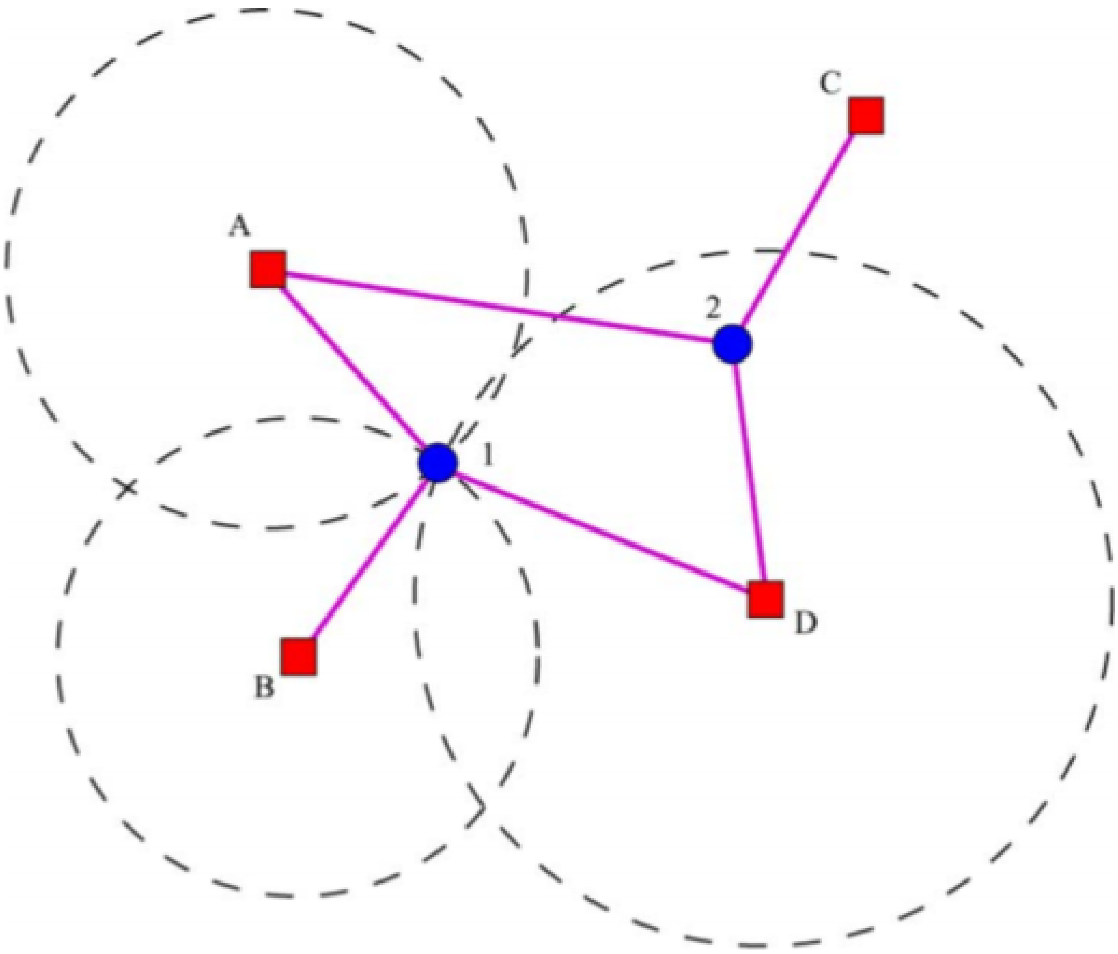
讨论

数 33 赵丰

February 24, 2017

本次讨论以近可能简化的数学模型推导出 FIM 的结构，这个结构和之前一直研究的 matrix 结构是一致的。先考虑非协作的情形（只研究平面定位），即定位场景中有 N_b 个 anchor 和 N_a 个移动节点 anget，如下图所示:



由于是非协作的，每个移动节点的定位都可以分别考虑，anchor 是位置已知的, 记为 $\{\boldsymbol{p}_1^b, \boldsymbol{p}_2^b, ...\boldsymbol{p}_{N_b}^b\}$, 待定位的移动节点的位置为 $\boldsymbol{p}$, 现在假设 agent 和每一个 anchor 都可以相互通信进行无线测距，得到的函数是 $f(||\boldsymbol{p}_i^b - \boldsymbol{p}||)$，f 依赖于测量方式的不同，直接测距情形下是常数，

$||\boldsymbol{p}_i^b-\boldsymbol{p}||$ 是 $\boldsymbol{p}_i^b$ 和 $\boldsymbol{p}$ 之间的欧式距离。测角和测信号强度情形下都不一样。假设每个测量都伴随有随机的高斯噪声，即测量的观测值是一个 $f(||\boldsymbol{p}_i^b-\boldsymbol{p}||)$, 方差为 σ 的正态分布 X_i, 对于 N_b 个锚点节点，可以得到 $X_1,...X_{N_b}$ 的联合概率密度函数为 N_b 维的多维正态分布，且我们假设各个锚点和待测的移动节点的通信是独立的，所以 X_i 之间彼此独立，联合概率密度函数为:

$$f(x_1,...x_{N_b}|\boldsymbol{p})=\prod_{i=1}^{N_b}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}exp(-\frac{(x_i-f(||\boldsymbol{p}_i^b-\boldsymbol{p}||))^2}{2\sigma^2} \tag{1}$$

由此得到对数似然函数为 (略去常数项):

$$\log(\Lambda)=\sum_{i=1}^{N_b}-\frac{(x_i-f(||\boldsymbol{p}_i^b-\boldsymbol{p}||))^2}{2\sigma^2} \tag{2}$$

由 FIM 矩阵的定义，可以推出对其中一个移动节点，FIM 是 2 行 2 列的对角阵：

$$FIM=\sum_{i=1}^{N_b}\frac{f'^2}{2\sigma^2||\boldsymbol{p}_i^b-\boldsymbol{p}||^2}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u} \tag{3}$$

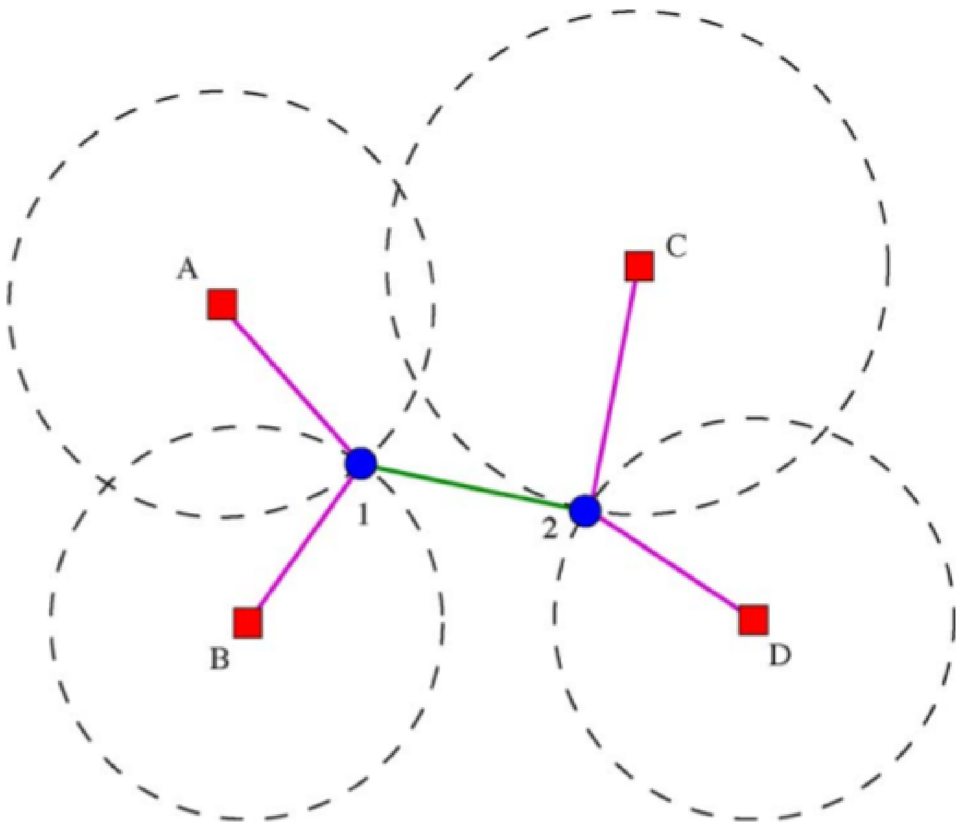
其中 $\boldsymbol{u_i}=\frac{\boldsymbol{p}_i^b-\boldsymbol{p}}{||\boldsymbol{p}_i^b-\boldsymbol{p}||}$, 是待测节点和第 i 个锚点的单位方向向量。在无线定位中 $\boldsymbol{u_i}^T\boldsymbol{u_i}$ 前面的系数被叫做 range information intensity(RII), 通常用 λ_i 表示。可以看出，各个锚点对 FIM 的贡献以和式相加，其中 building block 是 $\lambda_i\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}$，这是一个奇异的矩阵，但 2 个不同方向的这种矩阵相加是非奇异的。在沈老师之前的文献中，用信息椭圆的方法给出了这种矩阵一种几何解释。

如果非协作定位场景中有 N_a 个移动节点，总的 FIM 是 $2*N_a$ 维的矩阵，但由于各个节点之间相互独立，总的对数似然函数等于单独每个移动节点似然函数之和。进一步可求出 FIM 是对角阵 (以 2 乘 2 矩阵为最小单元), 每个对角阵都具有和 (3) 类似的形式。

下面考虑协作定位场景，如下图所示：

有些移动节点之前可以相互通信进行相对测距，假设第 i 和第 j 个移动节点之间进行测距，得到的观测变量服从均值为 $f(||\boldsymbol{p}_i^a-\boldsymbol{p}_j^a||)$ 方差为 σ^2 的高斯分布。所有可通信的移动节点的集合记为 E, 则此种情况下以 N_a 个移动节点位置为待估计参数，联合概率分布具有如下的形式:

$$\prod_{i=1}^{N_a}f(x_1^1,...x_{N_b}^{N_a}|\boldsymbol{p_i^a})\prod_{(i,j)\in E}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}exp(-\frac{(x_{ij}-f(||\boldsymbol{p}_i^a-\boldsymbol{p}_j^a||))^2}{2\sigma^2}) \tag{4}$$



上式第一项连乘式是 N_a 个锚点的贡献，第二项连乘式是移动节点协作的贡献。仿照上面的思路可以求出此时的 FIM 具有如下的结构:

$$J(\boldsymbol{P}) = \begin{pmatrix} J^A(\boldsymbol{p}_1)+\sum_{j\in N_a\setminus\{1\}}\boldsymbol{C}_{1,j} & -\boldsymbol{C}_{1,2} & \dots & -\boldsymbol{C}_{1,N_a} \\ -\boldsymbol{C}_{1,2} & J^A(\boldsymbol{p}_2)+\sum_{j\in N_a\setminus\{2\}}\boldsymbol{C}_{2,j} & \dots & -\boldsymbol{C}_{2,N_a} \\ \dots & & \dots & \\ -\boldsymbol{C}_{1,N_a} & -\boldsymbol{C}_{2,N_a} & \dots & J^A(\boldsymbol{p}_{N_a})+\sum_{j\in N_a\setminus\{N_a\}}\boldsymbol{C}_{N_a,j} \end{pmatrix} \tag{5}$$

上面的式子中 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,...\boldsymbol{p}_{N_a})$,$J^A(\boldsymbol{p}_i)$ 表示 N_b 个锚点对移动节点 i 的贡献，其具有 (3) 的形式。$C_{i,j}$ 表示移动节点 i 和 j 协作的矩阵，其具有 $\mathbf{1}_{(i,j)\in E}\lambda_{i,j}\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T$ 的形式,u 是两个移动节点间的单位方向向量, 如果 i,j 之间没有通信，该位置为全零的 2 阶方阵。$N_a\setminus\{i\}$ 应理解为移动节点序号 1 到 N_a 中去掉 i 后的集合。相比起非协作的情形，协作定位的 FIM 存在耦合项，即非对角元非零的情况，因而其 FIM 的结构更复杂。通过简单的观察，我们发现 $J(\boldsymbol{P})$ 每一行之和和非协作时相等，都严格大于 0，这种严格对角占优的性质能否在之后的研究中利用上也是一个

可以探讨的话题。FIM 和协方差矩阵的关系，(3) 式可以看成如下随机变量的方差:

$$X = \sum_{i=1}^{N_b} \frac{(X_i - f(||\boldsymbol{p}_i^b - \boldsymbol{p}||)) \times f'}{\sqrt{2}\sigma^2} (\boldsymbol{p}_i^b - \boldsymbol{p}) \tag{6}$$

X 是 X_i 的线性组合，由 X_i 之间的独立性很容易求出 $D(X) = FIM(3)$ 这种构造可以推广到 N_a 个移动节点的情形，此时

$$X_j^a = \sum_{i=1}^{N_b} \frac{(X_{i,j} - f(||\boldsymbol{p}_i^b - \boldsymbol{p}_j^a||)) \times f'}{\sqrt{2}\sigma^2} (\boldsymbol{p}_i^b - \boldsymbol{p}_j^a) \tag{7}$$

上式 j 取 1,2,...N_a,$X_{a,i}$ 表示第 i 个锚点和第 j 个移动节点测距的正态随机变量，由 $X_{a,i}$ 的彼此独立性可以推出协方差阵 $Corr(\boldsymbol{X})$ 为由 (3) 组成的对角阵，其中 $\boldsymbol{X} = (X_1^a, X_2^a, ...X_{N_a}^a)$ 考虑节点的相互协作后，每一个 X_j^a 附加了协作项

$$X_j^a = X_j^a(\text{non coorperative}) + \sum_{(j,i)\in E} \frac{(X_{ij} - f(||\boldsymbol{p}_i^a - \boldsymbol{p}_j^a||)) \times f'}{\sqrt{2}\sigma^2} (\boldsymbol{p}_i^a - \boldsymbol{p}_j^a) \tag{8}$$

上式 X_{ij} 表示移动节点 i 和 j 协作测距的正态随机变量。由上式求 $\boldsymbol{X}$ 的协方差矩阵可以得到 $J(\boldsymbol{P})$. 因此对每一个移动节点我们分配了一个随机变量 X_j^a, 目标是研究 X_j^a 之间的关系，可以用主成分分析或者因子分析的方法。