

# 信号检测理论

赵丰

2018 年 6 月 17 日

1. Bayes 准则符号约定:  $P_F = P(D_1|H_0)$ ,  $P_M = P(D_0|H_1)$ ,  $P_D = 1 - P_M = P(D_1|H_1)$ 。  $P_F, P_M, P_D$  分别称为虚警概率、漏警概率和检测概率。

平均风险:

$$\begin{aligned}\bar{R} &= P(D_0, H_0)C_{00} + P(D_1, H_1)C_{11} + P(D_0, H_1)C_{01} + P(D_1, H_0)C_{10} \\ &= P(H_0)P(D_0|H_0)C_{00} + P(H_1)P(D_1|H_1)C_{11} \\ &\quad + P(H_1)P(D_0|H_1)C_{01} + P(H_0)P(D_1|H_0)C_{10} \\ &= P(H_0)C_{10} + P_{H_1}C_{11} \\ &\quad - P(H_0)P(D_0|H_0)(C_{10} - C_{00}) + P(H_1)P(D_0|H_1)(C_{01} - C_{11}) \\ &= P(H_0)C_{10} + P_{H_1}C_{11} \\ &\quad + \int_{z \in \mathcal{Z}_0} (P(H_1)(C_{01} - C_{11})p(z|H_1) - P(H_0)(C_{10} - C_{00})p(z|H_0))dz\end{aligned}$$

定义似然比为  $\lambda(z) \triangleq \frac{p(z|H_1)}{p(z|H_0)}$

$$\lambda(z) \underset{z \in \mathcal{Z}_0}{\overset{z \in \mathcal{Z}_1}{\geq}} \lambda_B(z) \triangleq \frac{P(H_0)(C_{10} - C_{00})}{P(H_1)(C_{01} - C_{11})} \quad (1)$$

其中  $C_{ij} = P(D_i, H_j)$  当  $C_{10} - C_{00} = C_{01} - C_{11}$  时 Bayes 准则为最大后验概率准则 (也是最小错误概率准则)。进一步的, 若先验概率  $P(H_1) = P(H_0)$ , 最大后验概率准则为最大似然准则。

**例子 1.** 考虑一二元通信系统。

$$H_1 : z = A + n$$

$$H_0 : z = 0 + n$$

其中  $n \sim N(0, \sigma^2)$ 。若  $A = 2, \sigma^2 = 1$ 。试将平均风险表示为先验概率  $P(H_0)$  的形式，并求  $P(H_0) = \frac{1}{3}, P(H_0) = \frac{1}{2}$  和  $P(H_0) = \frac{2}{3}$  时平均风险的值。

解. 设  $p = P(H_0)$ ，根据最大后验概率准则。 $z \in \mathcal{Z}_1$  时有  $-\frac{(z-A)^2}{2\sigma^2} + \ln(1-p) > -\frac{z^2}{2\sigma^2} + \ln p$  求出  $z > \frac{A}{2} + \frac{\sigma^2}{A} \ln \frac{p}{1-p}$

$$\begin{aligned}\bar{R} &= pP(D_1|H_0) + (1-p)P(D_0|H_1) \\ &= p - p\Phi\left(\frac{A}{2} + \frac{\sigma^2}{A} \ln \frac{p}{1-p}\right) + (1-p)\Phi\left(-\frac{A}{2} + \frac{\sigma^2}{A} \ln \frac{p}{1-p}\right)\end{aligned}$$

代入  $A, \sigma^2$  的值得  $\bar{R}(1/3) = 0.1450, \bar{R}(1/2) = 0.1587, \bar{R}(2/3) = 0.1450$ 。画出  $\bar{R} \sim p$  如图 1 所示：

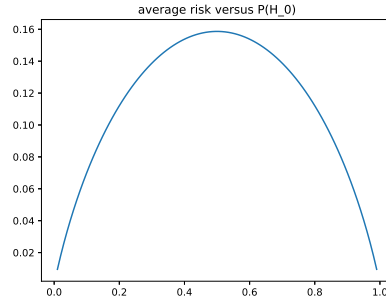


图 1: 平均风险随  $P(H_0)$  先验的变化规律

2. 极大极小准则（先验概率  $\xi = P(H_0)$  未知），满足极大极小化方程：

$$C_{00}P(D_0|H_0) + C_{10}P(D_1|H_0) = C_{01}P(D_0|H_1) + C_{11}P(D_1|H_1) \quad (2)$$

上式可看作  $P_F$  和  $P_D$  的线性函数：

$$C_{00}(1 - P_F) + C_{10}P_F = C_{01}(1 - P_D) + C_{11}P_D \quad (3)$$

当  $C_{00} = C_{11} = 0, C_{10} = C_{01} = 1$  时，极大极小化方程退化为  $P_F = P_M$ ， $\bar{R} = P_F$ 。解出  $\xi_{MM}$ ，根据

$$\lambda(z) \underset{z \in \mathcal{Z}_0}{\overset{z \in \mathcal{Z}_1}{\geq}} \lambda_{MM} \triangleq \frac{\xi_{MM}(C_{10} - C_{00})}{(1 - \xi_{MM})(C_{01} - C_{11})} \quad (4)$$

设计接收机。

3. Neyman Pearson 准则: 给定  $P_F = \alpha$ , 使得  $P_D$  最大。

$$\lambda(z) \underset{z \in \mathcal{Z}_0}{\overset{z \in \mathcal{Z}_1}{\gtrless}} \lambda_{NP} \quad (5)$$

其中  $\lambda_{NP}$  满足方程

$$P_F = \int_{z \in \mathcal{Z}_1} p(z|H_0) dz = \alpha \quad (6)$$

4. ROC 曲线: 将由 Neyman Pearson 准则计算出的  $(P_F, P_D)$  曲线。ROC 曲线有如下性质:

(a) ROC 曲线上各点的斜率为似然比门限

(b) ROC 曲线与 (3)式的交点即为满足极大极小准则的解。

**例子 2.** 考虑例 1 给出的二元通信系统, 设  $A = 1, \sigma^2 = 1$ , 试求  $P_F = 0.1$  时  $\lambda_{NP}$  的值。

**解.**  $z \in \mathcal{Z}_1 \Rightarrow \frac{p(z|H_1)}{p(z|H_0)} = \frac{z^2 - (z-A)^2}{2\sigma^2} > \ln \lambda_{NP}$ , 化简得  $\mathcal{Z}_1 = \{z | z > \frac{A}{2} + \frac{\sigma^2 \ln \lambda_{NP}}{A} =: z_0\}$ 。因为  $P_F = P(D_1|H_0) = \int_{z_0}^{+\infty} p(z|H_0) dz = 1 - \Phi(z_0)$ , 代入  $P_F = 0.1$  先解得  $z_0$ ; 再代入  $A = 1, \sigma^2 = 1$  解得  $\lambda_{NP} = 2.185$ 。进一步可求出:

$$P_F = 1 - \Phi(z_0) \quad (7)$$

$$P_D = 1 - \Phi(z_0 - A) \quad (8)$$

以  $z_0$  为参数, 作出 ROC 曲线  $(P_F, P_D)$  如图 2 所示:

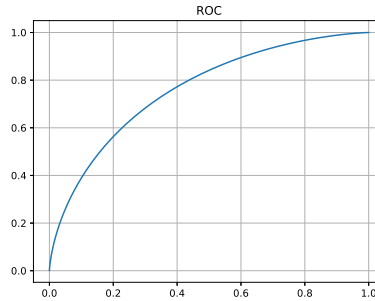


图 2: 接收机工作特性曲线

5. 在理想白高斯信道中信号的检测

$$\begin{aligned} H_0 : z(t) &= s_0(t) + n(t) \\ H_1 : z(t) &= s_1(t) + n(t) \end{aligned} \quad (9)$$

考虑高斯带限白噪声，即

$$S_N(f) = \begin{cases} 0 & \text{if } |f| > B \\ \frac{N_0}{2} & \text{if } |f| < B \end{cases} \quad (10)$$

可以证明  $S_N(f)$  对应的相关函数是  $R_N(\tau) = \frac{N_0 \sin(2B\pi\tau)}{2\pi\tau}$

证明. 首先已知  $\mathcal{F}(\text{sinc}(t)) = \text{rect}(f)$  其中

$$\text{rect}(f) = \begin{cases} 0 & \text{if } |f| > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{if } |f| = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{if } |f| < \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

根据 Fourier 变换的性质: 若  $\mathcal{F}f(x) = \hat{f}(\lambda)$ , 则  $\mathcal{F}f(ax) = \frac{1}{a}\hat{f}(\frac{\lambda}{a})$  因此  $\mathcal{F}(\text{sinc}(2Bt)) = \frac{1}{2B} \text{rect}(\frac{f}{2B})$ , 等式两边同时乘以  $N_0B$  得  $\mathcal{F}(N_0B \text{sinc}(2Bt)) = \frac{N_0}{2} \text{rect}(\frac{f}{2B})$   $\square$

由相关函数的性质  $R_N(0) = N_0B$  为高斯分布的方差。且间隔为  $\Delta t = \frac{1}{2B}$  的采样序列  $z_1, \dots, z_N$  相互独立。对于  $N$  个采样，似然比

$$\begin{aligned} \lambda(z) &= \prod_{i=1}^N \frac{p(z_i|H_1)}{p(z_i|H_0)} \\ &= \exp \left[ \sum_{k=1}^N -\frac{(z_k - s_{1k})^2 - (z_k - s_{0k})^2}{2\sigma_n^2} \right] \\ &= \exp \left[ \frac{2}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^N (s_{1k} - s_{0k})z_k - \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^N (s_{1k}^2 - s_{0k}^2) \right] \end{aligned}$$

因为  $\sigma_n^2 = R(0) = N_0B = \frac{N_0}{2\Delta t}$ , 令  $\Delta t \rightarrow 0$  则  $B \rightarrow \infty$ , 带限白噪声变为理想白噪声。在  $[0, T]$  时间内, 采样次数  $N \rightarrow \infty$ , 于是上式可改写成积分形式, 得到关于  $z_i(t) = s_i(t) + n(t), i = 0, 1$  的信号检测似然函数为:

$$\lambda(z(t)) = \exp \left( \frac{2}{N_0} \int_0^T (s_1(t) - s_0(t))z(t)dt - \frac{1}{N_0} \left( \int_0^T (s_1^2(t) - s_0^2(t))dt \right) \right) \quad (11)$$

接收机工作性能

设随机变量  $v = \int_0^T [s_1(t) - s_0(t)]z(t)dt$ , 根据最小平均错误概率准则

$$v \underset{z \in \mathcal{Z}_0}{\overset{z \in \mathcal{Z}_1}{\geq}} v_T \quad (12)$$

其中  $v_T = \frac{N_0}{2} \ln \mathcal{L}_T + \frac{1}{2}(E_1 - E_0)$ , 而  $\mathcal{L}_T = \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$ ,  $E_i = \int_0^T s_i^2(t)dt$  为已知量。为计算虚警概率  $P_F$  和漏警概率  $P_M$ , 首先求  $v$  的分布。设信号平均能量  $E = \frac{1}{2}(E_0 + E_1)$ , 互相关系数  $\rho = \frac{1}{E} \int_0^T s_1(t)s_0(t)dt$ 。因为高斯过程的积分也是高斯分布,

$$\begin{aligned} v|H_0 &= \int_0^T [s_1(t) - s_0(t)]s_0(t)dt + \int_0^T [s_1(t) - s_0(t)]n(t)dt \\ &\Rightarrow \mathbb{E}[v|H_0] = \rho E - E_0 \\ &\Rightarrow \text{Var}[v|H_0] = \frac{N_0}{2} \int_0^T (s_1(t) - s_0(t))^2 dt = N_0 E(1 - \rho) \end{aligned}$$

同理可求出

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[v|H_1] &= E_1 - \rho E \\ \text{Var}[v|H_1] &= N_0 E(1 - \rho) \end{aligned}$$

因此虚警概率  $P_F$  为

$$\begin{aligned} P_F &= \int_{v_T}^{\infty} p(v|H_0)dv \\ &= 1 - \Phi(y_T) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_T &= \frac{v_T - (\rho E - E_0)}{\sqrt{N_0 E(1 - \rho)}} \\ &= \frac{\frac{N_0}{2} \mathcal{L}_T + E(1 - \rho)}{\sqrt{N_0 E(1 - \rho)}} \end{aligned}$$

漏警概率  $P_M$  为

$$\begin{aligned} P_M &= \int_{-\infty}^{v_T} p(v|H_1)dv \\ &= \Phi(y'_T) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y'_T &= \frac{v_T - (E_1 - \rho E)}{\sqrt{N_0 E(1 - \rho)}} \\
&= \frac{\frac{N_0}{2} \mathcal{L}_T - E(1 - \rho)}{\sqrt{N_0 E(1 - \rho)}}
\end{aligned}$$

在等先验概率的情况下,  $\mathcal{L}_T = 0 \Rightarrow y_T = -y'_T \Rightarrow$

$$P_F = P_M = \Phi\left(-\sqrt{\frac{E(1 - \rho)}{N_0}}\right) \quad (13)$$

当信噪比  $\frac{E}{N_0}$  一定时,  $\rho \downarrow \Rightarrow P_F \downarrow$

雷达系统检测是否有信号, 其中  $s_0(t) = 0 \Rightarrow \rho = 0, E_0 = 0$ , 采用 Neyman-Pearson 准则, 门限  $v_{NP}$  根据下式确定:

$$P_F = 1 - \Phi\left(\frac{v_{NP}}{\sqrt{N_0 E_1/2}}\right) = \alpha$$

求出  $v_{NP}$  后, 代入计算  $P_D$ ,

$$P_D = 1 - P_M = 1 - \Phi\left(\frac{v_{NP} - E_1}{\sqrt{N_0 E_1/2}}\right)$$

于是可作出 ROC 曲线。当信噪比  $\frac{E_1}{N_0}$  增加时, 对相同的  $\alpha, P_D$  增大, ROC 曲线向左上方倾斜。

## 6. 多元假设检验

考虑“M 元择一”的情况, 平均代价可计算出为:

$$\bar{R} = \sum_{i=0}^{M-1} C_{ii} P(H_i) + \sum_{i=0}^{M-1} \int_{\mathcal{Z}_i} I_i(z) dz$$

其中

$$I_i(z) = \sum_{j=0, j \neq i}^{M-1} (C_{ij} - C_{jj}) P(H_j) p(z|H_j)$$

使得  $\bar{R}$  最小的空间划分方式为:

$$\mathcal{Z}_i = \{z | I_i(z) = \min\{I_k(z) | k = 0, \dots, M-1\}\}$$

最小平均错误准则取  $C_{ij} = 1 - \delta_{ij}$ , 此时  $I_i(z)$  为

$$I_i(z) = \sum_{j=0, j \neq i}^{M-1} P(H_j) p(z|H_j) \quad (14)$$

$$= p(z) - p(z) P(H_i|z) \quad (15)$$

故  $I_i(z)$  取最小值等效于  $P(H_i|z)$  取最大值 (MAP 准则)。

在等先验概率的情况下  $p(z)P(H_i|z) = p(z|H_i)P(H_i)$ , 可以用最大似然准则。

举例: 考虑  $H_i$ : 接收信号  $\sim N(m_i, \sigma^2)$ , 其中  $m_1 = 1, m_2 = 2, m_3 = -1$ 。若考虑等先验概率下的最小平均错误概率准则, 且有  $n$  次观测样本  $z_1, \dots, z_n$ 。

首先可以知道  $z = \frac{1}{n}(z_1 + \dots + z_n)$  是充分统计量, 分布为  $N(m_i, \frac{1}{n}\sigma^2)$ 。根据最大似然准则, 分别作出三种假设下  $z$  的概率密度函数曲线如图 3 所示。由图可见, 三条概率密度函数曲线将实轴分为三段  $(-\infty, 0), (0, \frac{3}{2}), (\frac{3}{2}, \infty)$ , 分别记为  $I_3, I_1, I_2$ 。每段中分别有一条曲线达到最高。

当样本值落在区间  $I_i$  时判定假设  $H_i$  成立。

图 3: 三元假设问题

7. 复合假设检验: 若参量是未知的常数, 即

$$\begin{aligned} H_0 : \theta &\in \Theta_0 \\ H_1 : \theta &\in \Theta_1 \end{aligned} \quad (16)$$

采用 NP 准则: 假定  $\theta \in \Theta_1$  值寻求  $P_F = \alpha$  时使  $P_D$  最大的检验。

(a) 若  $P_D$  最大时与  $\theta$  值无关, 这时可实现最佳检验, 称为 UMP (一致最大势) 检验。

(b) 若一致最大势检验不存在时, 可采用广义似然比检验:  $\lambda_g(\mathbf{z}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \lambda_T$ ,

$$\text{其中广义似然比为: } \lambda_g(\mathbf{z}) = \frac{\max_{\theta \in \Theta_1} p(\mathbf{z}|\mathbf{H}_1, \theta)}{\max_{\theta \in \Theta_0} p(\mathbf{z}|\mathbf{H}_0, \theta)}。$$

**例子 3.** 假设  $H_0$  下, 观测值服从零均值、方差为  $\sigma^2$  的高斯分布;

假设  $H_1$  下, 观测值服从方差为  $\sigma^2$  的高斯分布, 但均值为未知的常数。

**解.** 若已知  $m > 0$  ( $m < 0$ ), 则 UMP 检验存在, 形如  $\mathcal{Z}_1 = \{z|z > z_{NP}\}$  ( $\mathcal{Z}_1 = \{z|z < z_{NP}\}$ )。若  $m$  可正可负, UMP 检验不存在, 假

设有  $N$  次独立观测, 则可得  $m$  的最大似然估值为  $\hat{m}_{\text{ML}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N z_j$ 。

采用广义似然比检验:  $\frac{p(\mathbf{z}|H_1, \hat{m}_{\text{ML}})}{p(\mathbf{z}|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \lambda_T$ 。经过运算, 得到双边检验:

$$|\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N z_j| \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \sqrt{2\sigma^2 \lambda_T}$$

若参量是随机变量, 分概率密度函数是否已知讨论。

- (a) 若参量的概率分布已知, 可将条件似然函数对参量的分布取平均, 按简单假设检验求解。比如假设

$$H_0 : s_0(t) = 0$$

$$H_1 : s_1(t) = A, \text{ where } A \sim N(0, \sigma_A^2)$$

信道是高斯信道, 观测  $z(t) = s(t) + n(t)$ ,  $n(t) \sim N(0, \sigma_N^2)$ , 且  $A$  与  $n(t)$  相互独立。设只有 1 次观测,  $z|H_0 \sim N(0, \sigma_N^2)$  而

$$p(z|H_1) = \int_{\mathbb{R}} p(z|H_1, A)p(A)dA = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_N^2 + \sigma_A^2)}} \exp(-\frac{z^2}{2(\sigma_N^2 + \sigma_A^2)})$$

$\Rightarrow z|H_1 \sim N(0, \sigma_N^2 + \sigma_A^2)$  再通过似然比检验得到双边检验的形式:

$$z^2 \underset{z \in \mathcal{Z}_0}{\overset{z \in \mathcal{Z}_1}{\geq}} \frac{2\sigma_N^2(\sigma_A^2 + \sigma_N^2)}{\sigma_A^2} \left[ \ln \lambda_B + \frac{1}{2} \ln(1 + \frac{\sigma_A^2}{\sigma_N^2}) \right]$$

- (b) 随机相位信号的检测

$H_0 : z(t) = n(t), 0 \leq t \leq T, n(t)$  是均值为 0, 谱密度为  $\frac{N_0}{2}$  的高斯白噪声

$H_1 : z(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sin(\omega_c t + \theta) + n(t), \text{ where } :$

$A \sim N(0, \sigma_A^2), \theta$  是随机变量,  $E_s$  是该信号的能量

若  $\theta$  给定, 假定  $T$  是  $\frac{2\pi}{\omega_c}$  的整数倍, 可求出条件似然比为:

$$\lambda(z(t)|\theta) = \exp \left( \frac{2}{N_0} \sqrt{\frac{2E_s}{T}} (y_c \sin \theta + y_s \cos \theta) - \frac{E_s}{N_0} \right) \quad (17)$$



其中:

$$y_c = \int_0^T z(t) \cos \omega_c t dt \quad (18)$$

$$y_s = \int_0^T z(t) \sin \omega_c t dt \quad (19)$$

$$(20)$$

进一步假定随机相位  $\theta$  在  $[0, 2\pi]$  区间上是均匀分布 (最不利分布), 则平均似然比为

$$\lambda(z(t)) = \mathbb{E}_\theta[\lambda(z(t)|\theta)] \quad (21)$$

$$= \exp\left(-\frac{E_s}{N_0}\right) I_0\left(\frac{2}{N_0} \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sqrt{y_c^2 + y_s^2}\right) \quad (22)$$

其中

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(x \cos \phi) d\phi$$

称为零阶修正的 Bessel 函数。设  $y = \sqrt{y_c^2 + y_s^2}$ , 由似然比判决规则可以得到

$$y \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} y_T$$

可以计算出  $y$  的概率密度函数为:

$$p(y|H_1) = \frac{y}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[y^2 + \frac{E_s T}{2}\right]\right) \cdot I_0\left(\frac{y}{\sigma^2} \sqrt{\frac{E_s T}{2}}\right) \quad (23)$$

$$p(y|H_0) = \frac{y}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) \quad (24)$$

其中  $y > 0, \sigma^2 = \frac{N_0 T}{4}, y|H_0$  服从 Rayleigh 分布, 是假设  $H_1$  下信号能量为 0 的特殊情况。

从而求出虚警概率  $P_F$  和检测概率  $P_D$ :

$$P_F = \int_{y_T}^{\infty} p(y|H_0) dy = \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{y_T^2}{\sigma^2}\right) \quad (25)$$

$$P_D = \int_{y_T}^{\infty} p(y|H_1) dy = Q\left(\frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{E_s T}{2}}, \frac{y_T}{\sigma}\right) \quad (26)$$

其中

$$Q(a, b) = \int_b^{\infty} u \exp\left(-\frac{u^2 + a^2}{2}\right) I_0(au) du$$

称为 Marcum 函数。

采用 Neyman-Pearson 准则, 由  $P_F = \alpha$  得到  $P_D = Q(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}, \sqrt{-2\ln \alpha})$ 。信噪比  $r = \frac{2E_s}{N_0}$ , 于是可作出接收机的 ROC 曲线以及当  $\alpha$  一定时检测概率与信噪比的关系曲线如图 4 所示。

图 4

(c) 随机幅度和相位信号的检测

$$H_0 : z(t) = n(t), 0 \leq t \leq T$$

$$H_1 : z(t) = A \sin(\omega_c t + \theta) + n(t), 0 \leq t \leq T$$

$A$  服从 Rayleigh 分布:

$$p(A) = \frac{A}{\sigma_A^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_A^2}\right), A \geq 0$$

此时似然比为

$$\lambda(z(t)) = \int_0^\infty \lambda(z(t)|A) p(A) dA$$

其中  $\lambda(z(t)|A)$  可由 (22) 得到为

$$\lambda(z(t)|A) = \exp\left(-\frac{A^2 T}{2N_0}\right) \cdot I_0\left(\frac{2}{N_0} A y\right)$$

利用 Marcum 函数的性质可得

$$\lambda(z(t)) = \frac{N_0}{\sigma_A^2 T + N_0} \exp\left(\frac{2\sigma_A^2}{N_0(\sigma_A^2 T + N_0)} y^2\right)$$

再根据似然比检验的准则得到最佳接收机。

在随机相位、随机幅度的情况下, 虚警概率  $P_F$  的计算与之前相同, 而检测概率  $P_D$  则为(26)对  $p(A)$  的平均 (将  $E_s = \frac{A^2 T}{2}$  代入该式)。可得:

$$P_D = \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{y_T}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{\bar{E}_s}{N_0}\right)^{-1}\right) \quad (27)$$

其中  $\bar{E}_s = \sigma_A^2 T$  表示平均能量,  $\bar{r} = \frac{\bar{E}_s}{N_0}$  表示平均信噪比。若令  $P_F = \alpha$ , 则  $P_D = \alpha^{1/(1+\bar{r})}$

## 8. 色高斯信道

考虑一般的情形，噪声仍为高斯过程，但相关函数不再是  $\delta\tau$  而是一般的  $R_n(t_1, t_2)$ ，可能是时变的。处理这一问题可以用 Karhunen-Loeve 正交展开或者白化滤波器的方法。不同于白高斯信道中平均错误概率只与信号能量有关，在一般的色高斯信道中与信号波形有关。

### (a) 正交展开

把  $z(t)$  在基函数  $\{g_k(t)\}$  上展开：

$$z(t) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k g_k(t), \text{ where } z_k = \int_0^T z(t) g_k(t) dt \quad (28)$$

展开的目的是希望选择基函数使得展开系数  $\{z_k\}$  相互独立，因为  $z_k$  是高斯变量，所以只需使  $\{z_k\}$  互不相关即可，其协方差函数满足：

$$\begin{aligned} \text{Cov}(z_k, z_l) &= \mathbb{E} \left[ \int_0^T \int_0^T n(t_1) n(t_2) g_k(t_1) g_l(t_2) dt_1 dt_2 \right] \\ &= \int_0^T \int_0^T R_n(t_1, t_2) g_k(t_1) g_l(t_2) dt_1 dt_2 \end{aligned} \quad (29)$$

若

$$\int_0^T R_n(t_1, t_2) g_k(t_2) dt_2 = \lambda_k g_k(t_1) \quad (30)$$

且  $\{g_k(t)\}$  是归一化的正交函数集：

$$\int_0^T g_k(t) g_l(t) dt = \delta_{kl}$$

则  $\text{Cov}(z_k, z_l) = \lambda_k \delta_{kl}$

似然比计算及判决规则：我们以接收信号  $K-L$  展开式的前  $N$  个系数来建立“等效”的观测向量： $\mathbf{z}_N = (z_1, \dots, z_N)$ 。似然比函数为

$$\lambda(\mathbf{z}_N) = \frac{\prod_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_k}} \exp\left(-\frac{(z_k - s_{1k})^2}{2\lambda_k}\right)}{\prod_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_k}} \exp\left(-\frac{(z_k - s_{0k})^2}{2\lambda_k}\right)}$$

其中

$$s_{ik} = \int_0^T s_i(t) g_k(t) dt, i = 1, 2 \quad (31)$$

是  $z_k$  的均值。上式取对数并整理得：

$$\ln \lambda(\mathbf{z}_N) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\lambda_k} z_k (s_{1k} - s_{0k}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} (s_{1k}^2 - s_{0k}^2)$$

令  $N \rightarrow \infty$  并将(28)代入上式的第一项，(31)取一个代入上式第二项，得到：

$$\begin{aligned} \ln \lambda(z(t)) &= \int_0^T z(t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} (s_{1k} - s_{0k}) g_k(t) dt - \frac{1}{2} \left[ \int_0^T s_1(t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} s_{1k} g_k(t) dt - \int_0^T s_1(t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} s_{0k} g_k(t) dt \right] \\ &= \left[ \int_0^T z(t) h_1(t) dt - \int_0^T z(t) h_0(t) dt \right] - \frac{1}{2} \left[ \int_0^T s_1(t) h_1(t) dt - \int_0^T s_0(t) h_0(t) dt \right] \end{aligned}$$

其中  $h_i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} s_{ik} g_k(t)$  易验证,  $h_i(t)$  是积分方程  $\int_0^T R_n(t, \tau) h_i(\tau) d\tau = s_i(t)$  的解。根据似然比检验准则有：

$$\int_0^T z(t) h_1(t) dt - \int_0^T z(t) h_0(t) dt \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} v_T, \text{ where } v_T = \ln \lambda_T + \frac{1}{2} \left[ \int_0^T s_1(t) h_1(t) dt - \int_0^T s_0(t) h_0(t) dt \right] \quad (32)$$

#### (b) 白化滤波器

将接收信号  $z(t)$  通过一个滤波器  $h_w(t, \tau)$ , 设输出信号为  $z_w(t)$ , 则：

$$z_w(t) = \int_0^T h_w(t, \tau) z(\tau) d\tau | H_i = s_{wi}(t) + n_w(t) \quad (33)$$

其中

$$\begin{aligned} s_{wi}(t) &= \int_0^T h_w(t, \tau) s_i(\tau) d\tau \\ n_w(t) &= \int_0^T h_w(t, \tau) n(\tau) d\tau \end{aligned}$$

若输出噪声  $n_w(t)$  是白噪声，则可以根据(12)的判决准则设计接收机。

假设  $h_w(t, \tau)$  可以展开为：

$$h_w(t, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k g_k(t) g_k(\tau)$$

于是可得：

$$\begin{aligned}
R_{n_w}(t, \tau) &= \mathbb{E}[n_w(t)n_w(\tau)] \\
&= \mathbb{E} \left[ \int_0^T \int_0^T h_w(t, s) h_w(\tau, u) n(s) n(u) ds du \right] \\
&= \int_0^T \int_0^T h_w(t, s) h_w(\tau, u) R_n(s, u) ds du \\
&= \int_0^T \int_0^T \left[ \sum_{k=1}^{\infty} h_k g_k(t) g_k(s) \right] \left[ \sum_{l=1}^{\infty} h_l g_l(\tau) g_l(u) \right] R_n(s, u) ds du \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^T h_k g_k(t) g_k(s) h_l g_l(\tau) \lambda_l g_l(s) ds \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} h_k g_k(t) h_l g_l(\tau) \lambda_l \delta_{lk} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k h_k^2 g_k(t) g_k(\tau)
\end{aligned}$$

另一方面

$$\delta(t - \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) g_k(\tau)$$

比较系数得：

$$h_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \Rightarrow h_w(t, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} g_k(t) g_k(\tau) \quad (34)$$

## 9. Wald 检测

考虑非固定样本的情况，采用序列检测的方法，定义  $\mathbf{z}_j = (z_1, \dots, z_j)^T$  每获得一个新的样本后，就按照下述的判决规则进行一次判决。 $\lambda(\mathbf{z}_j) > \lambda_1 \rightarrow H_1, \lambda(\mathbf{z}_j) < \lambda_0 \rightarrow H_0$  否则继续接收下一个观测值。利用给定的  $P_F = \alpha, P_D = \beta$  可计算  $\lambda_1$  和  $\lambda_0$  的值。

$$\ln \lambda_1 = \ln \frac{1 - \beta}{\alpha} \quad (35)$$

$$\ln \lambda_0 = \ln \frac{\beta}{1 - \alpha} \quad (36)$$

在每个假设下，平均取样数按照下述公式计算：

$$\mathbb{E}[N|H_1] = \frac{(1-\beta)\ln\lambda_1 + \beta\ln\lambda_0}{\mathbb{E}[\mathcal{L}(z)|H_1]} \quad (37)$$

$$\mathbb{E}[N|H_0] = \frac{(1-\alpha)\ln\lambda_0 + \alpha\ln\lambda_1}{\mathbb{E}[\mathcal{L}(z)|H_0]} \quad (38)$$

**例子 4.** 沿用例 1 的假设检验，设  $A = 1, \sigma^2 = 1$ ，给定  $P_F = \alpha = 0.1, P_M = \beta = 0.1$ 。

- 1) 序列检测时的判决规则；
- 2) 序列检测时每种假设下结束检验所需的平均样本数；
- 3) 若固定样本数，确定满足性能所需的样本数。

**解.** 1)

$$\begin{aligned} \ln \lambda(\mathbf{z}) &= \sum_{i=1}^j - \left( \frac{(z_i - 1)^2}{2} - \frac{z_i^2}{2} \right) \\ &= \sum_{i=1}^j z_i - \frac{j}{2} \end{aligned}$$

由 (35) 式可得当  $\lambda(\mathbf{z}) > \ln 9$  时判定为  $H_1$ ；当  $\lambda(\mathbf{z}) < -\ln 9$  时判定为  $H_0$ ；介于二者之间继续观测。

- 2) 由 (37) 式，可求得两个假设下平均样本总数均为 3.52。
- 3) 令检验统计量  $y = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N z_k$ 。则  $y|H_0 \sim N(0, \frac{1}{N}), y|H_1 \sim N(1, \frac{1}{N})$ 。因为  $P_F = P_M$ ，根据极大极小准则，当两个假设先验概率相等时取得，此时判决准则为  $y > \frac{1}{2} \rightarrow H_1$ 。由  $P_F = \Phi(-0.5\sqrt{N}) \leq 0.1$  求出最小的  $N = 7$ 。

## 10. 练习题

- (1) 试推导如下情况的似然比。

$$H_0 : z \sim N(m_0, \sigma_0^2)$$

$$H_1 : z \sim N(m_1, \sigma_1^2)$$

并求判决域和错误概率。

解.

$$\lambda(z) = \frac{p(z|H_1)}{p(z|H_0)} \quad (39)$$

$$= \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \exp\left(-\frac{(z-m_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(z-m_0)^2}{2\sigma_0^2}\right) \quad (40)$$

$$\mathcal{Z}_0 = \{z | \lambda(z) < \lambda_B\}$$

$$\mathcal{Z}_1 = \{z | \lambda(z) > \lambda_B\}$$

$$P_F = P(D_1, H_0) = \int_{z \in \mathcal{Z}_1} p(z|H_0) dz$$

$$P_M = P(D_0, H_1) = \int_{z \in \mathcal{Z}_0} p(z|H_1) dz$$

当方差相等时(均为  $\sigma^2$ ),不妨设  $m_1 > m_0$ , 则  $z \underset{H_0}{\geq} \frac{m_1^2 - m_0^2 + 2\sigma^2 \ln \lambda_B}{2(m_1 - m_0)}$

当方差不等时, 不妨设  $\sigma_1^2 > \sigma_0^2$ , 则

$$\left(\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right)z^2 + 2\left(\frac{m_1}{\sigma_1^2} - \frac{m_0}{\sigma_0^2}\right)z + \frac{m_0^2}{\sigma_0^2} - \frac{m_1^2}{\sigma_1^2} \underset{H_0}{\geq} 2 \ln(\lambda_B \frac{\sigma_1}{\sigma_0})$$

若关于  $z$  的二次函数的判别式  $\Delta > 0$  则当  $z < z_1$  或  $z > z_2$  时判  
决为  $H_1$ , 当  $\Delta \leq 0$  时无条件判定为  $H_1$ 。  $\square$

- (2) 考虑一二元对称信道,  $\epsilon$  是交叉概率(假定  $\epsilon < \frac{1}{2}$ ), 即信道输入  
为 0 (或 1) 时, 输出为 1 (或 0) 的概率。试导出保证平均错误  
概率最小的判决准则, 并求最小平均错误概率。

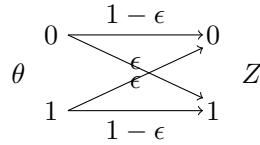


图 5: 二元对称信道

解. 考虑一次观测  $z$ ,

$$H_0 : \theta = 0$$

$$H_1 : \theta = 1$$

条件概率  $z|\theta$  已知:  $p_{z|\theta=0}(0) = 1 - \epsilon, p_{z|\theta=0}(1) = \epsilon, p_{z|\theta=1}(0) = \epsilon, p_{z|\theta=1}(1) = 1 - \epsilon$  设先验概率  $p_\theta(0) = p$ 。由似然比检验,  $\lambda(z) = \frac{p(z|H_1)}{p(z|H_0)} \Rightarrow \lambda(0) = \frac{\epsilon}{1-\epsilon} < 1, \lambda(1) = \frac{1-\epsilon}{\epsilon} > 1$  因为  $\lambda_B = \frac{p}{1-p}$ , 分三种情况讨论:

(a)  $\lambda(0) < \lambda_B < \lambda(1)$ : 此时判决准则为  $z = 1 \Rightarrow \theta = 1; z = 0 \Rightarrow \theta = 0$ 。平均错误概率为

$$P_{\theta,z}(0,1) + P_{\theta,z}(1,0) = P_\theta(0)P_{z|\theta=0}(1) + P_\theta(1)P_{z|\theta=1}(0) = \epsilon$$

(b)  $\lambda_B \leq \lambda(0)$ : 此时判决准则为  $\theta = 1$  (完全依赖先验分布, 无视观测) 平均错误概率为  $p$

(c)  $\lambda_B \geq \lambda(1)$ : 此时判决准则为  $\theta = 0$ , 平均错误概率为  $1 - p$ 。

图 6 画出了  $\epsilon = 0.11$  时平均错误概率随  $\theta$  的先验变化的情况。  $\square$

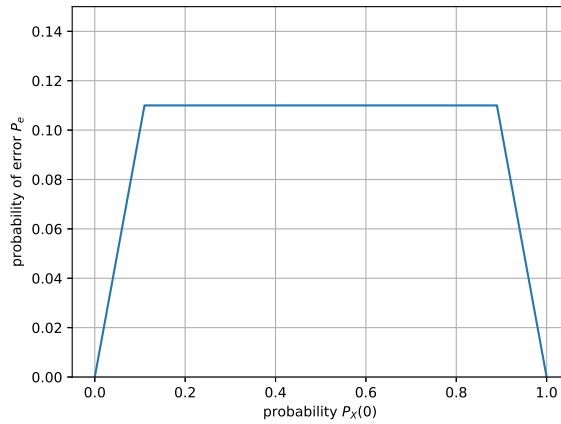


图 6: BSC 信道 MAP 准则下平均错误概率与先验分布的关系

(3) 请使用最小错误概率准则, 设计一个在如下两种假设间作出选择的接收机 (假定两种假设的先验概率相等):

$$H_0: z(t) = s_0(t) + n(t)$$

$$H_1: z(t) = s_1(t) + n(t)$$



其中：信号  $s_1(t)$  和  $s_0(t)$  如图 7 所示：噪声  $n(t)$  是高斯型随机变量，均值为零，谱密度为  $\frac{N_0}{2}$ 。并画出平均错误概率与  $\frac{2E}{N_0}$  的函数关系（ $E$  为信号的平均能量）。

图 7: 信号  $s_1(t)$  和  $s_0(t)$

解. 首先计算信号的能量  $E_1 = 1, E_2 = 1, \mathcal{L}_T = 1 \Rightarrow v_T = 0$ , 根据(12)式可得到最小错误概率的判决准则。 $s_1(t)$  和  $s_2(t)$  的互相关系数  $\rho = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。由(13)式可得到平均错误概率为

$$\bar{R} = \frac{1}{2}(P_F + P_M) = \Phi \left( -\sqrt{\frac{2E}{N_0} \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)} \right)$$

平均错误概率与  $\frac{2E}{N_0}$  的函数关系如图 8 所示

图 8

□

(4) 已知  $K$  个独立的观测值

$$\begin{cases} H_1: & z_k = n_k \\ H_0: & z_k = 1 + n_k \end{cases} \quad \text{其中: } n_k \text{ 是均值为零、方差为 2 的高斯随机变量, } k = 1, 2, \dots, K.$$

- (a) 设计似然比检验，并求  $P_F$  和  $P_M$ 。
- (b) 画出  $K = 1$  时的接收机工作特性。
- (c) 假定  $c_{00} = c_{11} = 0, c_{01} = 2, c_{10} = 1, P(H_0) = 0.7$ , 试求最小  $N$  值，使得  $K = N$  时的风险不大于  $K = 1$  时风险的  $\frac{1}{2}$ 。

解. (a) 设  $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_K]$ ,  $\lambda(\mathbf{z}) = \frac{p(\mathbf{z}|H_1)}{p(\mathbf{z}|H_0)}$

$$\lambda(\mathbf{z}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \lambda_B \Rightarrow z \underset{H_1}{\overset{H_0}{\geq}} \frac{1}{2} - \frac{2}{K} \ln \lambda_B$$

其中  $z = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K z_i, z|H_0 \sim N(1, \frac{2}{K}), z|H_1 \sim N(0, \frac{2}{K})$

$$\begin{aligned} P_F &= \int_{-\infty}^{\frac{1}{2} - \frac{2}{K} \ln \lambda_B} p(z|H_0) dz \\ &= \Phi \left( -\sqrt{2K} \left( \frac{1}{4} + \frac{\ln \lambda_B}{K} \right) \right) \\ P_M &= \Phi \left( -\sqrt{2K} \left( \frac{1}{4} - \frac{\ln \lambda_B}{K} \right) \right) \end{aligned}$$

(b) 当  $K = 1$  时, 以  $\lambda_B$  作为曲线参数, 作出  $(P_F, P_D)$  的曲线如图 9 所示。

图 9

(c)

$$\begin{aligned} \bar{R} &= C_{01}P(D_0, H_1) + C_{10}P(D_1, H_0) \\ &= 2P(H_1)P(D_0|H_1) + P(H_0)P(D_1|H_0) \\ &= 0.6P_M + 0.7P_F \end{aligned}$$

另一方面,

$$\lambda_B = \frac{P(H_0)(C_{10} - C_{00})}{P(H_1)(C_{01} - C_{11})} = \frac{7}{6}$$

根据 (a)  $\bar{R}(K = 1) = 0.47, \bar{R}(K = 6) = 0.25, \bar{R}(K = 7) = 0.23 < \frac{1}{2}\bar{R}(K = 1) \Rightarrow N = 7$

□

(5) 对于二元通信系统, 其假设为:

$$\begin{cases} H_1: & z(t) = A \cos \omega_1 t + B \cos(\omega_2 t + \phi) + n(t) \\ H_0: & z(t) = B \cos(\omega_2 t + \phi) + n(t) \end{cases} \quad \text{其中: } \begin{matrix} 0 \leq t \leq T \\ A, B, \omega_1, \omega_2, \phi \text{ are known constant} \end{matrix}$$

假定:  $\int_0^T \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t dt = \int_0^T \cos \omega_1 t \sin \omega_2 t dt = 0, n(t)$  是谱密度为  $\frac{N_0}{2}$  的高斯白噪声。试画出其最佳接收机模型, 并分析其误码率是否和  $A \cos \omega_1 t$  及  $B \cos(\omega_2 t + \phi)$  有关。计算误码率以证明你的分析结论。

解. 假定等先验概率, 由(13)得

$$P_e = \Phi \left( -\sqrt{\frac{E(1 - \rho)}{N_0}} \right)$$

而

$$\begin{aligned} E(1 - \rho) &= \frac{1}{2} \int_0^T (s_1(t) - s_0(t))^2 dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T (A \cos \omega_1 t)^2 dt \end{aligned}$$

因此误码率与  $A \cos \omega_1 t$  有关而和  $B \cos(\omega_2 t + \phi)$  无关。  $\square$