旋转群

2011级ACM班
张方魁 陈志鹏

May 31, 2012

Abstract

本文介绍了旋转群。

讨论这个话题之前，让我们先来看看有哪些正多面体。

命题1：正多面体只能有5种，即用正三角形做面的正四面体、正八面体，正二十面体，以及用正方形做面的正六面体，用正五边形做面的正十二面体。

证明：设顶点数为V，面数为F，棱数为E

设正多面体的每个面是正n边形，每个顶点有m条棱。棱数E应是面数F与n的积的一半（每两面共用一条棱），即

$$nF = 2E \tag{1}$$

同时，E应是顶点数V与m的积的一半，即

$$mV = 2E \tag{2}$$

由(1)、(2)，得

$$F = \frac{2E}{n}, V = \frac{2E}{m},$$

代入欧拉公式$V + F - E = 2$，有

$$\frac{2E}{m} + \frac{2E}{n} - E = 2$$

整理后，得

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{E}$$

. 由于E是正整数，所以$\frac{1}{E} > 0$。因此

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2} \tag{3}$$

说明m,n不能同时大于3，否则$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{2}$，即(3)不成立。

另一方面，由于m和n的意义（正多面体一个顶点处的棱数与多边形的边数）知，$m \geqslant 3$且$n \geqslant 3$。因此m和n至少有一个等于3

当$m = 3$时，因为$\frac{1}{n} > \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$，$n$又是正整数，所以n只能是3，4，5

同理$n = 3$，m也只能是3，4，5

所以有以下几种情况：

n	m	类型
3	3	正四面体
4	3	正六面体
3	4	正八面体
5	3	正十二面体
3	5	正二十面体

由于上述5种多面体确实可以用几何方法作出，而不可能有其他种类的正多面体。

所以正多面体只有5种。

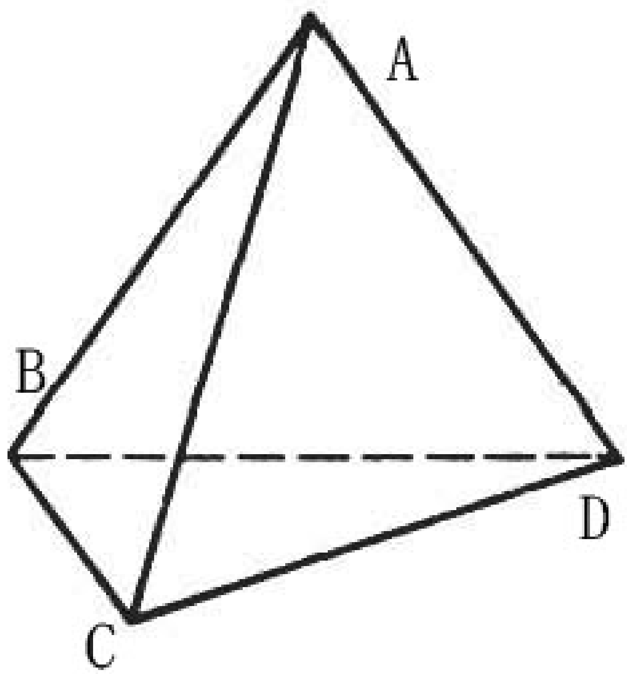

图 1　正四面体

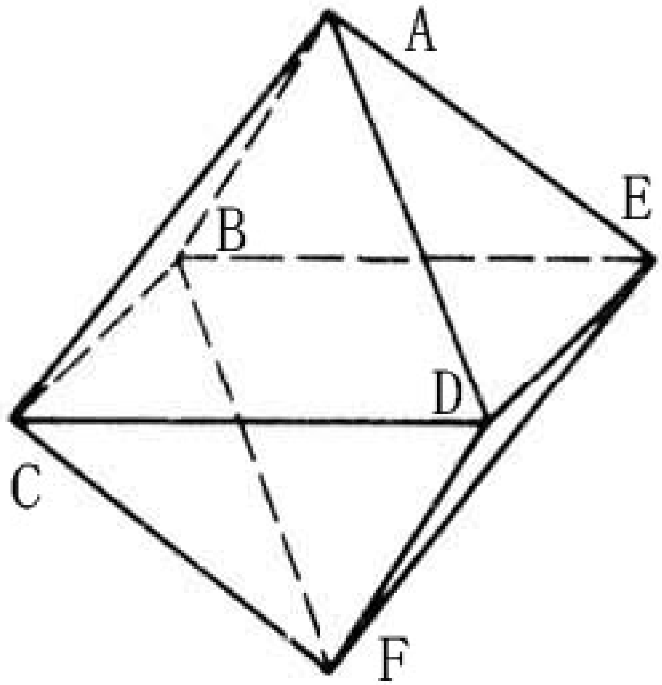

图 2　正八面体

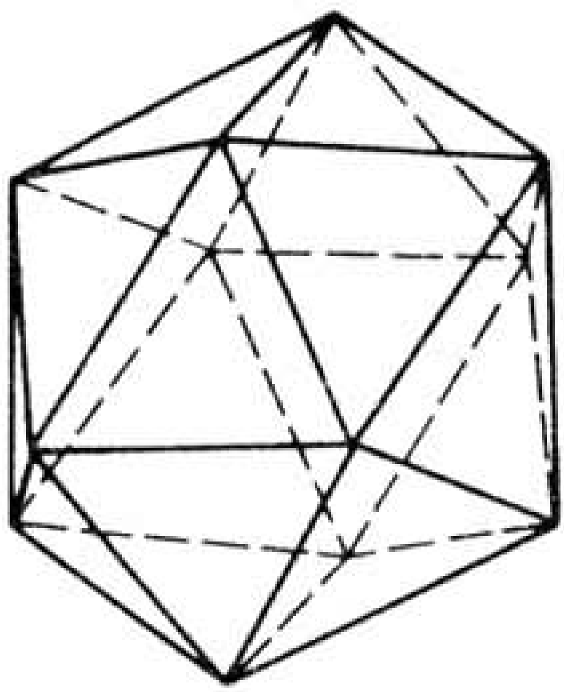

图 3　正二十面体

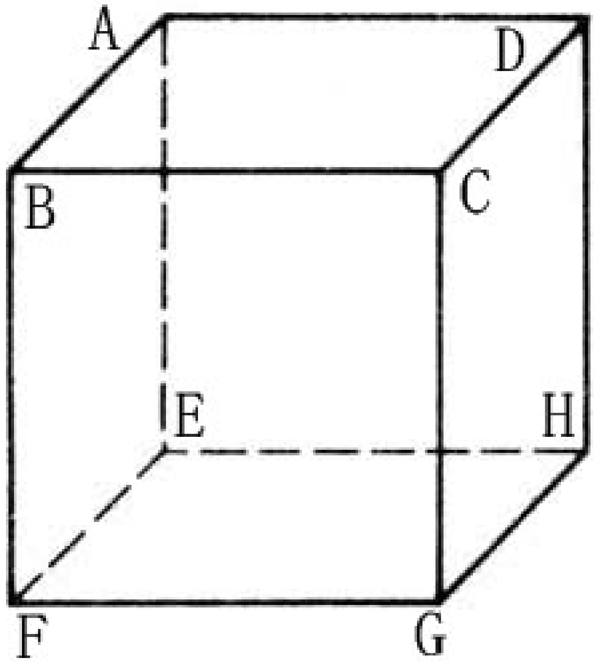

图 4　正六面体

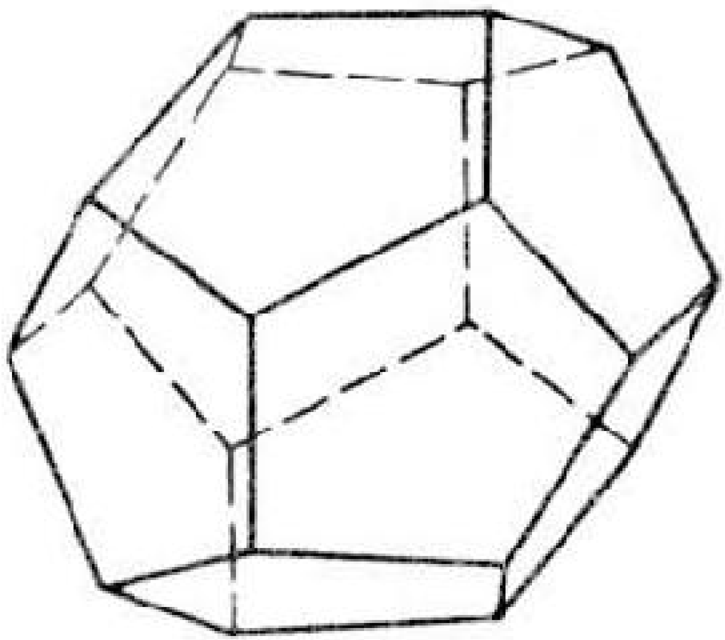

图 5　正十二面体

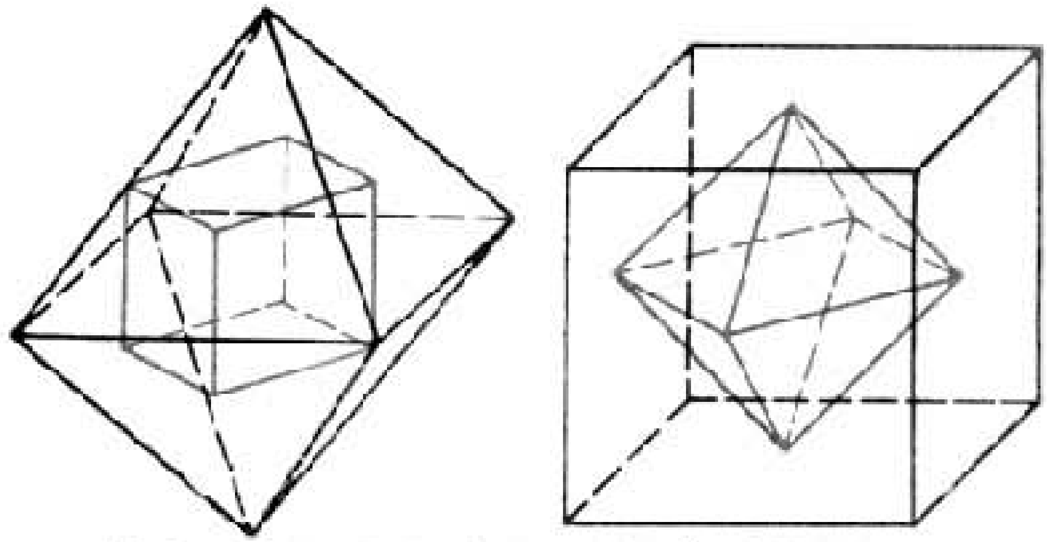

图 6　正六面体对正八面体的对偶图

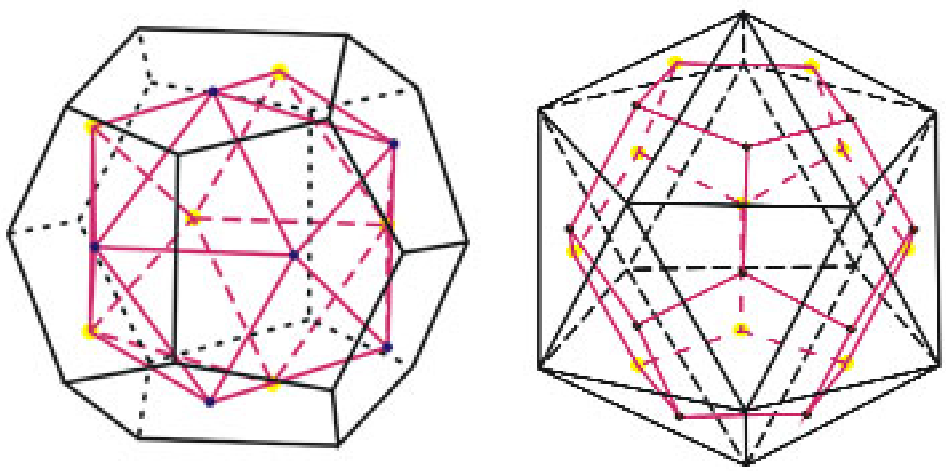

图 7　正十二面体对正二十面体的对偶图

命题2： 正四面体群G_4是四次交错群A_4。

证明： 正四面体ABCD如图1，原点O是它的外接球的球心, 群G_4的所有旋转变换可以分为两类：

(1)分别以$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{OC}$,$\overrightarrow{OD}$为旋转轴，旋转120度角的旋转变换σ_A，σ_B，σ_C，σ_D，于是可得如下9个旋转变换：

$$\sigma_A = (B, C, D), \sigma_B = (A, D, C), \sigma_C = (A, B, D), \sigma_D = (A, C, B)$$

$$\sigma_A^2=(B,D,C),\sigma_B^2=(A,C,D),\sigma_C^2=(A,D,B),\sigma_D^2=(A,B,C)$$

$$\sigma_A^3=\sigma_B^3=\sigma_C^3=\sigma_D^3=(1)$$

(2) 分别以棱的中点连线（有3对棱）$\overrightarrow{P'OP}$,$\overrightarrow{Q'OQ}$,$\overrightarrow{R'OR}$为旋转轴，旋转180度角的旋转变换$\sigma_P,\sigma_Q,\sigma_R$:

$$\sigma_P=(A,B)(C,D),\sigma_Q=(A,C)(B,D),\sigma_R=(A,D)(B,C)$$

故正四两体群G_4有12个旋转变换, 恰是A,B,C,D四元素构成的四次交错群A_4。

命题3： 正八面体群G_8（或正六面体群G_6）同构于四次置换群S_4。

证明： 正八面体ABCDEF如图2，原点O是它外接球的球心。群G_8的所有旋转变换可分成三类：

（1）分别以顶点连线$\overrightarrow{AOF}$,$\overrightarrow{BOD}$,$\overrightarrow{COE}$为旋转轴，旋转90度角的旋转变换σ_A，σ_B，σ_C，于是得如下10个旋转变换：

$$\sigma_A,\sigma_B,\sigma_C,$$

$$\sigma_A^2,\sigma_B^2,\sigma_C^2,$$

$$\sigma_A^3,\sigma_B^3,\sigma_C^3,$$

$$\sigma_A^4=\sigma_B^4=\sigma_C^4=(1)$$

其中

$$\sigma_A=\begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ A & C & D & E & B & F \end{pmatrix}$$

等等。

（2）分别以面的中心连线（有4个对面）$\overrightarrow{P'OP}$,$\overrightarrow{Q'OQ}$,$\overrightarrow{R'OR}$,$\overrightarrow{S'OS}$为旋转轴，旋转120度角的旋转变换$\sigma_P,\sigma_Q,\sigma_R,\sigma_S$,于是得到如下8个旋转变换：

$$\sigma_P,\sigma_Q,\sigma_R,\sigma_S$$

$$\sigma_P^2,\sigma_Q^2,\sigma_R^2,\sigma_S^2,$$

其中，

$$\sigma_P=\begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ B & C & A & E & F & D \end{pmatrix}$$

等等。

（3）分别以棱的中点连线（有6对棱）$\overrightarrow{X'OX}$,$\overrightarrow{Y'OY}$,$\overrightarrow{Z'OZ}$, $\overrightarrow{U'OU}$,$\overrightarrow{V'OV}$,$\overrightarrow{W'OW}$为旋转轴，旋转180度角的旋转变换$\sigma_X,\sigma_Y,\sigma_Z,\sigma_U,\sigma_V,\sigma_W$:

其中，

$$\sigma_X=\begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ E & F & B & A & D & C \end{pmatrix}$$

等等。故正八面体群G_8由24个旋转变换构成，下面证明G_8 同构于S_4。

首先对正八面体的八个面标号

1:ABC; 2:ACD; 3:ADE; 4:AEB; 5:FBC; 6:FCD; 7:FDE; 8:FEB.

G_8是S_8的子群. 考虑正八面体的如下四个对面组成的集合S：

$A_1=\{1,7\},A_2=\{2,8\},A_3=\{3,5\},A_4=\{4,6\}.$

根据旋转群的几何意义，知道G在S上有一个自然的群作用$*$：

$\sigma * A_1 = \{\sigma(1), \sigma(7)\} \in S, \forall \sigma \in G.$

显然此作用是可迁的,即轨道只有一个。由计数公式，对于每个$1 \leqslant i \leqslant 4$有

$$|Stab(A_i)| = \frac{|G|}{|G * A_i|} = \frac{24}{4} = 6.$$

此作用诱导出一个群同态

$$\varphi : G \to T(S) = S_4.$$

由于已经知道$|S_4| = |G| = 24$，为了证明ϕ是群同构映射，只需说明此作用忠实（即ϕ是单射），亦即

$$\bigcap_{x \in S} Stab(x) = \{e\}.$$

事实上，$Stab(A_1)$由以下六个置换组成：

$$(1),$$

$$\sigma_P = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ B & C & A & E & F & D \end{pmatrix} = (2,4,5)(3,8,6),$$

$$\sigma_P^2 = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ C & A & B & F & D & E \end{pmatrix} = (2,5,4)(3,6,8),$$

$$\sigma_Z = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ D & F & E & A & C & B \end{pmatrix} = (1,7)(2,3)(4,6)(5,8),$$

$$\sigma_U = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ B & C & A & E & F & D \end{pmatrix} = (1,7)(2,8)(3,4)(5,6),$$

$$\sigma_W = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ F & E & D & C & B & A \end{pmatrix} = (1,7)(2,6)(3,5)(4,8)$$

容易验证$\sigma_P \notin Stab(A_2), \sigma_P^2 \notin Stab(A_2)$。

$Stab(A_i)$ $\{(1)\}$中余下的四个置换每一个都是四个不相交对换的乘积。而S_8中使得$gA_i = A_i, \forall 1 \leqslant i \leqslant 4$ 都成立的这样的置换只有一个，即

$$(1,7)(2,8)(3,5)(4,6) \notin Stab(A_i).$$

这说明了

$$\bigcap_{A_i \in S} Stab(A_i) = \{(1)\}.$$

从而φ是单射，从而是双射。

推论：正八面体的每个面的中心恰好形成正六面体的顶点, 而正六面体的每个面的中心恰好形成正八面体的顶点, 故正六面体与正八面体是对偶图形。

正八面体群S_4也是使正六面体对称的变换之集, 使正六面体对称的也只有S_4, 故S_4也是正六面体群。

引理1：二十面体群是单群。

证明：我们先来考虑二十面体群的类方程。设F是正二十面体R_{20}的任意一个面，用S表示R_{20}的面的集合(R_{20}的一个面可以用该面上的顶点集表示)。则其旋转群G_{20}对于S有一个自然的群作用。根据几何意义，这个作用还是可迁的。因此有

面数$= |S| = \frac{|G_n|}{|Stab(F)|}$，

对于正二十面体，取F为$1, 2, 3$，则$Stab(F) =< (1, 2, 3) >$。于是有

命题4：正二十面体群G_{20}同构于5次交错群A_5。

证明：

正则多胞形即正多边形和正多面体的高维度推广，包含正多边形和正多面体。对于四维及四维以上空间的正则多胞形的结构情况，自1850年以来也获得了不少进展，使人们对n维空间正则多胞形有了一个基本的了解。下面将简单介绍n维空间有限旋转群$SO(n)$和n维空间正则多胞形。

1 N维空间有限旋转群的极点数定理

正则多胞形的符号表示方法为施莱夫利符号，形式为$p, q, r, \cdots$. 施莱夫利符号是递归描述的。正p边形表示为p，例如，3表示正三角形，4表示正方形。一个正多面体的面为p边形，每个点与q个面相邻，表示为p, q，例如，立方体表示为$4, 3$。一个四维正则多胞形由三维正多面体围成，这些正多面体称为胞腔，四维正则多胞形的三维胞腔为p, q，每个点与r个胞腔相邻，表示为p, q, r。重复上述过程，可以表示任意n维正则多胞形，n维正则多胞形包含低维正则多胞形，这些低维正则多胞形称为胞腔。

首先设S^N是单位超球面, 其中心在原点, 同时设原点O是有限旋转群的所有元素的共同旋转心, 即G^N作用在S^N上变成S^N的变换群, (为避免混淆, 有时候我们将表示维数的N从右上角移到左上角), ${}^N G$ 中的一个非幺元素ρ 必有一条旋转轴, 而轴与单位超球面之间的交点是${}^N S$上的两个极点, 这两点在ρ下保持不变.

设p是单位超球面上的一点, ${}^N v_p$是轨道阶数, 同时又设${}^N n_p$是p的稳定群的阶数,${}^N n$是有限旋转群${}^N G$的阶数,根据:

定理1 设群${}^N G$是集合${}^N S$的变换群,${}^N T$是集合${}^N S$的子集, 记${}^N T$的稳定群为$Stab({}^N T)$, 记p的轨道为$Orb(p)$. 这样, 我们有

$$ {}^N v_p = [{}^N G : Stab({}^N T)]. $$

其次根据:

定理2 (L.Lagrange 定理) 若${}^N G$是一个有限群, 而${}^N H$是${}^N G$的子群, 这样

$$ |{}^N G| = [{}^N G :{}^N H]|{}^N H|, $$

我们得到

$$ {}^N n ={}^N v_p \cdot{}^N n_p. $$

设单位超球面${}^N S$外接于一个正则多胞形，即这个正则多胞形的所有顶点均匀分布在单位超球面上。同时，我们记正则多胞形的顶点集合为$Orb(p_1)$；记正则多胞形所有棱的中点投影在单位超球面上的集合为$Orb(p_2)$；记正则多胞形的所有面的中心投影在单位超球面上集合为$Orb(p_3)$；等等。由定理1，我们可知轨道阶数为：

$$ {}^N v_{p_i} = [{}^N G : Stab(p_i)]. $$

运用有限旋转群理论，可得到如下的：

定理3 (极点数定理) N维空间E^N中正则多胞形的有限旋转群的阶数为${}^N n = |{}^N G|$，其三维胞腔数为$\prod_{k=4}^{N}{}^k v_{p_k}$,轨道阶数为${}^N v_{p_i}$,轨道中一点的稳定化子阶数为${}^N n_{p_i}$,等等，以上各量之间存在以下关系：

$$2({}^N n - \prod_{k=4}^{N}{}^k v_{p_k}) = \prod_{i=1}^{N}{}^N v_{p_i} \cdot {}^N n_{p_i}\left[1 - \frac{{}^2 e_i}{p \cdot {}^{3-i} e_{3-i\frac{2-i}{\{p,q\}}}}\right]$$

其中，符号“${}^{N-1}e_i$”表示E^N中正则多胞形的$N-1$维胞腔的第i条轨道的阶数。符号“${}^{N-i}e_{N-i\frac{N-i-1}{\{\cdots,v,w\}}}$”表示$E^N$中正则多胞形的$N-i$维胞腔的第$N-i$条轨道的阶数。符号“$\frac{N-i-1}{}$”表示从字母$w$开始的字母数，而其方向为逆的。

在证明该定理之前，先做以下定义：

定义1

1) ${}^1e_{1\frac{0}{\{\cdots\}}} = 2, {}^0 e_{0\frac{-1}{\{\cdots\}}} = 1$;

2) ${}^1e_1 = {}^1 e_2 = 0$;

3) ${}^2e_3 = {}^3 e_4 = {}^4 e_5 = \cdots = 1.$

定义2 根据上面定义，我们再定义${}^N v_{p_v} \cdot {}^{N-1} e_i$是“全基数”(即轨道的每个点被许多点重合)，它取${}^{n-i}e_{N-i\frac{N-i-1}{\{\cdots,v,w\}}}$为$E^N$中正则多胞形的第$i$条轨道的一点的重合数，我们也可以用符号${}^N m_{p_i}$去表示它。

定理3的证明 因为E^N中的每一个三维正则多胞形(胞腔)有一个幺旋转，而组成E^N中正则多胞形“表面”的${}^N v_{p_i}$个$N-1$维胞腔将有$\prod_{k=4}^{N}{}^k v_{p_k}$个三维胞腔，所以应有$\prod_{k=4}^{N}{}^k v_{p_k}$个幺旋转。在${}^N G$中，我们除去$\prod_{k=4}^{N}{}^k v_{p_k}$个幺旋转，那么剩下的元素(即${}^N G \setminus \prod_{k=4}^{N}{}^k v_{p_k} \cdot (e)$，这里$e$是幺元) 都是非幺旋转，而$E^N$中每个非幺旋转有两个极点，故总共应有$2({}^N n - \prod_{k=4}^{N}{}^k v_{p_k})$个极点。

另一方面，取点p_i为极点的非幺旋转的集合为$Stab(p_i)\setminus{}^N\alpha_{p_i}(e)$, 这里，${}^N\alpha_{p_i}$是$Stab(p_i)$中的幺元数，故取点$p_i$为极点的重复次数为$({}^N n_{p_i} - {}^N \alpha_{p_i})$，又因为$Orb(p_i)$中的点均为极点，这些点的重复次数均为$({}^N n_{p_i} - {}^N \alpha_{p_i})$，故

$$2({}^N n - \prod_{k=4}^{N}{}^k v_{p_k}) = \sum_{i=1}^{N}{}^N v_{p_i}({}^N n_{p_i} - {}^N \alpha_{p_i}),$$

由幺元数公式可得

$$2({}^N n - \prod_{k=4}^{N}{}^k v_{p_k}) = \prod_{i=1}^{N}{}^N v_{p_i} \cdot {}^N n_{p_i}\left[1 - \frac{{}^2 e_i}{p \cdot {}^{3-i} e_{3-i\frac{2-i}{\{p,q\}}}}\right]$$

2 部分公式的介绍

公式1 (轨道阶数公式)

$${}^N v_{p_i} = \frac{{}^N v_{p_N} \cdot {}^{N-i} e_i}{{}^{N-i}e_{N-i\frac{N-i-1}{\{\cdots,v,w\}}}} \quad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

其中，${}^{N}v_{p_N}$是E^N中正则多胞形的最后一条轨道的阶数。

公式2

$$^{N}n =^{N} v_{p_N} \cdot \prod_{j=2}^{N-1} {}^{j}e_j$$

其中，${}^{j}e_j$是E^N中正则多胞形的j维胞腔的第j条轨道的基数。

公式3

$$^{N}n_{p_i} = \frac{\prod_{j=2}^{N-1} {}^{j}e_j \cdot^{N-i} e_{N-i\frac{N-i-1}{\{\cdots,v,w\}}}}{^{N-i}e_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

References

陈馨璇，三维欧氏空间中有限旋转群的分类与构造，武汉师范学院学报，(**1984**)。

武同锁，AbstractAlgebraNotes。

Michael Artin，代数，机械工业出版社，(**2009**)。

施开达，马利庄，n维空间有限旋转群理论和正则多胞形，舟山师专学报，(**1996**)。

施开达，马利庄，正则多胞形和N维空间有限旋转群理论的一些新结果，自然科学进展，(**1999**)。

施开达，关于四维空间120胞形和600胞形的图视和数值新结果，浙江海洋学院学报(**2000**)。