = P(D_0|H_1), P_D = 1 - P_M = P(D_1|H_1)$。$P_F, P_M, P_D$ 分别称为虚警概率、漏警概率和检测概率。

   平均风险：

$$
\begin{aligned}
\bar{R} &= P(D_0, H_0)C_{00} + P(D_1, H_1)C_{11} + P(D_0, H_1)C_{01} + P(D_1, H_0)C_{10} \\
&= P(H_0)P(D_0|H_0)C_{00} + P(H_1)P(D_1|H_1)C_{11} \\
&+ P(H_1)P(D_0|H_1)C_{01} + P(H_0)P(D_1|H_0)C_{10} \\
&= P(H_0)C_{10} + P_{H_1}C_{11} \\
&- P(H_0)P(D_0|H_0)(C_{10} - C_{00}) + P(H_1)P(D_0|H_1)(C_{01} - C_{11}) \\
&= P(H_0)C_{10} + P_{H_1}C_{11} \\
&+ \int_{z\in\mathcal{Z}_0} (P(H_1)(C_{01} - C_{11})p(z|H_1) - P(H_0)(C_{10} - C_{00})p(z|H_0))dz
\end{aligned}
$$

   定义似然比为 $\lambda(z) \triangleq \frac{p(z|H_1)}{p(z|H_0)}$

$$
\lambda(z) \underset{z\in\mathcal{Z}_0}{\overset{z\in\mathcal{Z}_1}{\gtrless}} \lambda_B(z) \triangleq \frac{P(H_0)(C_{10} - C_{00})}{P(H_1)(C_{01} - C_{11})} \tag{1}
$$

   其中 $C_{ij} = P(D_i, H_j)$ 当 $C_{10} - C_{00} = C_{01} - C_{11}$ 时 Bayes 准则为最大后验概率准则（也是最小错误概率准则）。进一步的，若先验概率 $P(H_1) = P(H_0)$，最大后验概率准则为最大似然准则。

   例子 1. 考虑一二元通信系统。

$$
\begin{aligned}
H_1 &: z = A + n \\
H_0 &: z = 0 + n
\end{aligned}
$$

其中 $n \sim N(0,\sigma^2)$ 。若 $A=2, \sigma^2=1$。试将平均风险表示为先验概率 $P(H_0)$ 的形式，并求 $P(H_0)=\frac{1}{3}, P(H_0)=\frac{1}{2}$ 和 $P(H_0)=\frac{2}{3}$ 时平均风险的值。

解. 设 $p=P(H_0)$，根据最大后验概率准则。$z \in \mathcal{Z}_1$ 时有 $-\frac{(z-A)^2}{2\sigma^2}+\ln(1-p) > -\frac{z^2}{2\sigma^2}+\ln p$ 求出 $z > \frac{A}{2}+\frac{\sigma^2}{A}\ln\frac{p}{1-p}$

$$\begin{aligned}\bar{R} &= pP(D_1|H_0)+(1-p)P(D_0|H_1) \\ &= p-p\Phi(\frac{A}{2}+\frac{\sigma^2}{A}\ln\frac{p}{1-p})+(1-p)\Phi(-\frac{A}{2}+\frac{\sigma^2}{A}\ln\frac{p}{1-p})\end{aligned}$$

代入 A, σ^2 的值得 $\bar{R}(1/3)=0.1450, \bar{R}(1/2)=0.1587, \bar{R}(2/3)=0.1450$。画出 $\bar{R} \sim p$ 如图 1 所示：

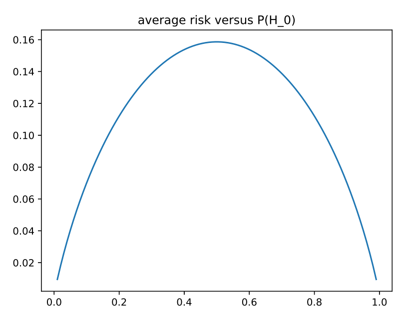

图 1: 平均风险随 $P(H_0)$ 先验的变化规律

2. 极大极小准则（先验概率 $\xi=P(H_0)$ 未知），满足极大极小化方程：

$$C_{00}P(D_0|H_0)+C_{10}P(D_1|H_0)=C_{01}P(D_0|H_1)+C_{11}P(D_1|H_1) \quad (2)$$

上式可看作 P_F 和 P_D 的线性函数：

$$C_{00}(1-P_F)+C_{10}P_F=C_{01}(1-P_D)+C_{11}P_D \quad (3)$$

当 $C_{00}=C_{11}=0, C_{10}=C_{01}=1$ 时，极大极小化方程退化为 $P_F=P_M$，$\bar{R}=P_F$。解出 ξ_{MM}，根据

$$\lambda(z) \underset{z\in\mathcal{Z}_0}{\overset{z\in\mathcal{Z}_1}{\gtrless}} \lambda_{MM} \triangleq \frac{\xi_{MM}(C_{10}-C_{00})}{(1-\xi_{MM})(C_{01}-C_{11})} \quad (4)$$

设计接收机。

3. Neyman Pearson 准则：给定 $P_F = \alpha$，使得 P_D 最大。

$$\lambda(z) \underset{z\in\mathcal{Z}_0}{\overset{z\in\mathcal{Z}_1}{\gtrless}} \lambda_{NP} \tag{5}$$

其中 λ_{NP} 满足方程

$$P_F = \int_{z\in Z_1} p(z|H_0)dz = \alpha \tag{6}$$

4. ROC 曲线: 将由 Neyman Pearson 准则计算出的 (P_F, P_D) 曲线。ROC 曲线有如下性质:

   (a) ROC 曲线上各点的斜率为似然比门限

   (b) ROC 曲线与 (3)式的交点即为满足极大极小准则的解。

例子 2. *考虑例 1 给出的二元通信系统，设 $A = 1, \sigma^2 = 1$，试求 $P_F = 0.1$ 时 λ_{NP} 的值。*

解. $z \in \mathcal{Z}_1 \Rightarrow \ln\frac{p(z|H_1)}{p(z|H_0)} = \frac{z^2-(z-A)^2}{2\sigma^2} > \ln\lambda_{NP}$，化简得 $\mathcal{Z}_1 = \{z|z > \frac{A}{2} + \frac{\sigma^2\ln\lambda_{NP}}{A} =: z_0\}$。因为 $P_F = P(D_1|H_0) = \int_{z_0}^{+\infty} p(z|H_0)dz = 1 - \Phi(z_0)$，代入 $P_F = 0.1$ 先解得 z_0；再代入 $A = 1, \sigma^2 = 1$ 解得 $\lambda_{NP} = 2.185$。进一步可求出:

$$P_F = 1 - \Phi(z_0) \tag{7}$$

$$P_D = 1 - \Phi(z_0 - A) \tag{8}$$

以 z_0 为参数，作出 *ROC* 曲线 (P_F, P_D) 如图 2 所示:

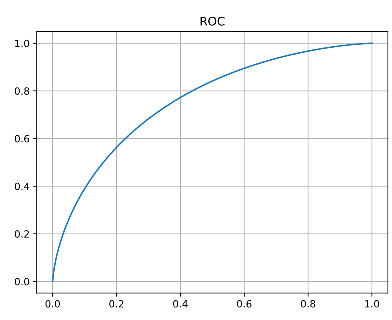

图 2: 接收机工作特性曲线

5. 在理想白高斯信道中信号的检测

$$\begin{aligned} H_0 :& z(t) = s_0(t) + n(t) \\ H_1 :& z(t) = s_1(t) + n(t) \end{aligned} \tag{9}$$

考虑高斯带限白噪声，即

$$S_N(f) = \begin{cases} 0 & \text{if} |f| > B \\ \frac{N_0}{2} & \text{if} |f| < B \end{cases} \tag{10}$$

可以证明 $S_N(f)$ 对应的相关函数是 $R_N(\tau) = \frac{N_0 \sin(2B\pi\tau)}{2\pi\tau}$

证明. 首先已知 $\mathcal{F}(\text{sinc}(t)) = \text{rect}(f)$ 其中

$$\text{rect}(f) = \begin{cases} 0 & \text{if } |f| > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{if } |f| = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{if } |f| < \frac{1}{2}. \end{cases} \qquad \text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

根据 Fourier 变换的性质：若 $\mathcal{F}f(x) = \hat{f}(\lambda)$, 则 $\mathcal{F}f(ax) = \frac{1}{a}\hat{f}(\frac{\lambda}{a})$ 因此 $\mathcal{F}(\text{sinc}(2Bt)) = \frac{1}{2B}\text{rect}(\frac{f}{2B})$, 等式两边同时乘以 N_0B 得 $\mathcal{F}(N_0B\,\text{sinc}(2Bt)) = \frac{N_0}{2}\text{rect}(\frac{f}{2B})$ □

由相关函数的性质 $R_N(0) = N_0B$ 为高斯分布的方差。且间隔为 $\Delta t = \frac{1}{2B}$ 的采样序列 $z_1, \ldots, z_N$ 相互独立。对于 N 个采样，似然比

$$\begin{aligned} \lambda(\boldsymbol{z}) &= \prod_{i=1}^{N} \frac{p(z_i|H_1)}{p(z_i|H_0)} \\ &= \exp\left[\sum_{k=1}^{N} -\frac{(z_k - s_{1k})^2 - (z_k - s_{0k})^2}{2\sigma_n^2}\right] \\ &= \exp\left[\frac{2}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{N}(s_{1k} - s_{0k})z_k - \frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{N}(s_{1k}^2 - s_{0k}^2)\right] \end{aligned}$$

因为 $\sigma_n^2 = R(0) = N_0B = \frac{N_0}{2\Delta t}$，令 $\Delta t \to 0$ 则 $B \to \infty$，带限白噪声变为理想白噪声。在 $[0, T]$ 时间内，采样次数 $N \to \infty$，于是上式可改写成积分形式，得到关于 $z_i(t) = s_i(t) + n(t), i = 0, 1$ 的信号检测似然函数为：

$$\lambda(z(t)) = \exp\left(\frac{2}{N_0}\int_0^T (s_1(t) - s_0(t))z(t)dt - \frac{1}{N_0}(\int_0^T (s_1^2(t) - s_0^2(t))dt)\right) \tag{11}$$

接收机工作性能

设随机变量 $v=\int_0^T[s_1(t)-s_0(t)]z(t)dt$，根据最小平均错误概率准则

$$v \underset{z\in\mathcal{Z}_0}{\overset{z\in\mathcal{Z}_1}{\gtrless}} v_T \tag{12}$$

其中 $v_T=\frac{N_0}{2}\ln\mathscr{L}_T+\frac{1}{2}(E_1-E_0)$, 而 $\mathscr{L}_T=\frac{P(H_0)}{P(H_1)}, E_i=\int_0^T s_i^2(t)dt$ 为已知量。为计算虚警概率 P_F 和漏警概率 P_M，首先求 v 的分布。设信号平均能量 $E=\frac{1}{2}(E_0+E_1)$, 互相关系数 $\rho=\frac{1}{E}\int_0^T s_1(t)s_0(t)dt$。因为高斯过程的积分也是高斯分布，

$$\begin{aligned}
v|H_0=&\int_0^T[s_1(t)-s_0(t)]s_0(t)dt+\int_0^T[s_1(t)-s_0(t)]n(t)dt\\
\Rightarrow&\mathbb{E}[v|H_0]=\rho E-E_0\\
\Rightarrow&\mathrm{Var}[v|H_0]=\frac{N_0}{2}\int_0^T(s_1(t)-s_0(t))^2dt=N_0E(1-\rho)
\end{aligned}$$

同理可求出

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[v|H_1]=&E_1-\rho E\\
\mathrm{Var}[v|H_1]=&N_0E(1-\rho)
\end{aligned}$$

因此虚警概率 P_F 为

$$\begin{aligned}
P_F=&\int_{v_T}^{\infty}p(v|H_0)dv\\
=&1-\Phi(y_T)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_T=&\frac{v_T-(\rho E-E_0)}{\sqrt{N_0E(1-\rho)}}\\
=&\frac{\frac{N_0}{2}\mathscr{L}_T+E(1-\rho)}{\sqrt{N_0E(1-\rho)}}
\end{aligned}$$

漏警概率 P_M 为

$$\begin{aligned}
P_M=&\int_{-\infty}^{v_T}p(v|H_1)dv\\
=&\Phi(y_T')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'_T =& \frac{v_T - (E_1 - \rho E)}{\sqrt{N_0 E(1-\rho)}} \\ =& \frac{\frac{N_0}{2}\mathscr{L}_T - E(1-\rho)}{\sqrt{N_0 E(1-\rho)}} \end{aligned}$$

在等先验概率的情况下，$\mathscr{L}_T = 0 \Rightarrow y_T = -y'_T \Rightarrow$

$$P_F = P_M = \Phi(-\sqrt{\frac{E(1-\rho)}{N_0}}) \tag{13}$$

当信噪比 $\frac{E}{N_0}$ 一定时，$\rho \downarrow \Rightarrow P_F \downarrow$

雷达系统检测是否有信号，其中 $s_0(t) = 0 \Rightarrow \rho = 0, E_0 = 0$, 采用 Neyman-Pearson 准则，门限 v_{NP} 根据下式确定：

$$P_F = 1 - \Phi(\frac{v_{\mathrm{NP}}}{\sqrt{N_0 E_1/2}}) = \alpha$$

求出 v_{NP} 后，代入计算 P_D，

$$P_D = 1 - P_M = 1 - \Phi(\frac{v_{\mathrm{NP}} - E_1}{\sqrt{N_0 E_1/2}})$$

于是可作出 ROC 曲线。当信噪比 $\frac{E_1}{N_0}$ 增加时, 对相同的 α,P_D 增大，ROC 曲线向左上方倾斜。

6. 多元假设检验

考虑“M 元择一”的情况，平均代价可计算出为：

$$\bar{R} = \sum_{i=0}^{M-1} C_{ii} P(H_i) + \sum_{i=0}^{M-1} \int_{\mathcal{Z}_i} I_i(z) dz$$

其中

$$I_i(z) = \sum_{j=0, j\neq i}^{M-1} (C_{ij} - C_{jj}) P(H_j) p(z|H_j)$$

使得 $\bar{R}$ 最小的空间划分方式为：

$$\mathcal{Z}_i = \{z | I_i(z) = \min\{I_k(z) | k = 0, \ldots, M-1\}\}$$

最小平均错误准则取 $C_{ij} = 1 - \delta_{ij}$，此时 $I_i(z)$ 为

$$I_i(z) = \sum_{j=0, j\neq i}^{M-1} P(H_j) p(z|H_j) \tag{14}$$

$$= p(z) - p(z) P(H_i|z) \tag{15}$$

故 $I_i(z)$ 取最小值等效于 $P(H_i|z)$ 取最大值（MAP 准则）。

在等先验概率的情况下 $p(z)P(H_i|z) = p(z|H_i)P(H_i)$，可以用最大似然准则。

举例：考虑 H_i : 接收信号 $\sim N(m_i, \sigma^2)$, 其中 $m_1 = 1, m_2 = 2, m_3 = -1$。若考虑等先验概率下的最小平均错误概率准则，且有 n 次观测样本 $z_1, \ldots, z_n$。

首先可以知道 $z = \frac{1}{n}(z_1 + \cdots + z_n)$ 是充分统计量，分布为 $N(m_i, \frac{1}{n}\sigma^2)$。根据最大似然准则，分别作出三种假设下 z 的概率密度函数曲线如图3所示。由图可见，三条概率密度函数曲线将实轴分为三段 $(-\infty, 0), (0, \frac{3}{2}), (\frac{3}{2}, \infty)$，分别记为 I_3, I_1, I_2。每段中分别有一条曲线达到最高。

当样本值落在区间 I_i 时判定假设 H_i 成立。

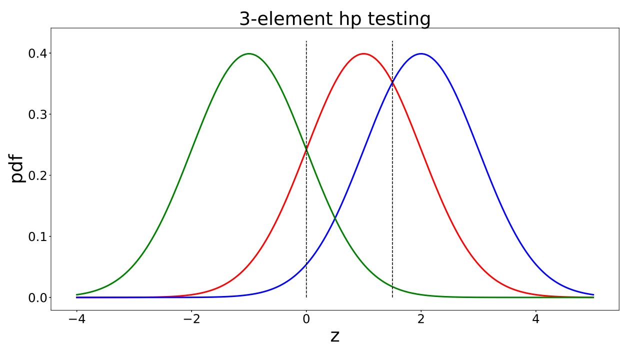

图 3: 三元假设问题

7. 复合假设检验：若参量是未知的常数，即

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \theta \in \Theta_0 \\
H_1 &: \theta \in \Theta_1
\end{aligned} \tag{16}
$$

采用 NP 准则：假定 $\theta \in \Theta_1$ 值寻求 $P_F = \alpha$ 时使 P_D 最大的检验。

(a) 若 P_D 最大时与 θ 值无关，这时可实现最佳检验，称为 UMP（一致最大势）检验。

(b) 若一致最大势检验不存在时，可采用广义似然比检验：$\lambda_g(\boldsymbol{z}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda_T$，

其中广义似然比为：$\lambda_g(\boldsymbol{z}) = \dfrac{\max\limits_{\theta\in\Theta_1} p(\boldsymbol{z}|H_1,\theta)}{\max\limits_{\theta\in\Theta_0} p(\boldsymbol{z}|H_0,\theta)}$。

例子 3. *假设 H_0 下，观测值服从零均值、方差为 σ^2 的高斯分布；假设 H_1 下，观测值服从方差为 σ^2 的高斯分布，但均值为未知的常数。*

解. 若已知 $m>0$ （$m<0$），则 UMP 检验存在，形如 $\mathcal{Z}_1=\{z|z>z_{NP}\}$($\mathcal{Z}_1=\{z|z<z_{NP}\}$)。若 m 可正可负，UMP 检验不存在，假设有 N 次独立观测，则可得 m 的最大似然估值为 $\hat{m}_{\mathrm{ML}}=\frac{1}{N}\sum\limits_{j=1}^{N} z_j$。

采用广义似然比检验：$\frac{p(\boldsymbol{z}|H_1,\hat{m}_{\mathrm{ML}})}{p(\boldsymbol{z}|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda_T$。经过运算，得到双边检验：

$|\frac{1}{\sqrt{N}}\sum\limits_{j=1}^{N} z_j| \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \sqrt{2\sigma^2\lambda_T}$

若参量是随机变量，分概率密度函数是否已知讨论。

(a) 若参量的概率分布已知，可将条件似然函数对参量的分布取平均，按简单假设检验求解。比如假设

$$H_0: s_0(t)=0$$
$$H_1: s_1(t)=A, \text{where}: A\sim N(0,\sigma_A^2)$$

信道是高斯信道，观测 $z(t)=s(t)+n(t)$, $n(t)\sim N(0,\sigma_N^2)$, 且 A 与 $n(t)$ 相互独立。设只有 1 次观测，$z|H_0\sim N(0,\sigma_N^2)$ 而

$$p(z|H_1)=\int_{\mathbb{R}} p(z|H_1,A)p(A)dA=\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_N^2+\sigma_A^2)}}\exp\Big(-\frac{z^2}{2(\sigma_N^2+\sigma_A^2)}\Big)$$

$\Rightarrow z|H_1\sim N(0,\sigma_N^2+\sigma_A^2)$ 再通过似然比检验得到双边检验的形式：

$$z^2 \underset{z\in\mathcal{Z}_0}{\overset{z\in\mathcal{Z}_1}{\gtrless}} \frac{2\sigma_N^2(\sigma_A^2+\sigma_N^2)}{\sigma_A^2}\left[\ln\lambda_B+\frac{1}{2}\ln\Big(1+\frac{\sigma_A^2}{\sigma_N^2}\Big)\right]$$

(b) 随机相位信号的检测

$H_0: z(t)=n(t), 0\le t\le T, n(t)$是均值为 0，谱密度为 $\dfrac{N_0}{2}$ 的高斯白噪声

$H_1: z(t)=\sqrt{\dfrac{2E_s}{T}}\sin(\omega_c t+\theta)+n(t), \text{where}:$

$A\sim N(0,\sigma_A^2), \theta$是随机变量，$E_s$ 是该信号的能量

若 θ 给定，假定 T 是 $\frac{2\pi}{\omega_c}$ 的整数倍, 可求出条件似然比为:

$$\lambda(z(t)|\theta) = \exp\left(\frac{2}{N_0}\sqrt{\frac{2E_s}{T}}(y_c\sin\theta + y_s\cos\theta) - \frac{E_s}{N_0}\right) \tag{17}$$

其中:

$$y_c = \int_0^T z(t)\cos\omega_c t dt \tag{18}$$

$$y_s = \int_0^T z(t)\sin\omega_c t dt \tag{19}$$

$$\tag{20}$$

进一步假定随机相位 θ 在 $[0, 2\pi]$ 区间上是均匀分布（最不利分布），则平均似然比为

$$\lambda(z(t)) = \mathbb{E}_\theta[\lambda(z(t)|\theta)] \tag{21}$$

$$= \exp(-\frac{E_s}{N_0})I_0(\frac{2}{N_0}\sqrt{\frac{2E_s}{T}}\sqrt{y_c^2 + y_s^2}) \tag{22}$$

其中

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp(x\cos\phi)d\phi$$

称为零阶修正的 Bessel 函数。设 $y = \sqrt{y_c^2 + y_s^2}$，由似然比判决规则可以得到

$$y \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} y_T$$

可以计算出 y 的概率密度函数为:

$$p(y|H_1) = \frac{y}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[y^2 + \frac{E_sT}{2}\right]\right)\cdot I_0\left(\frac{y}{\sigma^2}\sqrt{\frac{E_sT}{2}}\right) \tag{23}$$

$$p(y|H_0) = \frac{y}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) \tag{24}$$

其中 $y > 0, \sigma^2 = \frac{N_0T}{4}$,$y|H_0$ 服从 Rayleigh 分布，是假设 H_1 下信号能量为 0 的特殊情况。

从而求出虚警概率 P_F 和检测概率 P_D:

$$P_F = \int_{y_T}^{\infty} p(y|H_0)dy = \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{y_T^2}{\sigma^2}\right) \tag{25}$$

$$P_D = \int_{y_T}^{\infty} p(y|H_1)dy = Q\left(\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{E_sT}{2}}, \frac{y_T}{\sigma}\right) \tag{26}$$

其中

$$Q(a,b) = \int_b^{\infty} u \exp\left(-\frac{u^2+a^2}{2}\right) I_0(au)du$$

称为 Marcum 函数。

采用 Neyman-Pearson 准则，由 $P_F = \alpha$ 得到 $P_D = Q(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}, \sqrt{-2\ln\alpha})$。信噪比 $r = \frac{2E_s}{N_0}$，于是可作出接收机的 ROC 曲线以及当 α 一定时检测概率与信噪比的关系曲线如图 4所示。

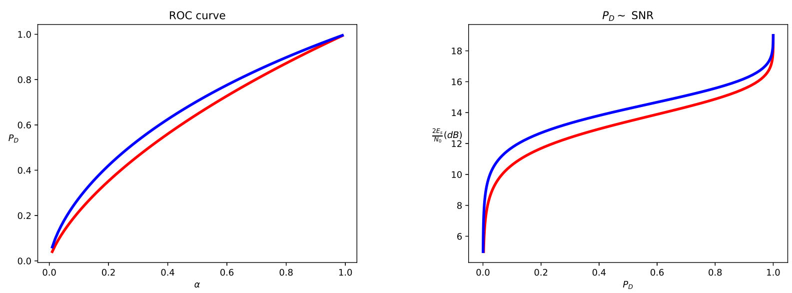

图 4

(c) 随机幅度和相位信号的检测

$$H_0 : z(t) = n(t), 0 \le t \le T$$
$$H_1 : z(t) = A\sin(\omega_c t + \theta) + n(t), 0 \le t \le T$$

A 服从 Rayleigh 分布：

$$p(A) = \frac{A}{\sigma_A^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_A^2}\right), A \ge 0$$

此时似然比为

$$\lambda(z(t)) = \int_0^{\infty} \lambda(z(t)|A)p(A)dA$$

其中 $\lambda(z(t)|A)$ 可由 (22)得到为

$$\lambda(z(t)|A) = \exp\left(-\frac{A^2T}{2N_0}\right) \cdot I_0(\frac{2}{N_0}Ay)$$

利用 Marcum 函数的性质可得

$$\lambda(z(t)) = \frac{N_0}{\sigma_A^2 T + N_0} \exp\left(\frac{2\sigma_A^2}{N_0(\sigma_A^2 T + N_0)} y^2\right)$$

再根据似然比检验的准则得到最佳接收机。

在随机相位、随机幅度的情况下，虚警概率 P_F 的计算与之前相同，而检测概率 P_D 则为(26)对 $p(A)$ 的平均（将 $E_s=\frac{A^2T}{2}$ 代入该式）。可得：

$$P_D=\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y_T}{2}\right)^2\left(1+\frac{\bar{E}_s}{N_0}\right)^{-1}\right) \tag{27}$$

其中 $\bar{E}_s=\sigma_A^2T$ 表示平均能量，$\bar{r}=\frac{\bar{E}_s}{N_0}$ 表示平均信噪比。若令 $P_F=\alpha$, 则 $P_D=\alpha^{1/(1+\bar{r})}$

8. 色高斯信道

考虑一般的情形，噪声仍为高斯过程，但相关函数不再是 $\delta\tau$ 而是一般的 $R_n(t_1,t_2)$，可能是时变的。处理这一问题可以用 Karhunen-Loeve 正交展开或者白化滤波器的方法。不同于白高斯信道中平均错误概率只与信号能量有关，在一般的色高斯信道中与信号波形有关。

(a) 正交展开

把 $z(t)$ 在基函数 $\{g_k(t)\}$ 上展开：

$$z(t)=\sum_{k=1}^{\infty}z_kg_k(t), \text{where } z_k=\int_0^T z(t)g_k(t)dt \tag{28}$$

展开的目的是希望选择基函数使得展开系数 $\{z_k\}$ 相互独立，因为 z_k 是高斯变量，所以只需使 $\{z_k\}$ 互不相关即可，其协方差函数满足：

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(z_k,z_l)&=\mathbb{E}\left[\int_0^T\int_0^T n(t_1)n(t_2)g_k(t_1)g_k(t_2)dt_1dt_2\right]\\&=\int_0^T\int_0^T R_n(t_1,t_2)g_k(t_1)g_k(t_2)dt_1dt_2\end{aligned} \tag{29}$$

若

$$\int_0^T R_n(t_1,t_2)g_k(t_2)=\lambda_kg_k(t_1) \tag{30}$$

且 $\{g_k(t)\}$ 是归一化的正交函数集：

$$\int_0^T g_k(t)g_l(t)=\delta_{kl}$$

则 $\mathrm{Cov}(z_k, z_l) = \lambda_k \delta_{kl}$

似然比计算及判决规则：我们以接收信号 $K-L$ 展开式的前 N 个系数来建立“等效”的观测向量：$\boldsymbol{z}_N = (z_1, \dots, z_N)$。似然比函数为

$$\lambda(\boldsymbol{z}_N) = \frac{\prod_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_k}} \exp\left(-\frac{(z_k - s_{1k})^2}{2\lambda_k}\right)}{\prod_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_k}} \exp\left(-\frac{(z_k - s_{0k})^2}{2\lambda_k}\right)}$$

其中

$$s_{ik} = \int_0^T s_i(t) g_k(t) dt, i = 1, 2 \tag{31}$$

是 z_k 的均值。上式取对数并整理得：

$$\ln \lambda(\boldsymbol{z}_N) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\lambda_k} z_k (s_{1k} - s_{0k}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\lambda_k} (s_{1k}^2 - s_{0k}^2)$$

令 $N \to \infty$ 并将(28)代入上式的第一项，(31)取一个代入上式第二项，得到：

$$\begin{aligned}\ln \lambda(z(t)) &= \int_0^T z(t) \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\lambda_k} (s_{1k} - s_{0k}) g_k(t) dt - \frac{1}{2}\left[\int_0^T s_1(t) \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\lambda_k} s_{1k} g_k(t) dt - \int_0^T s_1(t) \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\lambda_k} s_{0k} g_k(t) dt\right] \\ &= \left[\int_0^T z(t) h_1(t) dt - \int_0^T z(t) h_0(t) dt\right] - \frac{1}{2}\left[\int_0^T s_1(t) h_1(t) dt - \int_0^T s_0(t) h_0(t) dt\right]\end{aligned}$$

其中 $h_i(t) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\lambda_k} s_{ik} g_k(t)$ 易验证，$h_i(t)$ 是积分方程 $\int_0^T R_n(t,\tau) h_i(\tau) d\tau = s_i(t)$ 的解。根据似然比检验准则有：

$$\int_0^T z(t) h_1(t) dt - \int_0^T z(t) h_0(t) dt \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} v_T, \text{where } v_T = \ln \lambda_T + \frac{1}{2}\left[\int_0^T s_1(t) h_1(t) dt - \int_0^T s_0(t) h_0(t) dt\right] \tag{32}$$

(b) 白化滤波器

将接收信号 $z(t)$ 通过一个滤波器 $h_w(t,\tau)$，设输出信号为 $z_w(t)$，则：

$$z_w(t) = \int_0^T h_w(t,\tau) z(\tau) d\tau | H_i = s_{wi}(t) + n_w(t) \tag{33}$$

其中

$$s_{wi}(t) = \int_0^T h_w(t,\tau) s_i(\tau) d\tau$$
$$n_w(t) = \int_0^T h_w(t,\tau) n(\tau) d\tau$$

若输出噪声 $n_w(t)$ 是白噪声，则可以根据(12)的判决准则设计接收机。

假设 $h_w(t,\tau)$ 可以展开为:

$$h_w(t,\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}h_k g_k(t)g_k(\tau)$$

于是可得:

$$\begin{aligned}
R_{n_w}(t,\tau)&=\mathbb{E}[n_w(t)n_w(\tau)]\\
&=\mathbb{E}\left[\int_0^T\int_0^T h_w(t,s)h_w(\tau,u)n(s)n(u)dsdu\right]\\
&=\int_0^T\int_0^T h_w(t,s)h_w(\tau,u)R_n(s,u)dsdu\\
&=\int_0^T\int_0^T\left[\sum_{k=1}^{\infty}h_k g_k(t)g_k(s)\right]\left[\sum_{l=1}^{\infty}h_l g_l(\tau)g_l(u)\right]R_n(s,u)dsdu\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\int_0^T h_k g_k(t)g_k(s)h_l g_l(\tau)\lambda_l g_l(s)ds\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}h_k g_k(t)h_l g_l(\tau)\lambda_l\delta_l k\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k h_k^2 g_k(t)g_k(\tau)
\end{aligned}$$

另一方面

$$\delta(t-\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}g_k(t)g_k(\tau)$$

比较系数得:

$$h_k=\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\Rightarrow h_w(t,\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}g_k(t)g_k(\tau) \tag{34}$$

9. Wald 检测

考虑非固定样本的情况，采用序列检测的方法，定义 $\boldsymbol{z}_j=(z_1,\ldots,z_j)^T$ 每获得一个新的样本后，就按照下述的判决规则进行一次判决。$\lambda(\boldsymbol{z}_j)>$

$\lambda_1 \to H_1, \lambda(\boldsymbol{z}_j) < \lambda_0 \to H_0$ 否则继续接收下一个观测值。利用给定的 $P_F = \alpha, P_D = \beta$ 可计算 λ_1 和 λ_0 的值。

$$\ln \lambda_1 = \ln \frac{1-\beta}{\alpha} \tag{35}$$

$$\ln \lambda_0 = \ln \frac{\beta}{1-\alpha} \tag{36}$$

在每个假设下，平均取样数按照下述公式计算：

$$\mathbb{E}[N|H_1] = \frac{(1-\beta)\ln \lambda_1 + \beta \ln \lambda_0}{\mathbb{E}[\mathcal{L}(z)|H_1]} \tag{37}$$

$$\mathbb{E}[N|H_0] = \frac{(1-\alpha)\ln \lambda_0 + \alpha \ln \lambda_1}{\mathbb{E}[\mathcal{L}(z)|H_0]} \tag{38}$$

例子 4. *沿用例 1 的假设检验，设* $A = 1, \sigma^2 = 1$*，给定* $P_F = \alpha = 0.1, P_M = \beta = 0.1$。

1) 序列检测时的判决规则；

2) 序列检测时每种假设下结束检验所需的平均样本数；

3) 若固定样本数，确定满足性能所需的样本数。

解. 1)

$$\begin{aligned}\ln \lambda(\boldsymbol{z}) &= \sum_{i=1}^{j} -\left(\frac{(z_i-1)^2}{2} - \frac{z_i^2}{2}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{j} z_i - \frac{j}{2}\end{aligned}$$

由 (35) 式可得当 $\lambda(\boldsymbol{z}) > \ln 9$ 时判定为 H_1；当 $\lambda(\boldsymbol{z}) < -\ln 9$ 时判定为 H_0；介于二者之间继续观测。

2) 由 (37) 式，可求得两个假设下平均样本总数均为 3.52。

3) 令检验统计量 $y = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} z_k$。则 $y|H_0 \sim N(0, \frac{1}{N}), y|H_1 \sim N(1, \frac{1}{N})$。因为 $P_F = P_M$，根据极大极小准则，当两个假设先验概率相等时取得，此时判决准则为 $y > \frac{1}{2} \to H_1$。由 $P_F = \Phi(-0.5\sqrt{N}) \le 0.1$ 求出最小的 $N = 7$。

10. 练习题

(1) 试推导如下情况的似然比。

$$H_0 : z \sim N(m_0, \sigma_0^2)$$
$$H_1 : z \sim N(m_1, \sigma_1^2)$$

并求判决域和错误概率。

解.

$$\lambda(z) = \frac{p(z|H_1)}{p(z|H_0)} \tag{39}$$
$$= \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \exp(-\frac{(z-m_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(z-m_0)^2}{2\sigma_0^2}) \tag{40}$$

$$\mathcal{Z}_0 = \{z|\lambda(z) < \lambda_B\}$$
$$\mathcal{Z}_1 = \{z|\lambda(z) > \lambda_B\}$$

$$P_F = P(D_1, H_0) = \int_{z\in\mathcal{Z}_1} p(z|H_0)dz$$
$$P_M = P(D_0, H_1) = \int_{z\in\mathcal{Z}_0} p(z|H_1)dz$$

当方差相等时(均为 σ^2),不妨设 $m_1 > m_0$,则 $z \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{m_1^2 - m_0^2 + 2\sigma^2 \ln \lambda_B}{2(m_1 - m_0)}$
当方差不等时，不妨设 $\sigma_1^2 > \sigma_0^2$，则

$$(\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2})z^2 + 2(\frac{m_1}{\sigma_1^2} - \frac{m_0}{\sigma_0^2})z + \frac{m_0^2}{\sigma_0^2} - \frac{m_1^2}{\sigma_1^2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 2\ln(\lambda_B \frac{\sigma_1}{\sigma_0})$$

若上述关于 z 的二次函数的判别式 $\Delta > 0$ 则当 $z < z_1$ 或 $z > z_2$ 时判决为 H_1，当 $\Delta \le 0$ 时无条件判定为 H_1。 □

(2) 考虑一二元对称信道，ϵ 是交叉概率（假定 $\epsilon < \frac{1}{2}$），即信道输入为 0（或 1）时，输出为 1（或 0）的概率。试导出保证平均错误概率最小的判决准则，并求最小平均错误概率。

解. 考虑一次观测 z，

$$H_0 : \theta = 0$$
$$H_1 : \theta = 1$$

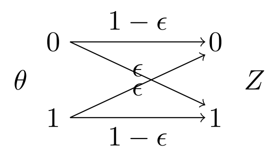

图 5: 二元对称信道

条件概率 $z|\theta$ 已知：$p_{z|\theta=0}(0)=1-\epsilon, p_{z|\theta=0}(1)=\epsilon, p_{z|\theta=1}(0)=\epsilon, p_{z|\theta=1}(1)=1-\epsilon$ 设先验概率 $p_\theta(0)=p$。由似然比检验，$\lambda(z)=\frac{p(z|H_1)}{p(z|H_0)}\Rightarrow\lambda(0)=\frac{\epsilon}{1-\epsilon}<1,\lambda(1)=\frac{1-\epsilon}{\epsilon}>1$ 因为 $\lambda_B=\frac{p}{1-p}$，分三种情况讨论：

(a) $\lambda(0)<\lambda_B<\lambda(1)$：此时判决准则为 $z=1\Rightarrow\theta=1;z=0\Rightarrow\theta=0$。平均错误概率为

$$
\begin{aligned}
P_{\theta,z}(0,1)+P_{\theta,z}(1,0)=&P_\theta(0)P_{z|\theta=0}(1)+P_\theta(1)P_{z|\theta=1}(0)\\
=&\epsilon
\end{aligned}
$$

(b) $\lambda_B\le\lambda(0)$：此时判决准则为 $\theta=1$（完全依赖先验分布，无视观测）平均错误概率为 p

(c) $\lambda_B\ge\lambda(1)$：此时判决准则为 $\theta=0$，平均错误概率为 $1-p$。

图 6 画出了 $\epsilon=0.11$ 时平均错误概率随 θ 的先验变化的情况。

□

(3) 请使用最小错误概率准则，设计一个在如下两种假设间作出选择的接收机（假定两种假设的先验概率相等）：

$$
\begin{aligned}
H_0: z(t)=s_0(t)+n(t)\\
H_1: z(t)=s_1(t)+n(t)
\end{aligned}
$$

其中：信号 $s_1(t)$ 和 $s_0(t)$ 如图 7所示：噪声 $n(t)$ 是高斯型随机变量，均值为零，谱密度为 $\frac{N_0}{2}$。并画出平均错误概率与 $\frac{2E}{N_0}$ 的函数关系（E 为信号的平均能量）。

解. 首先计算信号的能量 $E_1=1,E_2=1,\mathscr{L}_T=1\Rightarrow v_T=0$，根据(12)式可得到最小错误概率的判决准则。$s_1(t)$ 和 $s_2(t)$ 的互相

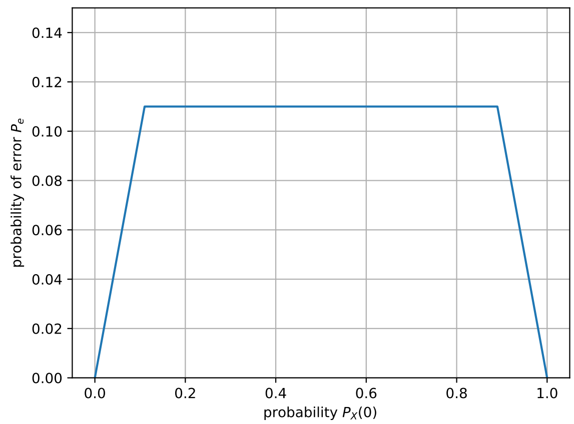

图 6: BSC 信道 MAP 准则下平均错误概率与先验分布的关系

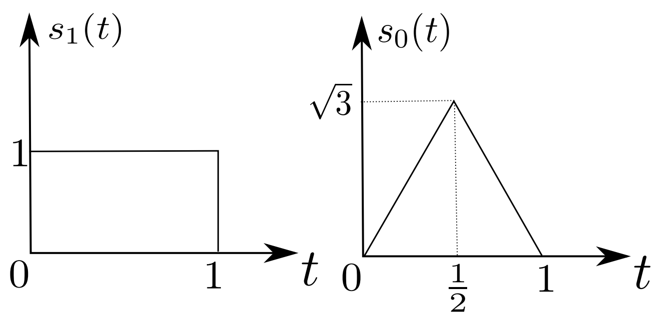

图 7: 信号 $s_1(t)$ 和 $s_0(t)$

关系数 $\rho = \frac{\sqrt{3}}{2}$。由(13)式可得到平均错误概率为

$$\bar{R} = \frac{1}{2}(P_F + P_M) = \Phi\left(-\sqrt{\frac{2E}{N_0}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)}\right)$$

平均错误概率与 $\frac{2E}{N_0}$ 的函数关系如图 8所示

□

(4) 已知 K 个独立的观测值

$$\begin{cases} H_1: & z_k = n_k \\ H_0: & z_k = 1 + n_k \end{cases}$$

其中：n_k 是均值为零、方差为 2 的高斯随机变量，$k = 1, 2, \ldots, K$。

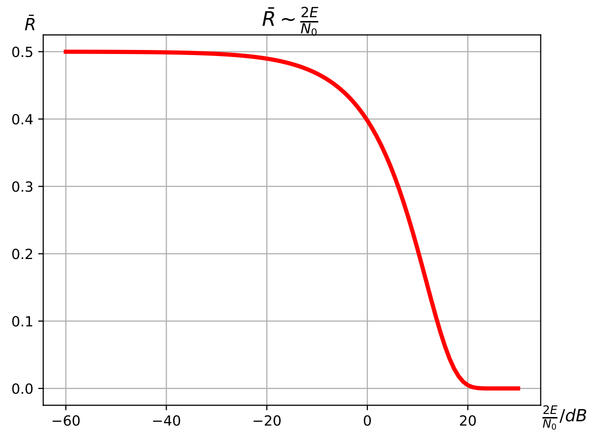

图 8

(a) 设计似然比检验，并求 P_F 和 P_M。

(b) 画出 $K=1$ 时的接收机工作特性。

(c) 假定 $c_{00}=c_{11}=0, c_{01}=2, c_{10}=1, P(H_0)=0.7$, 试求最小 N 值，使得 $K=N$ 时的风险不大于 $K=1$ 时风险的 $\frac{1}{2}$。

解. (a) 设 $\boldsymbol{z}=[z_1,\ldots,z_K], \lambda(\boldsymbol{z})=\frac{p(\boldsymbol{z}|H_1)}{p(\boldsymbol{z}|H_0)}$

$$\lambda(\boldsymbol{z}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda_B \Rightarrow z \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} \frac{1}{2}-\frac{2}{K}\ln\lambda_B$$

其中 $z=\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K} z_i, z|H_0 \sim N(1,\frac{2}{K}), z|H_1 \sim N(0,\frac{2}{K})$

$$\begin{aligned} P_F &= \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}-\frac{2}{K}\ln\lambda_B} p(z|H_0)dz \\ &= \Phi\left(-\sqrt{2K}(\frac{1}{4}+\frac{\ln\lambda_B}{K})\right) \\ P_M &= \Phi\left(-\sqrt{2K}(\frac{1}{4}-\frac{\ln\lambda_B}{K})\right) \end{aligned}$$

(b) 当 $K=1$ 时，以 λ_B 作为曲线参数，作出 (P_F,P_D) 的曲线如图 9 所示。

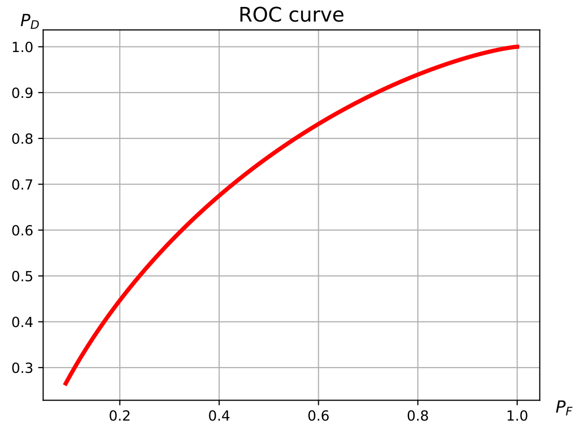

图 9

(c)

$$
\begin{aligned}
\bar{R} =& C_{01}P(D_0, H_1) + C_{10}P(D_1, H_0) \\
=& 2P(H_1)P(D_0|H_1) + P(H_0)P(D_1|H_0) \\
=& 0.6P_M + 0.7P_F
\end{aligned}
$$

另一方面，

$$\lambda_B = \frac{P(H_0)(C_{10} - C_{00})}{P(H_1)(C_{01} - C_{11})} = \frac{7}{6}$$

根据 (a) $\bar{R}(K = 1) = 0.47, \bar{R}(K = 6) = 0.25, \bar{R}(K = 7) = 0.23 < \frac{1}{2}\bar{R}(K = 1) \Rightarrow N = 7$

□

(5) 对于二元通信系统，其假设为：

$$\begin{cases} H_1: & z(t) = A\cos\omega_1 t + B\cos(\omega_2 t + \phi) + n(t) \\ H_0: & z(t) = B\cos(\omega_2 t + \phi) + n(t) \end{cases}$$ 其中： $0 \le t \le T$ $A, B, \omega_1, \omega_2, \phi$ are known constant

假定：$\int_0^T \cos\omega_1 t \cos\omega_2 t dt = \int_0^T \cos\omega_1 t \sin\omega_2 t dt = 0, n(t)$ 是谱密度为 $\frac{N_0}{2}$ 的高斯白噪声。试画出其最佳接收机模型，并分析其误码率是否和 $A\cos\omega_1 t$ 及 $B\cos(\omega_2 t + \phi)$ 有关。计算误码率以证明你的分析结论。

解. 假定等先验概率，由(13)得

$$P_e = \Phi(-\sqrt{\frac{E(1-\rho)}{N_0}})$$

而

$$\begin{aligned} E(1-\rho) =& \frac{1}{2}\int_0^T (s_1(t) - s_0(t))^2 dt \\ =& \frac{1}{2}\int_0^T (A\cos\omega_1 t)^2 dt \end{aligned}$$

因此误码率与 $A\cos\omega_1 t$ 有关而和 $B\cos(\omega_2 t + \phi)$ 无关。 □