60 阶单群的一个简证*

陈 绍 刚

本文通过对正多面体回转分类的研究，简化前人对正多面体回转群阶数和结构的讨论，并用以简捷地证出正十二面体（二十面体）回转群为60阶单群。

〔定理1〕正多面体回转群的阶数为uv，其中u为正多面体的面数，v为每一面的正多边形的边数。（因此，正四面体回转群之阶数为$4\times3=12$，正六面体回转群的阶数为$6\times4=24$，正八面体回群之阶数为$8\times3=24$正十二面体回转群之阶数为$12\times5=60$，正二十面体回转群之阶数为$20\times3=60$）。

〔证明〕把正多面体之面编号，得1，2，……u，则不妨设正多面体开始在空间的位置是以1号面为底面，不改变底面的回转共有v种，（即平面上之v阶旋转群）与改变底面号码的回转共u种相配合）得共有uv个不同的变换。

〔推论〕正四面体回转群是A_4 而它的四个改变底面的回转是克莱因四元群B_4。

〔证〕由于正四面体回转群是S_4的子群，而元数为12故必为A_4（若再加一个镜面反射即为S_4）、而改变底面的四个回转，是A_4的四阶子群，明显的它是克莱因四元群。

〔定理2〕正十二面体回转群的12×5个元中分为三类，它们的周期分别为3，4，5。

〔证〕象定理1一样把正十二面体的面用1—12依次编号，并分成4组，即1—3，4—6，7—9，10—12，并使每一组的面有一个公共顶点Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，这样我们把60个元分解为三种变换的乘积。

①旋转一个底面，共五个元，记为a_1，a_2，a_3，a_4，a_5；周期为5。

②改变底面的变换中绕Ⅰ，（Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ）旋转的回转，共3个周期为3，记为b_1，b_2，b_3

③把Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，位置改变的回转，共四个周期为4，记为C_1，C_2，C_3，C_4

这样共有$4\times3\times5=60$个元，$\{a_ib_jc_k\}$显然共轭类$(b_jc_k)^{-1}a_i(b_jc_k)$是12个不同的元周期均为5，$(b_jc_k)^{-1}a_{5-i}(b_jc_k)$是上述12个元的逆与上述元也不同，周期亦为5、故该群有周期为5之元24个。

同理 $(a_ic_k)^{-1}b_j(a_ic_k)$ 也是各不相同的元共$4\times5=20$个它们的周期都为3。

相仿地 $(a_ib_j)^{-1}c_k(a_ib_j)$ 也是各不相同的 $3\times5=15$个元，周期都为4。

除了这$59=15+20+24$个元外，于是只有单位元e了，因此该群只有这四种元素。

〔定理3〕正十二面体回转群是单群。

〔证明〕因任何正规子群若有3阶元则必包含其全体20个，同理若有4阶元必包含其全体15个，若有5阶元必包含其逆元，因此包含其全体24个，因为60减去15、20、24中任何一个数或二个数都不是它自身的约数，故只包含一种或二种元的群必非它的子群于是只有都包含或都不包含的两个平凡正规子群，故正十二面体回转为单群。

〔附〕正二十面体回转群与正十二面体回转群同构。

〔证〕按上法正十二面体回转群分成A · B · C三个5、3、4阶循环群之积，而正二十面体也可按二十面分为3阶循环群（底面旋转）B′，5阶循环群（转一顶点）A′，及4组公共顶点回转的4阶循环群C′之积A′·B′·C′，显然它们是同构的。

＊注：原有证明是用穷举法、罗列元素来进行的，较繁。见《群论》（园正造著）