# 辛算法上机题目

数 33 赵丰 *

March 4, 2017

## 1 题目

数值求解下面描述 Hamilton 系统的 ODE:

$$
\begin{cases}
\frac{dp}{dt} &= -q, t \in [0, 100] \\
\frac{dq}{dt} &= p, t \in [0, 100] \\
p(0) &= 0 \\
q(0) &= 1
\end{cases}
\tag{1}
$$

## 2 解析解

$$
\begin{cases}
p(t) &= -\sin(t) \\
q(t) &= \cos(t)
\end{cases}
\tag{2}
$$

## 3 二级四阶的隐式 R-K 方法

该方法是辛格式，应用到该问题，差分格式为:

$$
\boldsymbol{z}_{n+1} = \boldsymbol{z}_n + \frac{h}{2}(\boldsymbol{K}_1 + \boldsymbol{K}_2) \tag{3}
$$

$$
\begin{pmatrix} I_2 + \frac{h}{4}J_2 & (\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}hJ_2 \\ (\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}hJ_2 & I_2 + \frac{h}{4}J_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{K}_1 \\ \boldsymbol{K}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -J_2\boldsymbol{z}_n \\ -J_2\boldsymbol{z}_n \end{pmatrix} \tag{4}
$$

*学号:2013012178

## 4 经典 4 级的显式 R-K 方法

该方法不是辛格式，应用到该问题，差分格式为:

$$\boldsymbol{z}_{n+1}=\boldsymbol{z}_n+\frac{h}{6}(\boldsymbol{K}_1+2\boldsymbol{K}_2+2\boldsymbol{K}_3+\boldsymbol{K}_4) \tag{5}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{K}_1 & =-J_2\boldsymbol{z}_n\\ \boldsymbol{K}_2 & =-J_2(\boldsymbol{z}_n+\frac{h}{2}\boldsymbol{K}_1)\\ \boldsymbol{K}_3 & =-J_2(\boldsymbol{z}_n+\frac{h}{2}\boldsymbol{K}_2)\\ \boldsymbol{K}_4 & =-J_2(\boldsymbol{z}_n+h\boldsymbol{K}_3)\end{cases} \tag{6}$$

## 5 数值求解

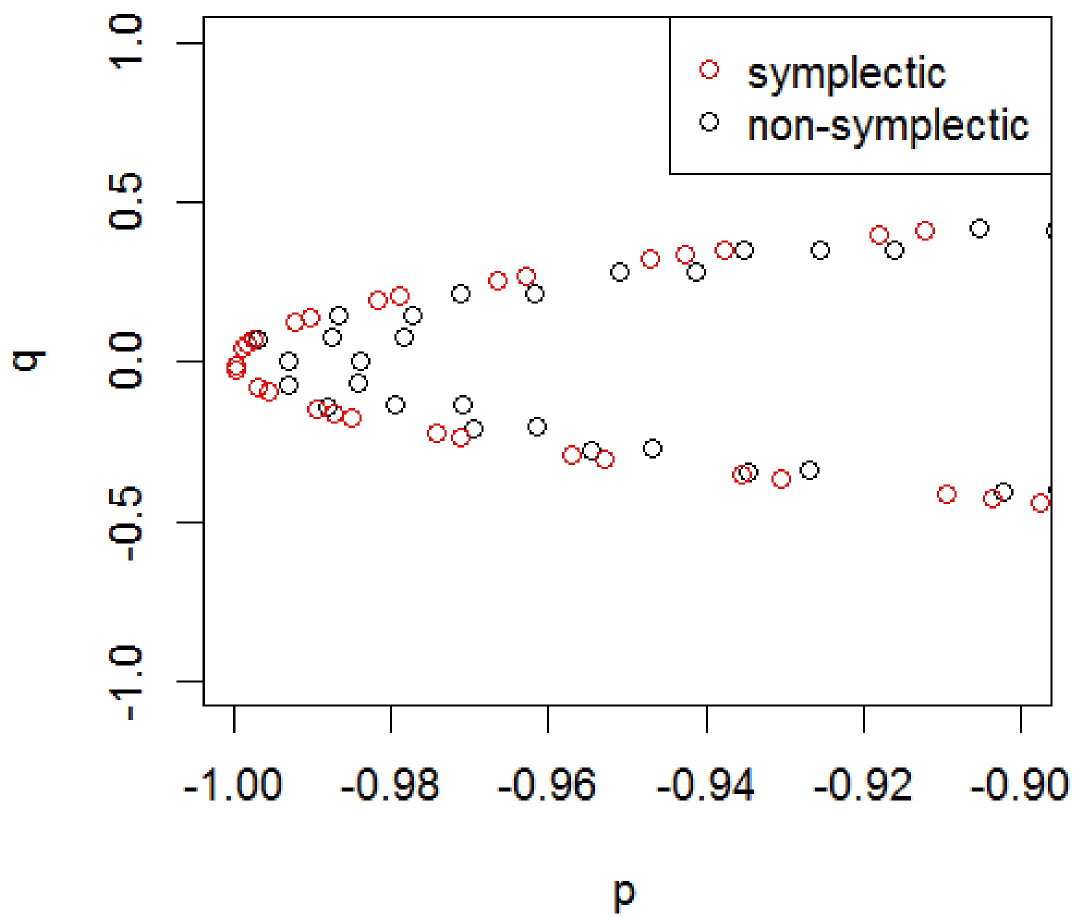
分别取步长 h 为 0.5 和 0.1, 求解问题，并对每一步的计算结果求能量 $\frac{p^2+q^2}{2}$, 针对 h=0.1 的求解 R 代码如下：

```
#Implicit RK symplectic Method
T<-matrix(,4,4)
h=0.1
J2=matrix(c(0,-1,1,0),2,2)
T[1:2,1:2]=diag(2)+h*J2/4
T[1:2,3:4]=(0.25-sqrt(3)/6)*h*J2
T[3:4,1:2]=(0.25+sqrt(3)/6)*h*J2
T[3:4,3:4]=diag(2)+h*J2/4
z=matrix(,2,as.integer(100/h))
z[,1]=c(0,1)
for(i in 2:length(z[1,])){
b=-c(J2%*%z[,i-1],J2%*%z[,i-1])
result=solve(T,b)
K1=result[1:2]
K2=result[3:4]
z[,i]=z[,i-1]+h*(K1+K2)/2
}
z_energy=(z[1,]^2+z[2,]^2)/2
#explicit,classical Runge-Kutta
y=matrix(,2,as.integer(100/h))
y[,1]=c(0,1)
for(i in 2:length(y[1,])){
K1=-J2%*%y[,i-1]
```

```
K2=-J2%*%(y[,i-1]+0.5*h*K1)
K3=-J2%*%(y[,i-1]+0.5*h*K2)
K4=-J2%*%(y[,i-1]+h*K3)
y[,i]=y[,i-1]+h*(K1/6+K2/3+K3/3+K4/6)
}
y_energy=(y[1,]^2+y[2,]^2)/2
```

计算 1000 步后，在机器精度范围内用二级四阶的隐式 R-K 方法（辛算法）得到的能量为 0.5，而用经典 4 级的显式 R-K 方法（非辛算法）得到的能量只有 0.499993。

如果取步长为 h=0.5, 能量的差异会更加明显，下图是从相空间曲线 $p^2+q^2=1$ 截取的一部分图形:



# 6 结论

通过这次上机实验验证了辛算法在求解 Hamilton 系统的优越性。