清华大学

现代信号处理

2017 年秋季学期

作业 3

赵丰 2018 年 6 月 3 日

3.1. 有一个零均值信号 $x(n)$，它的自相关序列的前两个值为 $r_x(0)=10, r_x(1)=5$，该信号在传输中混入了一个均值为 0，方差为 5 的加性高斯白噪声，该噪声与信号是不相关的。设计一个 2 系数的 FIR 型维纳水滤波器，使得滤波器输出尽可能以均方意义逼近原信号 $x(n)$。

(a) 求滤波器系数

(b) 滤波器输出与 $x(n)$ 之前的均方误差

解. 观测 $y(n)=x(n)+w(n)$，$w(n)$ 是高斯白噪声。
$r_y(0)=5+r_x(0)=15, r_y(1)=r_x(1)=5$, 又
$r_{xy}(0)=r_x(0), r_{xy}(1)=r_x(1)$ 解 Wiener-Hopf 方程:

$$\begin{bmatrix} r_y(0) & r_y(1) \\ r_y(1) & r_y(0) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{xy}(0) \\ r_{xy}(1) \end{pmatrix} \tag{1}$$

解得 $w_1=0.625, w_2=0.125$ 由最优滤波器的均方误差公式:

$$J_{\min}=\sigma_x^2-r_{yx}^T\boldsymbol{w} \tag{2}$$

得到均方误差为 3.125。

3.2. 考虑一 2 阶 FIR 滤波器用于估计期望响应，其中零延时支路固定系数为 1，求系数 w_1 使估计的均方误差最小，并求此最小均方误差。已知参数为 $\sigma_d^2=4, r_x(0)=1.0, r_x(1)=0.5, r_{xd}(0)=-1.0, r_{xd}(-1)=1.0$

解. 欲极小化 $E((d(n)-x(n)-w_1x(n-1))^2)$

$$E((d(n)-x(n)-w_1x(n-1))^2)=\sigma_d^2+(1+w_1^2)r_x(0)-2r_{xd}(0)-2w_1r_{xd}(-1)+2w_1r_x(1) \tag{3}$$

上式对 w_1 求导并令导数等于零解得:

$$w_1=\frac{r_{xd}(-1)-r_x(1)}{r_x(0)}=0.5 \tag{4}$$

最小均方误差为 $E((d(n)-x(n)-0.5x(n-1))^2)=6.75$

3.3. 源信号 $s(n)$ 是满足 $s(n)=\alpha s(n-1)+v(n)$ 的 AR(1) 信号，$v(n)$ 的方差为 σ_v^2，实际测量信号 $x(n)=s(n)+w(n)$ 混入了白噪声 $w(n)$，其方差为 σ_w^2，设计一个 Wiener 滤波器，以 $x(n)$ 为输入，输出尽可能近似 $s(n+K)$，其中 K 是固定整数。

(a) 给出 2 系数 FIR 滤波器权系数的一般解的方程组；

(b) 在 (a) 中，假设 $\alpha=0.8, \sigma_w^2=\sigma_v^2=1$，分别求出 $K=0$ 和 $K=1$ 时的滤波器的权系数和最小均方误差；

(c) 求出非因果 IIR 滤波器系统函数的表达式；

(d) 在 (c) 中，假设 $\alpha=0.8, \sigma_w^2=\sigma_v^2=1$，分别求出 $K=0$ 和 $K=1$ 时的滤波器的权系数和最小均方误差；

解.

(a) 针对 2 系数的 FIR 型滤波器，$r_x(0)=r_s(0)+\sigma_w^2, r_x(1)=r_s(1)$ 由 AR(1) 过程的自相关函数公式 $r_s(n)=\frac{\sigma_v^2}{1-\alpha^2}\alpha^{|n|}$, 因此:$r_x(0)=\frac{\sigma_v^2}{1-\alpha^2}+\sigma_w^2$,$r_x(1)=\frac{\sigma_v^2\alpha}{1-\alpha^2}$ 设 $d(n)=s(n+K)$, 则 $r_{xd}(0)=r_s(K)$,$r_{xd}(-1)=r_s(K+1)$ 因此方程组为

$$\begin{bmatrix} \frac{\sigma_v^2}{1-\alpha^2}+\sigma_w^2 & \frac{\sigma_v^2\alpha}{1-\alpha^2} \\ \frac{\sigma_v^2\alpha}{1-\alpha^2} & \frac{\sigma_v^2}{1-\alpha^2}+\sigma_w^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_v^2}{1-\alpha^2}\alpha^{|K|} \\ \frac{\sigma_v^2}{1-\alpha^2}\alpha^{|K+1|} \end{pmatrix} \tag{5}$$

(b) 代入数据:

	权系数	最小均方误差
$K=0$	[0.595238, 0.238095]	0.595238
$K=1$	[0.47619, 0.190476]	1.38095

(c)

$$S_x(z)=\sigma_w^2+S_s(z)=\sigma_w^2+\frac{\sigma_v^2}{(1-\alpha z^{-1})(1-\alpha z)} \tag{6}$$

因为

$r_{dx}(k)=E(d(n)x(n-k))=E(s(n+K)s(n-k))=r_s(K+k)$,

所以

$$S_{dx}(z)=z^K S_s(z)=\frac{\sigma_v^2 z^K}{(1-\alpha z^{-1})(1-\alpha z)} \tag{7}$$

所以

$$W(z)=\frac{S_{dx}(z)}{S_x(z)}=\frac{\sigma_v^2 z^K}{\sigma_w^2(1-\alpha z^{-1})(1-\alpha z)+\sigma_v^2} \tag{8}$$

(d) 代入题中参数 $W(z)$ 分母化为 $2.64-0.8(z+z^{-1})$ 设 $2.64-0.8(z+z^{-1})=Q(1-\beta z)(1-\beta z^{-1})$，得方程组 $Q\beta=0.8, Q(1+\beta^2)=2.64$, 是关于 β 的一元二次方程。取 $|\beta|<1$ 的解有 $\beta=0.33756, Q=2.36995$。式 (**??**) 做双边逆 Z 变换得权系数表达式：

$$w(k)=\frac{1}{Q(1-\beta^2)}\beta^{|k+K|}=0.476(0.34)^{|k+K|} \tag{9}$$

分别代入 $K=0, K=1$ 到上式即得非因果型 IIR 滤波器的权系数。对于 IIR 滤波器，最小均方误差公式为：

$$\begin{aligned}
J_{\min}=&\sigma_d^2-\sum_{l=-\infty}^{\infty}w(l)r_{dx}(l) &(10)\\
=&\sigma_d^2-\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{1}{Q(1-\beta^2)}\beta^{|l+K|}r_s(l+K) &(11)\\
=&\sigma_d^2-\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{1}{Q(1-\beta^2)}\beta^{|l|}r_s(l) &(12)\\
=&\frac{\sigma_v^2}{1-\alpha^2}\left(1-\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{1}{Q(1-\beta^2)}\beta^{|l|}\alpha^{|l|}\right) &(13)\\
=&\frac{\sigma_v^2}{1-\alpha^2}\left(1-\frac{1}{Q(1-\beta^2)}(-1+\frac{2}{1-\alpha\beta})\right) &(14)
\end{aligned}$$

得最小均方误差为 0.476, 与 K 无关。

3.4. 一个平稳随机信号的自相关序列为
$r_x(k)=\frac{1}{2}\delta(k+1)+\frac{5}{4}\delta(k)+\frac{1}{2}\delta(k-1)$

(a) 设计该信号的 1 阶、2 阶最优前向一步预测器。

(b) 利用 Levinson-Durbin 算法，计算 3 阶前向预测误差滤波器对应的反射系数，画出格型结构图

解. (a) 对于一阶最优前向一步预测器，由 $r_x(0)w = r_x(-1)$ 解得权系数 $w = 0.4$, 即 $\hat{x}(n) = 0.4x(n-1)$, 预测误差功率为
$p_1 = r_x(0) - wr_x(-1) = 1.17$ 对于二阶最优前向一步预测器，解下面的方程：

$$\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(1) \\ r_x(1) & r_x(0) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_x(-1) \\ r_x(-2) \end{pmatrix} \tag{15}$$

得权函数 $w_1 = 0.48, w_2 = -0.19$，即
$\hat{x}(n) = 0.48x(n-1) - 0.19x(n-2)$ 预测误差功率为
$p_2 = r_x(0) - r_x(-1)w_1 - r_x(-2)w_2 = 1.01$

(b) 3 阶前向预测误差滤波器为

$$f_3(n) = x(n) - w_{f,1}x(n-1) - w_{f,2}x(n-2) - w_{f,3}x(n-3) \tag{16}$$

根据第一问的结果，$a_{2,0} = 1, a_{2,1} = -0.48, a_{2,2} = 0.19$ 直接先计算 $\Delta_2 = r(-3)a_{2,0} + r(-2)a_{2,1} + r(-1)a_{2,2} = 0.095$, 因此三阶反射系数为 $k_3 = -\frac{\Delta_2}{p_2} = -0.094$ 由递推公式

$$a_{m,l} = a_{m-1,l} + k_m a_{m-1,m-l} \tag{17}$$

得到 $a_{3,1} = a_{2,1} + k_3 a_{2,2} = -0.494$ 等，与直接解 Y-W 方程结果一致。同理可计算出前两阶反射系数为：
$k_1 = -\frac{r_x(1)}{r_x(0)} = -0.4$,$k_2 = -\frac{\Delta_1}{p_1} = 0.171$, 图略。

3.5. 如图 **??**所示两线性因果系统级联，其中
$H_1(z) = \frac{1}{1-0.8z^{-1}}, H_2(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}}$，输入 $W(n)$ 是白噪声，均值为 0，方差为 $\sigma_w^2 = 1$，系统输出是 $x(n)$，求：

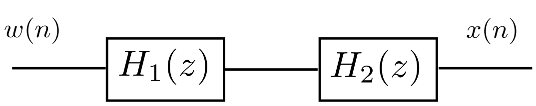

图 1: 线性因果系统级联

(a) $x(n)$ 的自相关序列值 $r_x(0), r_x(1)$ 和 $r_x(2)$;

(b) 如果对 $x(n)$ 进行最优预测，设计 $x(n)$ 的最优格型预测误差滤波器，求出格型预测误差滤波器的合适的阶数、各反射系数，画出实现结构图。

解. (a) H_1 与 H_2 级联，输出为 AR(2) 过程，满足：

$$x(n) - 1.3x(n-1) + 0.4x(n-2) = w(n) \tag{18}$$

由 Wiener-Hopf 方程

$$\begin{aligned} r_x(0) - 1.3r_x(1) + 0.4r_x(2) =& \sigma_w^2 \\ r_x(1) - 1.3r_x(0) + 0.4r_x(1) =& 0 \\ r_x(2) - 1.3r_x(1) + 0.4r_x(0) =& 0 \end{aligned}$$

解得 $r_x(0) = 8.64, r_x(1) = 8.02, r_x(2) = 6.98$

(b) 使用 2 阶预测即可达到最优格型预测误差滤波器的效果。为设计格型滤波器，只需确定前两阶反射系数。
$k_1 = -\frac{r_x(1)}{r_x(0)} = -0.929$,$k_2 = -\frac{\Delta_1}{p_1} = 0.4$。系统的结构图如下：

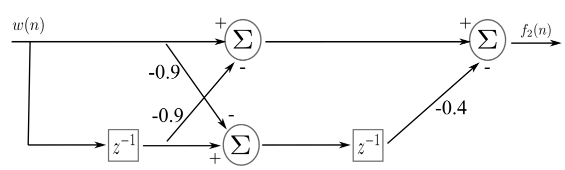

图 2: 两级格型 FIR 滤波器

3.6. 设由输入信号 $x(n)$ 通过一个非因果 IIR 维纳滤波器对期望响应 $d(n)$ 进行估计，估计误差为 $e(n)$。证明：估计误差功率可由下式计算:

$$\mathbb{E}[|e(n)|^2] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1 - |C_{dx}(\omega)|^2)S_d(\omega)d\omega \tag{19}$$

其中：$S_d(\omega)$ 是期望响应的功率谱密度，$C_{dx}(\omega)$ 称为 $d(n)$ 与 $x(n)$ 的复相关，定义为下式：

$$C_{dx}(\omega) = \frac{S_{dx}(\omega)}{[S_x(\omega)S_d(\omega)]^{1/2}}$$

解. $e(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}w^*(k)x(n-k)-d(n)=(w*x)(n)-d(n)$ 记 $\hat{d}=w*x$，则 $e(n)=\hat{d}(n)-d(n)$, 由正交性原理 $e(n)$ 与 $x(m),\forall m$ 正交，因此和 $x(m)$ 的线性组合 $\hat{d}$ 正交。

$$\begin{aligned}r_e(n)=&E(e(m)e(m-n)) &(20)\\ =&E((\hat{d}(m)-d(m))e(m-n)) &(21)\\ =&E(-d(m)e(m-n)) &(22)\\ =&r_d(n)-r_{\hat{d}d}(n) &(23)\\ =&r_d(n)-(w*r_{xd})(n) &(24)\end{aligned}$$

其中从(**??**)到(**??**)式用到了卷积和期望的线性运算的性质。上式两边同时做 Fourier 变换得:

$$S_e(\omega)=S_d(\omega)-W^*(\omega)S_{dx}(\omega) \tag{25}$$

由非因果型 Wiener 滤波器的特点可知，$W(z)=\frac{S_{dx}(z)}{S_x(z)}$。由于功率谱密度的积分与随机过程的方差相等，所以有

$$\begin{aligned}E\{|e(n)|^2\}=&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(S_d(\omega)-\frac{|S_{dx}(\omega)|^2}{S_x(\omega)})d\omega &(26)\\ =&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-|C_{dx}(\omega)|^2)S_d(\omega)d\omega &(27)\end{aligned}$$

3.7. Levinson-Durbin 递推算法中，定义了标量:
$\Delta_{m-1}=\sum_{k=0}^{m-1}r(k-m)a_{m-1,k}$，这里 $a_{m-1,k}$ 是 $m-1$ 阶前向线性最优预测滤波器的第 k 个权系数，用 $f_{m-1}(n)$ 和 $b_{m-1}(n)$ 分别表示前向和后向线性最优预测滤波器的预测误差，信号和滤波器系数都是实的，证明:

$$\Delta_{m-1}=E(f_{m-1}(n)b_{m-1}(n-1))$$

解.

$$f_{m-1}(n) = \sum_{k=0}^{m-1} a_{m-1,k} x(n-k) \tag{28}$$

$$b_{m-1}(n-1) = \sum_{k=0}^{m-1} a_{m-1,m-1-k} x(n-1-k) \tag{29}$$

$$\tag{30}$$

由正交性原理，前向预测误差 $f_{m-1}(n)$ 与 $x(n-1), \ldots, x(n-m+1)$ 正交（乘积期望值为 0），所以

$$E(f_{m-1}(n)b_{m-1}(n-1)) = a_{m-1,0} \sum_{k=0}^{m-1} a_{m-1,k} E(x(n-k)x(n-m)) \tag{31}$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} a_{m-1,k} r_x(k-m), a_{m-1,0} = 1 \tag{32}$$

$$= \Delta_{m-1} \tag{33}$$

3.8. 证明前向预测误差滤波器和后向预测误差滤波器输出满足如下的关系式。

(a) $\mathbb{E}[b_m(n)b_i^*(n)] = \begin{cases} p_m, & i = m \\ 0, & i \neq m \end{cases}$

(b) $\mathbb{E}[f_m(n)f_i^*(n)] = p_l, l = \max(m, i)$

(c) $\mathbb{E}[f_i(n)f_j^*(n-k)] = 0, \begin{cases} 1 \leq k \leq i-j, & i > j \\ -1 \geq k \geq i-j, & i < j \end{cases}$

$\mathbb{E}[b_i(n)b_j^*(n-k)] = 0, \begin{cases} 0 \leq k \leq i-j-1, & i > j \\ 0 \geq k \geq i-j+1, & i < j \end{cases}$

解. (a)

$$b_m(n) = \sum_{k=0}^{m} a_{m,m-k} x(n-k) \tag{34}$$

当 $i \neq m$ 时，不妨设 $i > m$，则 $b_i(n)$ 与 $x(n-m), x(n-m+1), \ldots, x(n)$ 正交（共轭乘积期望值为 0），所以 $E(b_m(n)b_i^*(n)) = 0$, 当 $i = m$ 时，由预测误差功率的定义有 $E(b_m(n)b_m^*(n)) = p_m$。

(b) 不访设 $i \geq m$，因为 $f_i(n)$ 与 $x(n-1), \ldots, x(n-i)$ 正交，所以

$$E[f_m(n)f_i^*(n)] = E[x(n)f_i^*(n)] = E[f_i(n)f_i^*(n)] = p_i \tag{35}$$

(c) 若 $i > j$, 因为 $k \geq 1$,$f_i(n)$ 与 $x(n-k)$ 正交，因为 $k < i-j$, 所以 $f_i(n)$ 与 $x(n-k-j)$ 正交，即 $f_i(n)$ 与 $x(n-k), x(n-k-1), \ldots, x(n-k-j)$ 正交，$f_i(n)$ 与 $f_j(n-k) = \sum_{r=0}^{j} x(n-k-r)$ 正交, 期望值为零。$i < j$ 时，由于 n 只是求和指标，可换成 $n+k$, 将 $-k$ 看成一个整体，$1 \leq -k \leq j-i$，则由刚才证明的式子有 $E[f_j(n)f_i^*(n-(-k))] = 0$
对于第二式，若 $i > j$，序列 $x(n-k-j), x(n-k-j+1), \ldots, x(n-k)$ 包含在 $x(n-i+1), \ldots, x(n)$ 之间，所以 $b_i(n)$ 与 $x(n-k-j), x(n-k-j+1), \ldots, x(n-k)$ 均正交，即有 $b_i(n)$ 与 $b_j(n-k)$ 正交。同理可证 $i < j$。