

1. $P(X)$ 只和赛的场次有关，每个赛的场次的不同可能数如下表所示：

场次数	4	5	6	7
不同组合数	2	$2C_4^1$	$2C_5^2$	$2C_6^3$
概率	$\frac{1}{35}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{10}{35}$	$\frac{20}{35}$

因此

$$H(X) = 2 \times \left(\frac{1}{2^4} \log 2^4 + \frac{C_4^1}{2^5} \log 2^5 + \frac{C_5^2}{2^6} \log 2^6 + \frac{C_6^3}{2^7} \log 2^7 \right) = \frac{93}{16}$$

$$H(Y) = -\left(\frac{1}{35} \log \frac{1}{35} + \frac{4}{35} \log \frac{4}{35} + \frac{10}{35} \log \frac{10}{35} + \frac{20}{35} \log \frac{20}{35} \right) = 1.48$$

因为 $p(y|x) = 0 \Rightarrow$

$$H(Y|X) = 0 \Rightarrow H(X, Y) = H(X) = \frac{93}{16}$$

$$H(X|Y) = H(X, Y) - H(Y) = 4.33$$

2.

3. $I(X; Y) < I(X; Y|Z)$ 不是恒等式，设 $X, Y \sim B(\frac{1}{2})$ 且 X 与 Y 相互独立， Z 是 X 与 Y 的亦或。则 $I(X; Y) = 0, H(X|Z) - H(X|Y, Z) = 1 - 0 = 1 \Rightarrow I(X; Y|Z) = 1 > I(X; Y)$

$$I(X; Y) = H(X) - H(X|Y) \geq 0 \Rightarrow H(X|Y) \leq H(X)$$

若取 $Y = X, H(X|Y = y) = 0 \leq H(X)$ 又设 X, Y 的联合分布如下表所示：

X	1	1	0	0
Y	0	1	1	0
概率	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

$$H(X) = -\frac{3}{5} \log \frac{3}{5} - \frac{2}{5} \log \frac{2}{5} = 0.97 \quad H(X|Y = 1) = 1 > H(X) \quad \text{因此} \\ H(X|Y = y) \leq H(X) \quad \text{不是恒等式。}$$

4. (a) $H(X, Y|Z) = H(X|Z) + H(Y|X, Z) \geq H(X|Z)$; 等式成立当且仅当 $H(Y|X, Z) = 0$, 即 $Y = f(X, Z)$

- (b) 由互信息的链式法则 $I(X, Y; Z) = I(X; Z) + I(Y; Z|X) \geq I(X; Z)$,
等式成立当且仅当 $I(Y; Z|X) = 0$, 即 Y, Z 关于 X 条件独立。
- (c) $H(X, Y, Z) - H(X, Y) = H(Z|X, Y) = H(Z|X) - I(Z; Y|X) \leq$
 $H(Z|X) = H(X, Z) - H(X)$, 等式成立当且仅当 $I(Y; Z|X) = 0$,
即 Y, Z 关于 X 条件独立。
- (d) 不等式左端减右端得:

$$\begin{aligned} I(X; Z|Y) - [I(Z; Y|X) - I(Z; Y) + I(X; Z)] &= H(Z|Y) - H(Z|Y, X) \\ &\quad - (H(Z|X) - H(Z|X, Y)) + (H(Z) - H(Z|Y)) - (H(Z) - H(Z|X)) = 0 \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} D(p_2||p_1) &= -\frac{1}{2} \log(1 - \rho^2) \\ D(p_1||p_2) &= \frac{1}{2} \log(1 - \rho^2) + \frac{1}{2} \log e \left[-\frac{2\rho^2}{1 - \rho^2} \right] \end{aligned}$$

$D(p||q) = D(q||p)$ 的例子: $p \sim B(\frac{1}{4}), q \sim B(\frac{3}{4})$

6.

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= \sum_{x \in \mathcal{X}} P_X(x) \sum_{y \in \mathcal{Y}} P_{Y|X=x}(y) \log \frac{P_{Y|X=x}(y)}{P_{Y|X=x_0}(y)} - \sum_{y \in \mathcal{Y}} P_Y(y) \log \frac{P_Y(y)}{P_{Y|X=x_0}(y)} \\ &= \sum_{x \in \mathcal{X}} P_X(x) \sum_{y \in \mathcal{Y}} P_{Y|X=x}(y) \log P_{Y|X=x}(y) - \sum_{y \in \mathcal{Y}} P_Y(y) \log P_Y(y) \\ &= H(Y) - H(Y|X) \\ &= I(X; Y) \end{aligned}$$

7. (a)

(b) 当 $0 \leq x \leq d, \log \frac{1}{d} \leq -\log p(x)$, 所以

$$\int_0^d p(x) dx \log \frac{1}{d} \leq - \int_0^\infty p(x) \log p(x) dx \quad (1)$$

(c) from (a)

8. (a) $H(Z|X) = E_X[H(Z|X = x)] = E_X[H(Y|X = x)] = H(Y|X)$, 当
 X 与 Y 独立时, $H(Y) = H(Y|X) = H(Z|X) \leq H(Z)$, 由 X 和
 Y 的对称性可得: $H(X) \leq H(Z)$

Y \ X	0	1
	0	1
0	0.1	0.4
1	0.4	0.1

表 1: X, Y 的联合概率分布

(b) X, Y 的联合概率分布如表 1 所示。

可以求出 $H(X) = H(Y) = 1, Z \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \end{pmatrix}, H(Z) = 0.92$

(c) $X+Y$ 可看作 $f(X, Y)$, 因此 $H(Z) \leq H(X, Y) \leq H(X) + H(Y)$ 。
 $H(Z) = H(X) + H(Y)$ 的必要条件为 X 与 Y 独立, $H(Z) = H(X, Y)$ 的条件是 (X, Y) 是 Z 的函数, 当这两点同时满足时, $H(Z) = H(X) + H(Y)$ 。

9. 前三条容易验证, 对于第四条,

$$\begin{aligned}
 \rho(x, y) + \rho(y, z) &= H(X|Y) + H(Y|X) + H(Y|Z) + H(Z|Y) \\
 &= 2(H(X, Y) + H(Y, Z) - H(Y)) - H(X) - H(Z), \text{由 4.(c)} \\
 &\geq 2H(X, Z) - H(X) - H(Z) \\
 &= H(X|Z) + H(Z|X) \\
 &= \rho(x, z)
 \end{aligned}$$