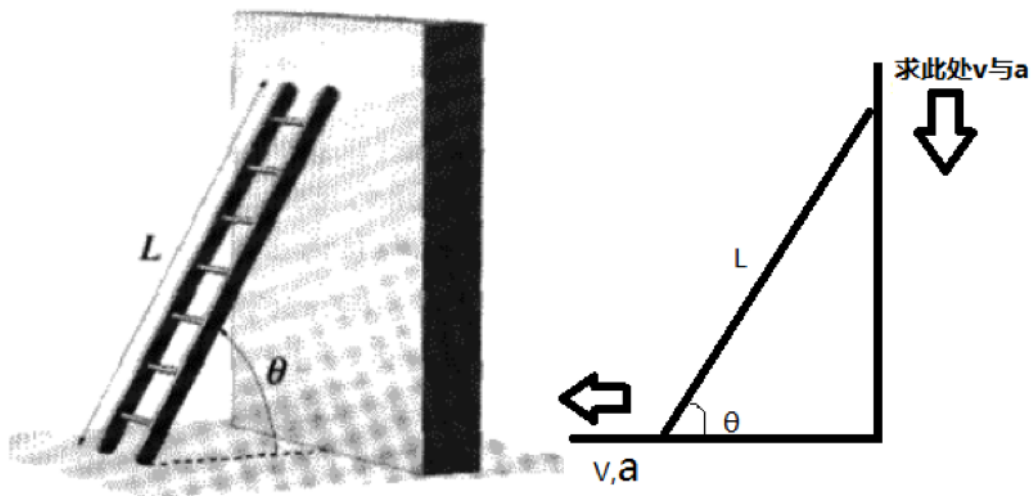


经典力学引论结业考试

考试时间：2015 年 8 月 16 日 14: 30-17: 00

试题说明：本次考试共有 5 道题目，每题 20 分，满分 100 分。

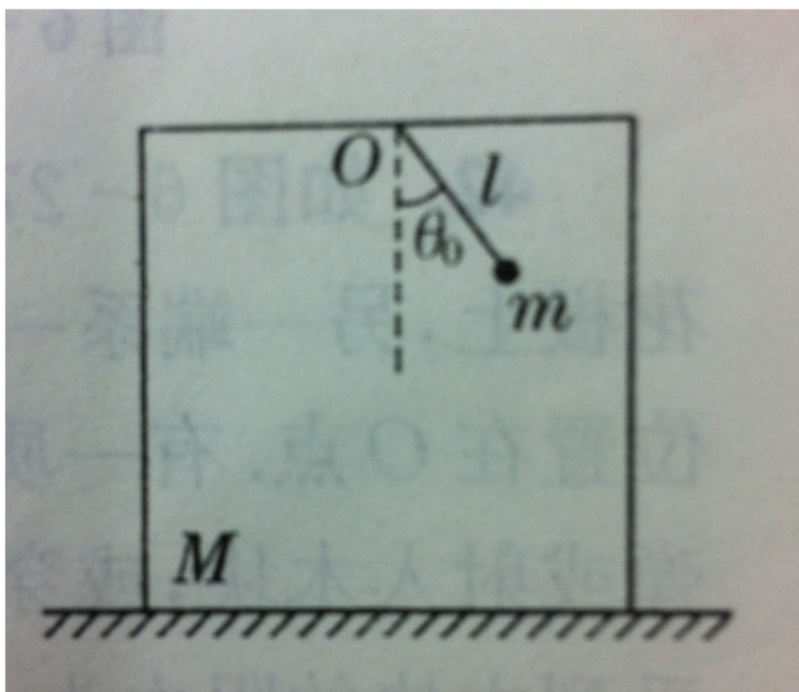
一：一长为 L 的梯子斜靠在墙面上，如图一所示。



图一

1. 若梯子沿墙面下滑，且与地面接触，已知某时刻梯子与地面的夹角为 θ ，且梯子与地面接触点处的速度为 v ，加速度为 a ，求此时刻梯子与墙面接触点的速度与加速度。
2. 若梯子质量分布均匀，且梯子与地面、梯子与墙面的最大静摩擦系数均为 μ ，已知梯子在与地面夹角为 θ 时保持静止，求 μ 的最小值，结果要用 θ 的三角函数表示。

二：光滑的水平地面上有一质量为 M 的滑块，滑块表面上有一质量可忽略的钉子 O ， O 处绕着长为 l 的轻绳，绳下系着质量为 m 的小球。开始时系统处于静止状态，如图二所示，轻绳与铅垂方向夹角为 θ_0 ，然后让小球自由摆下。

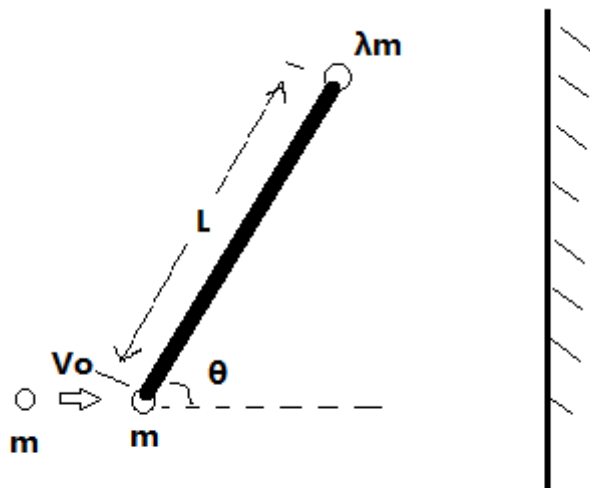


图二

1. 求小球摆到 O 点正下方时轻绳对小球的拉力。
2. 在地面参考系中，求小球运动的轨迹方程，并求此轨迹在最低点处的曲率半径。

三：宇航员从空间站（绕地球运行）上释放了一颗探测卫星。该卫星通过一条柔软的细轻绳与空间站连接，稳定时卫星始终在空间站的正下方，到空间站的距离为 l ，已知空间站的轨道为圆形，轨道半径为 R_1 ，取地球半径为 R ，忽略卫星拉力对空间站轨道的影响。假设某一时刻卫星突然脱离轻绳，若卫星不会撞上地球，绳长 l 需满足什么条件（用含 l 的不等式表示），并在卫星不会撞上地球的条件下，求卫星运动轨道的离心率。

四：一根长为 L 的轻质刚性棒的两端分别连接着质量为 m 和 λm ($\lambda > 2$) 质点。现将此棒放在光滑的桌面上，并用一个质量为 m ，速度为 v_0 的质点与棒端质量为 m 的质点相碰。已知 v_0 的方向与棒的夹角为 θ ($0 < \theta < \pi/2$)，并设碰撞为弹性碰撞，且碰撞之后质点沿原直线返回。



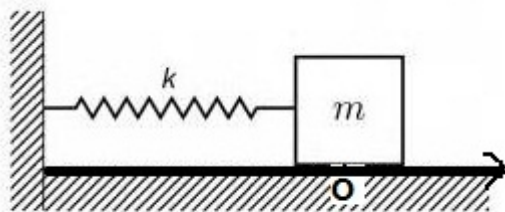
图三

1. 求碰撞后棒的角速度。
2. 若桌面上与 v_0 垂直的方向上有一固定的光滑挡板，棒的质心距档板的距离不大于

$\pi L/2$ (此条件具有误导性! 事实上用不到)。棒与质点 m 碰撞后棒将向挡板移动，若棒与挡板碰撞时恰好与挡板平行，且碰撞为弹性碰撞，若要使碰撞后棒的角速度大小为 v_0/L ，则 λ 与 θ 必须满足什么条件? 并根据此条件计算 $\lambda = 4$ 时， θ 的值。

五:

水平桌面上质量为 m 的物块由一劲度系数为 k 的轻弹簧连接，弹簧的另一端固定在墙面上，已知物块与桌面的摩擦系数为 μ 。初始时将物块从弹簧原长处（取为坐标原点 O ，且假定弹簧足够长）拉伸 $\lambda \mu mg/k$ 的距离后无初速释放 ($\lambda > 1$)。



1. 释放后若物块可越过 O 点，则 λ 必须满足什么条件，这时物块（第一次）越过 O 点速度是多少？
2. 释放后若物块可至少两次通过 O 点，写出物块从开始运动 ($t=0$) 到第二次通过 O 点位移 x 对时间的关系式 $x(t)$ （注明 t 的范围）并画出相应时间段的 $x(t)$ 图象。（此问如有必要，可用反三角函数表示相应结果）。
- (3) 对一般的 λ ，求物块从释放到最终静止经历的时间。