广义连分式

赵丰

数学科学系
清华大学

2017 年 4 月 26 日

连分式的数论背景
有理数的有限连分式展开

$$\frac{682}{305}=2+\frac{72}{305}+2+\frac{1}{305/72}=2+\frac{1}{4+\frac{17}{72}}=\cdots=2+\frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{4+1/4}}}$$

- 欧几里得辗转相除法

$$
\begin{aligned}
682 &= 305 \times 2 + 72 \quad & q_0 &= 2 \\
305 &= 72 \times 4 + 17 \quad & q_1 &= 4 \\
\cdots &= \dots \\
4 &= 1 \times 4 \quad & q_n &= 4
\end{aligned}
$$

- 一个有理数表示为分数，一个分数看成两个整数的除法，可以用欧几里得法分解得出一系列的商 q_i,

$$
\frac{682}{305} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cdots + 1/q_n}}
$$

无理数的连分式展开

$$
\begin{aligned}
\sqrt{5} &= 2 + x_0 \quad & 0 < x_0 < 1 \\
\frac{1}{x_0} &= 4 + x_1 \quad & 0 < x_1 < 1 \\
&\cdots & \cdots \\
\frac{1}{x_{n-1}} &= 4 + x_n \quad & 0 < x_n < 1
\end{aligned}
$$

$$
\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \dots}}}
$$

Definition 1

有限序列 $t_1, t_2, \ldots, t_r$ 满足 $t_j \geq 1$ 对于 $j \geq 2$ 可以递推地定义有限连分式 $[t_1, t_2, \ldots, t_r] := t_1 + \frac{1}{[t_2, \ldots, t_r]}$

Theorem 1

设 $p_j = t_j p_{j-1} + p_{j-2}, q_j = t_j q_{j-1} + q_{j-2}, M_j = \begin{pmatrix} p_j & q_j \\ p_{j-1} & q_{j-1} \end{pmatrix}$

p_0, p_1, q_0, q_1 由 $M_0 = I_2$ 给出,$T_j = \begin{pmatrix} t_j & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 则 $M_j = T_j M_{j-1}$，递推得到 $\binom{p_j}{q_j} = (\prod_{i=1}^{r} T_i)\binom{1}{0}$ 且 $[t_1, t_2, \ldots, t_r] = \frac{p_j}{q_j}$

Theorem 2

$\lim_{r\to\infty}[t_1, t_2, \ldots, t_r]$ 存在，且极限是形如 $\frac{a+b\sqrt{m}}{c}$ 的二次根式当且仅当序列 $t_2, t_3, \ldots,$ 是循环的。设 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (\prod_{i=1}^{rc} T_i)$,$rc$ 是循环周期，则极限 x 满足二次方程 $x = \frac{ax+b}{cx+d}$

推广基本连分式得到下面关于拓展连分式的定义:

Definition 2

两组有限序列 $\{a_1, \ldots, a_r\}, \{b_1, \ldots, b_r\}$ 递推地定义数列 $\{x_1, \ldots, x_r\}$,$x_0 = \frac{a_r}{b_r}, x_i := a_{r-i} + \frac{b_{r-i}}{x_{i-1}}, 1 \leq i \leq r-1$

上面是一种后向求算的方法，类比基本连分式有前向递推公式，这里取 $T_j = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 即有 (1) 的结果，并且由这个递推公式可以用归纳法证明欧拉连分式定理:

Theorem 3

$$
\begin{aligned}
& a_0 + a_0 a_1 + a_0 a_1 a_2 + \cdots + a_0 a_1 a_2 \dots a_n \\
= & \cfrac{a_0}{1 - \cfrac{a_1}{1 + a_1 - \cfrac{a_2}{1 + a_2 - \cfrac{\ddots}{\ddots \cfrac{a_{n-1}}{1 + a_{n-1} - \cfrac{a_n}{1 + a_n}}}}}}
\end{aligned}
$$

基于上面的定理可以推导出一些常见复函数的连分式展开:

$$\arctan z = \cfrac{1}{1 + \cfrac{z^2}{3 - z^2 + \cfrac{(3z)^2}{5 - 3z^2 - \cfrac{(5z)^2}{7 - 5z^2 + \cfrac{(7z)^2}{9 - 7z^2 - \dots}}}}}, |z| < 1$$

上式令 $z = 1$ 得到无理数 π 的一种连分式展开

$$\sum_{x_1=1}^{5}\sum_{x_2=x_1}^{5}\cdots\sum_{x_{12}=x_{11}}^{5} 1$$

0<=x1<=x2<=...<=x12<=5, 设 r1=x1,r2=x2-x1,...r12=x12-x11,r13=5-x12, 则

$$r1 + r2 + \cdots + r13 = 5, 0 \leq ri$$

推出

$$(r1+1)+(r2+1)+\cdots+(r13+1) = 17 = 1+1+\cdots+1, 1 \leq ri+1$$

从等式右边 16 个加号里取 12 个加号...