三维欧氏空间中有限旋转群的分类与构造

陈馨璇

提　　要

本文证明和整理了R^3中有限旋转群的分类和构造。1，R^3中的旋转群是3×3正常正交矩阵群；2，R^3中正多面体旋转群有四种：正四面体群是四次交代群；正八面体群（正六面体群）同构于四次对称群；正二十面体群（正十二面体群）同构于五次交代群；正n边形群是二面体群；3，R^3中的有限旋转群只有以上四种。

对称性点群（简称点群），在物理和化学中有广泛的应用。点群分为第一类点群和第二类点群，三维欧氏空间中的旋转群称为第一类点群；含有旋转反演变换的点群称为第二类点群。但点群的分类和构造可以归结为第一类点群的分类和构造，只要知道第一类点群的分类和构造，作群的直积就可以构造出第二类点群。因此，讨论三维欧氏空间中的旋转群的分类与构造就有实际意义和理论价值。

一、旋　转　群

定义1　在三维欧氏空间R^3中绕过原点0的旋转轴按右手螺旋方向旋转θ角的变换称为旋转变换。

因此，旋转变换σ是一个正交变换，满足

$$(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)\qquad \forall\alpha,\beta\in R^3 \tag{1}$$

定理1　在R^3的一组标准正交基下，旋转变换与正常正交矩阵一一对应。

证明　在R^3中选取标准正交基γ_1，γ_2，γ_3，使γ_3为旋转轴上的一个单位向量，则旋转θ角的旋转变换σ对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\qquad 0\leqslant\theta<2\pi$$

显然这是一个正常正交矩阵。

反之，一个3×3正常正交矩阵，在一组标准正交基下对应的正交变换σ，这是一个旋转变换。

因为，正常正交矩阵有特征值$\lambda=1$，属于$\lambda=1$的特征向量设为γ_3，即

$$\sigma(\gamma_3)=\gamma_3 \qquad |\gamma_3|=1$$

选取γ_1，γ_2，使γ_1，γ_2，γ_3为标准正交基，故γ_i，γ_j的内积满足

$$(\gamma_i,\gamma_j)=\delta_{ij} \qquad i,j=1,2,3 \tag{2}$$

于是

$$\begin{cases}\sigma(\gamma_1)=a_{11}\gamma_1+a_{21}\gamma_2+a_{31}\gamma_3\\ \sigma(\gamma_2)=a_{12}\gamma_1+a_{22}\gamma_2+a_{32}\gamma_3\\ \sigma(\gamma_3)=\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \gamma_3\end{cases} \tag{3}$$

在标准正交基γ_1，γ_2，γ_3下变换σ对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & 0\\ a_{21} & a_{22} & 0\\ a_{31} & a_{32} & 1\end{pmatrix}$$

由于σ满足(1)和(2)式，且矩阵的行列式为1，

故得

$$\begin{cases}a_{31}=a_{32}=0\\ a_{11}^2+a_{21}^2=1\\ a_{12}^2+a_{22}^2=1\\ a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}=0\\ a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=1\end{cases} \tag{4}$$

解方程组（4），得唯一解：

$$a_{31}=a_{32}=0, \quad a_{11}=a_{22}=\cos\theta, \quad a_{12}=-\sin\theta, \quad a_{21}=\sin\theta$$

即得矩阵

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad 0\leqslant\theta<2\pi$$

这个正常正交矩阵的几何意义是：R^3中一个旋转θ角的旋转变换。 证完

3×3正常正交矩阵之集G_1对于矩阵的乘法构成一个群，称为旋转群。这是无限群。

二、正多面体旋转群

定义2 设S是R^3的一个图形，σ是R^3的一个线性变换，若$\sigma(S)=S$，则称S是σ的对称性图形，σ是S的对称性变换或称σ使S对称。

显然，我们有

定理2 使R^3的正多面体S的中心0点不动（0也是原点），使S对称的旋转变换

之集G_2，对于变换的乘法构成一个群，称为正多面体旋转群（简称正多面体群）。

在R^3中的正多面体有正四面体，正六面体，正八面体，正十二面体和正二十面体，还有正多边形。由定理2可知，有正四面体群，正六面体群，正八面体群，正十二面体群和正二十面体群，还有正多边形群（二面体群）。下面将逐一讨论它的构造。

定理3 正四面体群G_3是四次交代群A_4。

证明 正四面体ABCD如图一，原点0是它的外接球的球心，群G_3的所有旋转变换可以分二类：

（1） 分别以$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$为旋转轴，旋转$\frac{2\pi}{3}$角的旋转变换σ_A，σ_B，σ_C，σ_D，于是得如下9个旋转变换：

$$\sigma_A=(BCD),\ \sigma_B=(ADC),\ \sigma_C=(ABD),$$
$$\sigma_A^2=(BDC),\ \sigma_B^2=(ACD),\ \sigma_C^2=(ADB),$$
$$\sigma_A^3=\sigma_B^3=\sigma_C^3=\varepsilon \qquad \text{（恒等变换）}$$

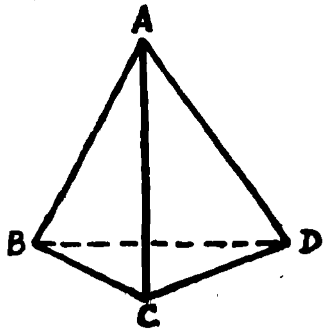

图 一

（2） 分别以棱的中点连线$\overrightarrow{P'OP}$，$\overrightarrow{Q'OQ}$，$\overrightarrow{R'OR}$为旋转轴，旋转π角的旋转变换σ_P，σ_Q，σ_R：

$$\sigma_P=(AB)(CD),\ \sigma_Q=(AC)(BD),\ \sigma_R=(AD)(BC)。$$

故正四面体群G_3有12个旋转变换，恰是A，B，C，D四元素构成的四次交代群A_4。

证完

定理4 正八面体群（或正六面体群）G_4同构于四次对称群S_4。

证明 正八面体$AA'BB'CC'$如图二，原点0是它外接球的球心。群G_4的所有旋转变换可以分成三类：

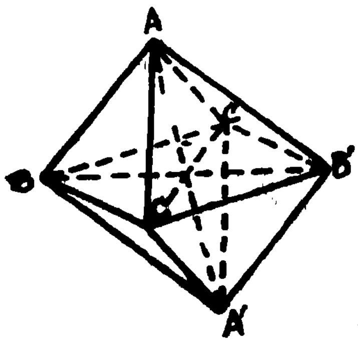

图 二

（1） 分别以顶点连线$\overrightarrow{A'OA}$，$\overrightarrow{B'OB}$，$\overrightarrow{C'OC}$为旋转轴，旋转$\frac{\pi}{2}$角的旋转变换σ_A，σ_B，σ_C。于是得如下10个旋转变换：

$$\sigma_A,\ \sigma_A^2,\ \sigma_A^3,\ \sigma_B,\ \sigma_B^2,\ \sigma_B^3,\ \sigma_C,\ \sigma_C^2,\ \sigma_C^3,$$
$$\sigma_A^4=\sigma_B^4=\sigma_C^4=\varepsilon$$

其中 $\sigma_A=\begin{pmatrix}AA'BB'CC'\\AA'CC'B'B\end{pmatrix}$ 等等

（2） 分别以面的中心连线$\overrightarrow{P'OP}$，$\overrightarrow{Q'OQ}$，$\overrightarrow{R'OR}$，$\overrightarrow{S'OS}$为旋转轴，旋转$\frac{2\pi}{3}$角的旋转变换σ_P，σ_Q，σ_R，σ_S，于是得如下8个旋转变换：

σ_P, σ_P^2, σ_Q, σ_Q^2, σ_R, σ_R^2, σ_S, σ_S^2

其中 $\sigma_P=\begin{pmatrix}AA'BB'CC'\\ BB'C'CA'A\end{pmatrix}$ 等等

（3） 分别以棱的中点连线$\overrightarrow{X'OX}$, $\overrightarrow{Y'OY}$, $\overrightarrow{Z'OZ}$, $\overrightarrow{U'OU}$, $\overrightarrow{V'OV}$, $\overrightarrow{W'OW}$为旋转轴，旋转π角的旋转变换σ_X, σ_Y, σ_Z, σ_U, σ_V, σ_W：

其中 $\sigma_X=\begin{pmatrix}AA'BB'CC'\\ A'AC'CB'B\end{pmatrix}$ 等等。

故正八面体群G_4由24个旋转变换构成．下面证明 $G_4\cong S_4$。

在群G_4中有且只有四个三阶子群$H_P=\langle\sigma_P\rangle$，$H_Q=\langle\sigma_Q\rangle$，$H_R=\langle\sigma_R\rangle$．$H_S=\langle\sigma_S\rangle$。因为：若$G_4$还有一个三阶子群H，当H含有（1）类元如$\sigma_A$时，H至少是四阶的；当H含有（3）类元如$\sigma_X$时，H是$2l(l\geqslant1)$阶的。故$G_4$只有这四个三阶子群。

这四个子群情况相同，以H_P为例可以看出，H_P不是G_4的正规子群，因为：$\sigma_P\in H_P$，

σ_A，$\sigma_A^{-1}=\sigma_A^3\in G_4$，有 $\sigma_A\sigma_P\sigma_A^{-1}=\sigma_S\notin H_P$

但是 $H_P\cong gH_Pg^{-1}$ $(\forall g\in G_4)$，故gH_Pg^{-1}也是G_4的一个三阶子群，它是H_P，H_Q，H_R，H_S中的一个。

对于任意$g\in G_4$，我们有

$$gH_Pg^{-1}\neq gH_Qg^{-1}\neq gH_Rg^{-1}\neq gH_Sg^{-1}$$

若不然，有$g_0\in G_4$使$g_0H_Pg_0^{-1}=g_0H_Qg_0^{-1}$，则得

$$g_0^{-1}(g_0H_Pg_0^{-1})g_0=g_0^{-1}(g_0H_Qg_0^{-1})g_0 \quad 即H_P=H_Q$$

这是不可能的。因此，对于每个$g\in G_4$，子群gH_Pg^{-1}，gH_Qg^{-1}，gH_Rg^{-1}，gH_Sg^{-1}是子群H_P，H_Q，H_R．H_S的一个排列。这样，我们可以作四次置换

$$\begin{pmatrix}H_P & H_Q & H_R & H_S\\ gH_Pg^{-1} & gH_Qg^{-1} & gH_Rg^{-1} & gH_Sg^{-1}\end{pmatrix}\qquad g\in G_4$$

为书写方便简记为 $\begin{pmatrix}H\\ gHg^{-1}\end{pmatrix}$ $g\in G_4$

作群G_4到以H_P，H_Q，H_R，H_S为元素的四次对称群S_4的映射φ，使得

$$\varphi:\ g\longrightarrow\begin{pmatrix}H\\ gHg^{-1}\end{pmatrix}\qquad \forall g\in G_4$$

这是同态映射．因为：若 $g_i\longrightarrow\begin{pmatrix}H\\ g_iHg_i^{-1}\end{pmatrix}$ $i=1,2$

则 $g_1g_2\longrightarrow\begin{pmatrix}H\\ (g_1g_2)H(g_1g_2)^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}H\\ g_1Hg_1^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}H\\ g_2Hg_2^{-1}\end{pmatrix}$

这是单一同态，因为：设

$$K_{e}:\varphi=\left\{g\in G_4\;\middle|\;\begin{pmatrix} H \\ gHg^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} H \\ H\end{pmatrix}\right\}。$$

若 H_P 在 G_4 内的正规化子为 $N(H_P)$，再设

$$N(H_P)\cap N(H_Q)\cap N(H_R)\cap N(H_S)=D$$

于是，$K_e:\varphi=D$。下面证明 $D=\{\varepsilon\}$。

(i)　$N(H_P)\neq N(H_Q)\neq N(H_R)\neq N(H_S)$

若不然，$N(H_P)=N(H_Q)$，则有 $g_0\in G_4$，使

$$H_P=g_0Hg_0^{-1}=g_0H_Qg_0^{-1}=H_Q。$$

这与 $H_P\neq H_Q$ 矛盾。

(ii)　$|D|<|N(H_P)|=6$

因为 $N(H_P)\neq N(H_Q)$，故 $D<N(H_P)$。由群论知识知道 $[G_4:N(H_P)]=4$，故 $|N(H_P)|=6$，于是 $|D|<6$。D是 G_4 中阶可能是1或2或3的正规子群。

(iii)　$|D|=1$

因为，G_4 没有三阶正规子群。D也不是二阶子群，若不然，$|D|=2$，则 $D=\langle d\rangle$ $d^2=\varepsilon$。于是d是 G_4 中（3）类的元。由D是正规子群，有

$$gdg^{-1}=d \quad 或 \quad gd=dg \qquad \forall g\in G_4$$

然而我们验算得 $\sigma_A\sigma_X\neq\sigma_X\sigma_A,\sigma_A\sigma_Y\neq\sigma_Y\sigma_A$，等等。故 $|D|\neq 2$。只有 $|D|=1$ 即 $D=\varepsilon$。

φ 是单一同态。于是，φ 是同构映射。

故　$G_4\cong S_4$

正八面体的每个面的中心恰好形成正六面体的顶点，而正六面体的每个面的中心恰好形成正八面体的顶点，故正六面体与正八面体是对偶图形。正八面体群 G_4 也是使正六面体对称的变换之集，使正六面体对称的也只有 G_4，故 G_4 是正六面体群。　　　证完

定理5　正二十面群（或正十二面体群）G_5 同构于五次交代群 A_5。

证明　正二十面体 $AA'BB'CC'DD'EE'FF'$ 如图三，原点0是它的外接球的球心，群 G_5 的所有旋转变换可以分为三类：

（1）　分别以顶点连线 $\overrightarrow{A'OA}$，……，$\overrightarrow{F'OF}$ 为旋转轴，旋转 $\frac{2\pi}{5}$ 角的旋转变换 σ_A，σ_B，……，σ_F，于是，得如下25个旋转变换：

$$\sigma_A^i,\ \sigma_B^i,\ \sigma_C^i,\ \sigma_D^i,\ \sigma_E^i,\ \sigma_F^i \qquad i=1,2,3,4.$$

$$\sigma_A^5=\sigma_B^5=\sigma_C^5=\sigma_D^5=\sigma_E^5=\sigma_F^5=\varepsilon$$

其中　$\sigma_A=(BCDEF)(B'C'D'E'F')$ 等等

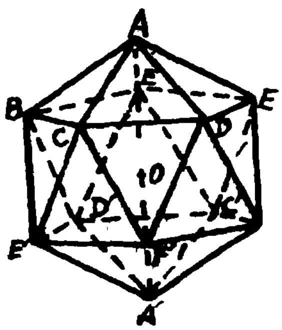

图　三

（2）　分别以面的中心连线 $\overrightarrow{P'OP}$，……，$\overrightarrow{Z'OZ}$ 为旋转轴，旋转 $\frac{2\pi}{3}$ 角的旋转变换 σ_P，……，σ_Z，于是，得如下20个

旋转变换：

$$\sigma_P^j,\ \sigma_Q^j,\ \sigma_K^j,\ \sigma_S^j,\ \sigma_T^j,\ \sigma_M^j,\ \sigma_N^j,\ \sigma_X^j,\ \sigma_Y^j,\ \sigma_Z^j \qquad j=1,2$$

其中 $\sigma_P=(ABC)(DEF)(A'B'C')(D'E'F')$等等

（3） 分别以棱的中点连线$\overrightarrow{a'Oa}$，……，$\overrightarrow{w'Ow}$，为旋转轴，旋转π角的旋转变换σ_a，…，σ_w，于是，得如下15个旋转变换：

$\sigma_a,\ \sigma_b,\ \sigma_c,\ \sigma_d,\ \sigma_e,\ \sigma_f,\ \sigma_g,\ \sigma_h,\ \sigma_k,\ \sigma_i,\ \sigma_m,\ \sigma_n,\ \sigma_u,\ \sigma_v,\ \sigma_w,$

其中 $\sigma_a=(AA')(BE')(CD')(DC')(EB')(FF')$ 等等。

故正二十面体群G_5由60个旋转变换构成。G_5与五次交代群A_5同构，因为：在G_5中有且只有五个四阶子群：

$H_1=\{\varepsilon,\ \sigma_a,\ \sigma_b,\ \sigma_b\}$，$H_2=\{\varepsilon,\ \sigma_d,\ \sigma_e,\ \sigma_f\}$，……，$H_5=\{\varepsilon,\ \sigma_u,\ \sigma_v,\ \sigma_w\}$，于是，利用定理4的方法证明$G_5$与以$H_1$，…，$H_5$为元素的五次交代群$A_5$同构。

正二十面体与正十二面体是对偶图形，故正十二面体群也是群G_5。 证完

定理6 正多边形群G_6是二面体群D_n

$D_n=\langle\sigma,\ \tau_0\rangle$ 其中 $\sigma^n=\tau_0^2=\varepsilon$， $\tau_0\sigma\tau_0^{-1}=\sigma^{-1}$

证明 正n边形$P_0P_1\cdots P_n$如图四，原点0是它的外接园的园心。群G_6、的所有旋转变换可以分二类：

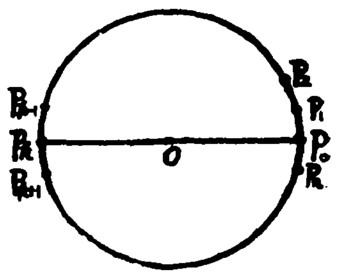

图 四

（1）以垂直正n边形中心0的直线$\overrightarrow{N'ON}$为旋转轴，旋转$\frac{2\pi}{n}$角的旋转变换σ，于是，得如下n个旋转变换：

$$\sigma,\ \sigma^2,\ \cdots,\ \sigma^{n-1},\ \sigma^n=\varepsilon. \qquad (5)$$

并满足 $\sigma(P_i)=P_{i+1}$ $i=0,1,\cdots n-1.$

（2） 以正n边形的外接园的直径为旋转轴，作旋转π角的旋转变换，这里有两种情况：

(i) 当$n=2k$（k是自然数）时，如图四。

首先以正n边形的顶点连线$\overrightarrow{P_tOP_{k+t}}$$(t=0,1,\cdots,k-1)$为旋转轴，得k个旋转变换：

$\tau_0,\ \tau_1,\ \cdots,\ \tau_{k-1}$，其中 $\tau_t^2=\varepsilon$（$t=0,\ 1,\ \cdots,\ k-1$）

满足 $\tau_t(P_i)=P_{n-i+2t}$ $t=0,\ 1,\ \cdots,\ k-1,\ i=0,\ 1,\ \cdots,n-1$

于是得到：

$$\tau_0\sigma\tau_0^{-1}=\sigma^{-1},\ \tau_0\sigma^{2t}=\tau_{k-t} \qquad t=0,1,\cdots,k-1 \quad (6)$$

其次以正n边形的边的中点连线$\overrightarrow{Q_tOQ_{k+t}}$（$t=0,1,\cdots,k-1$）为旋转轴，得k个旋转变换：

$\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{k-1}$， 其中 $\lambda_t^2=\varepsilon$ （$t=0,1,\cdots,k-1$）

满足 $\lambda_t(P_i)=P_{n-i+2t+1}$ $t=0,1,\cdots,k-1,$ $i=0,1,\cdots,n-1$

于是得到：

$$\lambda_0\sigma\lambda_0^{-1}=\sigma^{-1},\ \tau_0\sigma^{2k-1}=\lambda_{k-t} \qquad t=0,1,\cdots,k-1 \qquad (7)$$

故群 G_6 由（5）～（7）式关系确定，

$$G_6=\{\varepsilon,\sigma,\sigma^2,\cdots,\sigma^{n-1},\tau_0,\tau_1,\cdots,\tau_{k-1},\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{k-1}\}$$
$$=\{\varepsilon,\sigma,\sigma^2,\cdots,\sigma^{n-1},\tau_0,\tau_0\sigma,\cdots,\tau_0\sigma^{n-1}\}$$
$$=\langle\sigma,\tau_0\rangle=D_n$$

其中 $\sigma^n=\tau_0^2=\varepsilon,\qquad \tau_0\sigma\tau_0^{-1}=\sigma^{-1}$。

（ii） 当 $n=2k+1$（k是自然数）时，

以正 n 边形的顶点与对应边的中点连线 $\overrightarrow{P_tQO_t}$（$t=0,1\cdots,n-1$）为旋转轴，得 n 个转变换：

$\tau_0,\tau_1,\cdots,\tau_{n-1}$，其中 $\tau_t^2=\varepsilon$（$t=0,1,\cdots,n-1$）

满足 $\tau_t(P_i)=P_{n-i+2t}\qquad t=0,1,\cdots,n-1,\ i=0,1,\cdots,n$

于是得到：

$$\tau_0\sigma\tau_0^{-1}=\sigma^{-1},\qquad \tau_0\sigma^{n-2t}=\tau_t\qquad t=0,1,\cdots,n-1 \tag{8}$$

故群 G_6 由（5），（8）式关系确定，

$$G_6=\{\varepsilon,\sigma,\sigma^2,\cdots,\sigma^{n-1},\tau_0,\tau_1,\cdots,\tau_{n-1}\}$$
$$=\{\varepsilon,\sigma,\sigma^2,\cdots,\sigma^{n-1},\tau_0,\tau_0\sigma,\cdots,\tau_0\sigma^{n-1}\}$$
$$=\langle\sigma,\tau_0\rangle=D_n$$

其中 $\sigma^n=\tau_0^2=\varepsilon,\qquad \tau_0\sigma\tau_0^{-1}=\sigma^{-1}$。

为什么正 n 边形群称为二面体群呢？因为正 n 边形的各顶点与正 n 边形的外接园为大园的球 B_r 的直径 $\overrightarrow{N'ON}$ 上的点 N、N′ 连接，得以正 n 边形为底面，上、下能重迭的两个角锥。群 G_6 的任一旋转变换使这两个角锥对称，而正 n 边形是这两个角锥的公共底面，故 G_6 称二面体群。

三、有限旋转群

我们已得到四个正多面体群是有限旋转群。现在要问：有限旋转群是这四个群之一吗？回答是肯定的。

设群G是使原点0不动的 n 阶旋转群，B_r 是以0点为球心、半径为1的球面。

定义3 设P是 B_r 上一点，σ 是旋转变换，若 $\sigma(P)=P$，则称P为 σ 的一个极点。

显然，除恒等变换外，群G的每个旋转变换都有两个极点。

定理7 群G中以P为极点的旋转变换之集 $G_P=\{\tau\in G\mid\tau(P)=P\}$ 构成G的一个循环子群。称为P极点子群。

证明 G_P 是G的一个子群是显然的。下面证明 G_P 是循环子群，在 G_P 的非恒等变换中存在一个旋转角最小的旋转变换 λ，其旋转角为 φ_λ。任意 $\tau\in G_P$，其旋转角为 φ_τ。于

$$\varphi_\tau=q\varphi_\lambda+\varphi_0\qquad 0\leqslant\varphi_0<\varphi_\lambda,\ q\text{ 是整数}$$

由于旋转变换 λ^{-q}，$\tau\lambda^{-q}$ 的旋转角分别为 $-q\varphi_\lambda$，$\varphi_{\tau\lambda^{-q}}$，故

$$\varphi_0=\varphi_\tau-q\varphi_\lambda=\varphi_{\tau\lambda^{-q}}$$

已知 λ，$\tau\in G_P$，故 $\tau\lambda^{-q}\in G_p$。

若$\varphi_0\neq 0$，则 $\varphi_{\tau\lambda^{-q}}=\varphi_0<\varphi_\lambda$ ，即$\tau_\lambda{}^{-q}$ 的旋转角比λ的旋转角小，与λ的取法矛盾。

故$\varphi_0=0$从而$\varphi_\tau=q\varphi_\lambda=\varphi_{\lambda^q}$　　即　$\tau=\lambda^q$，

故　　$G_P=\langle\lambda\rangle$　　证完

若P极点子群是m阶的，则称$\overrightarrow{OP}$为m转轴。

定理8　群G的元一定把极点变为极点。

证明　设$\tau\in G$的极点为P，任意$\sigma\in G$，有$\sigma(P)=Q$，则Q是$\sigma\tau\sigma^{-1}$的极点，因为：

$(\sigma\tau\sigma^{-1})(Q)=\sigma\tau(\sigma^{-1}(Q))=\sigma\tau(P)=\sigma(P)=Q$　　证完

定理9　设G_{p_0}是群G的P_0极点子群，G按G_{p_0}作陪集分解

$$G=G_{p_0}\cup\sigma_1G_{p_0}\cup\sigma_2G_{p_0}\cup\cdots\cup\sigma_{k-1}G_{p_0}$$

则陪集$\sigma_iG_{p_0}(i=1,\cdots,k-1)$有如下性质：

（1）　设$\sigma_i(P_0)=P_i$ $(i=1,\cdots,k-1)$ 则$P_s\neq P_t$ $(s\neq t)$；

（2）　陪集$\sigma_iG_{p_0}(i=1,\cdots,k-1)$的元也只有$\sigma_iG_{p_0}$的元把$P_0$变为$P_i$；

（3）　G_{p_0}的共轭子群$\sigma_iG_{p_0}\sigma_i^{-1}(i=1,\cdots,k-1)$是$P_i$极点子群。

以上结论用群的陪集分解的意义直接可得，因此，我们略去不证。

定义4　设G的极点子群G_P与G_Q是共轭子群，则称P与Q是共轭极点。

由于子群的共轭关系是等价关系，得到共轭极点的等价关系，进而得到共轭极点类。

定理10　含极点P_0的共轭类A_0中有$p_0=\dfrac{|G|}{|G_{p_0}|}$个不同的极点。

证明　群G按P_0极点子群G_{p_0}作陪集分解

$$G=G_{p_0}\cup\sigma_1G_{p_0}\cup\sigma_2G_{p_0}\cup\cdots\cup\sigma_{k-1}G_{p_0}$$

由定理9知$\sigma_i(P_0)=P_i$ $(i=1,\cdots,k-1)$，则子群G_{p_0}与$\sigma_iG_{p_0}\sigma_i^{-1}=P_i$共轭，从而$p_0$与$P_i$是共轭极点。

若G_{p_0}与G_Q是共轭子群，即有$\lambda\in G$使$\lambda G_{p_0}\lambda^{-1}=G_Q$，而$\lambda\in\sigma_iG_{p_0}$，

于是，$\lambda=\sigma_i\tau$　　　(τG_{p_0})

$$G_Q=\lambda G_{p_0}\lambda^{-1}=(\sigma_i\tau)G_{p_0}(\sigma_i\tau)^{-1}=\sigma_iG_{p_0}\sigma_i^{-1}$$

故子群G_{p_0}只有k个不同共轭子群$\sigma_iG_{p_0}\sigma_i^{-1}$ $(i=1,\cdots,k-1)$

于是，

$$p_0=k=[G:G_{p_0}]=\frac{|G|}{|G_{p_0}|}$$　　证完

定理11 R^3中的n阶旋转群只有四种类型：

（1） $n\geqslant 4$的偶数，且有两个不共轭的二阶极点子群，一个$\frac{n}{2}$阶的极点子群；

（2） $n=12$，且有一个二阶极点子群，两个不共轭的三阶极点子群；

（3） $n=24$，且有二、三、四阶极点子群各一；

（4） $n=60$，且有二、三、五阶极点子群各一。

证明 设G是n阶旋转群，G有$n-1$个非恒等旋转变换，每个旋转变换有两个极点，故G共有$2(n-1)$个极点，（包括重复计算的极点）。

设P_i极点子群G_{p_i}是m_i阶的（$i=1,2,\cdots$），故G中有m_i个旋转变换使P_i不动，在计算极点个数时，P_i点应重复计算m_i-1次，（除恒等转换外）

在P_i的共轭极点类A_i中的极点，都由G_{p_i}的共轭子群$\sigma_i G_{p_i}\sigma_i^{-1}$决定，$\sigma_i G_{p_i}\sigma_i^{-1}$也$m_i$阶的，因此，$A_i$中的每个极点都应重复计算$m_i-1$次。若$A_i$中有$p_i$个不同的极点，则应重复计算$p_i(m_i-1)$次。

设群G的元素按共轭极点关系分成h类（包括重复计算的极点在内），则G中共有$\sum\limits_{i=1}^{h}p_i(m_i-1)$个极点。故得到

$$2(n-1)=\sum_{i=1}^{h}p_i(m_i-1)\qquad n\geqslant m_i\geqslant 2$$

由 $p_i=\frac{n}{m_i}$得

$$2(n-1)=\sum_{i=1}^{h}\left(1-\frac{1}{m_i}\right)\qquad n\geqslant m_i\geqslant 2\qquad (9)$$

由（9）式知，只有$2\leqslant h\leqslant 3$时，n、m_i才有解

（1） 当$h=2$时

由（9）式得 $\frac{2}{n}=\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\qquad n\geqslant m_i\geqslant 2$

上式当且仅当$m_1=m_2=n\quad n=2,3,\cdots$时成立。此时与$P_1$、$P_2$共轭的极点有$p_1=p_2=1$个，即$P_i$所在共轭类只有1个极点，不能决定一条旋转轴，故这不是旋转群。

（2） 当$h=3$时

由（9）式得 $1+\frac{2}{n}=\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}\qquad n\geqslant m_i\geqslant 2\qquad (10)$

我们不妨设 $n\geqslant m_3\geqslant m_2\geqslant m_1\geqslant 2$

首先，由（10）式知，当$m_1\geqslant 3$或$m_1=2$，$m_2\geqslant 4$时，（10）式无解。

其次，设$m_1=m_2=2$，此时（10）式有唯一解

$$m_1=m_2=2,\ m_3=\frac{n}{2},\ n\geqslant 4\text{的偶数;}$$

第三，设$m_1=2$，$m_2=3$，此时（10）式的解为：

(i)　$m_1=2,\ m_2=3,\ m_3=3,\ n=12$；

(ii)　$m_1=2,\ m_2=3,\ m_3=4,\ n=24$；

(iii)　$m_1=2,\ m_2=3,\ m_3=5,\ n=60$。

于是，定理获证。　　　　定证

下面证明定理11中（1）～（4）类型的群就是四种正多面体群。

定理12　设G是n阶旋转群，若$n\geqslant 4$的偶数，且有两个不共轭的二阶极点子群，一个$\frac{n}{2}$阶极点子群，则G是二面体群。

证明　已知$n=2m$，整数$m\geqslant 2$，

由G有一个$\frac{n}{2}=m$阶极点子群G_L，知道在L的共轭极点类A_1中有$p_1=\frac{n}{m}=2$个不同的极点，设为L和L′，决定一条旋转轴$\overrightarrow{L'OL}$。由定理7知，极点子群G_L是一个m阶循环群。于是，得到垂直于$\overrightarrow{L'OL}$的平面上均匀分布的m个点$P_1,P\cdots,Pm$，构成一个正m边形。G_L的元素有下列关系：

$$
\begin{aligned}
&G_L=\langle\sigma\rangle \text{ 其中 } \sigma^m=\varepsilon\\
&\sigma(L)=L,\ \sigma(L')=L' \qquad\qquad (11)\\
&\sigma(P_i)=P_{i+1},\ \sigma(P_m)=P_1 \qquad i=1,\cdots,m-1
\end{aligned}
$$

再由G有两个不共轭的二阶极点子群G_M，G_N，知道在M，N的共轭极点类A_2，A_3中有$p_2=p_3=\frac{n}{2}=m$个不同的极点。极点M与O决定一条旋转轴$\overrightarrow{MOM'}$，于是得另一极点M′，显然，极点子群$G_M=G_{M'}$，故M′与M同属一共轭极点类。因此，A_2中极点成对出现，对极点决定一条旋转轴，共$\frac{m}{2}$条旋转轴，都是二阶轴。同理，A_3共有$\frac{m}{2}$条二阶轴。

设A_2，A_3的m条二阶旋转轴为$l_1,\cdots,l_m$，以l_i为轴的旋转变换为τ_i（$i=1,\cdots,m$）。由于旋转变换把极点变为极点，故τ_i交换L和L′，于是，l_i垂直平分$\overrightarrow{LOL'}$在正m边形$P_1P_2\cdots P_m$平面上，且相邻的二阶轴l_i和l_{i+1}的交角为$\frac{2\pi}{m}$，因此，不妨设$\tau_i(i=1,\cdots,m)$的极点与$P_1,P_2,\cdots,P_m$重合，有下列关系：

$$
\begin{aligned}
&\tau_t^2=\varepsilon \qquad t=1,\cdots,m\\
&\tau_t(L)=L',\ \tau_t(L')=L \qquad\qquad (12)\\
&\tau_t(P_i)=P_{n-i+2t}
\end{aligned}
$$

综合上述，G的元分二类：G_L和$\{\tau_1,\cdots,\tau_m\}$，它们满足关系（11）和（12），且

$$
\begin{aligned}
&(\tau_1\sigma)^2(L)=L,\ (\tau_1\sigma)^2(L')=L'\\
&(\tau_1\sigma)^2(P_i)=P_i \qquad i=1,\cdots,m
\end{aligned}
$$

即是说　$\tau_1\sigma\tau_1^{-1}=\sigma^{-1}$　　(13)

并且　$\tau_1\sigma^{2t}(L)=\tau_{m-t}(L),\ \tau_1\sigma^{2t}(L')=t_{m-t}(L')$

$\tau_1\sigma^{2t}(P_i)=\tau_{m-t}(P_i) \qquad t,i=1,\cdots,m$

即是说　$\tau_1\sigma^{2t}=\tau_{m-t} \qquad t=1,\cdots,m$　　(14)

故 $G=G_L\bigcup\{\tau_1,\cdots,\tau_m\}=\langle\sigma\rangle\bigcup\tau_1\langle\sigma\rangle$

$=\langle\sigma,\tau_1\rangle$ 其中 $\sigma^m=\tau_1^2=\varepsilon$, $\tau_1\sigma\tau_1^{-1}=\sigma^{-1}$

由此证明了G是二面体群。 证完

定理13 设G是n阶旋转群，若 $n=12$，且G有一个二阶极点子群，两个不共轭的三阶极点子群，则G是正四面体群。

证明 由G有两个不共轭的三阶极点子群 G_M，G_N，知在M，N的共轭极点类 A_1，A_2 中有 $p_1=p_2=4$ 个不同极点，各自决定两条三阶轴。

设 A_1 类的四个极点为M，A，B，C，相应的极点子群为 G_M，G_A，G_B，G_C。若 $\sigma_A\in G_A$，σ_A 使A不动，且使极点B，C，M互换，于是，不妨设

$$\sigma_A=(BCM)。$$

旋转变换是正交变换，故极点A，B，，C，M均匀分布在单位球面 B_r 上，构成正四面体，且以A，B，C，M为极点的旋转变换为 σ_A，σ_B，σ_C，σ_M。

设：

$$\begin{aligned}&\sigma_A=(BCM)\quad \sigma_A^2=(BMC)\quad \sigma_B=(ACM)\\&\sigma_B^2=(AMC)\quad \sigma_C=(ABM)\quad \sigma_C^2=(AMB)\\&\sigma_M=(ABC)\quad \sigma_M^2=(ACB)\qquad\qquad (15)\\&\sigma_A^3=\sigma_B^3=\sigma_C^3=\sigma_M^3=\varepsilon\end{aligned}$$

A_2 类的四个极点 A′，B′，C′，N，同样也是正四面体，具有正四面体ABCM的性质，故只讨论正四面体ABCM。

再由G的二阶极点子群 G_P，知P所在的共轭极点类 A_3 含有 $p_3=6$ 个不同的极点，设为P，P′，Q，Q′，R，R′，决定二阶轴 $\overrightarrow{P'OP}$，$\overrightarrow{Q'OQ}$，$\overrightarrow{R'OR}$，相应的旋转变换为 σ_P，σ_Q，σ_R。设：

$$\begin{aligned}&\sigma_P=(AB)(CM),\ \sigma_Q=(AC)(BM),\\&\sigma_R=(AM)(BC)\qquad\qquad (16)\end{aligned}$$

故群G由关系（15），（16）得。这是正四面体群， 证完

类似地，可证明。

定理14 设G是n阶旋转群，若 $n=24$，且有二，三，四阶极点子群各一个，则G是正八面体群或正六面体群。

定理15 设G是n阶旋转群，若 $n=60$，且有二，三，五阶极点子群各一个，则G是正二十面体群或正十二面体群。

至此，R^3 中有限旋转群的分类和构造的讨论结束。

参考文献

1 W·密勒，《对称性群及其应用》

2 J. S. Lomont《Applications of Finite Groups》

3 张远达，《有限群的构造》

4 张远达，《运动群》

5 Nathan Jacobson《Basic Algebra 1》

6 北京大学数学力学系，《高等代数》