Tsinghua-Berkeley Shenzhen Institute
INFERENCE AND INFORMATION
Fall 2017

Homework 5

赵丰 March 17, 2018

- **Acknowledgments:** This coursework referes to wikipedia: `https://en.wikipedia.org`.
- **Collaborators:** I finish this coursework by myself.

I use `enumerate` to generate answers for each question:

5.1.

$$D(p_{\mathsf{y}}(\cdot;x)||p_{\mathsf{y}}(\cdot;x+\delta)) = \sum_y p_{\mathsf{y}}(y;x)\ln\frac{p_{\mathsf{y}}(y;x)}{p_{\mathsf{y}}(y;x+\delta)}$$

设 $F(x) = \ln(p_{\mathsf{y}}(\cdot;x))$ 则

$$F(x+\delta) = F(x) + F'(x)\delta + \frac{1}{2}F''(x)\delta^2$$

因此

$$D(p_{\mathsf{y}}(\cdot;x)||p_{\mathsf{y}}(\cdot;x+\delta)) = -\sum_y p_{\mathsf{y}}(y;x)(F'(x)\delta + \frac{1}{2}F''(x)\delta^2) + O(\delta^3)$$

注意到

$$F'(x) = \frac{1}{p_{\mathsf{y}}(y;x)}\frac{\partial}{\partial x}p_{\mathsf{y}}(y;x)$$

因此

$$\sum_y p_{\mathsf{y}}(y;x)F'(x) = \sum_y \frac{\partial}{\partial x}p_{\mathsf{y}}(y;x) \tag{1}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\sum_y p_{\mathsf{y}}(y;x) \tag{2}$$

$$= 0 \tag{3}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{D(p_{\mathsf{y}}(\cdot;x)||p_{\mathsf{y}}(\cdot;x+\delta))}{\delta^2} = -\frac{1}{2}\sum_y p_{\mathsf{y}}(y;x)F''(x) + O(\delta)$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{D(p_{\mathsf{y}}(\cdot;x)||p_{\mathsf{y}}(\cdot;x+\delta))}{\delta^2} = \frac{1}{2}J_{\mathsf{y}}(x)$$

5.2. (a)

$$J_{\underline{\mathsf{y}}} = \begin{cases} 2 & x > 0 \\ \frac{3}{2} & x < 0 \end{cases}$$

评注：Fisher Information 具有可加性。

(b) 当 $x>0$ 时，可以求出 $\mathrm{Var}[\hat{x_1}(\mathsf{y})]=\frac{1}{2}$，达到 CRB 下界; 当 $x<0$ 时，可以求出 $\mathrm{Var}[\hat{x_2}(\mathsf{y})]=\frac{2}{3}$，达到 CRB 下界; 因此如果 $x\in\mathbb{R}/\{0\}$, 存在 MVU 估计量，那么它会达到 CRB 下界，从而同时具有 $\hat{x_1}(\mathsf{y})$ 和 $\hat{x_1}(\mathsf{y})$ 的形式, 矛盾。

注：有效估计量具有形式

$$
\begin{aligned}
\hat{x}(y)=&x+\frac{1}{J_{\mathsf{y}}(x)}\frac{\partial}{\partial x}\ln p_{\mathsf{y}}(\mathsf{y};x)\\
=&x+\frac{1}{\frac{1}{\mathrm{Var}(\mathsf{w}_1)}+\frac{1}{\mathrm{Var}(\mathsf{w}_2)}}\left[\frac{\mathsf{y}_1-x}{\mathrm{Var}(\mathsf{w}_1)}+\frac{\mathsf{y}_2-x}{\mathrm{Var}(\mathsf{w}_2)}\right]\\
=&\begin{cases}\frac{1}{2}\mathsf{y}_1+\frac{1}{2}\mathsf{y}_2, & x>0\\ \frac{2}{3}\mathsf{y}_1+\frac{1}{3}\mathsf{y}_2, & x<0\end{cases}
\end{aligned}
$$

5.3. (a) 设 $P(H_1)=q$，似然比检验准则的阈值 $\lambda_B=\frac{1-q}{q}$，

$$
\frac{p(\mathsf{y}|H_1)}{p(\mathsf{y}|H_0)}\underset{\hat{H}(\mathsf{y})=H_0}{\overset{\hat{H}(\mathsf{y})=H_1}{\gtrless}}\lambda_B\Rightarrow y\underset{\hat{H}(\mathsf{y})=H_0}{\overset{\hat{H}(\mathsf{y})=H_1}{\gtrless}}\frac{\sigma^2\ln\lambda_B}{s_1-s_0}+\frac{s_0+s_1}{2}=:y_0
$$

$$
\begin{aligned}
P_F&=\int_{y_0}^{\infty}p(y|H_0)dy=\Phi(-\frac{y_0-s_0}{\sigma})\\
P_M&=\int_{-\infty}^{y_0}p(y|H_1)dy=\Phi(\frac{y_0-s_1}{\sigma})
\end{aligned}
$$

其中 Φ 是标准正态分布的分布函数,$\Phi(x)+Q(x)=1$。

由极大极小化方程和对称代价得

$P_F=P_M\Rightarrow y_0=\frac{s_0+s_1}{2}\Rightarrow\lambda_B=0\Rightarrow\xi=\frac{1}{2}$ 判决准则是：

$$
y\underset{\hat{H}(y)=H_0}{\overset{\hat{H}(y)=H_1}{\gtrless}}\frac{s_0+s_1}{2}
$$

(b) p 是实际的先验，q 是用于设计 Bayes 判决准则的先验，则代价函数为

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\mathrm{B}}(q,p)=&(1-p)P_{\mathrm{F}}(q)+pP_{\mathrm{M}}(q)) &\quad(4)\\
=&(1-p)\Phi(-[\frac{\sigma\ln\lambda_B(q)}{s_1-s_0}+\frac{s_1-s_0}{2\sigma}])+p\Phi(\frac{\sigma\ln\lambda_B(q)}{s_1-s_0}-\frac{s_1-s_0}{2\sigma}) &\quad(5)
\end{aligned}
$$

将 $q=\frac{1}{2}$ 和 $q=p$ 分别代入 Bayes 风险函数 $\varphi_B(q,p)$

并代入数字，得 $\varphi_{\mathrm{B}}(\frac{1}{2},p)=0.16,\varphi_{\mathrm{B}}(p,p)=0.08$ 其中前者是极大极小准则的期望代价，后者是已知先验 p 时 Bayes 准则的期望代价。

5.4. (a) $p_{\mathsf{z}}(z;x)$ 也属于指数分布族，分布函数为 $\exp[\lambda(x)t(z-a)-\alpha(x)+\beta(z-a)]$。

(b)

$$\begin{aligned} p_{\mathsf{z}}(z;x) =& p_{\mathsf{y}} * p_{\mathsf{y}}(z) \\ =& \int_{\mathbb{R}} p_{\mathsf{y}}(y;x) p_{\mathsf{y}}(z-y;x) dy \\ =& \exp(xz - \alpha'(x) + \beta'(z)) \end{aligned}$$

其中 $\alpha'(x) = 2\alpha(x), \beta'(z) = \ln \int_{\mathbb{R}} \exp[\beta(y) + \beta(z-y)] dy$

5.5. Thanks to 陆石, who gives me this template.