

信号检测理论

赵丰

2018 年 4 月 6 日

1. Bayes 准则

定义似然比为 $\lambda(z) \triangleq \frac{p(z|H_1)}{p(z|H_0)}$

$$\lambda(z) \underset{z \in \mathcal{Z}_0}{\overset{z \in \mathcal{Z}_1}{\gtrless}} \lambda_B(z) \triangleq \frac{P(H_0)(C_{10} - C_{00})}{P(H_1)(C_{01} - C_{11})} \quad (1)$$

其中 $C_{ij} = P(D_i, H_j)$

2. 极大极小准则 (先验概率 $\xi = P(H_0)$ 未知), 满足极大极小化方程:

$$C_{00}P(D_0|H_0) + C_{10}P(D_1|H_0) = C_{01}P(D_0|H_1) + C_{11}P(D_1|H_1) \quad (2)$$

解出 ξ_{MM} , 根据

$$\lambda(z) \underset{z \in \mathcal{Z}_0}{\overset{z \in \mathcal{Z}_1}{\gtrless}} \lambda_{MM} \triangleq \frac{\xi_{MM}(C_{10} - C_{00})}{(1 - \xi_{MM})(C_{01} - C_{11})} \quad (3)$$

设计接收机。

3. Neyman Pearson 准则: 给定 $P_F = \alpha$, 使得 P_D 最大。

$$\lambda(z) \underset{z \in \mathcal{Z}_0}{\overset{z \in \mathcal{Z}_1}{\gtrless}} \lambda_{NP} \quad (4)$$

其中 λ_{NP} 满足方程

$$P_F = \int_{z \in \mathcal{Z}_1} p(z|H_0)dz = \alpha \quad (5)$$

4. ROC 曲线: 将由 Neyman Pearson 准则计算出的 (P_F, P_D) 曲线。

5. 在理想白高斯信道中信号的检测

考虑高斯带限白噪声, 即

$$S_N(f) = \begin{cases} 0 & \text{if } |f| > B \\ \frac{N_0}{2} & \text{if } |f| < B \end{cases} \quad (6)$$

可以证明 $S_N(f)$ 对应的相关函数是 $R_N(\tau) = \frac{N_0 \sin(2B\pi\tau)}{2\pi\tau}$

证明. 首先已知 $\mathcal{F}(\text{sinc}(t)) = \text{rect}(f)$ 其中

$$\text{rect}(f) = \begin{cases} 0 & \text{if } |f| > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{if } |f| = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{if } |f| < \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

根据 Fourier 变换的性质: 若 $\mathcal{F}f(x) = \hat{f}(\lambda)$, 则 $\mathcal{F}f(ax) = \frac{1}{a}\hat{f}(\frac{\lambda}{a})$ 因此 $\mathcal{F}(\text{sinc}(2Bt)) = \frac{1}{2B} \text{rect}(\frac{f}{2B})$, 等式两边同时乘以 N_0B 得 $\mathcal{F}(N_0B \text{sinc}(2Bt)) = \frac{N_0}{2} \text{rect}(\frac{f}{2B})$ \square

由相关函数的性质 $R_N(0) = N_0B$ 为高斯分布的方差。

可以证明, 若 $n(t)$ 是高斯带限白噪声随机过程, 在 $[0, T]$ 时间内, 关于 $z_i(t) = s_i(t) + n(t), i = 0, 1$ 的信号检测似然函数为:

$$\lambda(z(t)) = \exp \left(\frac{2}{N_0} \int_0^T (s_1(t) - s_0(t))z(t)dt - \frac{1}{N_0} \left(\int_0^T (s_1^2(t) - s_0^2(t))dt \right) \right) \quad (7)$$

接收机工作性能

设随机变量 $v = \int_0^T [s_1(t) - s_0(t)]z(t)dt$, 根据最小平均错误概率准则

$$v \underset{z \in Z_0}{\overset{z \in Z_1}{\gtrless}} v_T \quad (8)$$

其中 $v_T = \frac{N_0}{2} \ln \mathcal{L}_T + \frac{1}{2}(E_1 - E_0)$, 而 $\mathcal{L}_T = \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$, $E_i = \int_0^T s_i^2(t)dt$ 为已知量。为计算虚警概率 P_F 和漏警概率 P_M , 首先求 v 的分布。设信号平均能量 $E = \frac{1}{2}(E_0 + E_1)$, 互相关系数 $\rho = \frac{1}{E} \int_0^T s_1(t)s_0(t)dt$ 。因

为高斯过程的积分也是高斯分布,

$$\begin{aligned}
v|H_0 &= \int_0^T [s_1(t) - s_0(t)]s_0(t)dt + \int_0^T [s_1(t) - s_0(t)]n(t)dt \\
&\Rightarrow \mathbb{E}[v|H_0] = \rho E - E_0 \\
&\Rightarrow \text{Var}[v|H_0] = \frac{N_0}{2} \int_0^T (s_1(t) - s_0(t))^2 dt = N_0 E(1 - \rho)
\end{aligned}$$

同理可求出

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[v|H_1] &= E_1 - \rho E \\
\text{Var}[v|H_1] &= N_0 E(1 - \rho)
\end{aligned}$$

因此虚警概率 P_F 为

$$\begin{aligned}
P_F &= \int_{v_T}^{\infty} p(v|H_0)dv \\
&= 1 - \Phi(y_T)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_T &= \frac{v_T - (\rho E - E_0)}{\sqrt{N_0 E(1 - \rho)}} \\
&= \frac{\frac{N_0}{2} \mathcal{L}_T + E(1 - \rho)}{\sqrt{N_0 E(1 - \rho)}}
\end{aligned}$$

漏警概率 P_M 为

$$\begin{aligned}
P_M &= \int_{-\infty}^{v_T} p(v|H_1)dv \\
&= \Phi(y'_T)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y'_T &= \frac{v_T - (E_1 - \rho E)}{\sqrt{N_0 E(1 - \rho)}} \\
&= \frac{\frac{N_0}{2} \mathcal{L}_T - E(1 - \rho)}{\sqrt{N_0 E(1 - \rho)}}
\end{aligned}$$

在等先验概率的情况下, $\mathcal{L}_T = 0 \Rightarrow y_T = y'_T \Rightarrow$

$$P_F = P_M = \Phi\left(-\sqrt{\frac{E(1 - \rho)}{N_0}}\right) \quad (9)$$

当信噪比 $\frac{E}{N_0}$ 一定时, $\rho \downarrow \Rightarrow P_F \downarrow$

雷达系统检测是否有信号, 其中 $s_0(t) = 0 \Rightarrow \rho = 0, E_0 = 0$, 采用 Neyman-Pearson 准则, 门限 v_{NP} 根据下式确定:

$$P_F = 1 - \Phi\left(\frac{v_{NP}}{\sqrt{N_0 E_1/2}}\right) = \alpha$$

求出 v_{NP} 后, 代入计算 P_D ,

$$P_D = 1 - P_M = 1 - \Phi\left(\frac{v_{NP} - E_1}{\sqrt{N_0 E_1/2}}\right)$$

于是可作出 ROC 曲线。当信噪比 $\frac{E_1}{N_0}$ 增加时, 对相同的 α, P_D 增大, ROC 曲线向左上方倾斜。

6. 多元假设检验

考虑 “M 元择一” 的情况, 平均代价可计算出为:

$$\bar{R} = \sum_{i=0}^{M-1} C_{ii} P(H_i) + \sum_{i=0}^{M-1} \int_{\mathcal{Z}_i} I_i(z) dz$$

其中

$$I_i(z) = \sum_{j=0, j \neq i}^{M-1} (C_{ij} - C_{jj}) P(H_j) p(z|H_j)$$

使得 \bar{R} 最小的空间划分方式为:

$$\mathcal{Z}_i = \{z | I_i(z) = \min\{I_k(z) | k = 0, \dots, M-1\}\}$$

最小平均错误准则取 $C_{ij} = 1 - \delta_{ij}$, 此时 $I_i(z)$ 为

$$I_i(z) = \sum_{j=0, j \neq i}^{M-1} P(H_j) p(z|H_j) \quad (10)$$

$$= p(z) - p(z) P(H_i|z) \quad (11)$$

故 $I_i(z)$ 取最小值等效于 $P(H_i|z)$ 取最大值 (MAP 准则)。

在等先验概率的情况下 $p(z)P(H_i|z) = p(z|H_i)P$, 可以用最大似然准则。

举例: 考虑 H_i : 接收信号 $\sim N(m_i, \sigma^2)$, 其中 $m_1 = 1, m_2 = 2, m_3 = -1$ 。若考虑等先验概率下的最小平均错误概率准则, 且有 n 次观测样本 z_1, \dots, z_n 。

首先可以知道 $z = \frac{1}{n}(z_1 + \cdots + z_n)$ 是充分统计量, 分布为 $N(m_i, \frac{1}{n}\sigma^2)$ 。根据最大似然准则, 分别作出三种假设下 z 的概率密度函数曲线如图 1 所示。由图可见, 三条概率密度函数曲线将实轴分为三段 $(-\infty, 0)$, $(0, \frac{3}{2})$, $(\frac{3}{2}, \infty)$, 分别记为 I_3, I_1, I_2 。每段中分别有一条曲线达到最高。当样本值落在区间 I_i 时判定假设 H_i 成立。

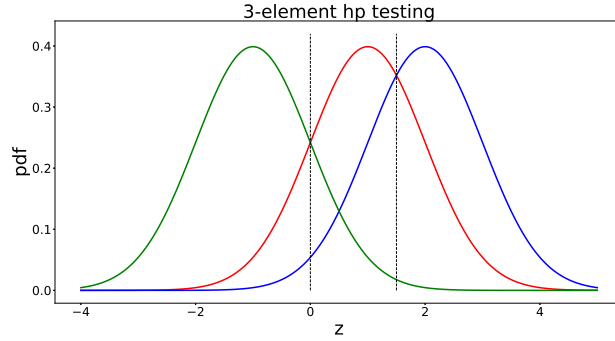


图 1: 三元假设问题

7. 复合假设检验：参量是随机变量

- (a) 若参量的概率分布已知, 可将条件似然函数对参量的分布取平均, 按简单假设检验求解。比如假设

$$H_0 : s_0(t) = 0$$

$$H_1 : s_1(t) = A, \text{ where } A \sim N(0, \sigma_A^2)$$

信道是高斯信道, 观测 $z(t) = s(t) + n(t)$, $n(t) \sim N(0, \sigma_N^2)$, 且 A 与 $n(t)$ 相互独立。设只有 1 次观测, $z|H_0 \sim N(0, \sigma_N^2)$ 而

$$p(z|H_1) = \int_{\mathbb{R}} p(z|H_1, A)p(A)dA = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_N^2 + \sigma_A^2)}} \exp\left(-\frac{z^2}{2(\sigma_N^2 + \sigma_A^2)}\right)$$

$\Rightarrow z|H_1 \sim N(0, \sigma_N^2 + \sigma_A^2)$ 再通过似然比检验得到双边检验的形式:

$$z^2 \underset{z \in Z_0}{\overset{z \in Z_1}{\gtrless}} \frac{2\sigma_N^2(\sigma_A^2 + \sigma_N^2)}{\sigma_A^2} \left[\ln \lambda_B + \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{\sigma_A^2}{\sigma_N^2}\right) \right]$$

(b) 随机相位信号的检测

$H_0 : z(t) = n(t), 0 \leq t \leq T, n(t)$ 是均值为 0, 谱密度为 $\frac{N_0}{2}$ 的高斯白噪声

$H_1 : z(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sin(\omega_c t + \theta) + n(t)$, where :

$A \sim N(0, \sigma_A^2), \theta$ 是随机变量, E_s 是该信号的能量

若 θ 给定, 假定 T 是 $\frac{2\pi}{\omega_c}$ 的整数倍, 可求出条件似然比为:

$$\lambda(z(t)|\theta) = \exp \left(\frac{2}{N_0} \sqrt{\frac{2E_s}{T}} (y_c \sin \theta + y_s \cos \theta) - \frac{E_s}{N_0} \right) \quad (12)$$

其中:

$$y_c = \int_0^T z(t) \cos \omega_c t dt \quad (13)$$

$$y_s = \int_0^T z(t) \sin \omega_c t dt \quad (14)$$

$$(15)$$

进一步假定随机相位 θ 在 $[0, 2\pi]$ 区间上是均匀分布 (最不利分布), 则平均似然比为

$$\lambda(z(t)) = \mathbb{E}_\theta [\lambda(z(t)|\theta)] \quad (16)$$

$$= \exp(-\frac{E_s}{N_0}) I_0 \left(\frac{2}{N_0} \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sqrt{y_c^2 + y_s^2} \right) \quad (17)$$

其中

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(x \cos \phi) d\phi$$

称为零阶修正的 Bessel 函数。设 $y = \sqrt{y_c^2 + y_s^2}$, 由似然比判决规则可以得到

$$y \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} y_T$$

可以计算出 y 的概率密度函数为:

$$p(y|H_1) = \frac{y}{\sigma^2} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[y^2 + \frac{E_s T}{2} \right] \right) \cdot I_0 \left(\frac{y}{\sigma^2} \sqrt{\frac{E_s T}{2}} \right) \quad (18)$$

$$p(y|H_0) = \frac{y}{\sigma^2} \exp \left(-\frac{y^2}{2\sigma^2} \right) \quad (19)$$

其中 $y > 0, \sigma^2 = \frac{N_0 T}{4}, y|H_0$ 服从 Rayleigh 分布, 是假设 H_1 下信号能量为 0 的特殊情况。

从而求出虚警概率 P_F 和检测概率 P_D :

$$P_F = \int_{y_T}^{\infty} p(y|H_0) dy = \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{y_T^2}{\sigma^2}\right) \quad (20)$$

$$P_D = \int_{y_T}^{\infty} p(y|H_1) dy = Q\left(\frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{E_s T}{2}}, \frac{y_T}{\sigma}\right) \quad (21)$$

其中

$$Q(a, b) = \int_b^{\infty} u \exp\left(-\frac{u^2 + a^2}{2}\right) I_0(au) du$$

称为 Marcum 函数。

采用 Neyman-Pearson 准则, 由 $P_F = \alpha$ 得到 $P_D = Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}, \sqrt{-2 \ln \alpha}\right)$ 。信噪比 $r = \frac{2E_s}{N_0}$, 于是可作出接收机的 ROC 曲线以及当 α 一定时检测概率与信噪比的关系曲线如图 2 所示。

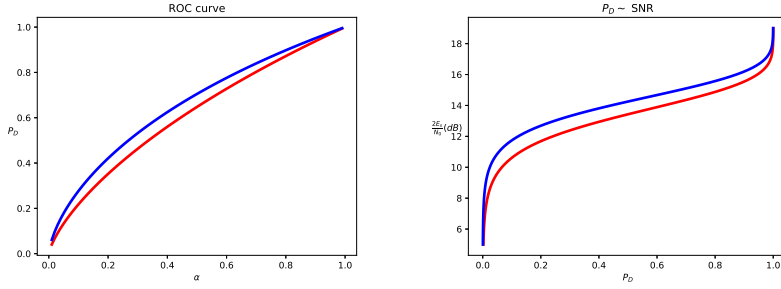


图 2

(c) 随机幅度和相位信号的检测

$$H_0 : z(t) = n(t), 0 \leq t \leq T$$

$$H_1 : z(t) = A \sin(\omega_c t + \theta) + n(t), 0 \leq t \leq T$$

A 服从 Rayleigh 分布:

$$p(A) = \frac{A}{\sigma_A^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_A^2}\right), A \geq 0$$

此时似然比为

$$\lambda(z(t)) = \int_0^{\infty} \lambda(z(t)|A) p(A) dA$$

其中 $\lambda(z(t)|A)$ 可由 (17) 得到为

$$\lambda(z(t)|A) = \exp\left(-\frac{A^2 T}{2N_0}\right) \cdot I_0\left(\frac{2}{N_0} Ay\right)$$

利用 Marcum 函数的性质可得

$$\lambda(z(t)) = \frac{N_0}{\sigma_A^2 T + N_0} \exp\left(\frac{2\sigma_A^2}{N_0(\sigma_A^2 T + N_0)} y^2\right)$$

再根据似然比检验的准则得到最佳接收机。

在随机相位、随机幅度的情况下，虚警概率 P_F 的计算与之前相同，而检测概率 P_D 则为(21)对 $p(A)$ 的平均（将 $E_s = \frac{A^2 T}{2}$ 代入该式）。可得：

$$P_D = \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{y_T}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{\bar{E}_s}{N_0}\right)^{-1}\right) \quad (22)$$

其中 $\bar{E}_s = \sigma_A^2 T$ 表示平均能量， $\bar{r} = \frac{\bar{E}_s}{N_0}$ 表示平均信噪比。若令 $P_F = \alpha$, 则 $P_D = \alpha^{1/(1+\bar{r})}$

8. 色高斯信道

考虑一般的情形，噪声仍为高斯过程，但相关函数不再是 $\delta\tau$ 而是一般的 $R_n(t_1, t_2)$ ，可能是时变的。处理这一问题可以用 Karhunen-Loeve 正交展开或者白化滤波器的方法。不同于白高斯信道中平均错误概率只与信号能量有关，在一色的高斯信道中与信号波形有关。

(a) 正交展开

把 $z(t)$ 在基函数 $\{g_k(t)\}$ 上展开：

$$z(t) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k g_k(t), \text{ where } z_k = \int_0^T z(t) g_k(t) dt \quad (23)$$

展开的目的是希望选择基函数使得展开系数 $\{z_k\}$ 相互独立，因为 z_k 是高斯变量，所以只需使 $\{z_k\}$ 互不相关即可，其协方差函数满足：

$$\begin{aligned} \text{Cov}(z_k, z_l) &= \mathbb{E} \left[\int_0^T \int_0^T n(t_1) n(t_2) g_k(t_1) g_l(t_2) dt_1 dt_2 \right] \\ &= \int_0^T \int_0^T R_n(t_1, t_2) g_k(t_1) g_l(t_2) dt_1 dt_2 \end{aligned} \quad (24)$$

若

$$\int_0^T R_n(t_1, t_2) g_k(t_2) dt_2 = \lambda_k g_k(t_1) \quad (25)$$

且 $\{g_k(t)\}$ 是归一化的正交函数集:

$$\int_0^T g_k(t) g_l(t) dt = \delta_{kl}$$

则 $\text{Cov}(z_k, z_l) = \lambda_k \delta_{kl}$

似然比计算及判决规则: 我们以接收信号 $K-L$ 展开式的前 N 个系数来建立“等效”的观测向量: $\mathbf{z}_N = (z_1, \dots, z_N)$ 。似然比函数为

$$\lambda(\mathbf{z}_N) = \frac{\prod_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_k}} \exp\left(-\frac{(z_k - s_{1k})^2}{2\lambda_k}\right)}{\prod_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_k}} \exp\left(-\frac{(z_k - s_{0k})^2}{2\lambda_k}\right)}$$

其中

$$s_{ik} = \int_0^T s_i(t) g_k(t) dt, i = 1, 2 \quad (26)$$

是 z_k 的均值。上式取对数并整理得:

$$\ln \lambda(\mathbf{z}_N) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\lambda_k} z_k (s_{1k} - s_{0k}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{1}{\lambda_k} (s_{1k}^2 - s_{0k}^2)$$

令 $N \rightarrow \infty$ 并将(23)代入上式的第一项, (26)取一个代入上式第二项, 得到:

$$\begin{aligned} \ln \lambda(z(t)) &= \int_0^T z(t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} (s_{1k} - s_{0k}) g_k(t) dt - \frac{1}{2} \left[\int_0^T s_1(t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} s_{1k} g_k(t) dt - \int_0^T s_1(t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} s_{0k} g_k(t) dt \right] \\ &= \left[\int_0^T z(t) h_1(t) dt - \int_0^T z(t) h_0(t) dt \right] - \frac{1}{2} \left[\int_0^T s_1(t) h_1(t) dt - \int_0^T s_0(t) h_0(t) dt \right] \end{aligned}$$

其中 $h_i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} s_{ik} g_k(t)$ 根据似然比检验准则有:

$$\int_0^T z(t) h_1(t) dt - \int_0^T z(t) h_0(t) dt \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} v_T, \text{ where } v_T = \ln \lambda_T + \frac{1}{2} \left[\int_0^T s_1(t) h_1(t) dt - \int_0^T s_0(t) h_0(t) dt \right] \quad (27)$$

(b) 白化滤波器

将接收信号 $z(t)$ 通过一个滤波器 $h_w(t, \tau)$, 设输出信号为 $z_w(t)$, 则:

$$z_w(t) = \int_0^T h_w(t, \tau) z(\tau) d\tau | H_i = s_{wi}(t) + n_w(t) \quad (28)$$

其中

$$s_{wi}(t) = \int_0^T h_w(t, \tau) s_i(\tau) d\tau$$

$$n_w(t) = \int_0^T h_w(t, \tau) n(\tau) d\tau$$

若输出噪声 $n_w(t)$ 是白噪声，则可以根据(8)的判决准则设计接收机。

假设 $h_w(t, \tau)$ 可以展开为：

$$h_w(t, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k g_k(t) g_k(\tau)$$

于是可得：

$$\begin{aligned} R_{n_w}(t, \tau) &= \mathbb{E}[n_w(t) n_w(\tau)] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^T \int_0^T h_w(t, s) h_w(\tau, u) n(s) n(u) ds du \right] \\ &= \int_0^T \int_0^T h_w(t, s) h_w(\tau, u) R_n(s, u) ds du \\ &= \int_0^T \int_0^T \left[\sum_{k=1}^{\infty} h_k g_k(t) g_k(s) \right] \left[\sum_{l=1}^{\infty} h_l g_l(\tau) g_l(u) \right] R_n(s, u) ds du \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^T h_k g_k(t) g_k(s) h_l g_l(\tau) \lambda_l g_l(s) ds \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} h_k g_k(t) h_l g_l(\tau) \lambda_l \delta_{lk} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k h_k^2 g_k(t) g_k(\tau) \end{aligned}$$

另一方面

$$\delta(t - \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) g_k(\tau)$$

比较系数得：

$$h_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \Rightarrow h_w(t, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} g_k(t) g_k(\tau) \quad (29)$$

9. 练习题

(1) 试推导如下情况的似然比。

$$H_0 : z \sim N(m_0, \sigma_0^2)$$

$$H_1 : z \sim N(m_1, \sigma_1^2)$$

并求判决域和错误概率。

解.

$$\lambda(z) = \frac{p(z|H_1)}{p(z|H_0)} \quad (30)$$

$$= \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \exp\left(-\frac{(z - m_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(z - m_0)^2}{2\sigma_0^2}\right) \quad (31)$$

$$\mathcal{Z}_0 = \{z | \lambda(z) < \lambda_B\}$$

$$\mathcal{Z}_1 = \{z | \lambda(z) > \lambda_B\}$$

$$P_F = P(D_1, H_0) = \int_{z \in \mathcal{Z}_1} p(z|H_0) dz$$

$$P_M = P(D_0, H_1) = \int_{z \in \mathcal{Z}_0} p(z|H_1) dz$$

□

(2) 考虑一二元对称信道, ϵ 是交叉概率 (假定 $\epsilon < \frac{1}{2}$), 即信道输入为 0 (或 1) 时, 输出为 b (或 a) 的概率。若先验概率相等, 试导出保证平均错误概率最小的判决准则, 并求最小平均错误概率。

解. 考虑一次观测 z ,

$$H_0 : \theta = 0$$

$$H_1 : \theta = 1$$

条件概率 $z|\theta$ 已知: $p_{z|\theta=0}(a) = 1 - \epsilon, p_{z|\theta=0}(b) = \epsilon, p_{z|\theta=1}(a) = \epsilon, p_{z|\theta=1}(b) = 1 - \epsilon$ 由似然比检验, $\lambda(z) = \frac{p(z|H_1)}{p(z|H_0)} \Rightarrow \lambda(a) = \frac{\epsilon}{1-\epsilon} < 1, \lambda(b) = \frac{\epsilon}{1-\epsilon} > 1$ 因为先验概率相等, 所以 $\lambda_B = 1$, 因此判决准则为 $z = b \Rightarrow \theta = 1; z = a \Rightarrow \theta = 0$ 。平均错误概率为

$$\begin{aligned} P_{\theta,z}(0, b) + P_{\theta,z}(1, a) &= P_{\theta}(0)P_{z|\theta=0}(b) + P_{\theta}(1)P_{z|\theta=1}(a) \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

□

- (3) 请使用最小错误概率准则，设计一个在如下两种假设间作出选择的接收机（假定两种假设的先验概率相等）：

$$H_0 : z(t) = s_0(t) + n(t)$$

$$H_1 : z(t) = s_1(t) + n(t)$$

其中：信号 $s_1(t)$ 和 $s_0(t)$ 如图 3 所示：噪声 $n(t)$ 是高斯型随机变量，均值为零，谱密度为 $\frac{N_0}{2}$ 。并画出平均错误概率与 $\frac{2E}{N_0}$ 的函数关系（ E 为信号的平均能量）。

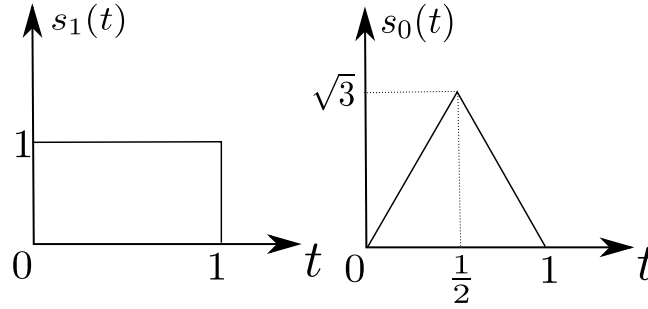


图 3: 信号 $s_1(t)$ 和 $s_0(t)$

解. 首先计算信号的能量 $E_1 = 1, E_2 = 1, \mathcal{L}_T = 1 \Rightarrow v_T = 0$ ，根据(8)式可得到最小错误概率的判决准则。 $s_1(t)$ 和 $s_2(t)$ 的互相关系数 $\rho = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。由(9)式可得到平均错误概率为

$$\bar{R} = \frac{1}{2}(P_F + P_M) = \Phi \left(-\sqrt{\frac{2E}{N_0} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)} \right)$$

平均错误概率与 $\frac{2E}{N_0}$ 的函数关系如图 4 所示

□

- (4) 已知 K 个独立的观测值

$$\begin{cases} H_1 : z_k = n_k \\ H_0 : z_k = 1 + n_k \end{cases} \quad \text{其中: } n_k \text{ 是均值为零、方差为 2 的高斯随机变量, } k = 1, 2, \dots, K.$$

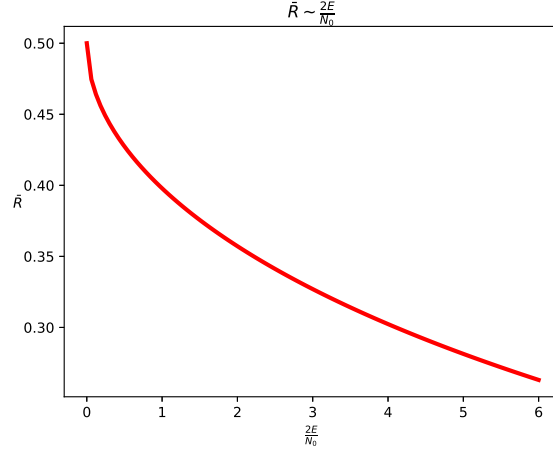


图 4

- (a) 设计似然比检验，并求 P_F 和 P_M 。
- (b) 画出 $K = 1$ 时的接收机工作特性。
- (c) 假定 $c_{00} = c_{11} = 0, c_{01} = 2, c_{10} = 1, P(H_0) = 0.7$ ，试求最小 N 值，使得 $K = N$ 时的风险不大于 $K = 1$ 时风险的 $\frac{1}{2}$ 。

解. (a) 设 $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_K]$, $\lambda(\mathbf{z}) = \frac{p(\mathbf{z}|H_1)}{p(\mathbf{z}|H_0)}$

$$\lambda(\mathbf{z}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda_B \Rightarrow z \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} \frac{1}{2} - \frac{2}{K} \ln \lambda_B$$

其中 $z = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K z_i, z|H_0 \sim N(1, \frac{2}{K}), z|H_1 \sim N(0, \frac{2}{K})$

$$\begin{aligned} P_F &= \int_{-\infty}^{\frac{1}{2} - \frac{2}{K} \ln \lambda_B} p(z|H_0) dz \\ &= \Phi \left(-\sqrt{2K} \left(\frac{1}{4} + \frac{\ln \lambda_B}{K} \right) \right) \\ P_M &= \Phi \left(-\sqrt{2K} \left(\frac{1}{4} - \frac{\ln \lambda_B}{K} \right) \right) \end{aligned}$$

- (b) 当 $K = 1$ 时，以 λ_B 作为曲线参数，作出 (P_F, P_D) 的曲线如图 5 所示。

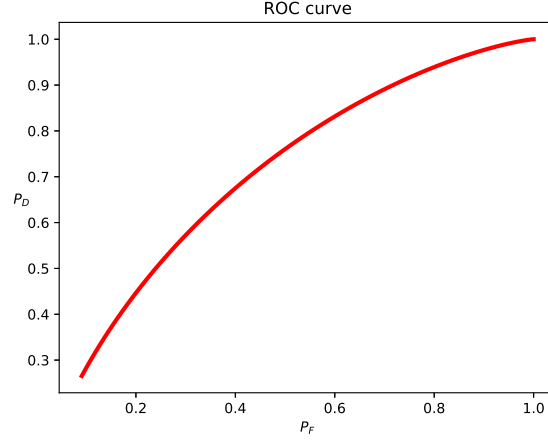


图 5

(c)

$$\begin{aligned}
 \bar{R} &= C_{01}P(D_0, H_1) + C_{10}P(D_1, H_0) \\
 &= 2P(H_1)P(D_0|H_1) + P(H_0)P(D_1|H_0) \\
 &= 0.6P_M + 0.7P_F
 \end{aligned}$$

另一方面,

$$\lambda_B = \frac{P(H_0)(C_{10} - C_{00})}{P(H_1)(C_{01} - C_{11})} = \frac{7}{6}$$

根据 (a) $\bar{R}(K=1) = 0.47, \bar{R}(K=6) = 0.25, \bar{R}(K=7) = 0.23 < \frac{1}{2}\bar{R}(K=1) \Rightarrow N=7$

□

(5) 对于二元通信系统, 其假设为:

$$\begin{cases} H_1: z(t) = A \cos \omega_1 t + B \cos(\omega_2 t + \phi) + n(t) \\ H_0: z(t) = B \cos(\omega_2 t + \phi) + n(t) \end{cases} \quad \text{其中: } \begin{matrix} 0 \leq t \leq T \\ A, B, \omega_1, \omega_2, \phi \text{ are known constant} \end{matrix}$$

假定: $\int_0^T \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t dt = \int_0^T \cos \omega_1 t \sin \omega_2 t dt = 0$, $n(t)$ 是谱密度为 $\frac{N_0}{2}$ 的高斯白噪声。试画出其最佳接收机模型, 并分析其误码率是否和 $A \cos \omega_1 t$ 及 $B \cos(\omega_2 t + \phi)$ 有关。计算误码率以证明你的分析结论。

解. 假定等先验概率, 由(9)得

$$P_e = \Phi\left(-\sqrt{\frac{E(1-\rho)}{N_0}}\right)$$

而

$$\begin{aligned} E(1-\rho) &= \frac{1}{2} \int_0^T (s_1(t) - s_0(t))^2 dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T (A \cos \omega_1 t)^2 dt \end{aligned}$$

因此误码率与 $A \cos \omega_1 t$ 有关而和 $B \cos(\omega_2 t + \phi)$ 无关。 \square