抛物型方程的差分方法实验题

考虑以下反应扩散问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{1}{\varepsilon} u(1-u^2), \quad (x,y) \in \Omega, \quad t > 0 \\ u|_{\partial\Omega} & = & -1, \\ u|_{t=0} & = & \begin{cases} 1, & x \in \widetilde{\Omega}, \\ -1, & \Omega \setminus \widetilde{\Omega}. \end{cases} \end{cases}$$

其中 $0 < \varepsilon \ll 1$,

$$\begin{aligned} \Omega &= [-1,1] \times [-1,1], \\ \widetilde{\Omega} &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \right\}, \end{aligned}$$

且 $0 < a < 1$, $0 < b < 1$。试构造一种无条件稳定的（当然稳定性也不依赖于 ε）二阶格式，并取不同的 ε, a, b 和充分小的步长 h 计算，看看结果有什么不同。

提示：常微分方程

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} u(1-u^2)$$

可以得到精确解的解析表达式。