清华大学
现代信号处理
2017 年秋季学期

作业 2

赵丰 2018 年 4 月 7 日

2.1. 最常用的随机信号均值估计器是：$\hat{\mu}_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)$。证明，如果 $x(n)$ 不是白噪声，估计器的方差为

$$\mathrm{Var}(\hat{\mu}_x) = \frac{1}{N}\sum_{l=-N}^{N}(1-\frac{|l|}{N})c_x(l) \tag{1}$$

这里 $c_x(l)$ 是 $x(n)$ 的协方差函数。

证明. 设 $y(i) = x(i) - \mathbb{E}[x(i)]$，则 $y(i)$ 是零均值的随机变量, 且有 $\mathrm{Var}(\hat{\mu}_x) = \mathrm{Var}(\hat{\mu}_y), c_x(l) = c_y(l)$，因此我们只需证明：

$$\mathrm{Var}(\hat{\mu}_y) = \frac{1}{N}\sum_{l=-N}^{N}(1-\frac{|l|}{N})c_y(l) \tag{2}$$

由定义

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\hat{\mu}_y) =& E\{(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} y(n))^2\} && (3)\\
=& \frac{1}{N^2}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} E(y(n)y(m)) && (4)\\
=& \frac{1}{N^2}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} c_y(n-m), \text{设 } l = n-m && (5)\\
=& \frac{1}{N^2}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{l=-m}^{N-1-m} c_y(l) && (6)
\end{aligned}$$

对于给定的 l, 讨论 m 所有可能取值的个数为满足如下两个不等式约束的所有整数：

$$\begin{cases} -l \le m \le & N-1-l \\ 0 \le m \le & N-1 \end{cases} \tag{7}$$

分 l 是否大于零讨论：若 $l \geq 0$, 则有 $0 \leq m \leq N-1-l$, 共有 $N-l$ 中取值; 若 $l<0$, 则有 $-l \leq m \leq N-1$, 共有 $N+l$ 种取值，综合来看对固定的 l,m 共有 $N-|l|$ 种取值，又因为 $-(N-1) \leq l \leq N-1$, 所以我们把式(6)交换求和次序先对 l 求和再对 m 求和可以得到

$$\operatorname{Var}(\hat{\mu}_y)=\frac{1}{N^2}\sum_{l=-(N-1)}^{N-1}(N-|l|)c_y(l) \tag{8}$$

上式整理后即得式(1)。 □

2.2. 通过观察序列 $x(n)=s(n,\theta)+w(n), n=0,1,\ldots,N-1, w(n)\sim N(0,\sigma^2)$ 是高斯白噪声，$s(n,\theta)$ 是 θ 的函数并可导，证明 θ 的无偏估计器 $\hat{\theta}$ 满足：

$$\operatorname{Var}[\hat{\theta}] \geq \frac{\sigma^2}{\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{\partial s(n,\theta)}{\partial\theta}\right)^2} \tag{9}$$

证明. 利用克拉美罗界的性质，只需求解参数 θ 的 Fisher 信息。由 Fisher 信息的公式

$$I(\theta)=-E\left(\frac{\partial^2\log(p(\boldsymbol{x},\theta))}{\partial\theta^2}\right) \tag{10}$$

首先求随机变量 X 的概率密度函数, 是均值为 $s(n,\theta)$, 方差为 σ^2 的高斯分布的概率密度函数的乘积，因此其对数似然函数为：

$$\log(p(\boldsymbol{x},\theta))=-\frac{N}{2}\log(2\pi\sigma^2)-\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(x_n-s(n,\theta))^2}{2\sigma^2} \tag{11}$$

因此

$$\begin{aligned} I(\theta)=&\frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}\mathbb{E}\left[\left(s(n,\theta)-x_n\right)\frac{\partial^2 s(n,\theta)}{\partial\theta^2}+\left(\frac{\partial s(n,\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right] && (12)\\ =&\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{\partial s(n,\theta)}{\partial\theta}\right)^2 && (13)\end{aligned}$$

最后我们得到

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(\hat{\theta})\geq&\frac{1}{I(\theta)} && (14)\\ =&\frac{\sigma^2}{\left(\frac{\partial s(n,\theta)}{\partial\theta}\right)^2} && (15)\end{aligned}$$

□

2.3. 设一组观测值

$x(n) = A\cos(2\pi f_0 n + \varphi) + w(n), n = 0, 1, \ldots, N-1, 0 < f_0 < \frac{1}{2}$，其中 $w(n) \sim N(0, \sigma^2)$ 是高斯白噪声，A 和 φ 已知，通过这组观测值估计确定量 f_0，证明：估计值 $\hat{f}_0$ 的 Cramer-Rao 下界是：

$$\mathrm{Var}[\hat{f}_0] \geq \frac{\sigma^2}{A^2 \sum_{n=0}^{N-1} [2\pi n \sin(2\pi f_0 n + \varphi)]^2} \tag{16}$$

证明. 使用(9)式的结论，这里 $\theta = f_0, s(\theta, n) = A\cos(2\pi\theta n + \varphi)$, 即可求出。 □

2.4. 设观测序列为 $x(n), n = 0, 1, \ldots, N-1$，每个样本是独立同分布的，满足如下概率密度函数，

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha^2} x \exp(-\frac{x^2}{2\alpha^2}) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

设 $\alpha > 0$，求 α 的 MLE。

解. $x(1), \ldots, x(N-1)$ 的对数似然函数为：

$$\log(p(\boldsymbol{x}, \alpha)) = -2N\log\alpha + \sum_{n=0}^{N-1} \left(\log x(i) - \frac{x(i)^2}{2\alpha^2}\right) \tag{17}$$

令 $\frac{\partial \log(p(\boldsymbol{x}, \alpha))}{\partial \alpha} = 0$，解得 α 的 MLE 为

$$\hat{\alpha} = \sqrt{\frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} x(i)^2} \tag{18}$$

2.5. 设观测样本为 $x(n), n = 0, 1, \ldots, N-1$，每个样本是独立同分布的，且 $x(n)$ 仅取 1 和 0 两个值，$\Pr(x(n) = 1) = p$ 未知，通过观测样本求 p 的 MLE。

解. $x(1), \ldots, x(N-1)$ 的对数似然函数为：

$$\log(\Pr(\boldsymbol{x}, p)) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(x(i)\log p + (1 - x(i))\log(1-p)\right) \tag{19}$$

令 $\frac{\partial \log(\Pr(\boldsymbol{x},p))}{\partial p}=0$，解得 p 的 MLE 为

$$\hat{p}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(i) \tag{20}$$

2.6. 设观测序列为 $x(n)=\theta+w(n), n=0,1,\ldots,N-1$. 其中 $w(n)\sim N(0,\sigma_w^2)$ 是高斯白噪声，设 θ 是一个随机参数，服从均匀分布，其概率密度函数为

$$p(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta_2-\theta_1} & \theta_1\le\theta\le\theta_2\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

求 θ 的 MAP 估计器。

解. MAP Bayes 估计器是下面极值问题的解：

$$\hat{\theta}=\underset{\theta}{\operatorname{argmax}}\left(\log(p(x|\theta))+\log(p(\theta))\right) \tag{21}$$

去掉无关的常数后有

$$\log(p(x|\theta))+\log(p(\theta))=\log p(\theta)-\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(x(n)-\theta)^2}{2\sigma_w^2} \tag{22}$$

因为 $\theta>\theta_2$ 或 $\theta<\theta_1$ 时函数为 $-\infty$，故只需考虑 $\hat{\theta}\in[\theta_1,\theta_2]$ 设 $\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)$ 解得 MAP 估计器为

$$\hat{\theta}=\begin{cases}\theta_1, & \bar{x}<\theta_1\\ \bar{x}, & \theta_1\le\bar{x}\le\theta_2\\ \theta_2, & \bar{x}>\theta_2\end{cases} \tag{23}$$