双曲守恒律问题的差分方法实验题

数 33 赵丰 *

April 6, 2017

1 题目

考虑以下 Burgers' 方程的初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{u^2}{2}) & = 0 \\ u(x,0) & = u_0(x), \end{cases} \tag{1}$$

取以下初值：

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0.4, 0.6], \\ 0 & x \notin [0.4, 0.6] \end{cases} \tag{2}$$

进行计算，算到 $T = 0.5$, 对于适中的网格比, 初值取 $x \in [0,1]$ 进行计算。

2 解析解

当 $t \leq 0.4$ 时,

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & x \leq 0.4; \\ \frac{x-0.4}{t}, & 0.4 < x < t + 0.4 \\ 1, & t + 0.4 \leq x \leq 0.6 + \frac{t}{2} \\ 0, & x > 0.6 + \frac{t}{2} \end{cases}$$

*学号:2013012178

当 $t > 0.4$ 时，

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & x \leq 0.4 \\ \frac{x-0.4}{t}, & 0.4 < x < 0.4 + \sqrt{0.4t} \\ 0, & x \geq 0.4 + \sqrt{0.4t} \end{cases}$$

3 使用的差分格式

本次计算使用的差分格式都是守恒型的差分格式,其具有以下基本形式:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda(g_{j+\frac{1}{2}}^n - g_{j-\frac{1}{2}}^n) \tag{3}$$

为记号简便，设 $f(u) = \frac{u^2}{2}$

3.1 Godunov 格式

设 Riemann 问题的解可以写成 $u(x,t) \equiv R(\frac{x}{t}; u_, u_R)$ 的形式。则

$$g_{j+\frac{1}{2}}^n = f(R(0; u_j^n, u_{j+1}^n)) \tag{4}$$

对于所求解的问题，Godunov 格式实际上是迎风格式。

3.2 Lax-Wendroff 格式

$$g_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{f(u_j^n) + f(u_{j+1}^n)}{2} - \frac{\lambda}{2} a_{j+\frac{1}{2}}^n (f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n)) \tag{5}$$

其中 $\lambda = \frac{\tau}{h}$ 为网格比, 而 $a_{j+\frac{1}{2}}^n$ 为:

$$a_{j+\frac{1}{2}}^n = f'(\frac{u_j^n + u_{j+1}^n}{2}) \tag{6}$$

3.3 通量限制器给出的二阶 TVD 格式

迎风格式给出的数值通量记为 $g_{L,j+\frac{1}{2}}^n$,对于所求解的问题，$g_{L,j+\frac{1}{2}}^n = f(u_j^n)$ 。L-W 格式给出的数值通量记为 $g_{H,j+\frac{1}{2}}^n$,利用上面两种格式可以构造一个二阶的格式为

$$g_{j+\frac{1}{2}}^n = g_{L,j+\frac{1}{2}}^n + \phi_j^n (g_{H,j+\frac{1}{2}}^n - g_{L,j+\frac{1}{2}}^n) \tag{7}$$

其中 $\phi_j^n = \phi(\theta_j^n)$,$\phi(\theta)$ 取 Super Bee Limiter:

$$\phi(\theta) = \frac{|\theta| + \theta}{1 + |\theta|} \tag{8}$$

θ_j^n 的定义为:

$$\theta_j^n = \begin{cases} \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{u_{j+1}^n - u_j^n}, & a > 0; \\ \frac{u_{j+2}^n - u_{j+1}^n}{u_{j+1}^n - u_j^n}, & a \leq 0; \end{cases} \tag{9}$$

3.4 不同差分格式理论性能比较

4 数值结果

用如上列出的数值格式分别求解给定的双曲问题，matlab 代码如下:

```
function g=hyperbolic(h,tau,method_name)
gl=floor(1/h);
gw=floor(0.5/tau);
g=zeros(gl,gw);
lambda=tau/h;
tvd_vector=zeros(gw,1);

for i=1:gl
    g(i,1)=integral(@ini_f,h*(i-1),h*i)/h;
    if(i>1)
    tvd_vector(1)=tvd_vector(1)+abs((g(i,1)-g(i-1,1)));
    end
end
    function y=Riemann_Problem(uL,uR)
        if(abs(uL-uR)<1e-7)
            y=uL;
        elseif(uL>uR)
            y=uL;%sound speed >=0
        elseif(uL<uR && uL>=0)
            y=uL;
        elseif(uL<uR && uR<=0)
            y=uR;
        elseif(uL<=0 && uR>=0)
            y=0;
        end
    end
    function y=get_a(j)
        [q1,q2]=set_b1b2(j);
        y=(q1+q2)/2;
    end
    function [b1,b2]=set_b1b2(j)
        if(j==0)
            b1=0;
        else
            b1=g(j,n-1);
        end
```

```
            if(j==gl)
                b2=0;
            else
                b2=g(j+1,n-1);
            end
        end
        function y=g_H(j)
            a=get_a(j);
            [m1,m2]=set_b1b2(j);
            y=(f(m1)+f(m2))/2-lambda*a*(f(m2)-f(m1))/2;
        end
        function y=g_L(j)
            [r1,r2]=set_b1b2(j);
            y=f(r1);
        end
        function y=g_flux(j)
            y=g_L(j)+phi(theta(j))*(g_H(j)-g_L(j));
        end
        function y=theta(j)
            a=get_a(j);
            [k1,k2]=set_b1b2(j);
            if(abs(k1-k2)<1e-7)
                y=0;
            elseif(a>=0)
                if(j==0)
                    y=0;
                else
                [b3,b4]=set_b1b2(j-1);
                y=(b4-b3)/(k2-k1);
                end
            else
                if(j==gl)
                    y=0;
                else
                [b3,b4]=set_b1b2(j+1);
                y=(b4-b3)/(k2-k1);
                end
            end
        end
f=@(u) u.^2/2;
phi=@(theta) (abs(theta)+theta)./(1+abs(theta));
for n=2:gw
    if(string(method_name)==string('lax_wandroff'))
    for j=1:gl
        g(j,n)=g(j,n-1)-lambda*(g_H(j)-g_H(j-1));
    end
    elseif(string(method_name)==string('Godunov'))
    g(1,n)=g(1,n-1)-lambda*(f(Riemann_Problem(g(1,n-1),g(2,n-1)))-f(Riemann_Problem(0,g(1,n-1))));
    g(gl,n)=g(gl,n-1)-lambda*(f(Riemann_Problem(g(gl,n-1),0))-f(Riemann_Problem(g(gl-1,n-1),g(gl,n-1))));
    for j=2:(gl-1)
        g(j,n)=g(j,n-1)-lambda*(f(Riemann_Problem(g(j,n-1),g(j+1,n-1)))-f(Riemann_Problem(g(j-1,n-1),g(j,n-1))));
    end
    elseif(string(method_name)==string('flux_limiter'))
    for j=1:gl
        g(j,n)=g(j,n-1)-lambda*(g_flux(j)-g_flux(j-1));
```

```
    end
    elseif(string(method_name)==string('lax_friedrich'))
    for j=1:gl
        g(j,n)=g(j,n-1)-lambda*(g_L(j)-g_L(j-1));
    end
    elseif(string(method_name)==string('upwind'))
    for j=1:gl
                [b1,b2]=set_b1b2(j-1);
        g(j,n)=g(j,n-1)-lambda*(f(b2)-f(b1));
    end

    end

end
end
```

5 结果展示

分别取网格比 λ 为 0.5 和 0.9，空间步长 h 为 0.01 和 0.001 用三种格式计算，得到分别在 t=0.3 和 0.5 的函数图像，取

$$\text{mse} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(u(x_i,t) - u^*(x_i,t))^2}$$

作为误差衡量标准, 数值结果如下表所示:

$\lambda = 0.5$		Godonov	lax_wandroff	2TVD
h=0.01	t=0.3	0.44	1.55	0.30
	t=0.5	0.80	2.02	0.53
h=0.001	t=0.3	0.384	4.661	0.296
	t=0.5	0.777	5.997	0.204
$\lambda = 0.9$		Godonov	lax_wandroff	2TVD
h=0.01	t=0.3	0.60	1.39	0.62
	t=0.5	0.85	1.72	0.81
h=0.001	t=0.3	0.58	3.74	0.61
	t=0.5	0.70	4.77	0.46

6 结果分析

由于题目的特殊性，$R(0; u_j^n, u_{j+1}^n) = u_j^n$，因此 Godonov 格式实际上是迎风格式，用 lax_wandroff 格式求解的结果随时间步的增加与解

析解相差越来越大，而且减小步长并不能改善，用迎风和 lax_wandroff 构造的二阶 TVD 格式精度比迎风格式有所提升。

分析计算结果可以看出，网格比为 0.5 要优于 0.9 的情形，在网格比为 0.9 的情况下，t=0.3 时使用 2 阶 TVD 计算结果的误差要比只用迎风格式来得大。

最后分别给出 $\lambda = 0.5$ 时的函数图像，由下面的图像可以看出 lax_wandroff 格式不适用于解此问题。