连续时间 Kalman 滤波

赵丰

2018 年 6 月 28 日

连续时变系统模型:

连续的状态方程—

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t) \tag{1}$$

连续的观测方程—

$$Z(t) = H(t)X(t) + V(t) \tag{2}$$

$\mathbb{E}[U(t)] = 0, \mathbb{E}[U(t)U^T(\tau)] = Q(t)\delta(t-\tau)$

$\mathbb{E}[V(t)] = 0, \mathbb{E}[V(t)V^T(\tau)] = R(t)\delta_{t-\tau}, \mathbb{E}[U(t)V^T(\tau)] = 0$

已知初始状态 $X(t_0)$ 均值为 $\mathbb{E}[X(t_0)] = \mu_X(t_0)$，方差为 $\mathrm{Var}(X(t_0)) = P(t_0)$，与 $U(t), V(t)$ 均不相关。

由 (1) 式解得

$$X(t) = \Phi(t, t_0)X(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)B(\tau)U(\tau)d\tau$$

其中 $\Phi(t, t_0) = \exp(\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau)$.

先将连续系统化为离散系统,$t = k\Delta t, t_0 = (k-1)\Delta t, X_k = X(k\Delta t), X_{k-1} = X((k-1)\Delta t), \Phi_{k,k-1} = \Phi(k\Delta t, (k-1)\Delta t)$，则有

$$X_k = \Phi_{k,k-1}X_{k-1} + W_{k-1}$$

其中

$$\begin{aligned} W_{k-1} &= \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} \Phi(k\Delta t, \tau)B(\tau)U(\tau)d\tau \\ &\approx \Phi(k\Delta t, (k-1)\Delta t)B((k-1)\Delta t) \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} U(\tau)d\tau \end{aligned}$$

$\mathbb{E}[W_k]=0$, 并可以求出 $\mathbb{E}[W_kW_i^T]=Q_k\delta_{ki}$,

$$Q_k=\Phi(t+\Delta t,t)B(t)Q(t)B^T(t)\Phi^T(t+\Delta t,t)\Delta t \tag{3}$$

对 (2) 式两边在 $(t,t+\Delta t)$ 区间积分再除以 Δt, 令 $Z_k=z(t),H(k)=H(t),X_k=X(t)$，则

$$Z_k=H_kX_k+V_k$$

其中 $V_k=\frac{1}{\Delta t}\int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t}V(\tau)d\tau$, 且 $\mathbb{E}[V_k]=0$ 并可以求出 $\mathbb{E}[V_kV_i^T]=R_k\delta_{ki},R_k=\frac{R(t)}{\Delta t}$

写出相应的离散 Kalman 滤波递推公式为

$$\hat{X}(t+\Delta t)=\Phi(t+\Delta t,t)\hat{X}(t)+K(t+\Delta t)[Z(t+\Delta t)-H(t+\Delta t)\Phi(t+\Delta t,t)\hat{X}(t)] \tag{4}$$

因为 $\Phi(t+\Delta t,t)=\exp(A\Delta t)=1+A(t)\Delta t+O((\Delta t)^2)$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\hat{X}(t)}{\mathrm{d}t}&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\hat{X}(t+\Delta t)-\hat{X}(t)}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}[\Phi(t+\Delta t,t)-1]\hat{X}(t)\\&+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}K(t+\Delta t)[Z(t+\Delta t)-H(t+\Delta t)\Phi(t+\Delta t,t)\hat{X}(t)]\\&=A(t)\hat{X}(t)+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{K(t+\Delta t)}{\Delta t}[Z(t)-H(t)\hat{X}(t)]\end{aligned}$$

由相应的离散 Kalman 滤波增益矩阵公式:

$$K(t+\Delta t)=P(t+\Delta t)H^T(t+\Delta t)R^{-1}(t+\Delta t)\Delta t \tag{5}$$

设 $K(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{K(t+\Delta t)}{\Delta t}$, 则我们得到连续情形下的滤波增益方程:

$$K(t)=P(t)H^T(t)R^{-1}(t) \tag{6}$$

以及连续情形下的状态估计方程:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{X}(t)}{\mathrm{d}t}=A(t)\hat{X}(t)+K(t)[Z(t)-H(t)\hat{X}(t)] \tag{7}$$

由相应的离散 Kalman 滤波误差矩阵的递推公式:

$$\begin{aligned}P(t+\Delta t)&=[I-K(t+\Delta t)H(t+\Delta t)](\Phi(t+\Delta t,t)P(t)\Phi^T(t+\Delta t,t)+Q_k)\\&=[I-K(t+\Delta t)H(t+\Delta t)](P(t)+A(t)P(t)\Delta t+P(t)A^T(t)\Delta t+Q_k+O((\Delta t)^2))\end{aligned}$$

因为 $K(t+\Delta t)=O(\Delta t)$ 我们进一步有

$$P(t+\Delta t)=P(t)+A(t)P(t)\Delta t+P(t)A^T(t)\Delta t+Q_k-K(t+\Delta t)H(t+\Delta t)P(t)+O((\Delta t)^2))$$

由 (3)式可得 $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{Q_k}{\Delta t}=B(t)Q(t)B^T(t)$ 因此，结合 (5)式

$$\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P(t+\Delta t)-P(t)}{\Delta t} \tag{8}$$

$$=A(t)P(t)+P(t)A^T(t)+B(t)Q(t)B^T(t)-P(t)H(t)^TR^{-1}(t)H(t)P(t) \tag{9}$$

(9) 式为误差方差方程，也称为 Ricatti 方程。

我们用连续时间 Kalman 滤波针对加性噪声信道设计滤波器。设 $z(t)=s(t)+n(t)$。信号的 PSD 为 $\Phi_s(s)=\frac{2}{1-s^2}$, 设噪声为高斯白噪声，$\Phi_n(s)=1$。则我们可以得到形成滤波器为 $H(s)=\frac{\sqrt{2}}{s+1}$ 因此状态方程可写为

$$\dot{s}(t)=-s(t)+\sqrt{2}u(t)$$

观测方程为仍为 $z(t)=s(t)+n(t)$ 由 (6) 可得到 $K(t)=P(t)$。我们寻找稳态解，令 (9)中 $\dot{P}(t)=0$，舍去负根得 $P=\sqrt{3}-1$。所以由 (7)可得:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{x}(t)}{\mathrm{d}t}+\sqrt{3}\hat{x}(t)=(\sqrt{3}-1)z(t)$$

滤波器传递函数为 $H(s)=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+s}$，与物理可实现的 Wiener 滤波器相同。