

波形估计理论

赵丰

2018 年 6 月 24 日

$z(t)$ 为观测, $s(t)$ 为待估计的信号波形, 具体可分为三种类型:

1. 预测问题: $g(t) = s(t + \alpha), \alpha > 0$
2. 滤波问题: $g(t) = s(t)$
3. 平滑 (内插) 问题: $g(t) = s(t), t \in \text{观测区间 } I$ 。

1 波形的线性最小均方估计

1.1 线性最小均方估计

寻找线性估值: $\hat{g}(t) = L[z(\xi)]$, 其中 $L[\cdot]$ 为线性算子。使得均方误差 $e^2 = \mathbb{E}[(g(t) - \hat{g}(t))^2]$ 最小。

定理 1. 假设 $L[z(\xi)]$ 满足正交性原理, 即: $\mathbb{E}[(g(t) - L[z(\xi)])z(\xi_i)] = 0, \forall \xi_i \in I$ 则对于另一线性算子 $L_1[\cdot]$, 有:

$$\mathbb{E}[(g(t) - L[z(\xi)])^2] \leq \mathbb{E}[(g(t) - L_1[z(\xi)])^2] \quad (1.1)$$

证明.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(g(t) - L_1[z(\xi)])^2] &= \mathbb{E}[(g(t) - L[z(\xi)] + L[z(\xi)] - L_1[z(\xi)])^2] \\ &= \mathbb{E}[(g(t) - L[z(\xi)])^2] + \mathbb{E}[(L[z(\xi)] - L_1[z(\xi)])^2] \\ &\geq \mathbb{E}[(g(t) - L[z(\xi)])^2] \end{aligned}$$

□

1.2 最佳线性滤波器

设观测区间为 $I = [0, T]$, $\hat{g}(t) = \int_0^T h(t, \xi) z(\xi) d\xi$,

1. 由正交性原理: $\mathbb{E}[(g(t) - L[z(\xi)])z(\tau)] = 0, \forall \tau \in [0, T]$ 由此得到 Wiener-Hopf 方程:

$$R_{gz}(t, \tau) = \int_0^T h(t, \xi) R_z(\xi, \tau) d\xi, \tau \in [0, T] \quad (1.2)$$

此时均方误差为

$$\begin{aligned} e_{\min}^2 &= \mathbb{E}[(g(t) - \int_0^T h(t, \xi) z(\xi) d\xi)g(t)] \\ &= R_g(t, t) - \int_0^T h(t, \xi) R_{gz}(t, \xi) d\xi \end{aligned} \quad (1.3)$$

2. 由变分法求解:

希望求最佳的 $h_1(t, \xi)$ 以使均方误差 $e^2 = \mathbb{E}[(g(t) - \int_0^T h_1(t, \xi) z(\xi) d\xi)^2]$ 最小, 其中 $h_1(t, \xi) = h(t, \xi) + \epsilon f(t, \xi)$, $h(t, \xi)$ 是最优解, ϵ 是小的扰动因子, $f(t, \xi)$ 是扰动函数。将均方误差重写为: $e^2 = R_g(t, t) + \int_0^T \int_0^T h_1(t, \xi) h_1(t, \eta) R_z(\eta, \xi) d\eta d\xi - 2 \int_0^T h_1(t, \xi) R_{gz}(t, \xi) d\xi$.

令 $\left. \frac{de^2(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0$ 可得: $\int_0^T f(t, \epsilon) [R_{gz}(t, \xi) - \int_0^T h(t, \eta) R_z(\eta, \xi) d\eta] d\xi =$

0 由 $f(t, \xi)$ 的任意性得: $R_{gz}(t, \xi) = \int_0^T h(t, \eta) R_z(\eta, \xi) d\eta, \xi \in [0, T]$

2 Wiener 滤波

假定 $z(t)$ 平稳, $g(t)$ 与 $z(t)$ 联合平稳, 则 $R_{gz}(t, \tau) = R(t - \tau)$, $R_z(t, \tau) = R_z(t - \tau)$, 并且设 $h(t, \tau) = h(t - \tau)$, 则 Wiener-Hopf 方程式(1.2) 可改写为:

$$R_{gz}(t - \tau) = \int_0^T h(t - \xi) R_z(\xi - \tau) d\xi, \tau \in [0, T] \quad (2.1)$$

由(1.3) 可得其均方误差为:

$$e_{\min}^2 = R_g(0) - \int_0^T h(t - \xi) R_{gz}(t - \xi) d\xi \quad (2.2)$$

2.1 物理不可实现的 Wiener 滤波器

将观测区间从 $[0, T]$ 扩展到 $(-\infty, +\infty)$ 上, 令 $u = t - \tau, v = t - \xi, \xi - \tau = u - v$, 则 (2.1, 2.2) 式可化为

$$R_{gz}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(v) R_z(u - v) dv = h(u) * R_z(u) \quad (2.3)$$

$$e_{\min}^2 = R_g(0) - \int_{-\infty}^{+\infty} h(v) R_{gz}(v) dv \quad (2.4)$$

等式(2.3) 右端为一卷积的形式, 作双边拉氏变换可得

$$\Phi_{gz}(\omega) = H(\omega) \Phi_z(\omega) \quad (2.5)$$

做如下符号约定:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \exp(-i\omega t) dt \quad \text{傅氏正变换}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad \text{傅氏反变换}$$

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \quad \text{拉氏正变换}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\gamma - iT}^{\gamma + iT} e^{st} F(s) ds \quad \text{拉氏反变换}$$

由相关函数是功率谱函数的 Fourier 反变换和 Parseval 定理, (2.4) 可化为

$$e_{\min}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_g(\omega) d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \Phi_{gz}^*(\omega) d\omega$$

由(2.5)代入 $H(\omega)$ 的表达式可得:

$$e_{\min}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\Phi_g(\omega) - \frac{|\Phi_{gz}(\omega)|^2}{\Phi_z(\omega)}) d\omega \quad (2.6)$$

2.1.1 加性噪声

$z(t) = s(t) + n(t)$, $s(t)$ 和 $n(t)$ 相互独立, $n(t)$ 的均值为零。考虑滤波问题 $g(t) = s(t)$, 从而可得 $\Phi_{gz}(\omega) = \Phi_s(\omega)$, $\Phi_z(\omega) = \Phi_s(\omega) + \Phi_n(\omega)$, 所以传输函数为:

$$H(\omega) = \frac{\Phi_s(\omega)}{\Phi_s(\omega) + \Phi_n(\omega)}$$

例 1. 已知 $\Phi_s(s) = \frac{2}{1-s^2}$, $\Phi_n(s) = 1$, 求物理不可实现的 Wiener 滤波器的冲激响应 $h(t)$ 及其估值均方误差 e_{\min}^2 。

解. $H(s) = \frac{2}{3-s^2}$, 已知 $\mathcal{L}(e^{-|t|}) = \frac{2}{1-s^2}$, 设 $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$, 则 $\mathcal{L}(f(\alpha t)) = \frac{1}{\alpha}F(\frac{s}{\alpha})$ 。所以 $\mathcal{L}(e^{-\sqrt{3}|t|}) = \sqrt{3}\frac{2}{3-s^2} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(\frac{2}{3-s^2}) = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}|t|}$, 由 (2.6) 可得

$$e_{\min}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi_s(\omega)\Phi_n(\omega)}{\Phi_s(\omega) + \Phi_n(\omega)} d\omega$$

代入 $\Phi_s(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$, $\Phi_n(\omega) = 1$, 求得 $e_{\min}^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577$ 。

2.2 物理可实现的 Wiener 滤波器

将观测区间由 $[0, T]$ 扩展到 $(-\infty, t)$, 仿照 (2.3, 2.4) 式有:

$$R_{gz}(u) = \int_0^{+\infty} h(v)R_z(u-v)dv, u \geq 0 \quad (2.7)$$

$$e_{\min}^2 = R_g(0) - \int_0^{+\infty} h(v)R_{gz}(v)dv \quad (2.8)$$

2.2.1 频谱因式分解法

将 (2.7) 扩展到 $(-\infty, +\infty)$ 上, 引入函数 $q(u)$

$$\int_0^{+\infty} h(v)R_z(u-v)dv - R_{gz}(u) = q(u) \quad (2.9)$$

满足 $q(u) = 0, u \geq 0$, $Q(s) \triangleq \mathcal{L}(q(u))$, $Q(s)$ 的极点在 s 平面的右半平面。同时补充定义 $h(v) = 0, v < 0$, 则 $H(s)$ 的极点在左半平面。

对 (2.9) 作双边拉氏变换可得: $H(s)\Phi_z(s) - \Phi_{gz}(s) = Q(s)$ 。假设 $R_z(\tau)$ 是实偶函数, 则 $\Phi_z(s)$ 为有理谱 ($\Phi_z(j\omega)$ 为实数), 于是 $\Phi_z(s)$ 可以分解为

$$\Phi_z(s) = \Phi_z^+(s)\Phi_z^-(s) \quad (2.10)$$

其中 $\Phi_z^+(s)$ 的零极点在左半平面, $\Phi_z^-(s) = \Phi_z^+(-s)$ 的零极点在右半平面。从而可得

$$H(s)\Phi_z^+(s) = \frac{Q(s)}{\Phi_z^-(s)} + \frac{\Phi_{gz}(s)}{\Phi_z^-(s)} \quad (2.11)$$

式 (2.11) 右端第二项可以通过部分分式分解为两部分之和:

$$\frac{\Phi_{gz}(s)}{\Phi_z^-(s)} = \left[\frac{\Phi_{gz}(s)}{\Phi_z^-(s)} \right]^{t+} + \left[\frac{\Phi_{gz}(s)}{\Phi_z^-(s)} \right]^{t-}$$

其中 $[\cdot]^{t+}$ 的极点都在左半平面 ($t+$ 是指时域响应只在 $t \geq 0$ 时有), 而 $[\cdot]^{t-}$ 的极点都在右半平面, 同时含部分分式分解中的常数项, 且这种分解是唯一的。假设 $H(s), \Phi_z(s)$ 分母阶次比分子高, 在等式 (2.11) 两端同时取 $[\cdot]^{t+}$ 可得: $H(s)\Phi_z^+(s) = [\frac{\Phi_{gz}(s)}{\Phi_z^-(s)}]^{t+}$ 即

$$H(s) = \frac{1}{\Phi_z^+(s)} \left[\frac{\Phi_{gz}(s)}{\Phi_z^-(s)} \right]^{t+} \quad (2.12)$$

2.2.2 预白化法

若 $z(t)$ 为白信号, 即 $R_z(\tau) = \delta(\tau)$, 由 Wiener-Hopf 方程 (2.7) 式得到:

$$h(t) = \begin{cases} R_{gz}(t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} H(s) = [\Phi_{gz}(s)]^{t+} \quad (2.13)$$

若 $z(t)$ 为非白信号, 则可先将 $z(t)$ 通过白化滤波器 $H_W(s)$ 变成白信号 $x(t)$, 再对 $x(t)$ 采用滤波器 $H_2(s) = [\Phi_{gx}(s)]^{t+}$, 则总的滤波器 $H(s) = H_W(s)H_2(s)$ 就是我们要求的 Wiener 滤波器。

已知输入的随机信号 $x(t)$ 通过一个线性时不变系统 (冲击响应为 $h(t)$), 输出信号为 $y(t)$, 则输入输出信号的 PSD 满足 $\Phi_y(s) = \Phi_x(s)H(s)H(-s)$

因此若使得 $\Phi_x(s) = 1 = \Phi_z(s)H_W(s)H_W(-s)$, 根据 (2.10) 式, 取 $H_W(s) = 1/\Phi_z^+(s)$ 即可。

$$\begin{aligned} R_{gx}(\tau) &= \mathbb{E}[g(t)x(t-\tau)] &= \mathbb{E}[g(t) \int_{-\infty}^{+\infty} h_W(\xi)z(t-\tau-\xi)d\xi] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h_W(\xi)R_{gz}(\tau+\xi)d\xi &= h_W(-\tau) * R_{gz}(\tau) \end{aligned}$$

所以 $\Phi_{gx}(s) = H_W(-s)\Phi_{gz}(s) = \frac{\Phi_{gz}(s)}{\Phi_z^+(-s)} = \frac{\Phi_{gz}(s)}{\Phi_z^-(s)}$ 。最终得到的滤波器即为 (2.12) 所示。

2.2.3 Wiener 滤波器的估值方差

由 (2.8) 式可以求出:

$$e_{\min}^2 = R_g(0) - \int_0^{+\infty} R_{gx}^2(\tau)d\tau \quad (2.14)$$

例 2. 沿用例 1, 求物理可实现的 Wiener 滤波器 $h(t)$ 及其估值方差 e_{\min}^2

解.

$$\Phi_z(s) = \Phi_s(s) + \Phi_n(s) = \frac{3-s^2}{1-s^2}$$

$$\Phi_z^+(s) = \frac{\sqrt{3}+s}{1+s}$$

$$\Phi_z^-(s) = \frac{\sqrt{3}-s}{1-s}$$

由于 $\Phi_{gz}(s) = \Phi_s(s) = \frac{2}{1-s^2}$

$$\frac{\Phi_{gz}(s)}{\Phi_z^-(s)} = \frac{\sqrt{3}-1}{1+s} + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-s} \Rightarrow \left[\frac{\Phi_{gz}(s)}{\Phi_z^-(s)} \right]^{t+} = \frac{\sqrt{3}-1}{1+s}$$

$$H(s) = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+s} \Rightarrow h(t) = (\sqrt{3}-1)e^{-\sqrt{3}t}u(t)$$

由双边拉氏反变换求得 $R_s(\tau) = e^{-|\tau|} \Rightarrow R_s(0) = 1$

$$\Phi_{gx}(s) = \frac{\Phi_{gz}(s)}{\Phi_z^-(s)} \Rightarrow R_{gx}(s) = (\sqrt{3}-1)e^{\sqrt{3}t}u(-t) + (\sqrt{3}-1)e^{-t}u(t)$$

代入 (2.14) 式中求得: $e_{\min}^2 = \sqrt{3}-1 = 0.732$ 。由此可见: 物理可实现的 $h(t)$ 的估值方差比物理不可实现的 $h(t)$ 的估值方差要大。

	$H(s)$	e_{\min}^2	$h(t)$
物理不可实现	$\frac{2}{3-s^2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \exp(-\sqrt{3} t)$
物理可实现	$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+s}$	$(\sqrt{3}-1)$	$(\sqrt{3}-1) \exp(-\sqrt{3}t)u(t)$

表 1: 例 1、例 2 性能对比

3 Kalman 滤波器

3.1 离散时间 Kalman 滤波

已知状态方程:

$$X_k = \Phi_{k,k-1}X_{k-1} + W_{k-1}, k \geq 1 \quad (3.1)$$

观测方程:

$$Z_k = H_k X_k + V_k, k \geq 1 \quad (3.2)$$

其中

- $\Phi_{k,k-1}$ 是一步转移矩
- W_k 是动态噪声, 均值为 0, 协方差矩阵是 $\text{Cov}(W_k, W_i) = Q_k \delta_{ki}$;
- V_k 是观测噪声, 均值为 0, 协方差矩阵是 $\text{Cov}(V_k, V_i) = R_k \delta_{ki}$ 。 W_k 和 V_i 互不相关。
- H_k 是观测矩阵。
- 初始状态 X_0 均值为 μ_0 , 方差为 P_0 , 与 W_k, V_i 均不相关。

设计 X_k 的线性估计器 $\hat{X}_k = \sum_{i=1}^k c_i Z_i$, 使得均方误差 $\mathbb{E}[\tilde{X}_k^T \tilde{X}_k]$ 最小, 其中 $\tilde{X}_k = \hat{X}_k - X_k$ 。

采用直观推导的方法, 假设 \hat{X}_{k-1} 已经求出, 在没有新的观测的情况下, 最佳一步预测为

$$\hat{X}_{k/k-1} = \Phi_{k,k-1} \hat{X}_{k-1} \quad (3.3)$$

当有新的观测 Z_k 时,

$$\hat{X}_k = \hat{X}_{k/k-1} + K_k (Z_k - H_k \hat{X}_{k/k-1}) \quad (3.4)$$

希望优化 Kalman 增益矩阵 K_k 使得 $\mathbb{E}[\tilde{X}_k^T \tilde{X}_k]$ 最小, 其中 $\tilde{X}_k = \hat{X}_k - X_k$ 。

代入观测方程 (3.2) 式有

$$\begin{aligned} \tilde{X}_k &= (\hat{X}_{k/k-1} - X_k) + K_k (H_k X_k + V_k - H_k \hat{X}_{k/k-1}) \\ &= (I - K_k H_k) \tilde{X}_{k/k-1} + K_k V_k \end{aligned}$$

其中 $\tilde{X}_{k/k-1} = \hat{X}_{k/k-1} - X_k$, 代入一步预测方程 (3.3) 和状态方程 (3.1) 可得

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{k/k-1} &= \Phi_{k-1,k} \hat{X}_{k-1} - (\Phi_{k-1,k} X_{k-1} + W_{k-1}) \\ &= \Phi_{k-1,k} \tilde{X}_{k-1} + W_{k-1} \end{aligned}$$

因为 $\mathbb{E}[\tilde{X}_k^T \tilde{X}_k] = \text{Tr}[P_k]$, 记 $P_k = \mathbb{E}[\tilde{X}_k \tilde{X}_k^T]$, 为估计误差的方差矩阵。记 $P_{k/k-1} = \mathbb{E}[\tilde{X}_{k/k-1} \tilde{X}_{k/k-1}^T]$ 为一步向前预测估值的方差矩阵, 则

$$\begin{aligned} P_k &= (I - K_k H_k) P_{k/k-1} (I - K_k H_k)^T + K_k R_k K_k^T \\ P_{k/k-1} &= \Phi_{k-1,k} P_{k-1} \Phi_{k-1,k}^T + Q_{k-1} \end{aligned} \quad (3.5)$$

P_k 是关于 K_k 的二次型矩阵函数, 可采用“配平方”法求“最小值”, 从而有

$$P_k = [K_k - P_{k/k-1}H_k^T(H_kP_{k/k-1}H_k^T + R_k)^{-1}](H_kP_{k/k-1}H_k^T + R_k) \\ [K_k - P_{k/k-1}H_k^T(H_kP_{k/k-1}H_k^T + R_k)^{-1}]^T + P_{k/k-1} - P_{k/k-1}H_k^T(H_kP_{k/k-1}H_k^T + R_k)^{-1}H_kP_{k/k-1}^T$$

因此取

$$K_k = P_{k/k-1}H_k^T(H_kP_{k/k-1}H_k^T + R_k)^{-1} \quad (3.6)$$

P_k 最小, 最小值为

$$P_k = (I - K_kH_k)P_{k/k-1} \quad (3.7)$$

在实际操作中, 通常按照 (3.3), (3.5), (3.6), (3.4), (3.7) 五个公式顺序迭代求解。

例 3 (地面雷达对空中目标的跟踪). 如果雷达站到目标的斜距为 $x(t)$, 其变化率 $\dot{x}(t)$ 为常数. 从 $t=0$ 时, 开始观测目标, 观测间隔为 1 秒, 测得 $x(t)$ 的四个观测值为: $z(1) = 1.1km, z(2) = 2.0km, z(3) = 3.2km, z(4) = 3.8km$. 已知: $\mathbb{E}[x(0)] = 0, \mathbb{E}[\dot{x}(0)] = 0, \mathbb{E}[x(0)\dot{x}(0)] = 0, \mathbb{E}[x^2(0)] = 10km^2, \mathbb{E}[\dot{x}^2(0)] = 10(km/s)^2, \mathbb{E}[v(k)] = 0, R(k) = 0.1km^2$. 利用 Kalman 滤波的方法求斜距 $x(t)$ 的最佳滤波值与滤波误差的方差。

解. 设 $\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} x(k) \\ \dot{x}(k) \end{bmatrix}$, 在状态方程 (3.1) 式中, $\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, Q = \mathbf{0}$; 在观测方程 (3.2) 中, $H = [1, 0], V = 0.1$. 初始状态 $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P_0 = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$. 按照 (3.3), (3.5), (3.6), (3.4), (3.7) 得到估值如表 2 所示。

k	1	2	3	4
$\hat{x}(k)$	1.09	1.99	3.14	3.92
$\hat{\dot{x}}(k)$	0.55	0.89	1.04	0.93

表 2: Kalman 滤波估值

估值方差变化情况如图 1 所示。

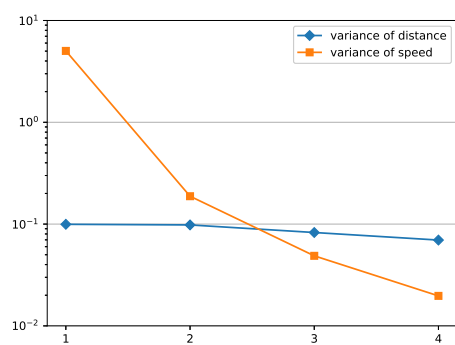


图 1: Kalman 滤波估值方差