Tsinghua-Berkeley Shenzhen Institute
INFERENCE AND INFORMATION
Fall 2017

Homework 4

赵丰 March 17, 2018

- **Acknowledgments:** This coursework referes to wikipedia: `https://en.wikipedia.org`.
- **Collaborators:** I finish this coursework by myself.

I use `enumerate` to generate answers for each question:

4.1.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathsf{m}_n] =& \mathbb{E}[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{x}_i] \\ =& \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[\mathsf{x}_i] \\ =& \mu\end{aligned}$$

因此 m_n 是 μ 的无偏估计量。

由 x_i 与 $rvx_j(i \neq j)$ 相互独立 $\Rightarrow$

$$E[(\mathsf{x}_i - \mu)(\mathsf{x}_j - \mu)] = E[\mathsf{x}_i - \mu][\mathsf{x}_j - \mu] = 0$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(\mathsf{m}_n - \mu)^2] =& \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathsf{x}_i - \mu)\right)^2\right] \\ =& \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[(\mathsf{x}_i - \mu)^2] + \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1,i\neq j}^{n} E[(\mathsf{x}_i - \mu)(\mathsf{x}_j - \mu)] \\ =& \frac{\sigma^2}{n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{v}_n =& \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathsf{x}_i - \mu + \mu - \mathsf{m}_n)^2 \\ =& \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathsf{x}_i - \mu + \mu - \mathsf{m}_n)^2 \\ =& \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 - n(\mathsf{m}_n - \mu)^2\right) \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathsf{v}_n] =&\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[(x_i-\mu)^2]-n\,\mathbb{E}[(\mathsf{m}_n-\mu)^2]\right)\\ =&\frac{1}{n-1}(n\sigma^2-\sigma^2)\\ =&\sigma^2\end{aligned}$$

因此 v_n 是 σ^2 的无偏估计量。

4.2. (a) $\hat{x}_{\mathrm{BLS}}(\mathsf{y}) = \mathsf{y}^{\frac{1}{3}}$

(b) 由 LLS 估计的公式：

$$\hat{\mathsf{x}}_{\mathrm{LLS}}(\mathsf{y}) = \mu_{\mathsf{x}} + \Lambda_{\mathsf{xy}}\Lambda_{\mathsf{y}}^{-1}(\mathsf{y}-\mu_{\mathsf{y}})$$

代入 $\mu_{\mathsf{x}} = g_1, \mu_{\mathsf{y}} = g_3, \Lambda_{\mathsf{y}} = g_6 - g_3^2, \Lambda_{\mathsf{xy}} = g_4 - g_1 g_3$ 所以

$$\hat{\mathsf{x}}_{\mathrm{LLS}}(\mathsf{y}) = g_1 + \frac{g_4 - g_1 g_3}{g_6 - g_3^2}(\mathsf{y} - g_3)$$

因为 x 的密度函数关于 0 对称，$g_1 = g_3 = 0 \Rightarrow \hat{\mathsf{x}}_{\mathrm{LLS}}(\mathsf{y}) = \frac{g_4}{g_6}\mathsf{y}$

(c)

$$\hat{\mathsf{x}}_{\mathrm{LLS}}(\underline{\mathsf{y}}) = \frac{2}{3}\mathsf{z}_1 + \frac{1}{3}\mathsf{z}_2$$

并且 $\mathrm{MSE}[\hat{\mathsf{x}}_{\mathrm{LLS}}] = 0$

(d) x 的后验概率是各以 $\frac{1}{2}$ 概率等于 $\pm\sqrt{\mathsf{v}}$, 所以 $\hat{x}_{\mathrm{BLS}}(\mathsf{v}) = 0$

4.3. (a) 反设存在这样的估计量 $\hat{x}(\mathsf{y})$, 那么 $\forall x > 0$, 下式成立：

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{x}(y) p_{\mathsf{y}}(y;x)dy = x$$

代入题目中已知的概率分布得:

$$\int_0^{\frac{1}{x}} \hat{x}(y)dy = 1$$

由于 x 是任意的，可以推出 $\hat{x}(y)$ 在正半轴任意区间积分为 0，取正半轴的左端点趋近 0 得矛盾 (积分为零不为 1)。因此对于给定的分布不存在关于 x 的无偏估计量。

(b) 存在 $\hat{x}(\mathsf{y}) = 2\mathsf{y}$,

$$\mathbb{E}[\hat{x}(\mathsf{y})] = \frac{1}{x}\int_0^x 2y dy = x$$

因此 $\hat{x}(\mathsf{y})$ 是无偏的。又 $\mathrm{Var}[\hat{x}(\mathsf{y})] = x^2$, 恰好达到 CRB 下界 $\frac{1}{J_{\mathsf{y}}(x)}$ 其中 $J_{\mathsf{y}}(x)$ 按定义式计算：

$$J_{\mathsf{y}}(x) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\ln p_{\mathsf{y}}(y;x)\right)^2\right]$$

4.4. $x[0], x[1], \ldots, x[N-1]$ 的似然函数为：

$$\ln p_{\underline{\mathsf{x}}}(\underline{\mathsf{x}}; a) = \frac{-1}{2\sigma^2} \sum_{i=0}^{N-1} (x[i] - ar^i)^2 + c$$

$$\begin{aligned} J_{\underline{\mathsf{x}}}(a) &= -\mathbb{E}[\frac{\partial^2}{\partial a^2} \ln p_{\underline{\mathsf{x}}}(\underline{\mathsf{x}}; a)] \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=0}^{N-1} r^{2i} \end{aligned}$$

$$\hat{a}(\underline{\mathsf{x}}) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} x[i] r^i}{\sum_{i=0}^{N-1} r^{2i}}$$

可以验证

$$\mathrm{Var}[\hat{a}(\underline{\mathsf{x}})] = \frac{1}{J_{\underline{\mathsf{x}}}(a)}$$

因此构造的 $\hat{a}(\underline{\mathsf{x}})$ 是有效估计量。c 是与 a 无关的常数。

4.5. Thanks to 陆石, who gives me this template.