率失真理论

赵丰

2018 年 6 月 12 日

$X \to \hat{X}$，通常为多对一的映射。假设用 J bits 描述 X，即 $\hat{X}$ 有 J 个取值，这些取值称为再生点或码字。设 $X \sim N(0, \sigma^2)$, 失真度量为平方误差，即寻找 $\hat{X}$ 使得 $\mathbb{E}[X-\hat{X}]^2$ 最小。若用 0 比特量化，取 $\hat{X}=0$ 时平方误差最小。若用 1 比特量化，取 $\hat{X} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma & x \geq 0 \\ -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma & x < 0 \end{cases}$

定义 1. 设 $X^n = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $\widehat{X}^n$ 为 X^n 的表示, $\widehat{X}^n \in \widehat{\mathcal{X}}^n, X^n \in \mathcal{X}^n$。一个 $(2^{nR}, n)$ 的率失真码是一个从 $\mathcal{X}^n$ 到 $\widehat{\mathcal{X}}^n$ 的映射，有 2^{nR} 个码字，记为：

$$\widehat{X}^n(1), \widehat{X}^n(2), \ldots, \widehat{X}^n(2^{nR})$$

其对应的表示区域（原象）构成 $\mathcal{X}^n$ 的划分。上述映射也可以用两阶段法来表示：

- 编码阶段 $f_n(x^n) \in \{1, 2, \ldots, 2^{nR}\}$，为多对一的映射
- 解码阶段 $g_n : \{1, 2, \ldots, 2^{nR}\} \to \widehat{X}^n$ 为单射。

定义 2. 失真度量或失真函数，$f : \mathcal{X} \times \widehat{\mathcal{X}} \to \mathbb{R}^+$。若 $\max\limits_{x \in \mathcal{X}, \widehat{x} \in \widehat{\mathcal{X}}} d(x, \widehat{x}) < \infty$，则称失真度量 d 是有界的。

常用的失真度量有

- *Hamming* 失真（用于离散型随机变量）$d(x, \widehat{x}) = \begin{cases} 0 & x \neq \widehat{x} \\ 1 & x = \widehat{x} \end{cases}$
- 平方误差失真 $d(x, \widehat{x}) = (x - \widehat{x})^2$

序列失真定义为：$d(x^n,\widehat{x}^n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}d(x_i,\widehat{x}_i)$

定义 3. 一个 $(2^{nR},n)$ 的率失真码的失真为

$$\begin{aligned}D&=\mathbb{E}[d(X^n,g^n(f^n(X^n))]\\&=\sum_{x^n}p(x^n)d(x^n,g^n(f^n(X^n)))\end{aligned}\tag{1}$$

对于给定的失真 D，若存在一个 $(2^{nR},n)$ 的率失真码列 (f_n,g_n) 满足 $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[d(X^n,g^n(f^n(X^n))]\le D$ 则称码率 R 对于失真 D 是可达的。所有可达码率 R 的下确界，称为率失真函数，记为 $R(D)$。失真率函数 $D(R)$ 是给定码率 R 失真 D 的下确界。

定义 4 (信息率失真函数)**.**

$$R^{(I)}(D)=\min_{p(\widehat{x}|x)}I(X;\widehat{X})\tag{2}$$

$$\textit{subject to}\ \sum_{x,\widehat{x}}p(x)p(\widehat{x}|x)d(x,\widehat{x})\le D$$

设 $X\sim P\triangleq p(x)$, 转移概率 $Q\triangleq p(\widehat{x}|x)$, 则 $I(X;\widehat{X})=I(P;Q)$。给定 P 时 I 是 Q 的下凸函数，$R^{(I)}$ 是 Q 受限条件下的最小值。

定理 1. 离散无记忆信源 $X\sim p(x)$, $d(x,\widehat{x})$ 有界失真，则

$$R(D)=R^{(I)}(D)\tag{3}$$

Bernoulli 信源在 Hamming 失真条件下的率失真函数计算

假设 $\Pr(X=1)=p\le\frac{1}{2}$, 设 $\oplus$ 为模 2 相加, $\Pr(X\oplus\widehat{X}=1)=\Pr(X\ne\widehat{X})=\mathbb{E}[d(X,\widehat{X})]\le D$，当 $D\le p$ 时

$$\begin{aligned}I(X;\widehat{X})&=H(X)-H(X|\widehat{X})\\&=h(p)-H(X\oplus\widehat{X}|\widehat{X})\\&\ge h(p)-H(X\oplus\widehat{X})\\&\ge h(p)-h(D)\end{aligned}$$

另一方面，假设上式取等号，则有 $H(X|\widehat{X})=h(D)$。构造一 BSC 测试信道如图 1 所示，可求出 $\widehat{X}\sim Bern(\frac{p-D}{1-2D})$ 时 $I(X;\widehat{X})=h(p)-h(D)$，达到了最大值。当 $D\ge p$ 时，取 $\widehat{X}=0\Rightarrow\mathbb{E}[d(X,\widehat{X})]=p\le D$。综上：

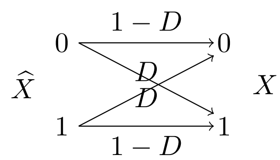

图 1: 测试信道

$$R(D)=\begin{cases} h(p)-h(D) & D<p \\ 0 & D\geq p \end{cases}$$

高斯信源在平方误差失真度量下率失真函数的计算

当 $D \leq \sigma^2$ 时，

$$\begin{aligned} I(X;\widehat{X}) &= h(X)-h(X|\widehat{X}) \\ &= \frac{1}{2}\log 2\pi e\sigma^2 - h(X-\widehat{X}|\widehat{X}) \\ &\geq \frac{1}{2}\log 2\pi e\sigma^2 - h(X-\widehat{X}) \\ &\geq \frac{1}{2}\log 2\pi e\sigma^2 - \frac{1}{2}\log 2\pi e D \\ &= \frac{1}{2}\log\frac{\sigma^2}{D} \end{aligned}$$

设 $Z=X-\widehat{X}$，当 $Z\sim N(0,D)$ 且 Z 与 $\widehat{X}$ 相互独立时不等式成立。

当 $D\geq\sigma^2$ 时，取 $\widehat{X}=0\Rightarrow\mathbb{E}[d(X,\widehat{X})]=\sigma^2\leq D$。

综上：

$$R(D)=\begin{cases} \frac{1}{2}\log\frac{\sigma^2}{D} & D<\sigma^2 \\ 0 & D\geq\sigma^2 \end{cases}$$