1. (a) $I(X;Y)=H(Y)-H(Y|X)=H(Y)-\log 3\le \log 11-\log 3=\log\frac{11}{3}$ 所以 $C=\log\frac{11}{3}$

   (b) 当 X 等概时达到信道容量。$p(x)=\frac{1}{11}, x\in\{0,1,2,\dots,10\}$

2. (a) 设 $Q=\begin{bmatrix}1-p & p\\ p & 1-p\end{bmatrix}$ X_0 到 X_n 的转移概率矩阵为 $Q^n=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1+(1-2p)^n & 1-(1-2p)^n\\ 1-(1-2p)^n & 1+(1-2p)^n\end{bmatrix}$ 所以 n 个二进制对称信道的级联等价于一个错误概率为 $p_e=\frac{1}{2}(1-(1-2p)^n)$ 的对称信道。若 $p\ne 0,1$，则 $-1<1-2p<1$ 。当 $n\to\infty$ 时，$p_e\to\frac{1}{2}$。此时 $I(X_0;X_n)=0$。

3. (a) 该 DMC 信道的转移概率矩阵为 $Q=\begin{bmatrix}1-\alpha-\epsilon & \epsilon & \alpha\\ \epsilon & 1-\alpha-\epsilon & \alpha\end{bmatrix}$ 为一准对称信道，当输入分布等概时达到信道容量。此时 Y 的分布为 $\begin{pmatrix}0 & 1 & e\\ \frac{1-\alpha}{2} & \frac{1-\alpha}{2} & \alpha\end{pmatrix}$，$Y|X=i$ 的分布为 Q 的第 $(i+1)$ 行。于是可以求出

$$\begin{aligned}C&=I(X;Y)=H(Y)-H(Y|X)\\&=(1-\alpha-\epsilon)\log(1-\alpha-\epsilon)+\epsilon\log\epsilon-(1-\alpha)\log\frac{1-\alpha}{2}\end{aligned}$$

   (b) 当 $\alpha=0$ 时 (BSC)，$C=1-h(\epsilon)$，其中 $h(\epsilon)$ 为二元熵函数。

   (c) 当 $\epsilon=0$ 时 (BEC)，$C=1-\alpha$。

4. (a) $Y=2X+Z_1+Z_2\Rightarrow h(Y|X)=h(Z_1+Z_2)$。因为 $\mathrm{Var}[Z_1+Z_2]=2(1+\rho)\sigma^2$，所以 $h(Z_1+Z_2)=\frac{1}{2}\log(2\pi e\mathrm{Var}[Z_1+Z_2])$。又因为 $\mathrm{Var}[Y]=\mathrm{Var}[2X+Z_1+Z_2]=4P+\mathrm{Var}[Z_1+Z_2]$ 为定值，当 Y 是高斯分布时 $h(Y)$ 最大，此时 $h^*(Y)=\frac{1}{2}\log(2\pi e\mathrm{Var}[Y])$ $\Rightarrow C=h^*(Y)-h(Y|X)=\frac{1}{2}\log(1+\frac{2P}{(\rho+1)\sigma^2})$

   (b) 当 $\rho=1$ 时，$Z_1\overset{as}{=}Z_2\Rightarrow C=\frac{1}{2}\log(1+\frac{P}{\sigma^2})$；当 $\rho=0$ 时，Z_1 与 Z_2 独立，$\Rightarrow C=\frac{1}{2}\log(1+\frac{2P}{\sigma^2})$；当 $\rho=-1$ 时，$Z_1\overset{as}{=}-Z_2\Rightarrow C=h^*(Y)=h^*(2X)=\frac{1}{2}\log(8\pi eP)$

5. 总的输入功率的约束为 $\mathbb{E}[\sum_{j=1}^k X_j^2]\le P$ 根据 $(x)^+=\begin{cases}x & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$ 的定义可得要证的结论。

6. （针对 DMC 信道的信道编码定理证明）由第 10 题推导得出的不等式 $R \le \frac{1}{1-P_e^{(n)}}(\frac{1}{n}+C)$ 因为 $P_e^{(n)} \le \lambda^{(n)} \to 0$ 所以令 $n \to \infty$ 得到 $R \le C$

7. 根据限带加性高斯白噪声信道的香农公式，$R \le W\log(1+\frac{E}{\sigma})$ 代入数据得 $E \ge 255\mu W$

8. 根据 wikipedia, 设输入分布为 $Bern(p)$，当 $p=\frac{2}{5}$ 时，达到信道容量 $\log\frac{5}{4}$。

9. $\Pr\{(X^n,Y^n,Z^n)\in A_\epsilon^{(n)}\} \le 2^{-n(H(X)+H(Y)+H(Z)-H(X,Y,Z)-4\epsilon)}$

   $\Pr\{(X^n,Y^n,Z^n)\in A_\epsilon^{(n)}\} \ge (1-\epsilon)2^{-n(H(X)+H(Y)+H(Z)-H(X,Y,Z)+4\epsilon)}$（当 n 充分大时）

10. 设 W 是均匀分布的 $J=2^{nR} \Rightarrow nR=H(W)$。由 Fano 不等式 $H(W|\widehat{W}) \le 1+P_e^{(n)}nR$

    所以

$$
\begin{aligned}
nR &= H(W) \\
&= H(W|\widehat{W}) + I(W;\widehat{W}) \\
&\le 1 + P_e^{(n)}nR + I(X^n;Y^n) \\
&\le 1 + P_e^{(n)}nR + nC
\end{aligned}
$$

    即 $P_e = \frac{1}{n}P_e^{(n)} \ge \frac{1}{\log J}(R-C-\frac{1}{n})$