

n 维空间有限旋转群理论和正则多胞形

施开达

(浙江大学CAD&CG国家重点实验室
杭州310027, 浙江舟山师范专科学校
舟山 316004)

马利庄

(浙江大学应用数学研究所
杭州 310027)

摘要 本文通过深入研究 n 维空间正则多胞形, 发展了 n 维空间有限旋转群理论, 获得了一些新公式和新结果. 同时以计算机图形显示了一些正则多胞形的形态, 实现了相应的图形软件. 使人们对 n 维空间有限旋转群理论和正则多胞形有一个理论上的和视觉上的认识.

关键词 正则多胞形 有限旋转群 么元数 轨道基数 稳定群

自古希腊以来, 人们已经知道三维空间中只有五种正则多胞形, 它们是: 正四面体, 立方体, 正八面体, 正十二面体和正二十面体. 当然, 二维空间中的正则多胞形(正多边形)是无穷多的. 对于四维及四维以上空间的正则多胞形的结构情况, 自1850年以来, *L. Schläfli* [1], *D. Hilbert* [2] 和 *H.S.M. Coxeter* [3] 都进行过研究, 并取得了不少进展, 使人们对 n 维空间正则多胞形有了一个基本的了解. 本文打算在对 n 维空间正则多胞形作进一步研究的基础上发展 n 维空间有限旋转群理论, 并显示一些正则多胞形的计算机图形, 以使人们对于 n 维空间有限旋转群理论和正则多胞形有一个理论上的和视觉上的认识.

1 n 维空间有限旋转群的极点数定理

首先设 S^N 是单位超球面, 其中心在原点, 同时设原点 O 是有限旋转群的所有元素的共同旋转心, 即 G^N 作用在 S^N 上变成 S^N 的变换群. (为避免混淆, 有时候我们将表示维数的 N 从右上角移到左上角), G^N 中的一个非么元素 ρ 必有一条旋转轴, 而轴与单位超球面之间的交点是 S^N 上的 ρ 的两个极点, 这两点在 ρ 下保持不变.

设 P 是单位超球面上的一点, ${}^N v_p$ 是轨道的基数, 同时又设 ${}^N n_p$ 是 P 的稳定群的阶数, ${}^N n$ 是有限旋转群 G^N 的阶数. 根据:

定理1 设群 G^N 是集合 S^N 的变换群, T 是集合 S^N 的子集, 记 T 的稳定群为 $Stab({}^N T)$, 记 P 的轨道为 $Orb(P)$. 这样, 不同的 $g({}^N T)$ 的数在 G^N 的作用下产生相同的指数($G^N: Stab({}^N T)$). 这里, g 是 G^N 的元素, 所以我们有

$${}^N v_p = ({}^N G: Stab({}^N T)).$$

其次根据:

定理2 (L.Lagrange 定理) 若 G^N 是一个有限群, 而 H 是 G^N 的子群, 这样

$$o({}^N G) = ({}^N G: {}^N H) \cdot o({}^N H),$$

我们得到

$${}^N n = {}^N v_p \cdot {}^N n_p.$$

设单位超球面 ${}^N S$ 外接于一个正则多胞形, 即这正形多胞形的所有顶点均匀分布在单位超球面上. 同时, 我们记正则多胞形的顶点集合为 $Orb(P_1)$; 记正则多胞形所有棱的中点投影在单位超球面上的集合为 $Orb(P_2)$; 记正则多胞形的所有面的中心投影在单位超球面上集合为 $Orb(P_3)$;等等. 由定理1, 我们可知轨道基数为:

$${}^N v_{p_i} = ({}^N G: Stab(p_i)).$$

运用有限旋转群理论, 我们得到如下的:

定理3 (极点数定理) E^N 中正则多胞形的有限旋转群的阶数为 ${}^N n (= o({}^N G))$, 其三维胞腔数为 $\prod_{i=4}^N {}^i v_{p_i}$, 轨道基数为 ${}^N v_{p_i}$, 轨道中一点的稳定群的阶数为 ${}^N n_{p_i}$, 等等, 以上各量之间存在以下的关系:

$$2({}^N n - \prod_{k=4}^N {}^k v_{p_k}) = \sum_{i=1}^N {}^N v_{p_i} \cdot {}^N n_{p_i} \left[1 - \frac{2 \dot{e}_i}{p^{3-i} e_{3-i}^{2-i} \{p, q\}} \right] \quad (*)$$

上式中其他符号的意义在下一节给出.

2 定理3的证明

在证明定理3之前, 我们不妨先来作出以下的:

定义1 符号 ${}^{N-1} e_i$ 表示 E^N 中正则多胞形的 $N-1$ 维胞腔的第 i 条轨道的基数. 符号 ${}^{n-i} e_{N-i}^{\frac{N-i-1}{\{\dots, v, w\}}}$ 表示 E^N 中正则多胞形的 $N-i$ 维胞腔的第 $N-i$ 条轨道的基数, 符号“ $\xleftarrow{N-i-1}$ ”表示从字母 w 开始的字母数, 而其方向为逆的.

定义2 我们定义以下符号:

- 1) ${}^1 e_1^{\frac{0}{\{\dots\}}} = 2, {}^0 e_0^{\frac{-1}{\{\dots\}}} = 1;$
- 2) ${}^1 e_1 = {}^1 e_2 = 0;$
- 3) ${}^2 e_3 = {}^3 e_4 = {}^4 e_5 = \dots = 1.$

定义3 根据上面的定义, 我们再定义 ${}^N v_{p_i} \cdot {}^{N-1} e_i$ 是“全基数”(即轨道的每个点被许多点重合), 它取 ${}^{n-i} e_{N-i}^{\frac{N-i-1}{\{\dots, v, w\}}}$ 为 E^N 中正则多胞形的第 i 条轨道的一点的重合数, 我们也可用符号 ${}^N m_{p_i}$ 去表示它.

定理3的证明 因为 E^N 中的每一个三维正则多胞形(胞腔)有一个么旋转, 而组成 E^N 中正则多胞形“表面”的 ${}^N v_{p_i}$ 个 $N-1$ 维胞腔将有 $\prod_{i=4}^N {}^i v_{p_i}$ 个三维胞腔, 所以应有 $\prod_{i=4}^N {}^i v_{p_i}$ 个么旋转. 在 ${}^N G$ 中, 我们除去 $\prod_{i=4}^N {}^i v_{p_i}$ 个么旋转, 剩下的元素(即 ${}^N G \setminus \prod_{i=4}^N {}^i v_{p_i} \cdot (e)$, 这里 e 是么元)

都是非么旋转, 而 E^N 中每个非么旋转有两个极点, 故总共应有 $2(\sum_{k=4}^N n_k - \sum_{k=4}^N v_{p_k})$ 个极点.

另一方面, 取点 p_i 为极点的非么旋转的集合为 $Stab(p_i) \setminus {}^N\alpha_{p_i}(e)$ (这里, ${}^N\alpha_{p_i}$ 是 $Stab(p_i)$ 中的么元数), 故取点 p_i 为极点的重复次数为 $(\sum_{k=4}^N n_k - {}^N\alpha_{p_i})$, 又因为 $Orb(p_i)$ 中的点均为极点, 这些点的重复次数均为 $(\sum_{k=4}^N n_k - {}^N\alpha_{p_i})$, 故

$$2(\sum_{k=4}^N n_k - \sum_{i=1}^N v_{p_i}(\sum_{k=4}^N n_k - {}^N\alpha_{p_i})),$$

这里, 求 ${}^N\alpha_{p_i}$ 的公式将在后面推导.

3 一些新公式和新结果

公式1 (轨道基数公式)

$${}^N v_{p_i} = \frac{{}^N v_{p_N} \cdot {}^{N-1} e_i}{e_{N-i}^{\{ \dots, v, w \}}} \quad (i=1, 2, \dots, N)$$

这里, ${}^N v_{p_i}$ 是 E^N 中正则多胞形的最后一条轨道的基数.

推导 根据上一节的定义, 我们再来给出下列的说明:

对于 E^3 中的正则多胞形 $\{p, q, \dots, v, w\}$ 是正则多胞形的 *Schläfli* 符号, p, q, \dots, v, w 称为 *Schläfli* 数, q 表示每个顶点有 q 个面(暂且不去注意 p 表示每个面有 p 条棱), q 个面围绕一个顶点连续相交且头尾相接, 总共交于 q 条棱. 这些棱的一半端点(每条棱有两个端点)交于正则多胞形 $\{p, q\}$ 的一个顶点. 若其余一半端点被一条凸封闭折线连接, 我们将得到一个二维正则多胞形 $\{q\}$, 而正则多胞形 $\{q\}$ 的棱对应于从一个顶点出发的呈放射状的 q 条棱, 这样两者在数值上相等.

由此, 我们可想象 E^4 中正则多胞形的情况: r 表示每个顶点有 r 个三维胞腔(即正多面体 $\{p, q\}$), 而每个三维胞腔的每个顶点有 q 个面(暂且不去注意 p 表示每个面有 p 条棱). r 个三维胞腔围绕一个顶点连续相交且头尾相接, 总共相交于 ${}^3 e_{3\{q, r\}}$ 个面, 而这些面的一些棱相交于正则多胞形 $\{p, q, r\}$ 的上述顶点. 我们用一个凸封闭折面去连接这些面的其它棱. 这样, 正则多胞形 $\{q, r\}$ 的面数与从一个顶点出发的呈放射状的 ${}^3 e_{3\{q, r\}}$ 个面数对应, 两者在数值上也相等.

现在, 我们可将上述情况推广到 E^N 中, 得到:

对于 E^N 中的正则多胞形, w 表示每个顶点有 w 个 $N-1$ 维胞腔, 它们围绕一个顶点连续相交且头尾相接, 总共交于 ${}^{N-1} e_{N-1}^{\{q, r, \dots, w\}} \frac{N-2}{\{q, r, \dots, w\}}$ 个 $N-2$ 维胞腔. 这些 $N-2$ 维胞腔和一些 $N-3$ 维胞腔相交在正则多胞形 $\{p, q, \dots, w\}$ 的上述顶点. 我们用一个凸封闭折 $N-2$ 维立体去连续地连结它们, 便可得到一个 $N-1$ 维正则多胞形 $\{q, r, \dots, w\}$. 这样, 正则多胞形的 $N-2$ 维胞腔与从一个顶点出发的呈放射状的 ${}^{N-1} e_{N-1}^{\{q, r, \dots, w\}} \frac{N-2}{\{q, r, \dots, w\}}$ 个 $N-2$ 维胞腔对应, 两者在数值上也相等.

等.这就是为什么正则多胞形 $\{p, q, \dots, w\}$ 的顶点可被看成由 $N-1$ 个顶点重合而成.

当然, 我们可将节 i 条轨道的一点的“重合数”写成 $N m_{p_i} = N^{-i} e_{N-1}^{\frac{N-i-1}{\{q, r, \dots, w\}}}$, “全基数”被“重合数”除, 我们便可得到公式1.

公式2

$$N n = N v_{p_N} \cdot \prod_{j=2}^{N-1} {}^j e_j,$$

这里, ${}^j e_j$ 表示 E^N 中正则多胞形的 j 维胞腔的第 j 条轨道的基数.

推导 让我们注意 E^3 中正由多胞形 $\{p, q\}$ 有限旋转群的阶数 ${}^3 n (= o({}^3 G))$ 由 *Lagrange* 定理, 我们得到 ${}^3 n = {}^3 n_{p_1} \cdot {}^3 v_{p_1} = {}^3 n_{p_2} \cdot {}^3 v_{p_2} = {}^3 n_{p_3} \cdot {}^3 v_{p_3}$, 我们也可用 ${}^3 n = {}^3 n_{p_3} \cdot {}^3 v_{p_3}$ 表示, 但 ${}^3 n_{p_3} = {}^2 n = {}^2 n_{p_2} \cdot {}^2 n_{p_2}$. 因为 ${}^2 n_{p_2} = 1$ 故 ${}^3 n = {}^2 v_{p_2} \cdot {}^3 v_{p_3}$. 同样, 我们可推导 E^4 中正则多胞形的有限旋转群的阶数 ${}^4 n = {}^4 n_{p_4} \cdot {}^4 v_{p_4}$ 但 ${}^4 n_{p_4} = {}^3 n = {}^2 n \cdot {}^3 v_{p_3} = {}^2 n_{p_2} \cdot {}^2 v_{p_2} \cdot {}^3 v_{p_3}$, 因为 ${}^2 n_{p_2} = 1$, 故 ${}^4 n = {}^2 v_{p_2} \cdot {}^3 v_{p_3} \cdot {}^4 v_{p_4}$. 我们也可将上述结果推广到 E^N , 得到:

$$N n = {}^2 v_{p_2} \cdot {}^3 v_{p_3} \cdot \dots \cdot {}^{N-1} v_{p_{N-1}} \cdot {}^N v_{p_N}.$$

为避免混淆, 我们分别将 ${}^2 v_{p_2} \cdot {}^3 v_{p_3} \cdot \dots \cdot {}^{N-1} v_{p_{N-1}}$ 改写为 ${}^2 e_2, {}^3 e_3, \dots, {}^{N-1} e_{N-1}$. 这样, 便得到公式2.

公式3

$$N n_{p_i} = \frac{\prod_{j=2}^{N-1} {}^j e_j \cdot {}^{N-i} e_{N-i}^{\frac{N-i-1}{\{q, r, \dots, w\}}}}{N-1 e_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

有关符号的意义如上所述.

推导 我们将公式1和公式2代入 $N n = N n_{p_i} \cdot {}^N v_{p_i}$, 便可得到公式3.

公式4(么元数公式)

当 $i=1, 2, 3,$

$$N \alpha_{p_i} = \frac{N n_{p_i} \cdot {}^2 e_i}{p \cdot {}^{3-i} e_{3-i}^{\frac{2-i}{\{p, q\}}}};$$

当 $i=4, 5, \dots, N,$

$$N \alpha_{p_i} = N n_{p_i}.$$

推导 因为 E^N 中的正则多胞形取三维正则多胞形为基本胞腔, 而三维正则多胞形 $\{p, q\}$ 的三条轨道的点的稳定群的阶数分别为 $q, 2, p$. 每一条轨道中的点的稳定群中有一个么元, 故 E^N 中正则多胞形的前三条轨道中点的稳定群的么元数分别为 $\frac{N n_{p_1}}{q}, \frac{N n_{p_2}}{2}, \frac{N n_{p_3}}{p}$, 我们用一个一般的式子去表示它们, 即为

$${}^N\alpha_{p_i} = \frac{{}^N n_{p_i} \cdot {}^2 e_i}{p^{3-i} e_{3-i} \{p,q\}}, \quad (i=1,2,3).$$

至于第4条轨道到第 N 条轨道的点的稳定群的么元素, 我们有

$$\begin{aligned} {}^N\alpha_{p_i} &= {}^{N-i} e_{N-i} \frac{{}^{N-i-1} \cdot}{\{\dots, v, w\}} \cdot \prod_{j=1}^{N-1} {}^{N-i-1} e_{N-i-1} \frac{{}^{N-i-1} \cdot}{\{v, w\}} \cdot {}^{i-1} n \\ &= {}^N n_{p_i}. \end{aligned}$$

我们以公式1、公式2和公式3代入定理3中的关系式(*), 经过整理, 分别可得:

$$(*) \quad \sum_{i=1}^N {}^N v_{p_i} \cdot \frac{{}^N n_{p_i} \cdot {}^2 e_i}{p^{3-i} e_{3-i} \{p,q\}} = (N-2) \cdot {}^N n + 2 \cdot \prod_{k=4}^N {}^k v_{p_k};$$

$$(*) \quad \sum_{i=1}^N {}^N v_{p_i} \cdot \frac{\prod_{j=3}^{N-1} {}^j e_j \cdot {}^{N-i} e_{N-i} \frac{{}^{N-i-1} \cdot}{\{\dots, v, w\}} \cdot {}^2 e_i}{{}^{N-1} e_i \cdot {}^{3-i} e_{3-i} \frac{{}^{2-i} \cdot}{\{p,q\}}} = (N-2) \cdot {}^N n + 2 \cdot \prod_{k=4}^N {}^k v_{p_k};$$

$$(*) \quad \sum_{i=1}^N {}^N v_{p_i} \cdot \frac{\prod_{j=3}^{N-1} {}^j e_j \cdot {}^2 e_i}{{}^{3-i} e_{3-i} \frac{{}^{2-i} \cdot}{\{p,q\}}} = (N-2) \cdot {}^N n + 2 \cdot \prod_{k=4}^N {}^k v_{p_k}.$$

现在, 我们再来研究关系式(*), 以 ${}^N n$ 除关系式(*)两端, 我们得到:

$$2[1 - \frac{\prod_{k=4}^N {}^k v_{p_k}}{{}^N n}] = \sum_{i=1}^3 [1 - \frac{{}^2 e_i}{p^{3-i} e_{3-i} \{p,q\}}],$$

亦即

$$2 \left[1 - \frac{\prod_{k=4}^N {}^k v_{p_k}}{{}^N n} \right] = (1 - \frac{1}{q}) + (1 - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{1}{p}),$$

经过整理, 我们得到

$$\frac{1}{q} - \frac{1}{2} + \frac{1}{p} = \frac{2 \cdot \prod_{k=4}^N {}^k v_{p_k}}{{}^N n}.$$

这个关系式显示 E^N 中正则多胞形的有限旋转群的阶数, 其三维胞腔数和三维胞腔的 Schläfli 数三个量之间的关系.

由公式2, 我们得到:

$$\frac{2 \prod_{k=4}^N {}^k v_{p_k}}{{}^N v_{p_i} \cdot \prod_{j=2}^N {}^j e_j} = \frac{2}{p \cdot {}^1 e_1} = \frac{2}{p \cdot {}^1 v_{p_i}},$$

即

$$\frac{1}{q} - \frac{1}{2} + \frac{1}{p} = \frac{2}{p \cdot {}^3 v_{p_i}},$$

整理之后我们得到

$$\frac{1}{q} - \frac{1}{2} + \frac{1}{p} \left[1 - \frac{2}{^3v_{p_1}} \right] = 0 \quad (**)$$

这个式子显示 E^3 中正则多胞形的 *Schläfli* 数和它的二维胞腔(即面)数之间的关系.

对于 E^3 的正规多胞形 $\{p, q\}$, 运用(**), 我们得到:

$$\begin{aligned} \{3,3\} & \quad 2p - pq + q = 0; \\ \{4,3\} & \quad 6p - 3pq + 4q = 0; \\ \{3,4\} & \quad 4p - 2pq + 3q = 0; \\ \{5,3\} & \quad 6p - 3pq + 5q = 0; \\ \{3,5\} & \quad 10p - 5pq + 9q = 0. \end{aligned}$$

这些式子显示 E^3 中的正规多胞形的 *Schläfli* 数 p 和 q 之间的关系.

至于 E^3 中的正规多胞形 $\{p, q\}$, 由(*2), 我们有

$$^3v_{p_1} + ^3v_{p_2} + ^3v_{p_3} = ^3n + 2,$$

这式子显示 E^3 中正则多胞形 $\{p, q\}$ 的三条轨道基数和正规多胞形 $\{p, q\}$ 的有限旋转群的阶数之间的关系.

考虑 E^3 中的一般多面体, *L. Euler*已经给出:

$$f + v = e + 2$$

(这里, 字母 v, e, f 分别是英文名词"顶点, 棱, 面"的第一个字母).

即
$$^3v_{p_1} - ^3v_{p_2} + ^3v_{p_3} = 2.$$

从以下方程组

$$\begin{cases} ^3v_{p_1} - ^3v_{p_2} + ^3v_{p_3} = 2, \\ ^3v_{p_1} + ^3v_{p_2} + ^3v_{p_3} = ^3n + 2. \end{cases}$$

我们可得
$$^3v_{p_1} + ^3v_{p_3} = \frac{^3n}{2} + 2.$$

和
$$^3n = 2 \cdot ^3v_{p_2}.$$

由公式1, 我们得到

$$^3v_{p_1} = \frac{^3v_{p_3} \cdot p}{q}, \text{ 或 } ^3v_{p_1} = \frac{^3v_{p_3} \cdot p}{p},$$

则我们有

$$^3v_{p_1} \left(1 + \frac{q}{p} \right) = \frac{^3n}{2} + 2;$$

$$^3v_{p_2} = \frac{^3n}{2};$$

及

$$^3v_{p_3} \left(1 + \frac{p}{q} \right) = \frac{^3n}{2} + 2.$$

从上述式子, 我们看到 E^3 中正则多胞形的 *Schläfli* 数, 其有限旋转群的阶数和各轨道基数之间的关系.

关于 E^N 中正则多胞形 $\{p, q, \dots, w\}$ 的 $N-1$ 维胞腔数(即最后一条轨道的基数) ${}^N v_{p_N}$, 我们有:

$$\begin{aligned}\{3, 3, \dots, 3\} \quad {}^N v_{p_N} &= N + 1; \\ \{4, 3, \dots, 3\} \quad {}^N v_{p_N} &= 2N; \\ \{3, \dots, 3, 4\} \quad {}^N v_{p_N} &= 2^N; \\ \{5, 3, \dots, 3\} \quad {}^N v_{p_N} &= 12 \cdot 10^{N-3}; \\ \{3, \dots, 3, 5\} \quad {}^N v_{p_N} &= 20 \cdot 30^{N-3};\end{aligned}$$

和

$$\{3, 4, 3, \dots, 3\} \quad {}^N v_{p_N} = 3 \cdot 2^{N-1}.$$

因为我们有上面的式子, 运用公式1, 我们可得 E^N 中正则多胞形的每条轨道的基数 ${}^N v_{p_i}$. 对于单纯形 $\{3, 3, \dots, 3\}$, 我们有

$${}^N v_{p_i} = C_{N+1}^i \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

对于超立方体 $\{4, 3, \dots, 3\}$, 我们有

$${}^N v_{p_i} = 2^{N-i+1} \cdot C_N^{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

对于十字交叉多胞形 $\{3, \dots, 3, 4\}$, 我们有

$${}^N v_{p_i} = 2^i \cdot C_N^i \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

事实上, *Schläfli* 符号为 $\{5, 3, \dots, 3\}$ 和 $\{3, \dots, 3, 5\}$ 的正则多胞形只存在于 E^3 和 E^4 中[3].

4 一个发现

运用上一节中的公式和结果, 我们再来作进一步的研究.

(1) E^2 . $N=2$, 轨道数为2, 即 $i=1, 2$.

因为一个正多边形只存在于 E^2 中, 故其三维胞腔数 $\prod_{k=4}^N {}^k v_{p_k}$ 等于零. 同时, 轨道中点 p_i

的稳定群 $Stab(p_i)$ 中的么元数分别为:

$$\begin{aligned}{}^2 \alpha_{p_1} &= \frac{{}^{2-1} e_1}{p \cdot {}^{2-1} e_{2-1} \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \end{smallmatrix}} = \frac{{}^1 e_1}{p \cdot 2} = \frac{0}{2p} = 0, \\ {}^2 \alpha_{p_2} &= \frac{{}^{2-1} e_2}{p \cdot {}^{2-2} e_{2-2} \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \end{smallmatrix}} = \frac{{}^1 e_2}{p \cdot 1} = \frac{0}{p} = 0.\end{aligned}$$

这样, 我们得到

$$2({}^2 n - 0) = \sum_{i=1}^2 {}^2 v_{p_i} ({}^2 n_{p_i} - 0)$$

即

$$2 \cdot^2 n = \sum_{i=1}^2 {}^2 v_{p_i} \cdot^2 n_{p_i}.$$

这式子显示 E^2 中正多边形的有限旋转群的阶数 $^2 n$ ，轨道中一点的稳定群的阶数 $^2 n_{p_i}$ 和其轨道基数 $^2 v_{p_i}$ 之间的关系.

(2) E^3 . $N=3$, 轨道数为3, 即 $i=1,2,3$.

因为一个正多面体存在于 E^3 中, 故仅有一个三维立体在其自身中, $\prod_{k=4}^N {}^k v_{p_k} = 1$. 同时, 轨

道($i=1,2,3$)的点 p_i 的稳定群 $Stab(p_i)$ 中的么元数分别为:

$${}^3 \alpha_{p_1} = \frac{{}^3 n_{p_1} \cdot^2 e_1}{{}^2 e_2 \cdot^1 e_{\{q\}}} = \frac{{}^3 n_{p_1}}{q},$$

$${}^3 \alpha_{p_2} = \frac{{}^3 n_{p_2} \cdot^2 e_2}{{}^1 e_1 \cdot^0 e_{\{ \dots \}}} = \frac{{}^3 n_{p_2}}{2},$$

$${}^3 \alpha_{p_3} = \frac{{}^3 n_{p_3} \cdot^2 e_3}{{}^0 e_0 \cdot^{-1} e_{\{ \dots \}}} = \frac{{}^3 n_{p_3}}{p}$$

而 ${}^3 n_{p_1} = q$, ${}^3 n_{p_2} = 2$, ${}^3 n_{p_3} = p$, 故

$${}^3 \alpha_{p_1} = \frac{q}{q} = 1, \quad {}^3 \alpha_{p_2} = \frac{2}{2} = 1, \quad {}^3 \alpha_{p_3} = \frac{p}{p} = 1,$$

这样我们得到

$$2({}^3 n - 1) = \sum_{i=1}^3 {}^3 v_{p_i} ({}^3 n_{p_i} - 1).$$

这式子显示 E^3 中正多面体的有限旋转群的阶数, 其轨道基数 ${}^3 v_{p_i}$ 和轨道中点的稳定群的阶数 ${}^3 n_{p_i}$ 三者之间的关系. 这与[6]和[7]中所述的情况是一致的.

(3) E^4 . $N=4$, 轨道数为4, 即 $i=1,2,3,4$.

因为 E^4 中的一个正则多胞形有 ${}^4 v_{p_4}$ 个三维立体, 故 $\prod_{k=4}^N {}^k v_{p_k} = {}^4 v_{p_4}$, 轨道

中点 p_i ($i=1,2,3,4$) 的稳定群 $Stab(p_i)$ 中的么元数分别为:

$${}^4 \alpha_{p_1} = \frac{{}^4 n_{p_1} \cdot^2 e_1}{{}^2 e_2 \cdot^1 e_{\{q\}}} = \frac{{}^4 n_{p_1}}{q},$$

$${}^4 \alpha_{p_2} = \frac{{}^4 n_{p_2} \cdot^2 e_2}{{}^1 e_1 \cdot^0 e_{\{ \dots \}}} = \frac{{}^4 n_{p_2}}{2},$$

$${}^4 \alpha_{p_3} = \frac{{}^4 n_{p_3} \cdot^2 e_3}{{}^0 e_0 \cdot^{-1} e_{\{ \dots \}}} = \frac{{}^4 n_{p_3}}{q},$$

$${}^4 \alpha_{p_4} = {}^0 e_0 \cdot^{-1} e_{\{ \dots \}} \cdot^3 n = 1 \cdot^3 n = {}^3 n.$$

但 E^4 的正则多胞形的第4条轨道中点的稳定群 $Stah(p_i)$ 的阶数为 ${}^4n_{p_4} = {}^2e_2 \cdot {}^3v_{p_4} = {}^3n$ ，故第4条轨道的极点数为 ${}^4v_{p_4} ({}^4n_{p_4} - {}^4\alpha_{p_4}) = {}^4v_{p_4} ({}^3n - {}^3n) = 0$ ，也就是说，只是前三条轨道有极点。我们可写出 E^4 中的关系(*)：

$$2({}^4n - {}^4v_{p_4}) = \sum_{i=1}^3 {}^4v_{p_i} \cdot {}^4n_{p_i} \left[1 - \frac{{}^2e_i}{p \cdot {}^{3-i}e_{3-i} \cdot {}^{2-i}_{\{p,q\}}} \right].$$

我们发现：事实上， E^N 中的正则多胞形的从第4条到第 N 条轨道的点的稳定群中的么元数都为 ${}^Nn_{p_i} (i = 4, 5, \dots, N)$ ，即，这些轨道中点的稳定群都是么群。上式实际上显示关系式(*)的右端从第4项到第 N 项均为零。这也可以解释 N 维空间几何物体“表面”是由三维空间几何物体以一定形式“组成”的。

5. 验证

例	I		II		III	
名 称	E^4 600胞形		E^5 超立方体		E^6 十字交叉多胞形	
Nn	7200		5160960		40874803200	
$\prod_{k=4}^N {}^k v_{p_k}$	600		215040		3406233600	
${}^N v_{p_i}$	$i=1$	120	$i=1$	256	$i=1$	22
	$i=2$	720	$i=2$	1024	$i=2$	220
	$i=3$	1200	$i=3$	1792	$i=3$	1320
${}^N n_{p_i}$	$i=1$	60	$i=1$	20160	$i=1$	1857945600
	$i=2$	10	$i=2$	5040	$i=2$	185794560
	$i=3$	6	$i=3$	2880	$i=3$	30965760
${}^N \alpha_{p_i}$	$i=1$	20	$i=1$	6720	$i=1$	619315200
	$i=2$	5	$i=2$	2520	$i=2$	92897280
	$i=3$	2	$i=3$	720	$i=3$	10321920
对 比	左	13200	左	9891840	左	74937139200
	右	13200	右	9891840	右	74937139200
结 果	相 等		相 等		相 等	

现在,我们以 E^4 中的正则600胞形, E^8 中的超立方体和 E^{11} 中的十字交叉多胞形作为例子,具体验证第1节中的定理3和第3节中的一系列公式的正确性.

实际上,我们已在大型电子计算机上验证了 E^{53} 中的所有正则多胞形的情况,结果都说明第1节中的定理3和第3节中的公式皆为正确.

6. 一些正则多胞形的计算机图形

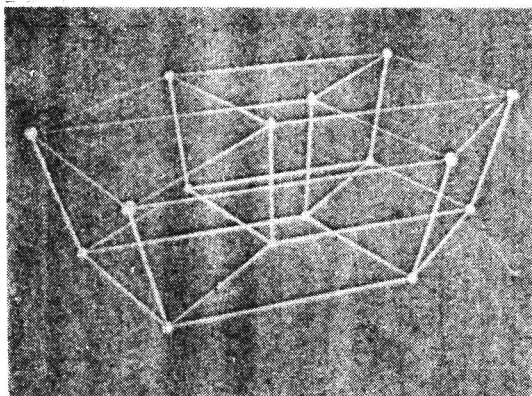


图1. E^4 中的24胞形

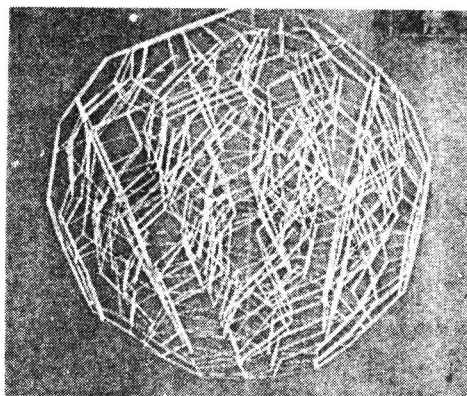


图2. E^4 中的600胞形

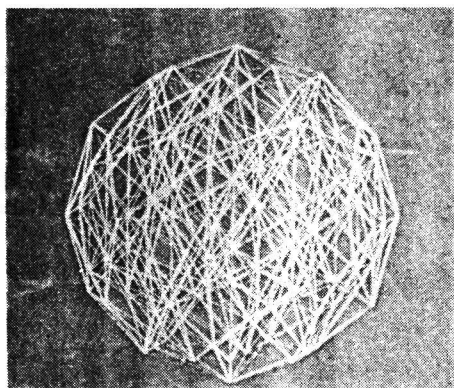


图3. E^5 中十字交叉多胞形

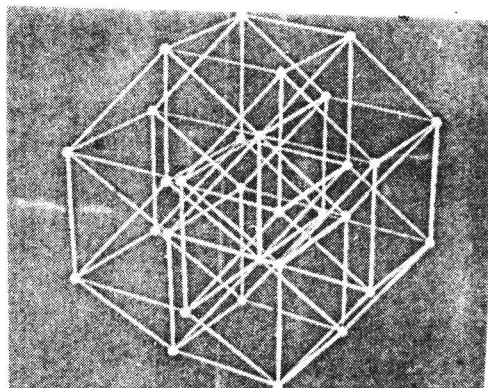


图4. E^7 中的超立方体

通过观察这些正则多胞形的计算机图形,人们可以增强对于高维空间有限旋转群理论和正则立体的直观认识.

7. 附记

我们在浙江大学CAD&CG国家重点实验室的资助下,进行了四至七维空间正则多胞形的动态彩色计算机图形制作工作,完成了计算机软件《正则多胞形研究和四至七维空间直角坐标系在三维空间投影模型的建立》的开发工作,并于九五年四月在浙江大学举行的《虚拟环境与科学计算可视化国际研讨会》上报告和演示,引起与会中外(包括美、德、

英、澳、加、日、韩、港等国家和地区)专家学者的广泛兴趣和注意. 目前上述软件已由国家版权局计算机软件登记办公室审查通过, 向国内外发行.

致谢 我们感谢参加在浙江大学举行的《虚拟环境与科学计算可视化国际研讨会》的中外专家学者对本课题研究成果所表示的兴趣和支持. 特别地, 我们感谢清华大学唐泽圣教授, 浙江大学石教英教授、彭群生教授对本课题研究所给予的鼓励和支持. 浙江舟山师范专科学校刘天惠副教授和浙江舟山航海学校周剑敏讲师分别在理论分析和计算机图形制作方面给予帮助, 在此也一并致谢.

参 考 文 献

- [1] M. 贝热著, 马友渔译, 几何, 第3卷, 科学出版社, 1989年第一版.
- [2] D. Hilbert and S. Cohn-Vossen, *Geometry and the Imagination*, Chelsea Publishing Co, New York, 1983.
- [3] H. S. M. Coxeter, *Regular Polytopes*, 1st ed, Methuen and Co, Ltd, London, 1948.
- [4] P. Lorimer, *Vertex transitive graphs: symmetric graphs of prime valency*, J. Graph Theory 8, 1984.
- [5] Daniel N. Lapades, *McGRAW-HILL ENCYCLOPEDIA OF SCIENCE & TECHNOLOGY*, (in 15 volume), McGRAW-HILL BOOK CO., 1977, 4th, ed.
- [6] Elmer G. Rees, *Notes on Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1983.
- [7] Mo Zongjian etc., *Algebra*, Beijing University Press, Beijing, 1986.