

抛物型方程实验

数 33 赵丰

学号：2013012178

May 1, 2017

1 题目

抛物型方程的差分方法实验题

考虑以下反应扩散问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{\varepsilon}u(1-u^2), & (x, y) \in \Omega, \quad t > 0 \\ u|_{\partial\Omega} = -1, \\ u|_{t=0} = \begin{cases} 1, & x \in \tilde{\Omega}, \\ -1, & \Omega \setminus \tilde{\Omega}. \end{cases} \end{cases}$$

其中 $0 < \varepsilon \ll 1$,

$$\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1],$$

$$\tilde{\Omega} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\},$$

且 $0 < a < 1, 0 < b < 1$ 。试构造一种无条件稳定的（当然稳定性也不依赖于 ε ）二阶格式，并取不同的 ε, a, b 和充分小的步长 h 计算，看看结果有什么不同。

提示：常微分方程

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\varepsilon}u(1-u^2)$$

可以得到精确解的解析表达式。

2 数值格式

结合算子分裂和交替方向隐式的格式构造如下具有二阶精度且无条件稳定的差分格式:

$$\begin{aligned} u_{jk}^{n+1/3} - u_{jk}^n &= \frac{\lambda}{2}(\delta_x^2 u_{jk}^{n+1/3} + \delta_y^2 u_{jk}^n) \\ u_{jk}^{n+2/3} - u_{jk}^{1/3+n} &= \frac{\lambda}{2}(\delta_x^2 u_{jk}^{n+1/3} + \delta_y^2 u_{jk}^{n+2/3}) \\ \ln \left| \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \right| \bigg|_{u_{jk}^{n+1}}^{u_{jk}^{n+2/3}} &= \frac{\tau}{\epsilon} \end{aligned}$$

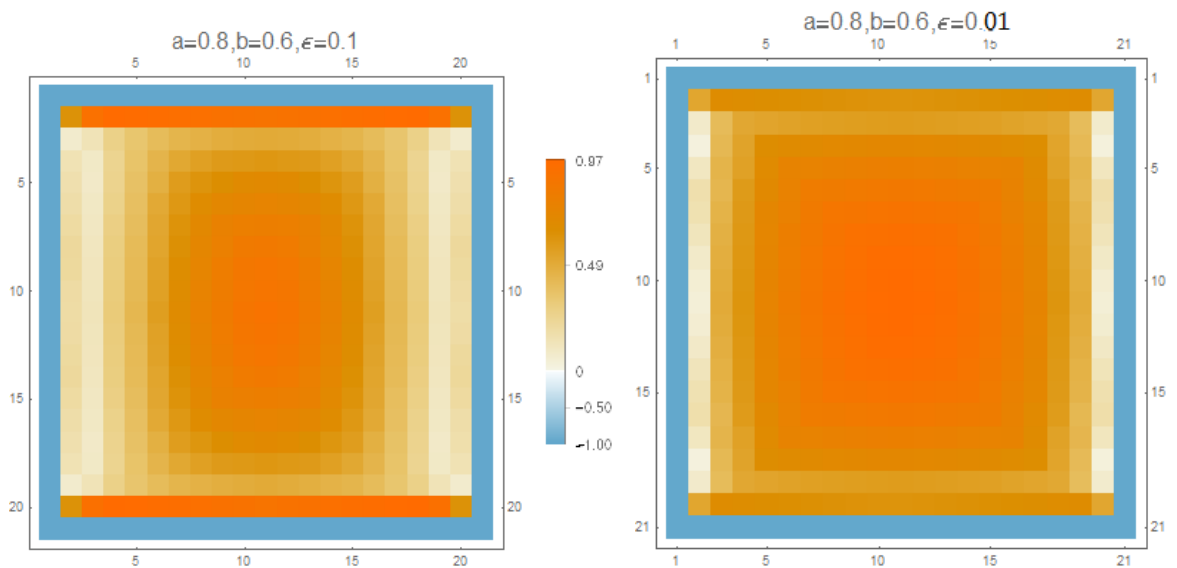
其中采用解析解处理 ODE 可以保证整个格式二阶精度且无条件稳定。以下是采用如上数值格式的 Mathematica 代码, 通过函数式编程使得代码量大大减少

```

1 (* Initialization *)
2 a = 0.8;
3 b = 0.6;
4 \[Epsilon] = 0.1;
5 \[Tau] = 0.02;
6 h = 0.1;
7 \[Lambda] = \[Tau]/h^2;
8 f[x_] := Log[Abs[x/Sqrt[1 - x^2]]]
9 u0 = Table[
10   If[(x/a)^2 + (y/b)^2 <= 1, 1, -1], {y, -1, 1, h}, {x, -1 + h,
11     1 - h, h}];
12 L = Length[u0] - 2;
13 m = SparseArray[{Band[{1, 2}] -> -\[Lambda]/2,
14   Band[{1, 1}] -> 1 + \[Lambda], Band[{2, 1}] -> -\[Lambda]/2}, L];
15 (* Iteration from tn to t(n+1) *)
16 For[i = 1, i*\[Tau] < 1, i++,
17   RHS = \[Lambda]/2*Differences[u0, {2, 0}] + u0[[2 ;; (L + 1)]];
18   un13 = Transpose[LinearSolve[m, #] & /@ RHS];
19   PrependTo[un13, Table[-1, {i, L}]];
20   AppendTo[un13, Table[-1, {i, L}]];
21   un13RHS = \[Lambda]/2*Differences[un13, {2, 0}] +
22     un13[[2 ;; (L + 1)]];
23   un23 = Transpose[LinearSolve[m, #] & /@ un13RHS];
24   un33 = Sqrt /@ (1 -
25     1/(1 + (Exp /@ (\[Tau]/\[Epsilon] + f /@ un23))^2));
26   PrependTo[un33, Table[-1, {i, L}]];
27   u0 = Append[un33, Table[-1, {i, L}]];
28 ]

```

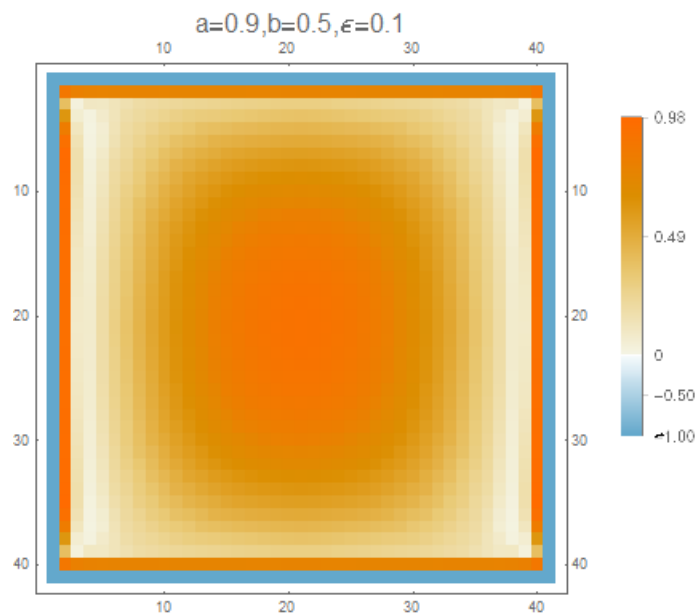
下图是在 $t=1$ 时 $[-1, 1] \times [-1, 1]$ 区域内 $u(x, y)$ 的取值:



由上图可以看出

- 短轴 ($b < a, y$) 方向扩散的更快, 使得 y 方向更快的接近 1;
- ϵ 越小反应速率越快, 使得在相同时间 ($t=1$) 时, 右图大部分区域更接近 1;
- 由于边界条件恒取-1, 所以在扩散和边界之间会有突变, 但 x, y 方向边界层特性不同, 短轴方向几乎是从-1 到 1 的突变而长轴方向有 0 的过渡。

如果进一步加密空间网格, 则可以观察到如下图所示的现象:



边界-1 的外层被接近 1 的一层包围, 内部是正常的扩散衰减现象。