无线网络中定位信息的时空传播机理研究

赵丰

Institute of Mathematics
Tsinghua University

March 17, 2017

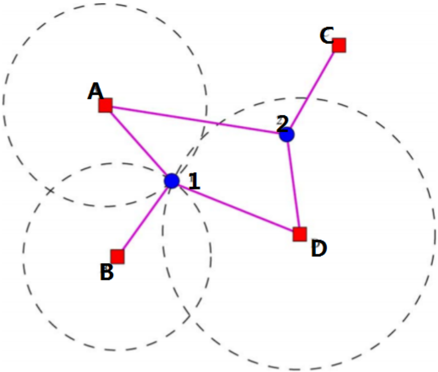
本次展示的内容分如下四个部分：

- 问题的数学模型
- 研究基础
- 已经取得的进展
- 遇到的问题

问题的数学模型

非协作定位场景

考虑一个平面定位场景中部署了 N_b 个锚点，锚点的位置是已知的, 记为 $\{\boldsymbol{p}_1^b, \boldsymbol{p}_2^b, ...\boldsymbol{p}_{N_b}^b\}$, 现在要对场景中一个移动节点进行定位，待定位的移动节点的位置为 $\boldsymbol{p}$，在我们考虑的场景中，移动节点移动的范围相对场景的尺度可忽略，即 $\boldsymbol{p}$ 可以近似成不随时间变化的量。



问题的数学模型

非协作定位场景

现在假设移动节点和每一个锚点都可以相互通信进行无线测距，得到一个包含距离信息的函数 $f(||\boldsymbol{p}_i^b - \boldsymbol{p}||)$ 送到中央处理器进行汇总。

实际情形中每个测量量都伴随有噪声，假设噪声是零均值，方差为 σ 的正态分布 X_i。

现在假设移动节点和每一个锚点都可以相互通信进行无线测距，得到一个包含距离信息的函数 $f(||\boldsymbol{p}_i^b - \boldsymbol{p}||)$ 送到中央处理器进行汇总。

实际情形中每个测量量都伴随有噪声，假设噪声是零均值，方差为 σ 的正态分布 X_i。中央处理器汇总各个锚点发的信息，可以得到移动节点的联合概率分布为: 联合概率密度函数为:

$$f(x_1, \ldots x_{N_b}|\boldsymbol{p}) = \prod_{i=1}^{N_b} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp(-\frac{(x_i - f(||\boldsymbol{p}_i^b - \boldsymbol{p}||))^2}{2\sigma^2} \tag{1}$$

从上面的联合分布可以数值求解移动节点的位置估计量，根据点估计的理论，对于一个无偏估计量，它的方差的下界是费舍尔信息量的倒数，称之为克拉米罗界 (CRLB)。

对于高维的情形，费舍尔信息量可以推广为费舍尔信息矩阵 (FIM),FIM 的计算公式为:

$$I(\boldsymbol{p}) = -E_{\boldsymbol{x}}\left(\frac{\partial \log f(\vec{x}|\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{p}}\left(\frac{\partial \log f(\vec{x}|\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{p}}\right)^T\right) \tag{2}$$

对于高维的情形，费舍尔信息量可以推广为费舍尔信息矩阵 (FIM),FIM 的计算公式为:

$$I(\boldsymbol{p}) = -E_{\boldsymbol{x}}\left(\frac{\partial \log f(\vec{x}|\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{p}}\left(\frac{\partial \log f(\vec{x}|\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{p}}\right)^T\right) \tag{2}$$

对于上面的模型问题，FIM 有如下的形式：

$$I(\boldsymbol{p}) = \sum_{i=1}^{N_b} \frac{f'^2}{2\sigma^2}\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i^T \tag{3}$$

其中

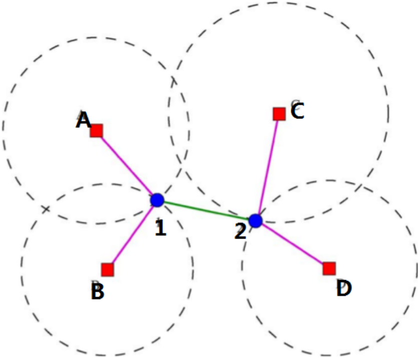
$$\boldsymbol{u_i} = \frac{\boldsymbol{p}_i^b - \boldsymbol{p}}{||\boldsymbol{p}_i^b - \boldsymbol{p}||} \tag{4}$$

问题的数学模型

协作定位场景

上一页中的 $\frac{f'^2}{2\sigma^2} =: \lambda$ 被称为测距信息强度 (RII)。我的研究重点是节点的几何位置对定位误差下界的影响，我会把不同锚点的 RII 近似为常数考虑。

如果定位场景中有 N_a 个移动节点，有些移动节点之前可以相互通信测量彼此间的距离，



现在把这 N_a 个移动节点的位置 $\{p_i^a\}$ 作为待估计的参数，可以得到它们的联合概率密度函数为

$$\prod_{i=1}^{N_a} f(x_1^i, \ldots x_{N_b}^i | \boldsymbol{p_i^a}) \prod_{(i,j)\in E} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp(-\frac{(x_{ij} - f(||\boldsymbol{p}_i^a - \boldsymbol{p}_j^a||))^2}{2\sigma^2}) \tag{5}$$

现在把这 N_a 个移动节点的位置 $\{p_i^a\}$ 作为待估计的参数，可以得到它们的联合概率密度函数为

$$\prod_{i=1}^{N_a} f(x_1^i, \ldots x_{N_b}^i | \boldsymbol{p}_i^a) \prod_{(i,j)\in E} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp(-\frac{(x_{ij} - f(||\boldsymbol{p}_i^a - \boldsymbol{p}_j^a||))^2}{2\sigma^2}) \quad (5)$$

上式乘积中第一项是 N_b 个锚点的贡献，第二项是连乘式是移动节点协作的贡献，其中 $(i,j) \in E$ 表示节点 i,j 之间有协作。仿照之前的推导，可以得到 N_a 个移动节点的联合 FIM 为

问题的数学模型

协作定位场景

$$I(\boldsymbol{P}) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} I_B(\boldsymbol{p}_1)+ \\ \sum_{j\in\{1,..N_a\}\setminus\{1\}} \boldsymbol{C}_{1,j} \end{matrix} & -\boldsymbol{C}_{1,2} & \cdots & -\boldsymbol{C}_{1,N_a} \\ -\boldsymbol{C}_{1,2} & \begin{matrix} I_B(\boldsymbol{p}_2)+ \\ \sum_{j\in\{1,..N_a\}\setminus\{2\}} \boldsymbol{C}_{2,j} \end{matrix} & \cdots & -\boldsymbol{C}_{2,N_a} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\boldsymbol{C}_{1,N_a} & -\boldsymbol{C}_{2,N_a} & \cdots & \begin{matrix} I_B(\boldsymbol{p}_{N_a})+ \\ \sum_{j\in\{1,..N_a\}\setminus\{N_a\}} \boldsymbol{C}_{N_a,j} \end{matrix} \end{pmatrix} \tag{6}$$

问题的数学模型

协作定位场景

$$I(\boldsymbol{P}) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} I_B(\boldsymbol{p}_1)+ \\ \sum_{j\in\{1,..N_a\}\backslash\{1\}} \boldsymbol{C}_{1,j} \end{matrix} & -\boldsymbol{C}_{1,2} & \cdots & -\boldsymbol{C}_{1,N_a} \\ -\boldsymbol{C}_{1,2} & \begin{matrix} I_B(\boldsymbol{p}_2)+ \\ \sum_{j\in\{1,..N_a\}\backslash\{2\}} \boldsymbol{C}_{2,j} \end{matrix} & \cdots & -\boldsymbol{C}_{2,N_a} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\boldsymbol{C}_{1,N_a} & -\boldsymbol{C}_{2,N_a} & \cdots & \begin{matrix} I_B(\boldsymbol{p}_{N_a})+ \\ \sum_{j\in\{1,..N_a\}\backslash\{N_a\}} \boldsymbol{C}_{N_a,j} \end{matrix} \end{pmatrix} \tag{6}$$

上面的式子中 $I_B(\boldsymbol{p}_i)$ 表示 N_b 个锚点对移动节点 i 的贡献，和前面推导的只有锚点的情况相同。$C_{i,j}$ 表示移动节点 i 和 j 协作的矩阵，其具有 $\mathbf{1}_{(i,j)\in E}\lambda_{i,j}\boldsymbol{u}_{ij}\boldsymbol{u}_{ij}^T$ 的形式,$\boldsymbol{u}_{ij}$ 是两个移动节点间的单位方向向量, 如果 i,j 之间没有通信，该位置为全零的 2 阶方阵。

- 问题的数学模型
- 研究基础
- 已经取得的进展
- 遇到的问题

直接从定义研究 CRLB 是比较困难的，在前人的工作中，通过等效费舍尔信息矩阵 (EFIM) 的方法避免了直接对 FIM 求逆的问题。

设参数 $\theta = \binom{\theta_1}{\theta_2}$,FIM I_θ 为 $\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix}$, 那么

$$E||\hat{\theta}_1 - \theta_1||^2 \geq \mathrm{tr}\{I(\theta_1)^{-1}_{2\times 2}\}$$

其中 $I(\theta_1) = A - BC^{-1}B^T$。

我们把上面不等式右边的项叫做关于参数 θ_1 的空间定位误差下界 (SPEB)。

基于 EFIM, 在前人的文章中获得了当 θ 的维数不超过 8(相当于 4 个移动节点) 时 $I(\theta_1)$ 的闭式解。

研究基础

信息椭圆

从矩阵代数的角度考虑 CRLB 比较困难，如果能结合一些几何的洞见有些情况下能预见和解释某些结果。

信息椭圆是参数空间 θ 上由 FIM 定义的空间曲面:

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{I}_{\theta}^{-1}\boldsymbol{x}^{T} = 1 \tag{7}$$

在后续推导过程中，常涉及单位矩阵和秩一矩阵的克罗内克积相加求逆的形式，在这种情况下利用 Woodbury 矩阵求逆公式可以对求逆符号做展开，一般的结论是如果 A,C 均是可逆的方阵，那么

$$(A+UCV)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}U(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1} \tag{8}$$

- 问题的数学模型
- 研究基础
- 已经取得的进展
- 遇到的问题

已经取得的进展

从二维平面投影的角度对非协作定位场景下的信息椭圆的刻划

研究二维情形下由 $I(\boldsymbol{p}) = \sum \lambda_i \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i^T$ 决定的信息椭圆的形状，即找到椭圆的主轴（特征向量）和长短轴的长度（与特征值有关）, 注意到这个矩阵右乘 $\boldsymbol{x}$, 相当于 $\boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{u}_i$ 方向上的投影乘以伸缩因子 λ_i 后再矢量相加。用复数表示比较简洁，设 $\boldsymbol{x} = e^{j\theta}, \boldsymbol{u}_i = e^{j\phi_i}, \lambda$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的特征值，由 $I(\boldsymbol{p})\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ 可以得到

已经取得的进展

从二维平面投影的角度对非协作定位场景下的信息椭圆的刻划

研究二维情形下由 $I(\boldsymbol{p}) = \sum \lambda_i \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i^T$ 决定的信息椭圆的形状，即找到椭圆的主轴（特征向量）和长短轴的长度（与特征值有关），注意到这个矩阵右乘 $\boldsymbol{x}$, 相当于 $\boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{u}_i$ 方向上的投影乘以伸缩因子 λ_i 后再矢量相加。用复数表示比较简洁，设 $\boldsymbol{x} = e^{j\theta}, \boldsymbol{u}_i = e^{j\phi_i}, \lambda$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的特征值，由 $I(\boldsymbol{p})\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ 可以得到

$$\sum \lambda_i \cos(\theta - \phi_i) e^{j\phi_i} = \lambda e^{i\theta} \tag{9}$$

利用虚部为 0 的条件，可以进一步得到：θ 满足方程

$$\sum \lambda_i \sin(2(\theta - \phi_i)) = 0 \tag{10}$$

$$\lambda = \sum \lambda_i \cos^2(\theta - \phi_i) \tag{11}$$

对方程 (10) 解的刻划，我们有如下定理:

Theorem 1

关于 θ 的方程 (10) 在 (0,$\pi/2$) 区间里的解存在且唯一，并且如果 θ_0 是方程 (10) 在 (0,$\pi/2$) 区间的解，那么 $\theta_0+\pi/2$ 是方程 (10) 在 (0,$\pi/2$) 区间的唯一解。

对方程 (10) 解的刻划，我们有如下定理:

Theorem 1

关于 θ 的方程 *(10)* 在 $(0,\pi/2)$ 区间里的解存在且唯一，并且如果 θ_0 是方程 *(10)* 在 $(0,\pi/2)$ 区间的解，那么 $\theta_0+\pi/2$ 是方程 *(10)* 在 $(0,\pi/2)$ 区间的唯一解。

求解方程 (10) 在 $(0,\pi)$ 区间两个解是：

$$
\begin{aligned}
\tan(\theta) &= -K \pm \sqrt{1+K^2} \\
\lambda &= (\sum \lambda_i)/2 \pm J\sqrt{K^2+1}/2 \\
K &= \frac{\sum \cos(2\phi_i)\lambda_i}{\sum \sin(2\phi_i)\lambda_i} \\
J &= \sum \lambda_i \sin(2\phi_i)
\end{aligned}
\tag{12}
$$

已经取得的进展

从二维平面投影的角度对非协作定位场景下的信息椭圆的刻划

将 θ 的结果代入 SPEB 的表达式中，可以得到:

$$\mathrm{SPEB} = \frac{2\sum \lambda_i}{(\sum \lambda_i)^2 - J^2(K^2+1)} \tag{13}$$

在 RII 不变的条件下，通过分析改变锚点的部署方式使 SPEB 最小，我们得出如下结论：

- 场景中如果增加一个新的锚点，新的锚点与待测移动节点的连线如果沿原信息椭圆的短半轴部署，SPEB 最小。
- 场景中如果增加两个新的锚点，通过两个新的锚点的部署 SPEB 最小，此时 $\mathrm{SPEB}_{op} = \frac{2}{\sum \lambda_i}$

已经取得的进展

秩一矩阵的克罗内克积对原有矩阵扰动的视角

已经取得的进展

借助瑞利商求 FIM 最大和最小特征值

- 问题的数学模型
- 研究基础
- 已经取得的进展
- 遇到的问题

参考文献 I

Woodbury matrix identity.
https://en.wikipedia.org/wiki/Woodbury_matrix_identity

Yuan Shen
Fundamental Limits Wideband Localization