1. $P(X)$ 只和赛的场次有关，每个赛的场次的不同可能数如下表所示：

场次数	4	5	6	7
不同组合数	2	$2C_4^1$	$2C_5^2$	$2C_6^3$
概率	$\frac{1}{35}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{10}{35}$	$\frac{20}{35}$

因此

$$H(X) = 2 \times (\frac{1}{2^4}\log 2^4 + \frac{C_4^1}{2^5}\log 2^5 + \frac{C_5^2}{2^6}\log 2^6 + \frac{C_6^3}{2^7}\log 2^7) = \frac{93}{16}$$

$$H(Y) = -(\frac{1}{35}\log\frac{1}{35} + \frac{4}{35}\log\frac{4}{35} + \frac{10}{35}\log\frac{10}{35} + \frac{20}{35}\log\frac{20}{35}) = 1.48$$

因为 $p(y|x) = 0 \Rightarrow$

$$H(Y|X) = 0 \Rightarrow H(X,Y) = H(X) = \frac{93}{16}$$

$$H(X|Y) = H(X,Y) - H(Y) = 4.33$$

2.

3. $I(X;Y) < I(X;Y|Z)$ 不是恒等式，设 $X, Y \sim B(\frac{1}{2})$ 且 X 与 Y 相互独立，Z 是 X 与 Y 的亦或。则 $I(X;Y) = 0, H(X|Z) - H(X|Y,Z) = 1 - 0 = 1 \Rightarrow I(X;Y|Z) = 1 > I(X;Y)$

   $I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) \geq 0 \Rightarrow H(X|Y) \leq H(X)$

   若取 $Y = X, H(X|Y=y) = 0 \leq H(X)$ 又设 X, Y 的联合分布如下表所示：

X	1	1	0	0
Y	0	1	1	0
概率	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

   $H(X) = -\frac{3}{5}\log\frac{3}{5} - \frac{2}{5}\log\frac{2}{5} = 0.97$ $H(X|Y=1) = 1 > H(X)$ 因此 $H(X|Y=y) \leq H(X)$ 不是恒等式。

4. (a) $H(X,Y|Z) = H(X|Z) + H(Y|X,Z) \geq H(X|Z)$; 等式成立当且仅当 $H(Y|X,Z) = 0$，即 $Y = f(X,Z)$

(b) 由互信息的链式法则 $I(X,Y;Z)=I(X;Z)+I(Y;Z|X)\geq I(X;Z)$，等式成立当且仅当 $I(Y;Z|X)=0$，即 Y,Z 关于 X 条件独立。

(c) $H(X,Y,Z)-H(X,Y)=H(Z|X,Y)=H(Z|X)-I(Z;Y|X)\leq H(Z|X)=H(X,Z)-H(X)$，等式成立当且仅当 $I(Y;Z|X)=0$，即 Y,Z 关于 X 条件独立。

(d) 不等式左端减右端得:

$$I(X;Z|Y)-[I(Z;Y|X)-I(Z;Y)+I(X;Z)]=H(Z|Y)-H(Z|Y,X)$$
$$-(H(Z|X)-H(Z|X,Y))+(H(Z)-H(Z|Y))-(H(Z)-H(Z|X))=0$$

5.

$$\begin{aligned}D(p_2||p_1)=&-\frac{1}{2}\log(1-\rho^2)\\ D(p_1||p_2)=&\frac{1}{2}\log(1-\rho^2)+\frac{1}{2}\log e[\frac{2\rho^2}{1-\rho^2}]\end{aligned}$$

$D(p||q)=D(q||p)$ 的例子：$p\sim B(\frac{1}{4}),q\sim B(\frac{3}{4})$

6.

$$\begin{aligned}\text{RHS}=&\sum_{x\in\mathcal{X}}P_X(x)\sum_{y\in\mathcal{Y}}P_{Y|X=x}(y)\log\frac{P_{Y|X=x}(y)}{P_{Y|X=x_0}(y)}-\sum_{y\in\mathcal{Y}}P_Y(y)\log\frac{P_Y(y)}{P_{Y|X=x_0}(y)}\\ =&\sum_{x\in\mathcal{X}}P_X(x)\sum_{y\in\mathcal{Y}}P_{Y|X=x}(y)\log P_{Y|X=x}(y)-\sum_{y\in\mathcal{Y}}P_Y(y)\log P_Y(y)\\ =&H(Y)-H(Y|X)\\ =&I(X;Y)\end{aligned}$$

7. (a)

(b) 当 $0\leq x\leq d,\log\frac{1}{d}\leq-\log p(x)$，所以

$$\int_0^d p(x)dx\log\frac{1}{d}\leq-\int_0^\infty p(x)\log p(x)dx \tag{1}$$

(c) from (a)

8. (a) $H(Z|X)=E_X[H(Z|X=x)]=E_X[H(Y|X=x)]=H(Y|X)$, 当 X 与 Y 独立时，$H(Y)=H(Y|X)=H(Z|X)\leq H(Z)$, 由 X 和 Y 的对称性可得:$H(X)\leq H(Z)$

$Y \backslash X$	0	1
0	0.1	0.4
1	0.4	0.1

表 1: X,Y 的联合概率分布

(b) X,Y 的联合概率分布如表 1所示。

可以求出 $H(X)=H(Y)=1, Z\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0.1 & 0.8 & 0.1\end{pmatrix}, H(Z)=0.92$

(c) $X+Y$ 可看作 $f(X,Y)$，因此 $H(Z)\le H(X,Y)\le H(X)+H(Y)$。$H(Z)=H(X)+H(Y)$ 的必要条件为 X 与 Y 独立，$H(Z)=H(X,Y)$ 的条件是 (X,Y) 是 Z 的函数，当这两点同时满足时，$H(Z)=H(X)+H(Y)$。

9. 前三条容易验证，对于第四条，

$$\begin{aligned}
\rho(x,y)+\rho(y,z) =& H(X|Y)+H(Y|X)+H(Y|Z)+H(Z|Y)\\
=& 2(H(X,Y)+H(Y,Z)-H(Y))-H(X)-H(Z), \text{由 4.(c)}\\
\geq& 2H(X,Z)-H(X)-H(Z)\\
=& H(X|Z)+H(Z|X)\\
=& \rho(x,z)
\end{aligned}$$

10. 当 $\rho=-1$ 或 $+1$ 时，$X=aY$,a 是常数，符号与 ρ 相同。此时 $I(X;Y)=h(X)$

11. 使用 Lagrange 乘子法，可求出 $p_i=\frac{P_e}{m-1}$. 此时 $H(P)=-(1-P_e)\log(1-P_e)-P_e\log\frac{P_e}{m-1}$。由 Fano 不等式 $H(P)\le H(P_e)+P_e\log(m-1)$，达到 Fano 不等式给出的 $H(P)$ 的最大值。