1 多变量联合典型序列

随机向量 $(X_1,\ldots,X_k)$ 的 ϵ 典型且长度为 n 的序列 $(x_1,\ldots,x_k)$ 所构成的集合 $A_\epsilon^{(n)}$ 定义为

$$A_\epsilon^{(n)} = \{(x_1,\ldots,x_k) : |-\frac{1}{n}\log p(\boldsymbol{s}) - H(S)| < \epsilon, \forall S \subset \{X_1,\ldots,X_k\}\}$$

其中 $p(\boldsymbol{s}) = \prod_{i=1}^n \Pr\{S_i = s_i\}$ 并记 $A_\epsilon^{(n)}(S)$ 为 $A_\epsilon^{(n)}$ 限制在 S 上的典型集。

性质：

1. 当 n 充分大时，$|A_\epsilon^{(n)}| \geq 2^{-n(H(S)-2\epsilon)}$

   证明. 当 n 充分大时，有 $\Pr\{A_\epsilon^{(n)}(S)\} \geq 1-\epsilon \geq 2^{-n\epsilon}$

   $$\begin{aligned} 2^{-n\epsilon} &\leq \sum_{\boldsymbol{s}\in A_\epsilon^{(n)}(S)} p(\boldsymbol{s}) && (1) \\ &\leq \sum_{\boldsymbol{s}\in A_\epsilon^{(n)}(S)} 2^{-n(H(S)-\epsilon)} && (2) \\ &\leq |A_\epsilon^{(n)}(S)| 2^{-n(H(S)-\epsilon)} && (3) \end{aligned}$$

   所以 $|A_\epsilon^{(n)}(S)| \geq 2^{n(H(S)-2\epsilon)}$ □

2. 若 $S_1, S_2 \subset \{X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(k)}\}$。如果 $(\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2) \in A_\epsilon^{(n)}(S_1,S_2)$，则有：

   $$2^{-n(H(S_1|S_2)+2\epsilon)} \leq p(\boldsymbol{s}_1|\boldsymbol{s}_2) \leq 2^{-n(H(S_1|S_2)-2\epsilon)} \tag{4}$$

   证明.

   $$2^{-n(H(S_1,S_2)+\epsilon)} \leq p(\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2) \leq 2^{-n(H(S_1,S_2)-\epsilon)} \tag{5}$$

   $$2^{-n(H(S_2)+\epsilon)} \leq p(\boldsymbol{s}_2) \leq 2^{-n(H(S_2)-\epsilon)} \tag{6}$$

   利用 $p(\boldsymbol{s}_1|\boldsymbol{s}_2) = \frac{p(\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2)}{p(\boldsymbol{s}_2)}$ 和 $H(S_1|S_2) = H(S_1,S_2) - H(S_2)$ 即可得证。 □

3. 给定 $\boldsymbol{s}_2 \in A_\epsilon^{(n)}(S_2)$，记 $A_\epsilon^{(n)}(S_1|\boldsymbol{s}_2)$ 为与给定序列 $\boldsymbol{s}_2$ 构成联合典型的所有序列的集合，则

   $$|A_\epsilon^{(n)}(S_1|\boldsymbol{s}_2)| \leq 2^{n(H(S_1|S_2)+2\epsilon)} \tag{7}$$

   $$(1-\epsilon)2^{n(H(S_1|S_2)-2\epsilon)} \leq \sum_{\boldsymbol{s}_2} p(\boldsymbol{s}_2)|A_\epsilon^{(n)}(S_1|\boldsymbol{s}_2)| \tag{8}$$

证明. 根据 (4) 可得

$$\begin{aligned} 1 &\geq \sum_{\boldsymbol{s}_1 \in A_\epsilon^{(n)}(S_1|\boldsymbol{s}_2)} p(\boldsymbol{s}_1|\boldsymbol{s}_2) \\ &\geq 2^{-n(H(S_1|S_2)+2\epsilon)} |A_\epsilon^{(n)}(S_1|\boldsymbol{s}_2)| \end{aligned}$$

另一方面，由 $1-\epsilon \leq \Pr\{A_\epsilon^{(n)}(S_1,S_2)\}$ 可得

$$\begin{aligned} 1-\epsilon &\leq \sum_{\boldsymbol{s}_2} p(\boldsymbol{s}_2) \sum_{\boldsymbol{s}_1 \in A_\epsilon^{(n)}(S_1|\boldsymbol{s}_2)} p(\boldsymbol{s}_1|\boldsymbol{s}_2) \\ &\leq \sum_{\boldsymbol{s}_2} p(\boldsymbol{s}_2) 2^{-n(H(S_1|S_2)-2\epsilon)} |A_\epsilon^{(n)}(S_1|\boldsymbol{s}_2)| \end{aligned}$$

□

2 多接入信道 (MAC)

m 个发送器,1 个接收器。以 $m=2$ 为例,信道构成为 $\{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, p(y|x_1,x_2), \mathcal{Y}\}$。
输入为两个消息集 $\mathcal{W}_i = \{1,2,\ldots,2^{nR_i}\}, i=1,2$。
编码函数：$X_i : \mathcal{W}_i \to \mathcal{X}^n, i=1,2$
译码函数：$g : \mathcal{Y} \to \mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2$。
多接入信道编码为 $((2^{nR_1}, 2^{nR_2}), n)$ 码。

- 独立的二元对称信道,容量区域为 $\left\{(R_1,R_2) \middle| \begin{array}{l} 0 \leq R_1 \leq 1-H(p_1) \\ 0 \leq R_2 \leq 1-H(p_2) \end{array} \right\}$,
  其中 p_1, p_2 分别是两个 BSC 的错误概率。
- 二元乘法信道,$Y = X_1X_2$, 容量区域为 $\{(R_1,R_2)|R_1 \geq 0, R_2 \geq 0, R_1+R_2 \leq 1\}$
- 二元擦除多接入信道 $Y = X_1+X_2$, 对应二元输入有三元输出。当 $Y=1$ 时，输入可能是 $(0,1)$ 或 $(1,0)$。当 $R_1=1$ 时，可取 $X_1 \sim Bern(\frac{1}{2})$ 达到。此时将 X_1 视为噪声，将 Y 的状态 $Y=1$ 视为二进制擦除信道的中间态，则 X_2 可达码率为 $\frac{1}{2}$。用 $X_1 = Y - X_2$ 即可解码 X_1。因此，容量区域为 $\left\{(R_1,R_2)|0 \leq R_1 \leq 1, 0 \leq R_2 \leq 1, R_1+R_2 \leq \frac{3}{2}\right\}$
- 高斯多接入信道的信道容量。固定 X_2，R_1 可达最大值 $\frac{1}{2}\log(1+\frac{P_1}{N})$；在 R_1 保持不变的情况下，将 X_1 视为 X_2 的噪声，则噪声总功率为 P_1+N。因此 X_2 可达速率为 $\frac{1}{2}\log(1+\frac{P_2}{N+P_1})$ 对于两输入的高斯多接入信道，容量区域为 $\{(R_1,R_2)|0 \leq R_1 \leq \frac{1}{2}\log(1+\frac{P_1}{N}), 0 \leq R_2 \leq \frac{1}{2}\log(1+\frac{P_2}{N}), R_1+R_2 \leq \frac{1}{2}\log(1+\frac{P_1+P_2}{N})\}$

3 广播信道

1 个发送器，m 个接收器。

面向公众广播 一个信息编码器，相同译码器独立译码

独立信息广播 用户信息联合编码，不同译码器独立译码

带公共信息的独立信息广播 用户信息和公共信息联合编码，不同译码器独立译码

以 $m = 2$ 为例，独立信息广播信道的信道构成为 $\{\mathcal{X}, p(y_1, y_2|x), \mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2\}$，为 $((2^{nR_1}, 2^{nR_2}), n)$ 码。

- 输入消息集为 $\mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2 = (\{1, \ldots, 2^{nR_1}\} \times \{1, \ldots, 2^{nR_2}\})$
- 编码函数 $X : \mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2 \to \mathcal{X}^n$
- 译码函数 $g_i : \mathcal{Y}_i^n \to \mathcal{W}_i, i = 1, 2$

对于带公共信息的广播信道，信道构成与独立信息广播信道相同，但输入的消息集多出公共部分 $\mathcal{W}_0 = \{1, \ldots, 2^{nR_0}\}$，为 $((2^{nR_0}, 2^{nR_1}, 2^{nR_2}), n)$ 码。