讨论

数 33 赵丰

February 24, 2017

本次讨论学习沈老师用信息椭圆对 FIM 最小单位的结构进行刻划的方法。在上次讨论的 (3) 式中，

$$FIM = \sum_{i=1}^{N_b} \frac{f'^2}{2\sigma^2||\boldsymbol{p}_i^b - \boldsymbol{p}||^2} \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{u} \tag{1}$$

•

FIM 最小单位 $\boldsymbol{J}$ 可以正交相似到一个对角阵，这个对角阵是由 $\boldsymbol{J}$ 的特征值组成的。设

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{U} \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix} \boldsymbol{U}^T, \mu \geq \eta$$

沈老师在“无线定位的理论误差界第二部分”IV Proposition 2 中给出了 SPEB=$\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\eta}$, 接下来定义了 information ellipse 为二维平面上的曲线方程

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{x}^T = 1 \tag{2}$$

这个椭圆经过适当的坐标变换实际上是:

$$\frac{x^2}{\mu} + \frac{y^2}{\eta} = 1 \tag{3}$$

长半轴为 $\sqrt{\mu}$, 短半轴为 $\sqrt{\eta}$. $\sqrt{\mu}$ 和 $\sqrt{\eta}$ 可以看成是移动节点沿着 θ 方向和 $\theta + \pi/2$ 方向位置的不确定度。这里 θ 是旋转矩阵 $\boldsymbol{U}_\theta$ 的参数。信息椭圆的面积 $S = \pi\sqrt{\mu\eta}$, 椭圆离心率 $e = \sqrt{(\mu - \eta)/\mu}$, 原有的 SPEB->0 并不能反映出两个方向的误差的衰减速率，比如 $\mu = x^2, \eta = x, x- > \infty$, 长半轴的误差衰减速率要快一倍。对于一般的定位场景我们希望两个方向的误差衰减是同一个量阶的，因此可以用离心率来衡量，考虑非协作单移动节点的定位问题，当定位的噪声 $\sigma- > 0$ 时，如果 $S- > \infty, e- > C$, 我们称这种情形为正则的。

Definition 1. *We call the FIM is normal if* $\lim\limits_{\sigma->0} \sqrt{(\mu - \eta)/\mu}$ *exists and smaller than 1.*

我们可以证明下面的定理

Theorem 0.1. *FIM given by (1) is normal.*

Proof. 注意到 (1) 式中 f' 和 $\boldsymbol{p}_i^b - \boldsymbol{p}$ 为常数，因此 (1) 可以写成

$$FIM = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N_b}\lambda_i \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{u}$ 和 λ_i 不依赖于 σ. $\sum_{i=1}^{N_b}\lambda_i \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T$ 经过正交变换两个特征值为 μ' 和 η', 所以 $\mu = \mu'/sigma^2, \eta = \eta'/sigma^2, \sqrt{(\mu-\eta)/\mu} = \sqrt{(\mu'-\eta')/\mu'}$, 所以离心率始终为不依赖于 σ 的常数。 □

Theorem 0.2. *If FIM is normal, then SPEB->0 iff the area of the information ellipse tends to infinity.*

Proof. 必要性:SPEB->0 时，长短半轴都趋向于无穷大，故面积趋向于 0.

充分性，因为信息椭圆面积趋于正无穷，它们的乘积趋于正无穷。因为 $\mu > \eta$, 反设 η 有界，则 $\mu- > \infty$. 由 FIM 是正则的定义，此时离心率趋于 1，矛盾。 □

从上面的讨论可以看出，信息椭圆在 σ 减小时，形状不变而面积在膨胀，在 FIM 是正则的情形下，信息椭圆的面积也可以作为衡量定位精度的一个指标。

信息椭圆的长短半轴给出了两个极端的方向，在这两个方向上的定位误差分别最小和最大，对于其他方向，沈老师定义了 DPEB，即 directional position error bound 为

$$DPEB(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}\mathrm{FIM}_{\boldsymbol{p}}^{-1}\boldsymbol{v} \tag{5}$$

沈老师考虑了增加一个锚点的 RI($\lambda\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T$) 对信息椭圆形状的影响，但表达式比较复杂，缺少几何直观，下面我们从二维平面投影的角度对 FIM 进行刻划：考虑 FIM=$\sum\lambda_i\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i^T$, 作用于 $\boldsymbol{x}$, 相当于 $\boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{u}_i$ 方向上的投影乘以伸缩因子 λ_i 后再矢量相加。用复数表示比较简洁，设 $\boldsymbol{x} = e^{j\theta}, \boldsymbol{u}_i = e^{j\phi_i}$, λ 是 $\boldsymbol{x}$ 的特征值，则有:

$$\sum\lambda_i\cos(\theta-\phi_i)e^{j\phi_i} = \lambda e^{i\theta} \tag{6}$$

从而得到:

$$\lambda = \sum\lambda_i\cos(\theta-\phi_i)e^{j\phi_i-\theta} \tag{7}$$

• λ 为实数，因此虚部为 0，即 θ 满足方程

$$\sum\lambda_i\sin(2(\theta-\phi_i)) = 0 \tag{8}$$

且 $\lambda = \sum \lambda_i \cos^2(\theta - \phi_i)$, 由于 λ_i 为正数，特征值 $\lambda > 0$。考虑到旋转矩阵 $\boldsymbol{U}_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \cos(\theta + \pi/2) \\ \sin(\theta) & \sin(\theta + \pi/2) \end{pmatrix}$ 中 θ 可以取 0 到 π(因为 θ 取 π 到 2π 整体多出一个符号，和后面的 $\boldsymbol{U}^T$ 的负号抵消。且 $\boldsymbol{U}^T$ 的第一列对应着 FIM 的一个特征向量（不一定是最大的那个），另一个特征向量是第一个特征向量逆时针转 90 度得到的，因此我们有如下定理：

Theorem 0.3. *There exists one and only one solution for equation(8) for θ in range(0,$\pi/2$), and if θ_0 in (0,$\pi/2$) is a solution for equation(8), then $\theta_0 + \pi/2$ is also a solution.*

Proof. 由方程 (8) 的形式很容易说明如果 θ_0 是一个解,那么 $\theta_0 + \pi/2$ 也是一个解。由于 λ 和方程 (8) 仅依赖于 $2\phi_i$, 因此我们不妨假设 $\phi_i \in [0, \pi]$(ϕ_i 是移动节点与锚点连线的方位角)。考察等式左边关于 θ 的函数可以看出其在 $\theta = 0$ 时为负，在 $\theta = \pi$ 时为正，因此由介值定理可以得到方程 (8) 在 $(0, \pi)$ 内至少有一个根，如果根在 $(\pi/2, \pi)$ 内，因为 $\theta - \pi/2$ 也是方程一个根，所以方程在 $(0, \pi/2)$ 内至少有一个根。反设方程在 $(0, \pi/2)$ 内有两个根 $\theta_1, \theta_2(\theta_1 < \theta_2)$，将两根分别代入方程 (8) 作和得:

$$\sum 2\lambda_i \sin(\theta_1 + \theta_2 - 2\phi_i) \cos(\theta_1 - \theta_2) = 0 \tag{9}$$

因此 $\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$ 也是 (0,$\pi/2$) 上的一个根。由此推出等式左边关于 θ 的函数在 (θ_1, θ_2) 区间内有无数个根，这对初等函数（不恒为 0）来说是不可能的，矛盾。 □

从方程零点的角度的结论推出矩阵有两个特征值是吻合的。由 λ 的表达式用倍角公式可以看出 λ 含有各个 RII 之和的一半 $\frac{\sum \lambda_i}{2}$, 这和沈老师在推导新增 RI 对原有椭圆的影响时的结构是一样的。方程 (8) 可以由万能公式给出闭式解：首先将正弦展开，然后用 $t = \tan(\theta)$(t>0) 换元，可整理为关于 t 的二次方程:

$$(\sum sin(2\phi_i)\lambda_i)t^2 + 2(\sum \cos(2\phi_i)\lambda_i)t = (\sum \sin(2\phi_i)\lambda_i) \tag{10}$$

记 $K = \frac{\sum \cos(2\phi_i)\lambda_i}{\sum \sin(2\phi_i)\lambda_i}$ 取正数解为:$t = -K + \sqrt{1+K^2}$(另一个负数解 $t = -K - \sqrt{1+K^2}$ 对应 θ 是钝角。) $t = \frac{1}{K+\sqrt{1+K^2}}$, 所以 t 是 K 的单调减函数，其中 K$\in (-\infty, +\infty)$。注意到

$$\tan(2\theta) = \frac{2t}{1-t^2} = 1/K \tag{11}$$

• 同样由万能公式可以求出 λ 的闭式解:

$$\lambda = (\sum \lambda_i)/2 + J\frac{(1-t^2)K/2 + t}{1+t^2} \tag{12}$$

其中 $J = \sum \lambda_i \sin(2\phi_i)$ 将 $t = -K \pm \sqrt{1+K^2}$ 的值代入得：$\lambda = (\sum \lambda_i)/2 \pm J\sqrt{K^2+1}/2$ 推到这一步，特征值和角度与沈老师的讨论中推导的关系式的相似性更加明朗。我们可以进一步得到

$$\text{SPEB} = \frac{2\sum \lambda_i}{(\sum \lambda_i)^2 - J^2(K^2+1)} \tag{13}$$

• 在非协作定位场景中，一般很难降低 σ, 如果要考虑增加锚点的部署对定位精度的提升作用，则上面推导的闭式解将为这种考虑提供非常好的分析的起点。

在场景中已经存在 N_b 个锚点的情形下，信息椭圆的三个参数可由上面的方程给出，增加一个锚点后椭圆的离心率和面积都会发生变化。

沈老师的文章中讨论了在 λ_i 不变的情况下锚点的最优部署问题，λ_i 不变可近似看成锚点和移动节点的距离不变。假设前 N_b 个锚点的部署方式已经确定 ($\phi_i, i = 1,..N_b$ 确定), 现在考虑新加进的第 $N_b + 1$ 个锚点如何部署可以使 SPEB 达到最小, 由 (13) 可以得到应极小化 $J^2(K^2+1)$。为记号简便，设新加入的锚点的 RII 为 λ_n, 与待测移动节点的距离为 ϕ_n, ϕ_n 是可调参数，对前 N_b 个锚点的参数，记 $J_1 = \sum \lambda_i \sin(2\phi_i), J_2 = \sum \lambda_i \cos(2\phi_i)$ 则我们有

$$\begin{aligned} J^2(K^2+1) &= (\lambda_n \sin(2\phi_n) + J_1)^2 + (\lambda_n \cos(2\phi_n) + J_2)^2 \\ &= \lambda_n^2 + J_1^2 + J_2^2 + 2\lambda_n \sqrt{J_1^2 + J_2^2} \sin(2\phi_n + \arctan(J_2/J_1)) \end{aligned} \tag{14}$$

注意到 J_2/J_1 是只考虑前 N_b 个锚点时的 K。欲使上式最大，有 $2\phi_n + \arctan(K) = \pi/2$，即 $\tan(2\phi_n) = \tan(\pi/2 - \arctan(K)) = \frac{1}{K}$, 和式 (11) 进行比较有 $\tan(2\phi_n) = \tan(2\theta)$, 从而得到 $\phi_n = \theta$ 或者 $\phi_n = \theta + \pi/2$, 此时 ϕ_n 是沿着原椭圆某个坐标轴的。用这种方法的优点是避免了繁琐的矩阵分解运算，但不易分清椭圆的长短半轴。

按照沈老师的结论应该是沿短半轴部署，这样每次锚点部署单步优化并不能改变椭圆的方向角，导致所有锚点都部署在两条正交的直线上，凭直觉也不是全局最优的。

场景中有两个移动节点，彼此之间协作，FIM 是 4 维矩阵，信息椭圆在 4 维空间中有定义，我们已经分析了 Σ_i 的结构，如果取第一个移动节点为目标节点，两个移动节点之间的方向向量为 $\boldsymbol{u}$,RII 为 $\lambda_{1,2}$, 锚点对目标节点 FIM 贡献为 Σ_0 则移动节点的 EFIM 为 (这个应该可以从 4 维椭圆降维到 2 维解释)

$$\text{FIM} = \boldsymbol{\Sigma}_0 + \lambda_{1,2}\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T - \lambda_{1,2}^2 \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T (\boldsymbol{\Sigma}_1 + \lambda_{1,2}\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T)^{-1}\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T \tag{15}$$

进一步化简有

$$\text{FIM} = \boldsymbol{\Sigma}_0 + \lambda_{1,2}(1 - \lambda_{1,2}\boldsymbol{u}^T(\boldsymbol{\Sigma}_1 + \lambda_{1,2}\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T)^{-1}\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T \tag{16}$$

• 根据 Woodbury 矩阵求逆公式

$$(A+UCV)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}U(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1} \tag{17}$$

将式 (16) 代入上式，化简得:

$$\text{FIM}=\boldsymbol{\Sigma}_0+\xi_{1,2}\lambda_{1,2}\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T \tag{18}$$

其中 $\xi_{1,2}=\frac{1}{1+\lambda_{1,2}\boldsymbol{u}\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}\boldsymbol{u}}$