清华大学深圳研究生院

统计信号处理

2017 年春季学期

作业 2

赵丰 2018 年 6 月 24 日

2.1. 设一次观测值为 $z = ab + n$，其中 a, b 和 n 是均值为零，方差分别为 σ_a^2, σ_b^2 和 σ_n^2 且相互统计独立的高斯随机变量。若对 a 和 b 同时进行估值，试求 a 和 b 的最大后验估值。

解. $p(a,b|z) \propto p(a)p(b)p(z|a,b)$。为极大化 $p(a,b|z)$，只需极小化 $L(a,b) = \frac{(z-ab)^2}{\sigma_n^2} + \frac{a^2}{\sigma_a^2} + \frac{b^2}{\sigma_b^2}$ 分别对 a, b 求偏导数得:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial L(a,b)}{\partial a} = \frac{a}{\sigma_a^2} - \frac{b(z-ab)}{\sigma_n^2} = 0$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial L(a,b)}{\partial b} = \frac{b}{\sigma_b^2} - \frac{a(z-ab)}{\sigma_n^2} = 0$$

由 ab 乘积的对称性可知无法区分 a 和 b 的符号，因此我们不妨设 $a > 0$。两等式联立消元得 $\frac{a}{\sigma_a} = \pm\frac{b}{\sigma_b}$。若 $b > 0$，解得 $a = b = 0$ 或

$$\frac{a^*}{\sigma_a} = \frac{b^*}{\sigma_b} = \frac{\sqrt{\sigma_a\sigma_b z - \sigma_n^2}}{\sigma_a\sigma_b} \tag{1}$$

若 $b < 0$，解得 $a = b = 0$ 或

$$\frac{a^*}{\sigma_a} = \frac{-b^*}{\sigma_b} = \frac{\sqrt{-\sigma_a\sigma_b z - \sigma_n^2}}{\sigma_a\sigma_b} \tag{2}$$

并且 $L(a,b)$ 的 Hessian 矩阵满足

$$\frac{1}{2}H(a,b) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_a^2} + \frac{b^2}{\sigma_n^2} & \frac{2ab-z}{\sigma_n^2} \\ \frac{2ab-z}{\sigma_n^2} & \frac{1}{\sigma_b^2} + \frac{a^2}{\sigma_n^2} \end{bmatrix}$$

在 $(0,0)$ 处正定。代入 (1) 或 (2) 式，可求出 Hessian 矩阵的行列式为:

$$H(a^*, b^*) = \frac{16}{\sigma_a^2\sigma_b^2\sigma_n^2}(\sigma_a\sigma_b|z| - \sigma_n^2) > 0 \tag{3}$$

因此 $(0,0)$ 和 (a^*, b^*) 均为极小值点。另一方面，$L(0,0) = \frac{z^2}{\sigma_n^2}$，代入 (1) 或 (2)式得 $L(a^*, b^*) = \frac{2|z|}{\sigma_a\sigma_b} - \frac{\sigma_n^2}{\sigma_a^2\sigma_b^2}$。(1) 或 (2)式成立的前提条件是 $\frac{|z|}{\sigma_n} > \frac{\sigma_n}{\sigma_a\sigma_b}$。由 $(\frac{|z|}{\sigma_n} - \frac{\sigma_n}{\sigma_a\sigma_b})^2 > 0$ 可得 $L(0,0) > L(a^*, b^*)$。

因此当 $|z| \le \frac{\sigma_n^2}{\sigma_a\sigma_b}$ 时，a 和 b 的最大后验估值均为 0；当 $|z| > \frac{\sigma_n^2}{\sigma_a\sigma_b}$ 时，a 和 b 的最大后验估值为:

$$\frac{a^*}{\sigma_a} = \frac{\operatorname{sgn}(zb^*)}{\sigma_b} = \frac{\sqrt{\sigma_a\sigma_b|z| - \sigma_n^2}}{\sigma_a\sigma_b}$$

2.2. 设一物体作自由下落，在 t 秒内下降距离 $s(t) = \frac{1}{2}gt^2(m)$。现有一台有噪声的仪器进行观测，以估计重力加速度 $g(m/s^2)$。其观测模型为:

$$z_i = \frac{i^2}{2}g + n_i, i = 1, 2, \dots$$

已知 $\mathbb{E}[g] = g_0(m/s^2), \mathrm{Var}[g] = 1(m^2/s^4), \mathbb{E}[n_i] = 0, \mathbb{E}[n_in_j] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|j-i|}, \mathbb{E}[gn_i] = 0$

(a) 取一次采样 $z_1 = \frac{1}{2}g + n_1$, 求重力加速度 g 的线性最小均方估计。

(b) 取两次采样 $z_1 = \frac{1}{2}g + n_1, z_2 = 2g + n_2$，求重力加速度 g 的线性最小均方估计。

(c) 比较 (a) 和 (b) 两次估计的质量。

解. (a) $\mathbb{E}[z_1] = \frac{1}{2}g_0, \mathbb{E}[g] = g_0, \mathrm{Cov}[z_1, g] = \frac{1}{2}, \mathrm{Var}[z_1] = \frac{5}{4}$ 根据公式:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{LMS}} = \mathrm{Cov}[\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{z}]\,\mathrm{Var}^{-1}[\boldsymbol{z}](\boldsymbol{z} - \mathbb{E}[\boldsymbol{z}]) + \mathbb{E}[\boldsymbol{\theta}]$$

可得 $\hat{g}(z) = \frac{2}{5}(z - \frac{1}{2}g_0) + g_0$

(b) 设 $\boldsymbol{z} = [z_1, z_2]^T, \mathrm{Cov}[g, \boldsymbol{z}] = [\frac{1}{2}, 2], \mathrm{Var}[\boldsymbol{z}] = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{g} = -\frac{1}{8}(z_1 - \frac{1}{2}g) + \frac{7}{16}(z_2 - 2g) + g_0$

(c) 根据公式 $\mathrm{Var}[\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{LMS}} - \boldsymbol{\theta}] = \mathrm{Var}[\boldsymbol{\theta}] - \mathrm{Cov}[\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{z}]\,\mathrm{Var}^{-1}[\boldsymbol{z}]\,\mathrm{Cov}[\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\theta}]$, 分别计算可得 (a) 中估计的均方误差为 $\frac{4}{5}$，(b) 中估计的均方误差为 $\frac{3}{16}$。因此 (b) 的平均误差比 (a) 的小。

2.3. 设有一阶动态系统模型。状态方程为 $\dot{x}(t) = -x(t) + w(t)$ ，观测方程为 $z(t) = x(t) + v(t)$。其中 $w(t)$ 和 $v(t)$ 是零均值、互不相关的白噪声过程。假设 $\mathrm{Cov}[w(t), w(\tau)] = 2\alpha\delta(t - \tau), \mathrm{Cov}[v(t), v(\tau)] = \alpha\delta(t - \tau)$, 这里 α 为常数。试求:

(a) 达到稳态时的 Kalman 滤波器。

(b) 信号 $x(t)$ 的物理可实现的 Wiener 滤波器。

(c) 比较和分析前面所得的结果。

解.

(a) 由于求稳态解，令 $\dot{P}(t) = 0$ 。关于误差方差的 Ricatti 方程为 $P^2 + 2\alpha P = 2\alpha^2$。舍去负根有 $P = (\sqrt{3} - 1)\alpha$。从而滤波增益为 $K = \sqrt{3} - 1$。进而得到状态估计方程为:
$\dfrac{\mathrm{d}\hat{x}(t)}{\mathrm{d}t} + \sqrt{3}\hat{x}(t) = (\sqrt{3} - 1)z(t)$，滤波器传递函数为
$H(s) = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+s}$。

(b) 由系统的状态方程可得形成滤波器为 $H(s) = \frac{1}{1+s}$。信号 $x(t)$ 的 PSD 为 $\Phi_x(s) = H(s)H(-s)\Phi_w(s) = \frac{2\alpha}{1-s^2}$。噪声 $\Phi_v(s) = \alpha$。根据物理可实现的 Wiener 滤波器的公式，$H(s) = \frac{1}{\Phi_z^+(s)}\left[\frac{\Phi_{xz}(s)}{\Phi_z^-(s)}\right]^{t+}$ 可求出 $H(s) = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+s}$，进而求出滤波器的冲击响应为:
$h(t) = (\sqrt{3} - 1)e^{-\sqrt{3}t}u(t)$。

(c) 稳态时的 Kalman 滤波器与物理可实现的 Wiener 滤波器形式相同。

2.4. 试证明：对于 Wilcoxon 检验：$\dfrac{\partial\,\mathbb{E}[T^+]}{\partial\theta}\Big|_{\theta=0} = nf_0(0) + n(n-1)I$。其中 $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f_0^2(\sigma)d\sigma$

证明. 设 $f(\sigma)$ 关于 y 轴对称。可以求出 $T^+ = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} u(X_i + X_j)$

当 $i \neq j$ 时，$\mathbb{E}[u(X_i + X_j)] = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(\sigma - \theta)F_0(-\sigma - \theta)d\sigma$。进一步，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\,\mathbb{E}[u(X_i + X_j)]}{\partial\theta} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_0(\sigma - \theta)}{\partial\sigma}F_0(-\sigma - \theta)d\sigma + \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(\sigma - \theta)f_0(-\sigma - \theta)d\sigma \\
&= 2\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(\sigma - \theta)f_0(-\sigma - \theta)d\sigma
\end{aligned}
$$

从而有 $\dfrac{\partial\,\mathbb{E}[u(X_i + X_j)]}{\partial\theta}\Big|_{\theta=0} = 2I$。

当 $i = j$ 时，

$\mathbb{E}[u(X_i + X_j)] = 1 - F_0(-\theta) \Rightarrow \frac{\partial\,\mathbb{E}[u(X_i + X_j)]}{\partial\theta}\big|_{\theta=0} = f_0(0)$。因此，

$\frac{\partial\,\mathbb{E}[T^+]}{\partial\theta}\big|_{\theta=0} = nf_0(0) + n(n-1)I$。 $\square$