椭圆型方程实验

数 33 赵丰
学号：2013012178

July 3, 2017

1 题目

椭圆型方程的上机实习题

考虑以下奇异摄动问题

$$
\begin{cases}
-\varepsilon \Delta u(x,y) + \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) & = & \sin(\pi x)\sin(\pi y), \quad (x,y) \in \Omega, \\
u\big|_{\partial\Omega} & = & 0.
\end{cases}
$$

其中

$$0 < \varepsilon \ll 1, \quad \Omega = [0,1] \times [0,1].$$

试构造一种对于 $\varepsilon \ll h$ 都能保持高精度的离散格式，可取不同的 ε 和步长 h 计算，比较结果。

2 解析解

采用分离变量的方法，假设方程有如下形式的解:

$$u(x,y) = f(x)\sin \pi y. \tag{1}$$

代入后得 $f(x)$ 满足如下两点边值问题:

$$\begin{cases} -\epsilon f''(x) + \epsilon\pi^2 f(x) + f'(x) = \sin \pi x \\ f(0) = 0, f(1) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

可以求出相应的齐次 ODE 方程的两个特解为

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\epsilon^2\pi^2}}{2\epsilon} \tag{3}$$

从而可以得到式 (2) 的解可以写成:

$$f(x) = d_1 exp(\lambda_1 x) + d_2 exp(\lambda_2 x) + g(x) \tag{4}$$

其中 g(x) 是式 (2) 的一个特解。通过待定

$$g(x) = c_1 \sin \pi x + c_2 \cos \pi x \tag{5}$$

可求出 $g(x)$ 进而由边值条件确定 d_1, d_2，下面的 Mathematica 代码给出了解析解的表达式:

```
realF[x_] :=
 Module[{c1 = N[2 \[Epsilon]/(1 + 4 \[Epsilon]^2*\[Pi]^2)],
   c2 = N[-1/(\[Pi] + 4 \[Pi]^3*\[Epsilon]^2)], \[Lambda]1 =
    N[(1 + Sqrt[
          1 + 4*\[Epsilon]^2*\[Pi]^2])/(2 \[Epsilon])], \[Lambda]2 =
    N[(1 - Sqrt[1 + 4*\[Epsilon]^2*\[Pi]^2])/(2 \[Epsilon])],
   specialF, d1, d2},
  specialF =
   c1*Sin[\[Pi] x] + c2*Cos[\[Pi] x]; {d1, d2} = {y1, y2} /.
    Solve[{y1 + y2 == -c2,
       y1*Exp[\[Lambda]1] + y2*Exp[\[Lambda]2] == c2}, {y1, y2}][[1]];
  d1*Exp[\[Lambda]1*x] + d2*Exp[\[Lambda]2*x] + specialF]
```

3 数值格式

采用指数型差分格式，设:

$$\sigma = \frac{h}{2\epsilon}\coth\frac{h}{2\epsilon} \tag{6}$$

则数值格式为:

$$-\epsilon\sigma\frac{(\delta_x^2+\delta_y^2)u_{i,j}}{h^2} + \frac{u_{i+1,j}-u_{i-1,j}}{2h} = \sin(\pi i h)\cos(\pi j h). \tag{7}$$

remark 3.1. 注意到 $\sigma \to 1, as\ h \to 0$, 所以指数型差分格式是对五点差分格式的修正。

利用以上数值格式设计 Mathematica 程序求解给定的椭圆问题，代码如下所示:

```
(*initialization of parameter*)
\[Epsilon] = 0.01;
N1 = 20;
h = 1/(N1 + 1);
s = SparseArray[{{N1*N1, N1*N1} -> 0}];
b = Table[0, {i, N1*N1}];
(*Exponential Scheme to update s and b*)
\[Sigma] = N[h*Coth[h/(2*\[Epsilon])]/(2*\[Epsilon])];
For[i = 0, i <= N1 - 1, i++,
 For[j = 0, j <= N1 - 1, j++,
  s[[N1*j + i + 1, N1*j + i + 1]] = 4 \[Sigma];
  b[[N1*j + i + 1]] =
   N[Sin[\[Pi]*(i + 1)/(N1 + 1)]*
     Sin[\[Pi]*(j + 1)/(N1 + 1)]/(\[Epsilon]*(N1 + 1)^2)];
  If[i < N1 - 1,
    s[[N1*j + i + 1, N1*j + i + 2]] = -\[Sigma] + h/(2*\[Epsilon]);]
   If[i > 0,
    s[[N1*j + i + 1, N1*j + i]] = -\[Sigma] - h/(2*\[Epsilon]);]
   If[j < N1 - 1,
    s[[N1*j + i + 1, N1*(j + 1) + i + 1]] = -\[Sigma];]
   If[j > 0,
    s[[N1*j + i + 1, N1*(j - 1) + i + 1]] = -\[Sigma]]
  ]]
(*s is Sparse Matrix, Solver s*x=b *)
result = LinearSolve[s, b];
result2D =
  Table[result[[(j - 1)*N1 + i + 1]], {j, 1, N1}, {i, 0, N1 - 1}];
```

4 结果分析

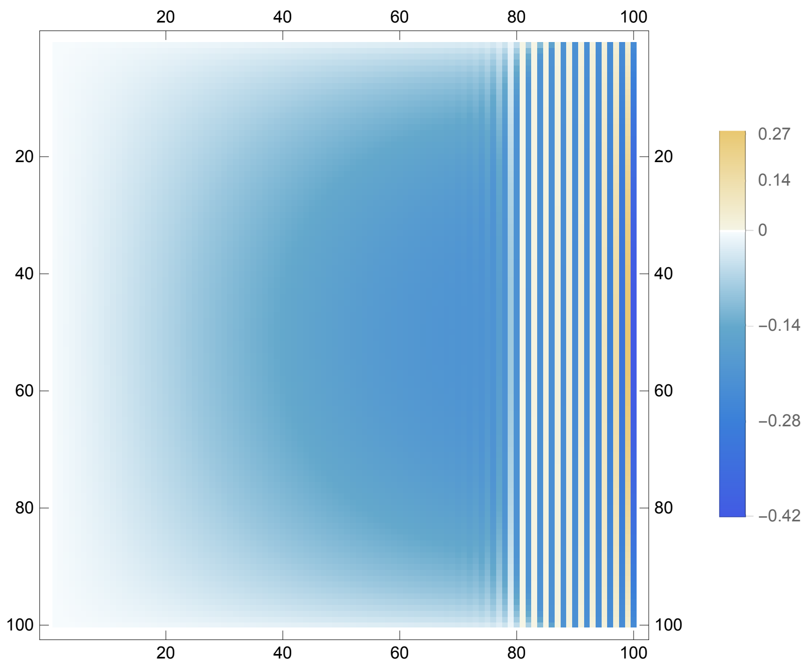
下面取不同的 h 和 ϵ 比较指数型差分格式和一般五点差分格式的数值误差，采用各点误差的绝对值的平均数为衡量标准（相当于 $\mathbb{L}^2$ 范数)

error \ h ϵ	1/21	1/51	1/101
0.1	9.4E-4	1.5E-4	3.8E-5
0.01	0.014	0.0013	3.5E-4
0.001	0.17	0.036	0.008

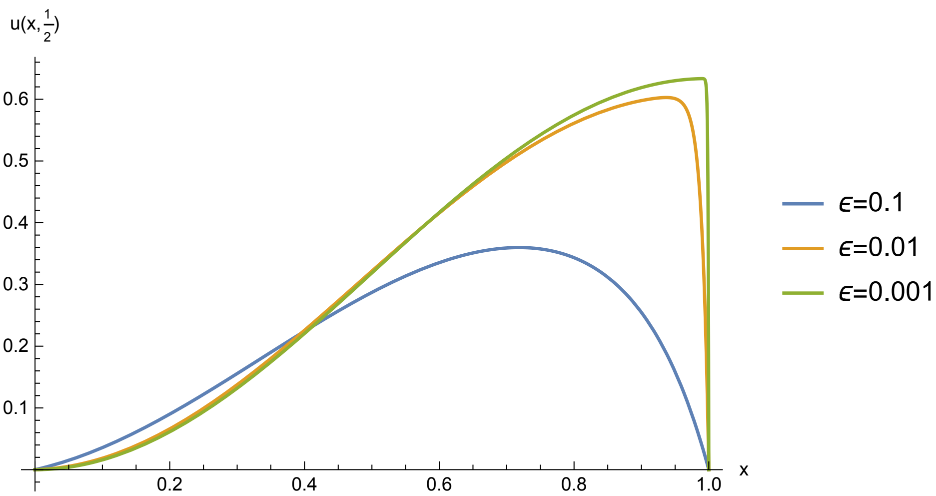
Table 1: 五点差分格式解算结果

由上表可以看出，减小空间步长可以降低误差，通过 log-log 图可以估计出五点差分格式的数值精度约为 $O(h^2)$, 与理论结果一致。但随着 ϵ

的减小，相同步长条件下误差迅速增大。下面画出 $\epsilon = 0.001, h = 1/101$ 时数值解与真实解的差别的矩阵图:



由上图可以看到，在 x 接近 1 的地方，数值解出现了震荡的现象，这说明所求解的问题在 x=1 处有边界层，通过式 (1) 分析解析解 f(x) 的在 x=1 处的性质可知，随着 h 的减小，f(x) 在 1 附近的导数的绝对值会变大，如下图所示:

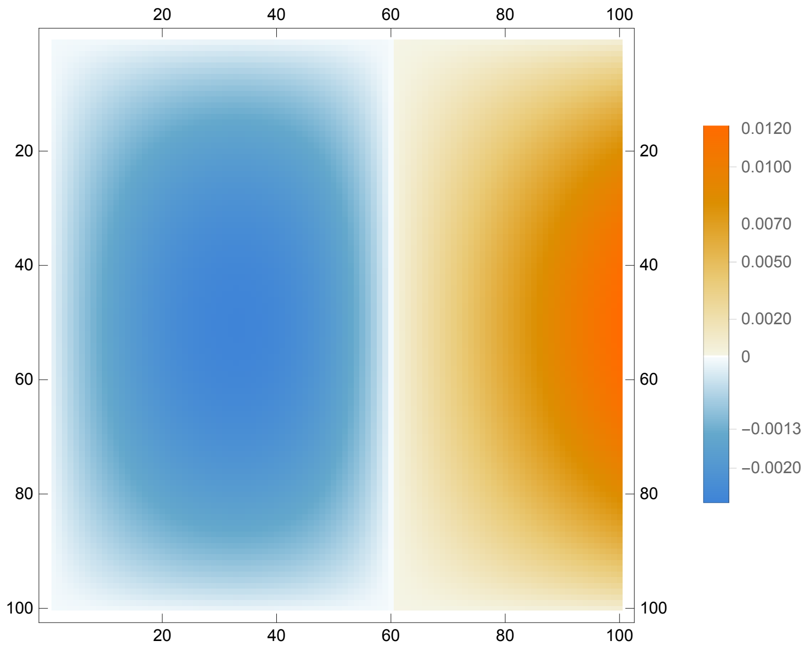


下面用指数型差分格式求解该问题:

error \ h / ϵ	1/21	1/51	1/101
0.1	5.6E-4	9.0E-5	2.3E-5
0.01	0.007	0.0016	4E-4
0.001	0.012	0.005	0.002

Table 2: 指数型差分格式解算结果

从上表可以看出，对于较小的 ϵ, 指数型差分格式仍具有较高精度，对 $\epsilon = 0.001, h = 1/101$ 时数值解与真实解的差别作矩阵图如下:



从上图可看出，使用指数型差分格式消除了 x=1 附近的振荡现象。