

# 旋转群

2011级ACM班

张方魁 陈志鹏

May 31, 2012

## Abstract

本文介绍了旋转群。

讨论这个话题之前，让我们先来看看有哪些正多面体。

**命题1：**正多面体只能有5种，即用正三角形做面的正四面体、正八面体，正二十面体，以及用正方形做面的正六面体，用正五边形做面的正十二面体。

**证明：**设顶点数为 $V$ ，面数为 $F$ ，棱数为 $E$

设正多面体的每个面是正 $n$ 边形，每个顶点有 $m$ 条棱。棱数 $E$ 应是面数 $F$ 与 $n$ 的积的一半（每两面共用一条棱），即

$$nF = 2E \quad (1)$$

同时， $E$ 应是顶点数 $V$ 与 $m$ 的积的一半，即

$$mV = 2E \quad (2)$$

由(1)、(2)，得

$$F = \frac{2E}{n}, V = \frac{2E}{m},$$

代入欧拉公式 $V + F - E = 2$ ，有

$$\frac{2E}{m} + \frac{2E}{n} - E = 2$$

整理后，得

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{E}$$

· 由于 $E$ 是正整数，所以 $\frac{1}{E} > 0$ 。因此

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2} \quad (3)$$

说明 $m, n$ 不能同时大于3，否则 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$ ，即(3)不成立。

另一方面，由于 $m$ 和 $n$ 的意义（正多面体一个顶点处的棱数与多边形的边数）知， $m \geq 3$ 且 $n \geq 3$ 。因此 $m$ 和 $n$ 至少有一个等于3

当 $m = 3$ 时，因为 $\frac{1}{n} > \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ ， $n$ 又是正整数，所以 $n$ 只能是3，4，5

同理 $n = 3$ ， $m$ 也只能是3，4，5

所以有以下几种情况：

$n$	$m$	类型
3	3	正四面体
4	3	正六面体
3	4	正八面体
5	3	正十二面体
3	5	正二十面体

由于上述5种多面体确实可以用几何方法作出，而不可能有其他种类的正多面体。

所以正多面体只有5种。

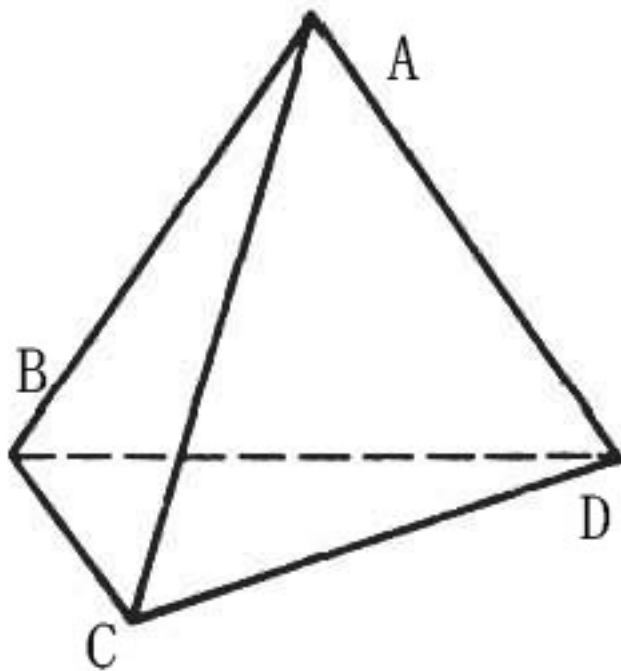


图 1 正四面体

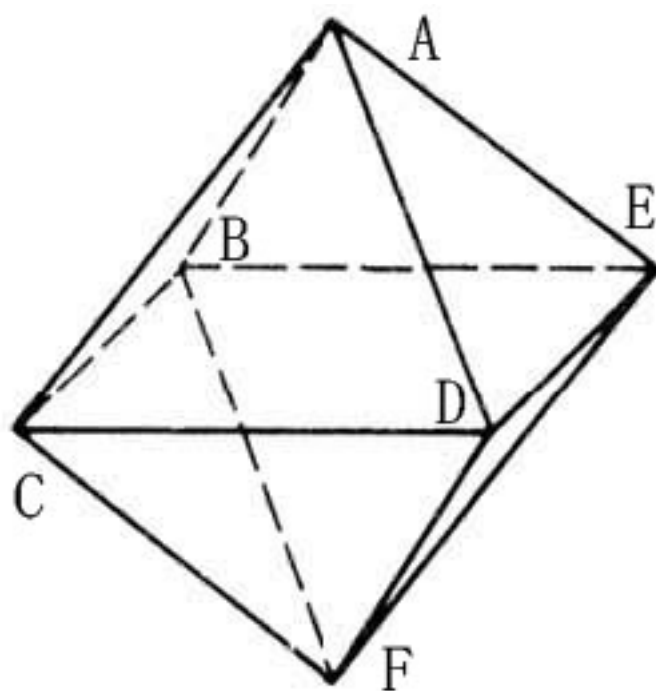


图 2 正八面体

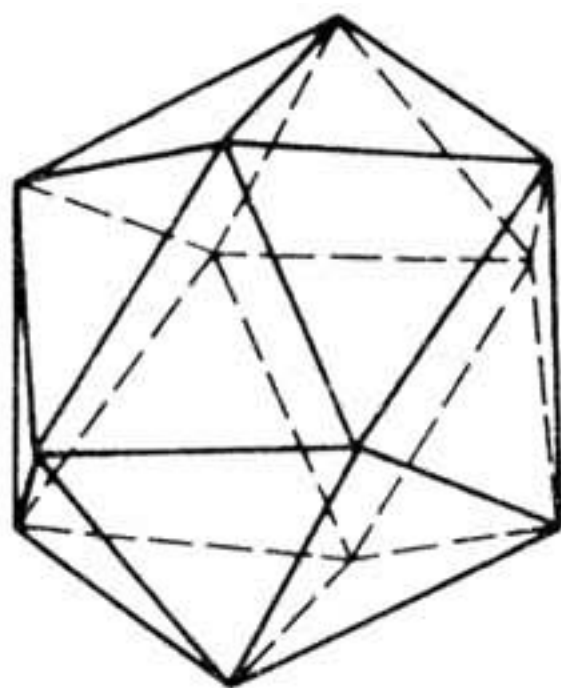


图 3 正二十面体

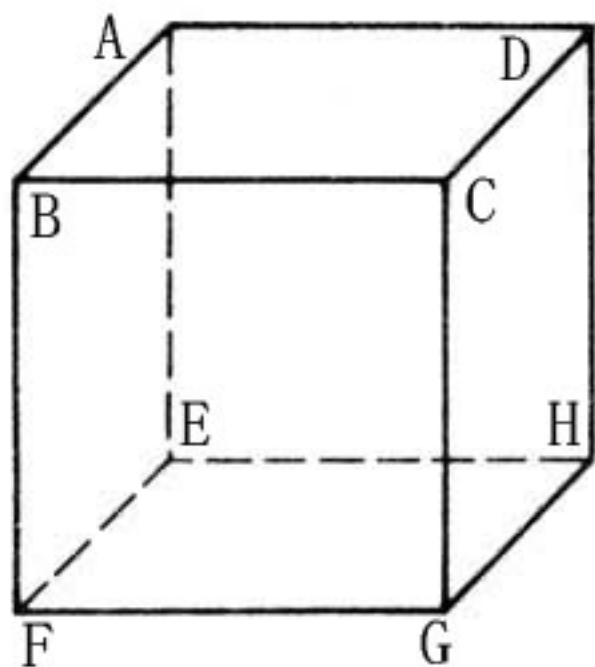


图 4 正六面体

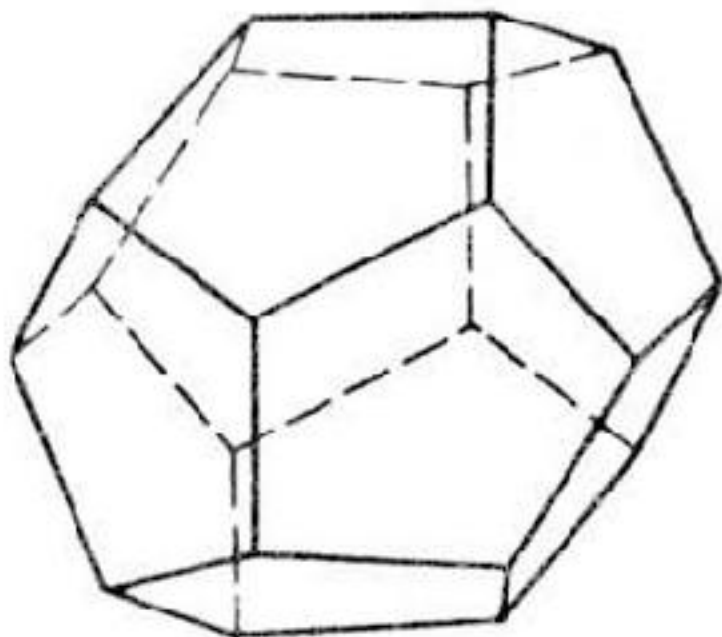


图 5 正十二面体

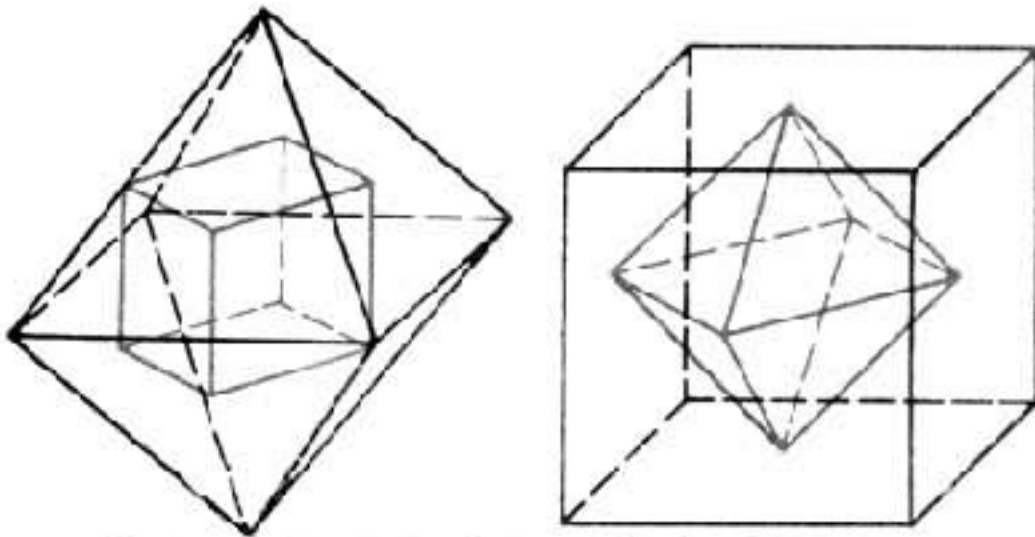


图 6 正六面体对正八面体的对偶图

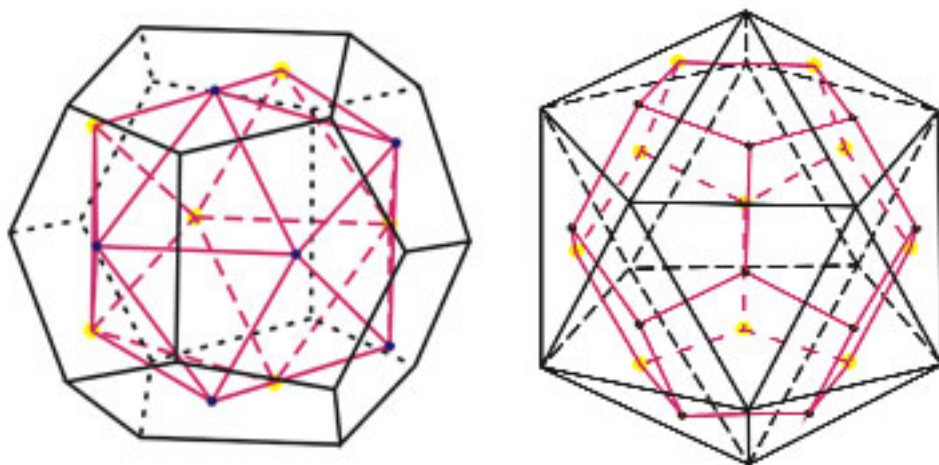


图 7 正十二面体对正二十面体的对偶图

**命题2:** 正四面体群 $G_4$ 是四次交错群 $A_4$ 。

**证明:** 正四面体ABCD如图1, 原点O是它的外接球的球心, 群 $G_4$ 的所有旋转变换可以分为两类:

(1) 分别以 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$ 为旋转轴, 旋转120度角的旋转变换 $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C, \sigma_D$ , 于是可得如下9个旋转变换:

$$\sigma_A = (B, C, D), \sigma_B = (A, D, C), \sigma_C = (A, B, D), \sigma_D = (A, C, B)$$

$$\sigma_A^2 = (B, D, C), \sigma_B^2 = (A, C, D), \sigma_C^2 = (A, D, B), \sigma_D^2 = (A, B, C)$$

$$\sigma_A^3 = \sigma_B^3 = \sigma_C^3 = \sigma_D^3 = (1)$$

(2) 分别以棱的中点连线 (有3对棱)  $\overrightarrow{P'O\vec{P}}, \overrightarrow{Q'O\vec{Q}}, \overrightarrow{R'O\vec{R}}$  为旋转轴, 旋转180度角的旋转变换  $\sigma_P, \sigma_Q, \sigma_R$ :

$$\sigma_P = (A, B)(C, D), \sigma_Q = (A, C)(B, D), \sigma_R = (A, D)(B, C)$$

故正四两体群  $G_4$  有12个旋转变换, 恰是A,B,C,D四元素构成的四次交错群  $A_4$ 。

**命题3:** 正八面体群  $G_8$  (或正六面体群  $G_6$ ) 同构于四次置换群  $S_4$ 。

**证明:** 正八面体ABCDEF如图2, 原点O是它外接球的球心。群  $G_8$  的所有旋转变换可分成三类:

(1) 分别以顶点连线  $\overrightarrow{AO\vec{F}}, \overrightarrow{BO\vec{D}}, \overrightarrow{CO\vec{E}}$  为旋转轴, 旋转90度角的旋转变换  $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C$ , 于是得如下10个旋转变换:

$$\begin{aligned} &\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C, \\ &\sigma_A^2, \sigma_B^2, \sigma_C^2, \\ &\sigma_A^3, \sigma_B^3, \sigma_C^3, \\ &\sigma_A^4 = \sigma_B^4 = \sigma_C^4 = (1) \end{aligned}$$

其中

$$\sigma_A = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ A & C & D & E & B & F \end{pmatrix}$$

等等。

(2) 分别以面的中心连线 (有4个对面)  $\overrightarrow{P'O\vec{P}}, \overrightarrow{Q'O\vec{Q}}, \overrightarrow{R'O\vec{R}}, \overrightarrow{S'O\vec{S}}$  为旋转轴, 旋转120度角的旋转变换  $\sigma_P, \sigma_Q, \sigma_R, \sigma_S$ , 于是得到如下8个旋转变换:

$$\begin{aligned} &\sigma_P, \sigma_Q, \sigma_R, \sigma_S \\ &\sigma_P^2, \sigma_Q^2, \sigma_R^2, \sigma_S^2, \end{aligned}$$

其中,

$$\sigma_P = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ B & C & A & E & F & D \end{pmatrix}$$

等等。

(3) 分别以棱的中点连线 (有6对棱)  $\overrightarrow{X'O\vec{X}}, \overrightarrow{Y'O\vec{Y}}, \overrightarrow{Z'O\vec{Z}}, \overrightarrow{U'O\vec{U}}, \overrightarrow{V'O\vec{V}}, \overrightarrow{W'O\vec{W}}$  为旋转轴, 旋转180度角的旋转变换  $\sigma_X, \sigma_Y, \sigma_Z, \sigma_U, \sigma_V, \sigma_W$ :

其中,

$$\sigma_X = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ E & F & B & A & D & C \end{pmatrix}$$

等等。故正八面体群  $G_8$  由24个旋转变换构成, 下面证明  $G_8$  同构于  $S_4$ 。

首先对正八面体的八个面标号

1:ABC; 2:ACD; 3:ADE; 4:AEB; 5:FBC; 6:FCD; 7:FDE; 8:FEB.

$G_8$  是  $S_8$  的子群. 考虑正八面体的如下四个对面组成的集合S:

$A_1 = \{1, 7\}, A_2 = \{2, 8\}, A_3 = \{3, 5\}, A_4 = \{4, 6\}.$

根据旋转群的几何意义, 知道 $G$ 在 $S$ 上有一个自然的群作用 $*$ :

$$\sigma * A_1 = \{\sigma(1), \sigma(7)\} \in S, \forall \sigma \in G.$$

显然此作用是可迁的, 即轨道只有一个。由计数公式, 对于每个 $1 \leq i \leq 4$ 有

$$|Stab(A_i)| = \frac{|G|}{|G * A_i|} = \frac{24}{4} = 6.$$

此作用诱导出一个群同态

$$\varphi: G \rightarrow T(S) = S_4.$$

由于已经知道 $|S_4| = |G| = 24$ , 为了证明 $\phi$ 是群同构映射, 只需说明此作用忠实 (即 $\phi$ 是单射), 亦即

$$\bigcap_{x \in S} Stab(x) = \{e\}.$$

事实上,  $Stab(A_1)$ 由以下六个置换组成:

$$(1),$$

$$\sigma_P = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ B & C & A & E & F & D \end{pmatrix} = (2, 4, 5)(3, 8, 6),$$

$$\sigma_P^2 = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ C & A & B & F & D & E \end{pmatrix} = (2, 5, 4)(3, 6, 8),$$

$$\sigma_Z = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ D & F & E & A & C & B \end{pmatrix} = (1, 7)(2, 3)(4, 6)(5, 8),$$

$$\sigma_U = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ B & C & A & E & F & D \end{pmatrix} = (1, 7)(2, 8)(3, 4)(5, 6),$$

$$\sigma_W = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ F & E & D & C & B & A \end{pmatrix} = (1, 7)(2, 6)(3, 5)(4, 8)$$

容易验证 $\sigma_P \notin Stab(A_2), \sigma_P^2 \notin Stab(A_2)$ 。

$Stab(A_i) \setminus \{(1)\}$ 中余下的四个置换每一个都是四个不相交对换的乘积。而 $S_8$ 中使得 $gA_i = A_i, \forall 1 \leq i \leq 4$ 都成立的这样的置换只有一个, 即

$$(1, 7)(2, 8)(3, 5)(4, 6) \notin Stab(A_i).$$

这说明了

$$\bigcap_{A_i \in S} Stab(A_i) = \{(1)\}.$$

从而 $\varphi$ 是单射, 从而是双射。

**推论:** 正八面体的每个面的中心恰好形成正六面体的顶点, 而正六面体的每个面的中心恰好形成正八面体的顶点, 故正六面体与正八面体是对偶图形。

正八面体群 $S_4$ 也是使正六面体对称的变换之集, 使正六面体对称的也只有 $S_4$ , 故 $S_4$ 也是正六面体群。

**引理1:** 二十面体群是单群。

**证明：**我们先来考虑二十面体群的类方程。设 $F$ 是正二十面体 $R_{20}$ 的任意一个面，用 $S$ 表示 $R_{20}$ 的面的集合( $R_{20}$ 的一个面可以用该面上的顶点集表示)。则其旋转群 $G_{20}$ 对于 $S$ 有一个自然的群作用。根据几何意义，这个作用还是可迁的。因此有

$$\text{面数} = |S| = \frac{|G_n|}{|Stab(F)|},$$

对于正二十面体，取 $F$ 为1, 2, 3，则 $Stab(F) = \langle (1, 2, 3) \rangle$ 。于是有

**命题4：**正二十面体群 $G_{20}$ 同构于5次交错群 $A_5$ 。

**证明：**

正则多胞形即正多边形和正多面体的高维度推广，包含正多边形和正多面体。对于四维及四维以上空间的正则多胞形的结构情况，自1850年以来也获得了不少进展，使人们对 $n$ 维空间正则多胞形有了一个基本的了解。下面将简单介绍 $n$ 维空间有限旋转群 $SO(n)$ 和 $n$ 维空间正则多胞形。

### 1 $N$ 维空间有限旋转群的极点数定理

首先设 $S^N$ 是单位超球面，其中心在原点，同时设原点 $O$ 是有限旋转群的所有元素的共同旋转心，即 $G^N$ 作用在 $S^N$ 上变成 $S^N$ 的变换群，(为避免混淆，有时候我们将表示维数的 $N$ 从右上角移到左上角)， $^N G$ 中的一个非么元素 $\rho$ 必有一条旋转轴，而轴与单位超球面之间的交点是 $^N S$ 上的两个极点，这两点在 $\rho$ 下保持不变。

设 $p$ 是单位超球面上的一点， $^N v_p$ 是轨道阶数，同时又设 $^N n_p$ 是 $p$ 的稳定群的阶数， $^N n$ 是有限旋转群 $^N G$ 的阶数，根据：

**定理1** 设群 $^N G$ 是集合 $^N S$ 的变换群， $^N T$ 是集合 $^N S$ 的子集，记 $^N T$ 的稳定群为 $Stab(^N T)$ ，记 $p$ 的轨道为 $Orb(p)$ 。这样，我们有

$$^N v_p = [^N G : Stab(^N T)].$$

其次根据：

**定理2** (L.Lagrange 定理) 若 $^N G$ 是一个有限群，而 $^N H$ 是 $^N G$ 的子群，这样

$$|^N G| = [^N G : ^N H] |^N H|,$$

我们得到

$$^N n = ^N v_p \cdot ^N n_p.$$

设单位超球面 $^N S$ 外接于一个正则多胞形，即这个正则多胞形的所有顶点均匀分布在单位超球面上。同时，我们记正则多胞形的顶点集合为 $Orb(p_1)$ ；记正则多胞形所有棱的中点投影在单位超球面上的集合为 $Orb(p_2)$ ；记正则多胞形的所有面的中心投影在单位超球面上集合为 $Orb(p_3)$ ；等等。由定理1，我们可知轨道阶数为：

$$^N v_{p_i} = [^N G : Stab(p_i)].$$

运用有限旋转群理论，可得到如下的：

**定理3** (极点数定理)  $N$ 维空间 $E^N$ 中正则多胞形的有限旋转群的阶数为 $^N n = |^N G|$ ，其三维胞腔数为 $\prod_{k=4}^N k v_{p_k}$ ，轨道阶数为 $^N v_{p_i}$ ，轨道中一点的稳定化子阶数为 $^N n_{p_i}$ ，等等，以上各量之间存在以下关系：

$$2(^N n - \prod_{k=4}^N k v_{p_k}) = \prod_{i=1}^N ^N v_{p_i} \cdot ^N n_{p_i} \left[ 1 - \frac{2e_i}{p \cdot 3^{-i} e_{3^{-i} \{p, q\}}} \right]$$



其中, 符号 “ $^{N-1}e_i$ ” 表示  $E^N$  中正则多胞形的  $N-1$  维胞腔的第  $i$  条轨道的阶数。符号 “ $^{n-i}e_{N-i \atop \{\dots, v, w\}}$ ” 表示  $E^N$  中正则多胞形的  $N-i$  维胞腔的第  $N-i$  条轨道的阶数。符号 “ $\frac{N-i-1}{\dots}$ ” 表示从字母  $w$  开始的字母数, 而其方向为逆的。

在证明该定理之前, 先做以下定义:

**定义1**

- 1)  $^1e_1 \frac{0}{\{\dots\}} = 2, ^0e_0 \frac{-1}{\{\dots\}} = 1;$
- 2)  $^1e_1 = ^1e_2 = 0;$
- 3)  $^2e_3 = ^3e_4 = ^4e_5 = \dots = 1.$

**定义2** 根据上面定义, 我们再定义  $^Nv_{p_i} \cdot ^{N-1}e_i$  是 “全基数” (即轨道的每个点被许多点重合), 它取  $^{n-i}e_{N-i \atop \{\dots, v, w\}}$  为  $E^N$  中正则多胞形的第  $i$  条轨道的一点的重合数, 我们也可以用符号  $^Nm_{p_i}$  去表示它。

**定理3的证明** 因为  $E^N$  中的每一个三维正则多胞形(胞腔)有一个么旋转, 而组成  $E^N$  中正则多胞形 “表面” 的  $^Nv_{p_i}$  个  $N-1$  维胞腔将有  $\prod_{k=4}^N {}^kv_{p_k}$  个三维胞腔, 所以应有  $\prod_{k=4}^N {}^kv_{p_k}$  个么旋转。在  $^NG$  中, 我们除去  $\prod_{k=4}^N {}^kv_{p_k}$  个么旋转, 那么剩下的元素(即  $^NG \setminus \prod_{k=4}^N {}^kv_{p_k} \cdot (e)$ , 这里  $e$  是么元) 都是非么旋转, 而  $E^N$  中每个非么旋转有两个极点, 故总共应有  $2(^Nn - \prod_{k=4}^N {}^kv_{p_k})$  个极点。

另一方面, 取点  $p_i$  为极点的非么旋转的集合为  $Stab(p_i) \setminus ^N\alpha_{p_i}(e)$ , 这里,  $^N\alpha_{p_i}$  是  $Stab(p_i)$  中的么元数, 故取点  $p_i$  为极点的重复次数为  $(^Nn_{p_i} - ^N\alpha_{p_i})$ , 又因为  $Orb(p_i)$  中的点均为极点, 这些点的重复次数均为  $(^Nn_{p_i} - ^N\alpha_{p_i})$ , 故

$$2(^Nn - \prod_{k=4}^N {}^kv_{p_k}) = \sum_{i=1}^N {}^Nv_{p_i} (^Nn_{p_i} - ^N\alpha_{p_i}),$$

由么元数公式

## References

- 陈馨璇, 三维欧氏空间中有限旋转群的分类与构造, 武汉师范学院学报, (1984)。  
 武同锁, AbstractAlgebraNotes。  
 Michael Artin, 代数, 机械工业出版社, (2009)。  
 施开达, 马利庄,  $n$  维空间有限旋转群理论和正则多胞形, 舟山师专学报, (1996)。  
 施开达, 马利庄, 正则多胞形和  $N$  维空间有限旋转群理论的一些新结果, 自然科学进展, (1999)。  
 施开达, 关于四维空间120胞形和600胞形的图视和数值新结果, 浙江海洋学院学报(2000)。