清华大学深圳研究生院

应用信息论

2018 年春季学期

作业 2

赵丰 2018 年 6 月 14 日

2.1. 设 $X_1, X_2, \ldots$ 为取自分布为 $\begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_K \\ P_1 & \ldots & P_K \end{pmatrix}$ 的独立同分布离散随机序列，试求：

$$\lim_{N\to\infty}\left[\prod_{i=1}^{N} P(X_i)\right]^{1/N}$$

解.

$$\left[\prod_{i=1}^{N} X_i\right]^{1/N} = \exp(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log P(X_i))$$

视 $P(X_i)$ 为随机变量，分布为 $\begin{pmatrix} P_1 & \ldots & P_K \\ P_1 & \ldots & P_K \end{pmatrix}$ 由强大数定律得：

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log P(X_i) \xrightarrow{a.s.} \mathbb{E}_X[P(X)] = -H(X) \text{ as } N\to\infty$$

而 $H(X) = -\sum_{i=1}^{K} P_i \log P_i$, 所以

$$\left[\prod_{i=1}^{N} X_i\right]^{1/N} \xrightarrow{a.s.} \exp\left(\sum_{i=1}^{K} P_i \log P_i\right) \text{ as } N\to\infty$$

2.2. 设有一个二阶 Markov 信源，其信源符号集为 $\{0,1\}$, 条件概率分别为

$$\begin{aligned} p(0|00) =& p(1|11) = 0.8 \\ p(1|00) =& p(0|11) = 0.2 \\ p(0|01) =& p(1|10) = p(1|01) = p(0|10) = 0.5 \end{aligned}$$

试计算此信源的熵率。

解. 首先求此二阶 Markov 信源的平稳分布，设初始分布 $P_{X_1,X_2}(0,0)=\alpha, P_{X_1,X_2}(0,1)=\beta, P_{X_1,X_2}(1,0)=\gamma$，则 $P_{X_1,X_2}(1,1)=1-\alpha-\beta-\gamma$ 根据转移概率可以求出

$$\begin{aligned}P_{X_3,X_4}(a,b) &= \sum_{c,d=0,1} P(X_1=c,X_2=d,X_3=a,X_4=b)\\ &= \sum_{c,d=0,1} P_{X_4}(b|X_2=d,X_3=a)P_{X_3}(a|X_1=c,X_2=d)P_{X_1,X_2}(c,d)\end{aligned}$$

分别带入 $(a,b)=(0,0),(0,1),(1,0)$，并令 X_3,X_4 的联合分布与 X_1,X_2 相同得关于 α,β,γ 的方程组为:

$$\begin{aligned}\alpha =&0.8\times 0.8\alpha+0.5\times 0.5\beta+0.8\times 0.5\gamma+0.5\times 0.2(1-\alpha-\beta-\gamma)\\ \beta =&0.2\times 0.8\alpha+0.5\times 0.5\beta+0.2\times 0.5\gamma+0.5\times 0.2(1-\alpha-\beta-\gamma)\\ \gamma =&0.5\times 0.2\alpha+0.2\times 0.5\beta+0.5\times 0.5\gamma+0.2\times 0.8(1-\alpha-\beta-\gamma)\end{aligned}$$

化简为:

$$\begin{bmatrix}0.46 & -0.15 & -0.3\\ -0.06 & 0.85 & 0\\ 0.06 & 0.06 & 0.91\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.1\\ 0.1\\ 0.16\end{bmatrix}$$

解得:

$$\alpha=0.357, \beta=0.143, \gamma=0.143$$

由平稳随机序列熵率公式得该二阶马氏链的熵率为

$$\begin{aligned}H_\infty(X) =&H(X_3|X_1,X_2)\\ =&\alpha h(0.2)+\beta h(0.5)+\gamma h(0.5)+(1-\alpha-\beta-\gamma)h(0.2)\\ =&0.80\end{aligned}$$

2.3. 设有 Markov 信源，如下图所示:

试求

(1) 信源的熵率

(2) 信源的有效编码及平均码字长。

解.

(1) 该信源的符号集为 $\{1,2,3\}$, 为平稳 1 阶马氏链，转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

由此求出平稳分布为

$$(\pi_1,\pi_2,\pi_3)=(\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{2}{7})$$

进一步求出熵率为 $H_\infty(X)=0.66$

(2) 当前状态为 1 时，对下一状态（只能是 2 或 3）进行 0 或 1 的编码; 当前状态为 2 时，对下一状态（只能是 2 或 3）进行 0 或 1 的编码; 当前状态为 3 时，下一状态一定是 1，状态 1 的前一状态一定是 3, 因此状态 31 可以看成一个整体。这种编码方案平均码长为 1。需要区分的是码串开头是 1 还是 3, 为此只需用额外 1 比特约定即可。

2.4. 一信缘有 $K=x2^j$(j 为整数，$1\le x\le 2$) 个等概率可取的字母。用二元码对此信源字母进行 Huffmann 编码，试求此码的平均码长（用 x,j 表示）。

解. 当 $x=2$ 时 $L(C)=j+1$。当 $1\le x<2$ 时有 2^j 个码字长度为 j,$(x-1)2^j$ 个码字长度为 $j+1$。平均码长为 $j+1-\frac{1}{x}$。

2.5. 设有一独立增量过程, 在整数时刻时发生数值为 +1 或-1 的增量, 增量取 +1 的概率为 0.9, 取-1 的概率为 0.1, 其初值以等概取自集合 $\{-1,0,+1,+2\}$。试求此随机过程的熵率。

解. 由离散平稳信源熵率公式和信源的马氏性，得到

$$\begin{aligned}H_\infty(X)&=\lim_{n\to\infty}H(X_n|X_{n-1})\\ H(X_n|X_{n-1})&=\sum_a \Pr(X_{n-1}=a)H(X_n|X_{n-1}=a)\\ &=\sum_a \Pr(X_{n-1}=a)(-0.1\log 0.1-0.9\log 0.9)\\ &=0.47\end{aligned}$$

2.6. 设有独立随机序列 $\{x_n\}, p(x_n = 0) = p, p(x_n = 1) = q$, 随机序列 $\{y_n\}$ 与 $\{x_n\}$ 的关系为 $y_n = x_n \oplus y_{n-1}$，其中 $\oplus$ 为模 2 和。试求：

(1) $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 的熵率 $H(X)$ 和 $H(Y)$

(2) $H(Y) = 1$bit/符号的条件

解.

(1) X 是 i.i.d. 序列，熵率等于熵，$H(X) = -p\log p - q\log q$。$Y$ 是两状态的马氏链，转移概率矩阵为 $\begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix}$ 当 $p < 1$ 时，平稳分布为 $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$，此时 $H(Y) = H(X)$; 当 $p = 1$ 时，
$Y_n = Y_{n-1} \Rightarrow H(Y) = 0$。

(2) 当 $p = q = \frac{1}{2}$ 时。

2.7. 设离散无记忆信源的字母表为 $\{a_i\}, i = 1, 2, \ldots, 7$，各字母的出现概率分别为 $0.3, 0.25, 0.15, 0.1, 0.1, 0.05, 0.05$ 试构造二元和三元 Huffmann 码。

解. 对于二元 Huffmann 码：

X	码字	概率（按递减排序）						
a_1	11	0.3	0.3	0.3	0.3	0.45	0.55	1
a_2	10	0.25	0.25	0.25	0.25	0.3	0.45	
a_3	011	0.15	0.15	0.2	0.25	0.25		
a_4	010	0.1	0.1	0.15	0.2			
a_5	001	0.1	0.1	0.1				
a_6	0001	0.05	0.1					
a_7	0000	0.05						

对于三元 Huffmann 码：

X	码字	概率（按递减排序）			
a_1	1	0.3	0.3	0.45	1
a_2	0	0.25	0.25	0.3	
a_3	21	0.15	0.2	0.25	
a_4	20	0.1	0.15		
a_5	222	0.1	0.1		
a_6	221	0.05			
a_7	220	0.05			