清华大学深圳研究生院

应用信息论

2018 年春季学期

习题 4、5

赵丰 2018 年 6 月 25 日

---

1 设有离散无记忆信道，设 $\bar{I}(X,Y)$ 是输入输出的函数，为一随机变量，取值为 $\bar{I}(a_i,b_j)=\log\frac{P(X=a_i,Y=b_j)}{P(X=a_i)P(Y=b_j)}$，取该值的概率为 $P(X=a_i,Y=b_j)$。易知 X 与 Y 的互信息为 $\bar{I}(X,Y)$ 的均值。证明当 $\mathrm{Var}[\bar{I}(X,Y)]=0$ 时，$\mathbb{E}[\bar{I}(X;Y)]$ 达到信道容量。

解. $\mathrm{Var}[\bar{I}(X,Y)]=0\Rightarrow\bar{I}(X,Y)=C'$ 因此 $I(X=a_i;Y)=\sum_j P(Y=b_j|X=a_i)\bar{I}(a_i,b_j)=C'$ 由离散无记忆信道的信道容量定理可得平均互信息达到信道容量。

2 设某信道的输入 X 取值为 $\{+1,-1\}$, 又信道有加性噪声 n，其分布密度为 $p(n)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & |n|\le 2\\ 0, & |n|>2\end{cases}$，求信道容量。

解.

$$\begin{aligned}I(X;Y)&=H(Y)-H(Y|X)\\&=H(Y)-2\end{aligned}$$

当 $X\sim Bern(\frac{1}{2})$ 时，$p(y)=\begin{cases}\frac{1}{8}, & 1\le|y|\le 3\\ \frac{1}{4}, & |y|<1\\ 0, & |y|>3\end{cases}$ 在这种情形下 $H(Y)=2.5\Rightarrow I(X;Y)=0.5$

对于 $\Pr(X=1)=p$ 的情形，$p(y)=\begin{cases}\frac{1}{4}p, & 1\le y\le 3\\ \frac{1}{4}(1-p), & -3\le y\le -1\end{cases}$，其余与 $p=\frac{1}{2}$ 相同。则 $I(X;Y)=\frac{1}{2}h(p)$, 其中 $h(p)$ 为二元熵函数。因此当 $p=\frac{1}{2}$ 时 $I(X;Y)$ 最大, 达到信道容量 $C=\frac{1}{2}$。

3 设 X 和 Y 为信道的输入和输出，两者均取值于集合 $A=\{a_1,a_2,\dots,a_K\}$。已知 $p(x=a_k)=p_k, p(y=a_j|x=a_k)=p_{kj}$，定义 $P_e=\sum_k p_k\sum_{j\neq k}p_{kj}$ 求证:

$$H(X|Y)\le P_e\log(K-1)+H(P_e)\tag{1}$$

其中 $H(P_e)$ 是关于 P_e 的二元熵函数。

证明. 设 $p(y=a_j|x=a_k)$ 描述了一个离散无记忆的信道，X 是信道输入，Y 是信道输出，现设 $\hat{X}=Y$，即用信道输出值来解码 X，错误概率为 P_e，由 Fano 不等式可知 (1) 成立。 □

4 已知信道转移概率矩阵如表 1 所示，求此信道的信道容量。

x \ y	0	1	2	3
0	1/3	1/3	1/6	1/6
1	1/6	1/3	1/6	1/3

表 1: 信道转移概率矩阵

解. 由准对称信道的信道容量定理，当输入分布为 $Bern(\frac{1}{2})$ 时，达到信道容量。可以求出此时 $C=I(X;Y)=H(Y)-H(Y|X)=0.041$

5 设有信道，输入 X 的字母表为：$\{0,1,2,\ldots,K-1\}$, 噪声为独立加性噪声 Z，Z 的取值也在 $\{0,1,2,\ldots,K-1\}$ 的集合中，但两者相加为模 K 相加，即输出 $Y=X\bigoplus Z$（模 K），试求此信道的信道容量。

解. 此 DMC 信道是对称信道，转移概率矩阵是 Toeplitz 矩阵。行元素为 $P_Z(0),P_Z(1),\ldots P_Z(K-1)$，由 DMC 对称信道的信道容量公式得 $C=\log(K)-H(Z)$

6 设有输入为 X 输出为 $Y=[Y_1,Y_2]$ 的高斯信道，其中 $Y_1=X+Z_1, Y_2=X+Z_2$, X 的最大功率受限为 P, $(Z_1,Z_2)\sim N_2(0,K)$, 其中 $K=\begin{bmatrix}\sigma^2 & \rho\sigma^2\\ \rho\sigma^2 & \sigma^2\end{bmatrix}$，试求：

1) $I(X;Y_1,Y_2)=I(X;Y_1)+I(X;Y_2)-I(Y_1;Y_2)+I(Y_1;Y_2|X)$
2) $\rho=1$ 时的信道容量。

解. 1)

$$
\begin{aligned}
I(X;Y_1,Y_2) &= H(X)+H(Y_1,Y_2)-H(X,Y_1,Y_2)\\
I(X;Y_1) &= H(X)+H(Y_1)-H(X,Y_1)\\
I(X;Y_2) &= H(X)+H(Y_2)-H(X,Y_2)\\
I(Y_1;Y_2) &= H(Y_1)+H(Y_2)-H(Y_1,Y_2)\\
I(Y_1;Y_2|X) &= H(Y_1|X)+H(Y_2|X)-H(Y_1,Y_2|X)\\
&= H(X,Y_1)+H(X,Y_2)-H(X,Y_1,Y_2)-H(X)
\end{aligned}
$$

直接计算有
$I(X;Y_1,Y_2)=I(X;Y_1)+I(X;Y_2)-I(Y_1;Y_2)+I(Y_1;Y_2|X)$。

2) $\rho=1$ 时的信道容量。$\rho=1$ 时 Z_1 与 Z_2 几乎处处相等
$\Rightarrow Y_1 \overset{as}{=} Y_2$。由 1) 可以得到 $I(X;Y_1,Y_2)=I(X;Y_1)$ 由已知结论，
$C=\frac{1}{2}\log(1+\frac{P}{\sigma^2})$