

# 无线网络中定位信息的时空传播机理研究

赵丰

数学科学系  
清华大学

2017 年 3 月 26 日

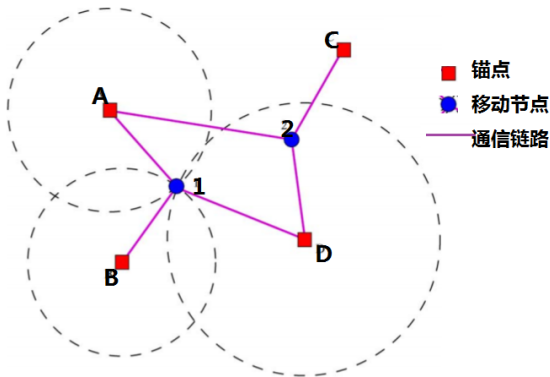
本次展示的内容分如下四个部分：

- ▶ 问题的数学模型
- ▶ 研究基础
- ▶ 已经取得的进展
  - ▶ 复数表示法对非协作定位场景下信息椭圆的刻画
  - ▶ 秩一矩阵的克罗内克积对原有矩阵扰动的视角
  - ▶ 借助瑞利商求 FIM 最大和最小特征值
- ▶ 遇到的问题

# 问题的数学模型

## 非协作定位场景

考虑一个平面定位场景中部署了  $N_b$  个锚点，锚点的位置是已知的, 记为  $\{\mathbf{p}_1^b, \mathbf{p}_2^b, \dots, \mathbf{p}_{N_b}^b\}$ , 现在要对场景中一个移动节点进行定位, 待定位的移动节点的位置为  $\mathbf{p}$ , 在我们考虑的场景中, 移动节点移动的范围相对场景的尺度可忽略, 即  $\mathbf{p}$  可以近似成不随时间变化的量。



# 问题的数学模型

## 非协作定位场景

现在假设移动节点和每一个锚点都可以相互通信进行无线测距，得到一个包含距离信息的函数  $f(\|\mathbf{p}_i^b - \mathbf{p}\|)$  送到中央处理器进行汇总。

实际情形中每个测量量都伴随有噪声，假设噪声是零均值，方差为  $\sigma$  的正态分布  $X_i$ 。

# 问题的数学模型

## 非协作定位场景

现在假设移动节点和每一个锚点都可以相互通信进行无线测距，得到一个包含距离信息的函数  $f(\|\mathbf{p}_i^b - \mathbf{p}\|)$  送到中央处理器进行汇总。

实际情形中每个测量量都伴随有噪声，假设噪声是零均值，方差为  $\sigma$  的正态分布  $X_i$ 。中央处理器汇总各个锚点发的信息，可以得到移动节点的联合概率分布为：

$$f(x_1, \dots, x_{N_b} | \mathbf{p}) = \prod_{i=1}^{N_b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \exp\left(-\frac{(x_i - f(\|\mathbf{p}_i^b - \mathbf{p}\|))^2}{2\sigma^2}\right) \quad (1)$$

从上面的联合分布可以数值求解移动节点的位置估计量，根据点估计的理论，对于一个无偏估计量，它的方差的下界是费舍尔信息量的倒数，称之为克拉米罗界 (CRLB)。

# 问题的数学模型

## 非协作定位场景

对于高维的情形，费舍尔信息量可以推广为费舍尔信息矩阵(FIM),FIM 的计算公式为:

$$I(\mathbf{p}) = -\mathbb{E}_{\mathbf{x}}(\nabla_{\mathbf{p}} \log f(\vec{\mathbf{x}}|\mathbf{p}))^T (\nabla_{\mathbf{p}} \log f(\vec{\mathbf{x}}|\mathbf{p})) \quad (2)$$

# 问题的数学模型

## 非协作定位场景

对于高维的情形，费舍尔信息量可以推广为费舍尔信息矩阵(FIM),FIM 的计算公式为:

$$I(\mathbf{p}) = -\mathbb{E}_{\mathbf{x}}(\nabla_{\mathbf{p}} \log f(\vec{\mathbf{x}}|\mathbf{p}))^T (\nabla_{\mathbf{p}} \log f(\vec{\mathbf{x}}|\mathbf{p})) \quad (2)$$

对于上面的模型问题，FIM 有如下的形式：

$$I(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{N_b} \frac{f'^2}{2\sigma^2} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T \quad (3)$$

其中

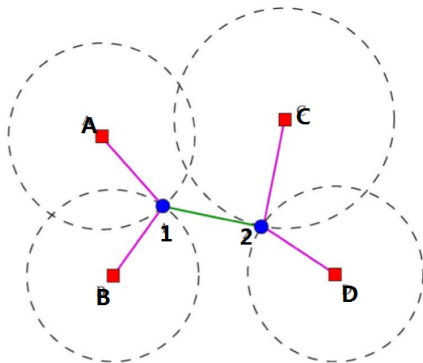
$$\mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{p}_i^b - \mathbf{p}}{\|\mathbf{p}_i^b - \mathbf{p}\|} \quad (4)$$

# 问题的数学模型

## 协作定位场景

上一页中的  $\frac{f'^2}{2\sigma^2} =: \lambda$  被称为测距信息强度 (RII)。我的研究重点是节点的几何位置对定位误差下界的影响，我会把不同锚点的 RII 近似为常数考虑。

如果定位场景中有  $N_a$  个移动节点，有些移动节点之间可以相互通信测量彼此间的距离，





# 问题的数学模型

## 协作定位场景

现在把这  $N_a$  个移动节点的位置  $\{p_i^a\}$  作为待估计的参数，可以得到它们的联合概率密度函数为

$$\prod_{i=1}^{N_a} f(x_1^i, \dots, x_{N_b}^i | p_i^a) \prod_{(i,j) \in E} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x_{ij} - f(\|p_i^a - p_j^a\|))^2}{2\sigma^2}\right) \quad (5)$$

# 问题的数学模型

## 协作定位场景

现在把这  $N_a$  个移动节点的位置  $\{p_i^a\}$  作为待估计的参数，可以得到它们的联合概率密度函数为

$$\prod_{i=1}^{N_a} f(x_1^i, \dots, x_{N_b}^i | p_i^a) \prod_{(i,j) \in E} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x_{ij} - f(\|p_i^a - p_j^a\|))^2}{2\sigma^2}\right) \quad (5)$$

上式乘积中第一项是  $N_b$  个锚点的贡献，第二项连乘式是移动节点协作的贡献，其中  $(i,j) \in E$  表示节点  $i,j$  之间有协作。仿照之前的推导，可以得到  $N_a$  个移动节点的联合 FIM 为

# 问题的数学模型

协作定位场景

$$I(\mathbf{P}) = \begin{pmatrix} I_B(\mathbf{p}_1) + \sum_{j \in \{1, \dots, N_a\} \setminus \{1\}} \mathbf{C}_{1,j} & -\mathbf{C}_{1,2} & \dots & -\mathbf{C}_{1,N_a} \\ -\mathbf{C}_{1,2} & I_B(\mathbf{p}_2) + \sum_{j \in \{1, \dots, N_a\} \setminus \{2\}} \mathbf{C}_{2,j} & \dots & -\mathbf{C}_{2,N_a} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathbf{C}_{1,N_a} & -\mathbf{C}_{2,N_a} & \dots & I_B(\mathbf{p}_{N_a}) + \sum_{j \in \{1, \dots, N_a\} \setminus \{N_a\}} \mathbf{C}_{N_a,j} \end{pmatrix} \quad (6)$$

# 问题的数学模型

## 协作定位场景

$$I(\mathbf{P}) = \begin{pmatrix} I_B(\mathbf{p}_1) + \sum_{j \in \{1, \dots, N_a\} \setminus \{1\}} \mathbf{C}_{1,j} & -\mathbf{C}_{1,2} & \dots & -\mathbf{C}_{1,N_a} \\ -\mathbf{C}_{1,2} & I_B(\mathbf{p}_2) + \sum_{j \in \{1, \dots, N_a\} \setminus \{2\}} \mathbf{C}_{2,j} & \dots & -\mathbf{C}_{2,N_a} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathbf{C}_{1,N_a} & -\mathbf{C}_{2,N_a} & \dots & I_B(\mathbf{p}_{N_a}) + \sum_{j \in \{1, \dots, N_a\} \setminus \{N_a\}} \mathbf{C}_{N_a,j} \end{pmatrix} \quad (6)$$

上面的式子中  $I_B(\mathbf{p}_i)$  表示  $N_b$  个锚点对移动节点  $i$  的贡献，和前面推导的只有锚点的情况相同。 $\mathbf{C}_{i,j}$  表示移动节点  $i$  和  $j$  协作的矩阵，其具有  $\mathbf{1}_{(i,j) \in E} \lambda_{i,j} \mathbf{u}_{ij} \mathbf{u}_{ij}^T$  的形式， $\mathbf{u}_{ij}$  是两个移动节点间的单位方向向量，如果  $i,j$  之间没有通信，该位置为零的 2 阶方阵。

- ▶ 问题的数学模型
- ▶ 研究基础
- ▶ 已经取得的进展
  - ▶ 复数表示法对非协作定位场景下信息椭圆的刻画
  - ▶ 秩一矩阵的克罗内克积对原有矩阵扰动的视角
  - ▶ 借助瑞利商求 FIM 最大和最小特征值
- ▶ 遇到的问题

# 研究基础

## 等效费舍尔信息矩阵

直接从定义研究 CRLB 是比较困难的, 在前人的工作中, 通过等效费舍尔信息矩阵 (EFIM) 的方法避免了直接对 FIM 求逆的问题。

设参数  $\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$ , FIM  $I(\theta)$  为  $\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix}$ , 那么

$$\mathbb{E} \|\hat{\theta}_1 - \theta_1\|^2 \geq \text{tr}\{I_E(\theta_1)^{-1}_{2 \times 2}\}$$

其中  $I_E(\theta_1) = A - BC^{-1}B^T$ 。

我们把上面不等式右边的项叫做关于参数  $\theta_1$  的定位误差平方下界 (SPEB), 由矩阵的相似变换可知, SPEB 等于  $I_E(\theta_1)$  的所有特征值的倒数和。

基于 EFIM, 在前人的文章中获得了当  $\theta$  的维数不超过 8 (相当于 4 个移动节点) 时  $I(\theta_1)$  的闭式解。

# 研究基础

## 信息椭圆

从矩阵代数的角度考虑 CRLB 比较困难，如果能结合一些几何的洞见有些情况下能预见和解释某些结果。

信息椭圆是参数空间  $\theta$  上由 FIM 定义的空间曲面：

$$\mathbf{x} \mathbf{I}_{\theta}^{-1} \mathbf{x}^T = 1 \quad (7)$$

# 研究基础

## 矩阵求逆公式

在后续推导过程中，常涉及单位矩阵和秩一矩阵的克罗内克积相加求逆的形式，在这种情况下利用 Woodbury 矩阵求逆公式可以对求逆符号做展开，一般的结论是如果  $A, C$  均是可逆的方阵，那么

$$(A + UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(C^{-1} + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1} \quad (8)$$



- ▶ 问题的数学模型
- ▶ 研究基础
- ▶ 已经取得的进展
  - ▶ 复数表示法对非协作定位场景下信息椭圆的刻画
  - ▶ 秩一矩阵的克罗内克积对原有矩阵扰动的视角
  - ▶ 借助瑞利商求 FIM 最大和最小特征值
- ▶ 遇到的问题

# 已经取得的进展

## 复数表示法对非协作定位场景下信息椭圆的刻画

研究二维情形下由  $I(\mathbf{p}) = \sum \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T$  决定的信息椭圆的形状, 即找到椭圆的主轴 (特征向量) 和长短轴的长度 (与特征值有关) 下面将二维向量看成复平面的复数,  $I(\mathbf{p})$  看成复平面上的线性算子, 作用规则是  $I(\mathbf{p})\mathbf{x} = \sum \lambda_i (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_i) \mathbf{u}_i$ , 值域仍在复平面内, 如果算子  $I(\mathbf{p})$  的特征值为  $\lambda$ , 则特征向量  $\mathbf{y}$  满足  $I(\mathbf{p})\mathbf{y} = \lambda \mathbf{y}$ , 设  $\mathbf{x}$  幅角为  $\theta$ ,  $\mathbf{u}_i$  幅角为  $\phi_i$ , 于是可以得到

# 已经取得的进展

## 复数表示法对非协作定位场景下信息椭圆的刻画

研究二维情形下由  $I(\mathbf{p}) = \sum \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T$  决定的信息椭圆的形状, 即找到椭圆的主轴 (特征向量) 和长短轴的长度 (与特征值有关) 下面将二维向量看成复平面的复数,  $I(\mathbf{p})$  看成复平面上的线性算子, 作用规则是  $I(\mathbf{p})\mathbf{x} = \sum \lambda_i (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_i) \mathbf{u}_i$ , 值域仍在复平面内, 如果算子  $I(\mathbf{p})$  的特征值为  $\lambda$ , 则特征向量  $\mathbf{y}$  满足  $I(\mathbf{p})\mathbf{y} = \lambda \mathbf{y}$ , 设  $\mathbf{x}$  幅角为  $\theta$ ,  $\mathbf{u}_i$  幅角为  $\phi_i$ , 于是可以得到

$$\sum \lambda_i \cos(\theta - \phi_i) e^{j\phi_i} = \lambda e^{j\theta} \quad (9)$$

利用虚部为 0 的条件, 可以进一步得到:  $\theta$  满足方程

$$\sum \lambda_i \sin(2(\theta - \phi_i)) = 0 \quad (10)$$

$$\lambda = \sum \lambda_i \cos^2(\theta - \phi_i) \quad (11)$$

# 已经取得的进展

复数表示法对非协作定位场景下信息椭圆的刻划

对方程 (10) 解的刻划，我们有如下定理：

## Theorem 1

如果条件  $\sum \sin(2\phi_i)\lambda_i \neq 0$  满足，那么关于  $\theta$  的方程 (10) 在  $(0, \pi/2)$  区间里的解存在且唯一，并且如果  $\theta_0$  是方程 (10) 在  $(0, \pi/2)$  区间的解，那么  $\theta_0 + \pi/2$  是方程 (10) 在  $(\pi/2, \pi)$  区间的唯一解。

# 已经取得的进展

复数表示法对非协作定位场景下信息椭圆的刻划

对方程 (10) 解的刻划, 我们有如下定理:

## Theorem 1

如果条件  $\sum \sin(2\phi_i)\lambda_i \neq 0$  满足, 那么关于  $\theta$  的方程 (10) 在  $(0, \pi/2)$  区间里的解存在且唯一, 并且如果  $\theta_0$  是方程 (10) 在  $(0, \pi/2)$  区间的解, 那么  $\theta_0 + \pi/2$  是方程 (10) 在  $(\pi/2, \pi)$  区间的唯一解。

求解方程 (10) 在  $(0, \pi)$  区间两个解是:

$$\begin{aligned}\tan(\theta) &= -K \pm \sqrt{1 + K^2} \\ \lambda &= (\sum \lambda_i)/2 \pm J\sqrt{K^2 + 1}/2 \\ K &= \frac{\sum \cos(2\phi_i)\lambda_i}{\sum \sin(2\phi_i)\lambda_i} \\ J &= \sum \lambda_i \sin(2\phi_i)\end{aligned}\tag{12}$$

# 已经取得的进展

## 复数表示法对非协作定位场景下信息椭圆的刻画

将  $\theta$  的结果代入 SPEB 的表达式中, 可以得到:

$$\text{SPEB} = \frac{2 \sum \lambda_i}{(\sum \lambda_i)^2 - J^2(K^2 + 1)} \quad (13)$$

在 RII 不变的条件下, 通过分析改变锚点的部署方式使 SPEB 最小, 我们得出如下结论:

- ▶ 场景中如果增加一个新的锚点, 新的锚点与待测移动节点的连线如果沿原信息椭圆的短半轴部署, SPEB 最小。
- ▶ 场景中锚点的部署使得信息椭圆退化成圆时 SPEB 最小, 此时  $\text{SPEB}_{op} = \frac{2}{\sum \lambda_i}$

# 已经取得的进展

## 秩一矩阵的克罗内克积对原有矩阵扰动的视角

通过下面定理可以给出两个移动节点协作情况下 (FIM 是 4 阶) 特征多项式的表达式。

### Theorem 2

设  $J$  是对称正定的矩阵 (对于  $FIM$  这一点成立), 那么下式成立:

$$|J + \epsilon \mathbf{u} \mathbf{u}^T| = |J| + \epsilon \mathbf{u}^T J^* \mathbf{u} \quad (14)$$

其中  $J^*$  表示  $J$  的伴随矩阵, 满足等式  $JJ^* = |J|I$

# 已经取得的进展

## 秩一矩阵的克罗内克积对原有矩阵扰动的视角

通过下面定理可以给出两个移动节点协作情况下 (FIM 是 4 阶) 特征多项式的表达式。

### Theorem 2

设  $J$  是对称正定的矩阵 (对于  $FIM$  这一点成立), 那么下式成立:

$$|J + \epsilon \mathbf{u} \mathbf{u}^T| = |J| + \epsilon \mathbf{u}^T J^* \mathbf{u} \quad (14)$$

其中  $J^*$  表示  $J$  的伴随矩阵, 满足等式  $JJ^* = |J|I$

证明上面的定理需要如下两个引理:

### Lemma 1

如果方阵  $M$  可以写成分块的形式  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ , 而且  $A$  是可逆的对角阵, 那么  $M$  的行列式  $|M| = |A||D - CA^{-1}B|$



# 已经取得的进展

秩一矩阵的克罗内克积对原有矩阵扰动的视角

## Lemma 2

如果  $\mathbf{u}$  是一个  $n$  维的列向量,  $\mathbf{I}$  是  $n$  维方阵, 则我们有行列式恒等式:

$$|(1 + \mathbf{u}^T \mathbf{u})\mathbf{I} - \mathbf{u}\mathbf{u}^T| = (1 + \mathbf{u}^T \mathbf{u})^{n-1} \quad (15)$$

上面的定理可以用数学归纳法证明, 有了上面两个引理即可证明前面的定理, 另外该定理可以做如下推广:

## Corollary 1

设  $\mathbf{J}$  是对称正定的矩阵, 则

$$|\mathbf{J} + \epsilon \mathbf{u}\mathbf{v}^T| = |\mathbf{J}| + \epsilon \mathbf{u}^T \mathbf{J}^* \mathbf{v} \quad (16)$$

## 已经取得的进展

秩一矩阵的克罗内克积对原有矩阵扰动的视角

下面考虑两个节点协作的情形: 原 4 维 FIM 结构为:

$$A = \begin{pmatrix} \Sigma_0 + \epsilon \mathbf{u}\mathbf{u}^T & -\epsilon \mathbf{u}\mathbf{u}^T \\ -\epsilon \mathbf{u}\mathbf{u}^T & \Sigma_1 + \epsilon \mathbf{u}\mathbf{u}^T \end{pmatrix} \quad (17)$$

通过坐标变换将  $\Sigma_0, \Sigma_1$  对角化可以得到等价的形式:

$$A = J + \epsilon \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ -\mathbf{w} \end{pmatrix} (\mathbf{v}^T, -\mathbf{w}^T) \quad (18)$$

其中  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  为单位方向向量, 方向角为  $\theta$  和  $\phi$  而  $J$  是对角矩阵, 第  $i$  个对角元为  $\lambda_i$ , 这样特征多项式  $|\lambda A - I| = 0$  就有简单的表达式:

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4) \left( 1 + \epsilon \left( \frac{\cos^2(\theta)}{\lambda - \lambda_1} + \frac{\sin^2(\theta)}{\lambda - \lambda_2} + \frac{\cos^2(\phi)}{\lambda - \lambda_3} + \frac{\sin^2(\phi)}{\lambda - \lambda_4} \right) \right) \quad (19)$$

# 已经取得的进展

## 秩一矩阵的克罗内克积对原有矩阵扰动的视角

利用 **SPEB** 的定义，可以得到相比于非协作的情形定位误差下界下降的成分为：

$$\Delta = \sum \frac{1}{\lambda_i} - \text{SPEB}_{\text{global}} = \frac{1}{\xi} \left( \frac{\cos^2(\theta)}{\lambda_1^2} + \frac{\sin^2(\theta)}{\lambda_2^2} + \frac{\cos^2(\phi)}{\lambda_3^2} + \frac{\sin^2(\phi)}{\lambda_4^2} \right) \quad (20)$$

其中

$$\xi = 1 / \left( \frac{1}{\epsilon} + \frac{\cos^2(\phi)}{\lambda_3} + \frac{\sin^2(\phi)}{\lambda_4} + \frac{\cos^2(\theta)}{\lambda_1} + \frac{\sin^2(\theta)}{\lambda_2} \right) \quad (21)$$

# 已经取得的进展

## 秩一矩阵的克罗内克积对原有矩阵扰动的视角

利用 **SPEB** 的定义，可以得到相比于非协作的情形定位误差下界下降的成分为：

$$\Delta = \sum \frac{1}{\lambda_i} - \text{SPEB}_{\text{global}} = \frac{1}{\xi} \left( \frac{\cos^2(\theta)}{\lambda_1^2} + \frac{\sin^2(\theta)}{\lambda_2^2} + \frac{\cos^2(\phi)}{\lambda_3^2} + \frac{\sin^2(\phi)}{\lambda_4^2} \right) \quad (20)$$

其中

$$\xi = 1 / \left( \frac{1}{\epsilon} + \frac{\cos^2(\phi)}{\lambda_3} + \frac{\sin^2(\phi)}{\lambda_4} + \frac{\cos^2(\theta)}{\lambda_1} + \frac{\sin^2(\theta)}{\lambda_2} \right) \quad (21)$$

考察上面关于  $\theta$  和  $\phi$  的函数，我们有如下定理：

### Theorem 3

如果  $\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \geq \frac{1}{\lambda_4}$  且  $\frac{1}{\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_4} \geq \frac{1}{\lambda_2}$ ，那么  $\theta = \phi = \frac{\pi}{2}$  是  $\Delta$  的最大值点，此时两个移动节点的非协作信息椭圆的短轴共线。

# 已经取得的进展

借助瑞利商求 FIM 最大和最小特征值

我们试图通过求  $2n$  维 FIM 的全部特征值来获得对于 SPEB 结构的洞见, 为此, 我们对原问题做出如下简化:

1. 锚点定位的 RII 强度均为  $a$
2. 所有移动节点协作的 RII 强度均为  $b$
3.  $\angle \mathbf{u}_j = \frac{2\pi j}{n}$

基于此, 我们有如下定理:

## Theorem 4

如果简化条件 1 和 2 成立, 那么 FIM 的最大特征值是  $a + Nb$ , 最小特征值是  $a$ , 如果三个简化条件均成立, 那么 FIM 全部特征值的集合为 1 个  $a + Nb$ , 3 个  $a$ ,  $(2N - 4)$  个  $a + \frac{N}{2}b$ 。

# 已经取得的进展

借助瑞利商求 FIM 最大和最小特征值

我们知道，对于对称正定的矩阵  $\mathbf{A}$ ，其最大特征值和最小特征值和下面的二次型的极值有如下联系：

$$\lambda_{\max} = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}, \mathbf{v}_{\lambda_{\max}} = \operatorname{argmax}_{\|\mathbf{x}\|=1} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

$$\lambda_{\min} = \min_{\|\mathbf{x}\|=1} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}, \mathbf{v}_{\lambda_{\min}} = \operatorname{argmin}_{\|\mathbf{x}\|=1} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

上面  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  被称为  $\mathbf{x}$  的瑞利商，对于模型问题，我们有

$$R(\mathbf{x}) = \sum_{i \leq j \leq N} \lambda_{ij} (\mathbf{u}_{ij}^T (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j))^2 + \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i^T \mathbf{J}_i \mathbf{x}_i \quad (22)$$

在前两个假设下，瑞利商化简为：

$$R(\mathbf{x}) = b \sum_{i \leq j \leq N} (\mathbf{u}_{ij}^T (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j))^2 + a \quad (23)$$

# 已经取得的进展

借助瑞利商求 FIM 最大和最小特征值

这里:  $\mathbf{u}_{ij} = \frac{\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j}{\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|}$ , 取  $\mathbf{x}_i = r_i \mathring{\mathbf{p}}_i$ , 其中  $r_i = 1/\sqrt{\sum \|\mathring{\mathbf{p}}_i\|^2}$ ,  $\mathring{\mathbf{p}}_i$  表示  $\mathbf{p}_i$  逆时针转 90 度得到的结果。代入上面的  $R(\mathbf{x})$  表达式得 a。  
另一方面, 如果我们取  $\mathbf{x}_i = r_i \mathbf{p}_i$ , 代入得 (a+Nb)。

可以通过不等式放缩的方法证明 a 和 a+Nb 分别是瑞利商的最小和最大值。

# 已经取得的进展

借助瑞利商求 FIM 最大和最小特征值

这里:  $\mathbf{u}_{ij} = \frac{\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j}{\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|}$ , 取  $\mathbf{x}_i = r_i \mathring{\mathbf{p}}_i$ , 其中  $r_i = 1/\sqrt{\sum \|\mathring{\mathbf{p}}_i\|^2}$ ,  $\mathring{\mathbf{p}}_i$  表示  $\mathbf{p}_i$  逆时针转 90 度得到的结果。代入上面的  $R(\mathbf{x})$  表达式得  $\mathbf{a}$ 。另一方面, 如果我们取  $\mathbf{x}_i = r_i \mathbf{p}_i$ , 代入得  $(\mathbf{a} + N\mathbf{b})$ 。

可以通过不等式放缩的方法证明  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{a} + N\mathbf{b}$  分别是瑞利商的最小和最大值。通过瑞利商的表达式可以发现

$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_1\}, \{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_2\}$  也是特征值  $\mathbf{a}$  对应的特征向量, 其中  $\mathbf{e}_1 = (1, 0)^T$  或  $\mathbf{e}_2 = (0, 1)^T$ , 在第三个附加条件成立的情况下, 我们可以进一步证明与上面列出的四个特征向量垂直的任意向量都是  $(\mathbf{a} + \frac{N}{2}\mathbf{b})$  对应的特征向量。

上述定理指出了在移动节点的部署是圆周对称的情况下, 每个节点的误差下界的量级是  $\frac{4}{bN}$ , 与锚点的  $\frac{2}{aN}$  相比可以看出在  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$  的情况下增加 2 个协作节点才有一个锚点的效果。



# 已经取得的进展

借助瑞利商求 FIM 最大和最小特征值

上面对称的情形实际上是 SPEB 最好的情形，因为对于所有的角度  $\theta_i$ ，FIM 的迹  $\text{tr}(I(\mathbf{p}))$  是一个常数，对于我们的假设而言，这个常数是  $N(a + 2b)$ 。由 Cauchy 不等式得：

$$\sum \lambda_i \sum \frac{1}{\lambda_i} \geq N \quad (24)$$

上面的求和是对除了最大和最小的 4 个特征值求和的，由 Cauchy 不等式的取等条件，SPEB 的最小值当且仅当时其余  $2N-4$  个特征值相等时取得。因此我们得到了前两个假设下定位误差最小的下界。

- ▶ 问题的数学模型
- ▶ 研究基础
- ▶ 已经取得的进展
  - ▶ 复数表示法对非协作定位场景下信息椭圆的刻画
  - ▶ 秩一矩阵的克罗内克积对原有矩阵扰动的视角
  - ▶ 借助瑞利商求 FIM 最大和最小特征值
- ▶ 遇到的问题

# 遇到的问题

- ▶ 上面的三点讨论都只是求了静态场景下移动节点使得 SPEB 最小的部署，也就是 SPEB 的下界，对于 SPEB 的上界，猜测所有移动节点共线时定位效果最差。
- ▶ 后续的关于节点间协作具有稀疏性而非完全图的情形正在考虑之中。

# 参考文献



*Woodbury matrix identity.*

[https://en.wikipedia.org/wiki/Woodbury\\_matrix\\_identity](https://en.wikipedia.org/wiki/Woodbury_matrix_identity)



**Yuan Shen**

Fundamental Limits Of Wideband Localization–Part II:  
Cooperative Networks