旋转群

2011级ACM班
张方魁 陈志鹏

June 6, 2012

Abstract

本文介绍了三维有限旋转群的有关性质，证明了三维有限旋转群的同构群，然后介绍了高维空间中的正则多胞形的表示方法和有限旋转群的基本定理。

一、三维有限旋转群

讨论这个话题之前，让我们先来看看有哪些正多面体。

命题1： 正多面体只能有5种，即用正三角形做面的正四面体、正八面体，正二十面体，以及用正方形做面的正六面体，用正五边形做面的正十二面体。

证明： 设顶点数为V，面数为F，棱数为E

设正多面体的每个面是正n边形，每个顶点有m条棱。棱数E应是面数F与n的积的一半（每两面共用一条棱），即

$$nF = 2E \tag{1}$$

同时，E应是顶点数V与m的积的一半，即

$$mV = 2E \tag{2}$$

由(1)、(2)，得

$$F = \frac{2E}{n}, V = \frac{2E}{m},$$

代入欧拉公式$V + F - E = 2$，有

$$\frac{2E}{m} + \frac{2E}{n} - E = 2$$

整理后，得

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{E}$$

. 由于E是正整数，所以$\frac{1}{E} > 0$。因此

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2} \tag{3}$$

说明m,n不能同时大于3，否则$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\leqslant\frac{1}{2}$，即(3)不成立。

另一方面，由于m和n的意义（正多面体一个顶点处的棱数与多边形的边数）知，$m\geqslant 3$且$n\geqslant 3$。因此m和n至少有一个等于3

当$m=3$时，因为$\frac{1}{n}>\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$，$n$又是正整数，所以n只能是3，4，5

同理$n=3$，m也只能是3，4，5

所以有以下几种情况：

n	m	类型
3	3	正四面体
4	3	正六面体
3	4	正八面体
5	3	正十二面体
3	5	正二十面体

由于上述5种多面体确实可以用几何方法作出，而不可能有其他种类的正多面体。

所以正多面体只有5种。

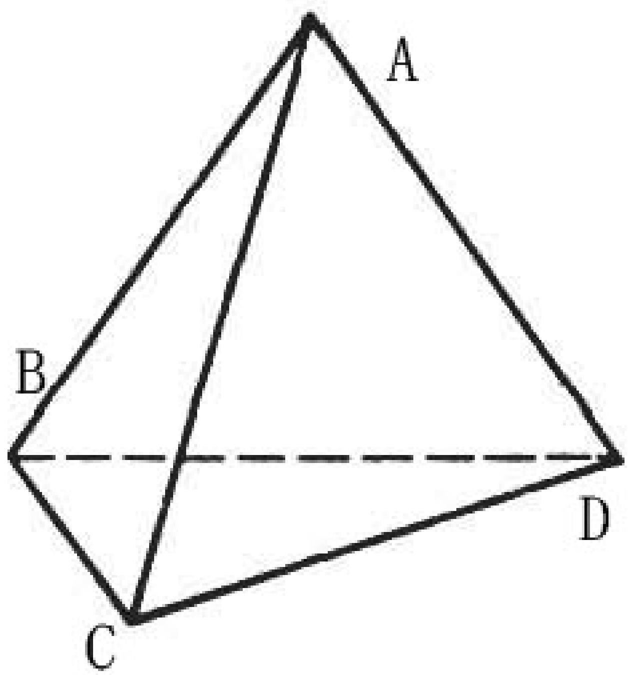

图 1　正四面体

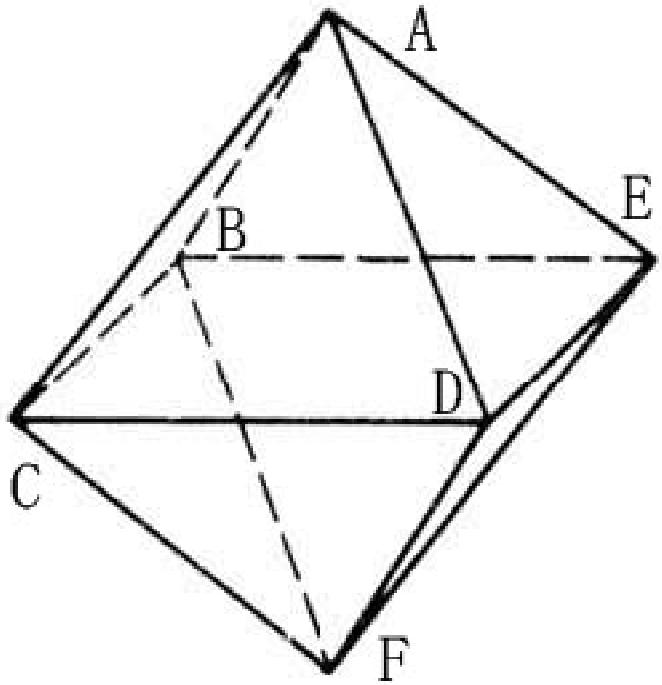

图 2　正八面体

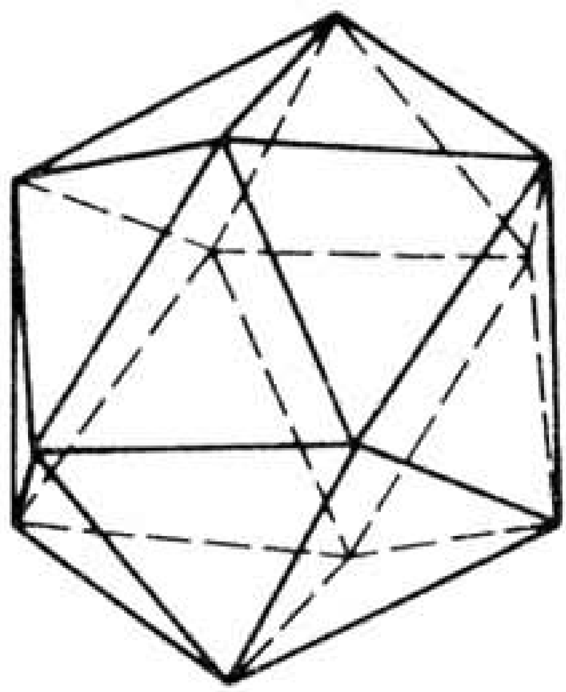

图 3　正二十面体

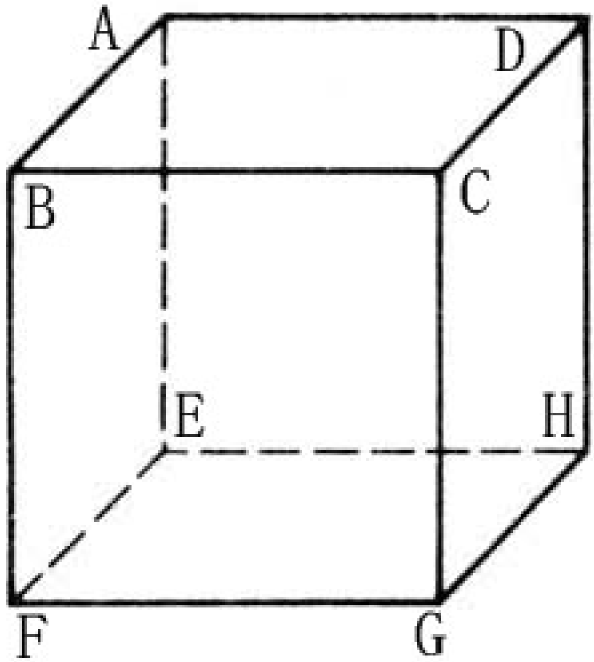

图 4　正六面体

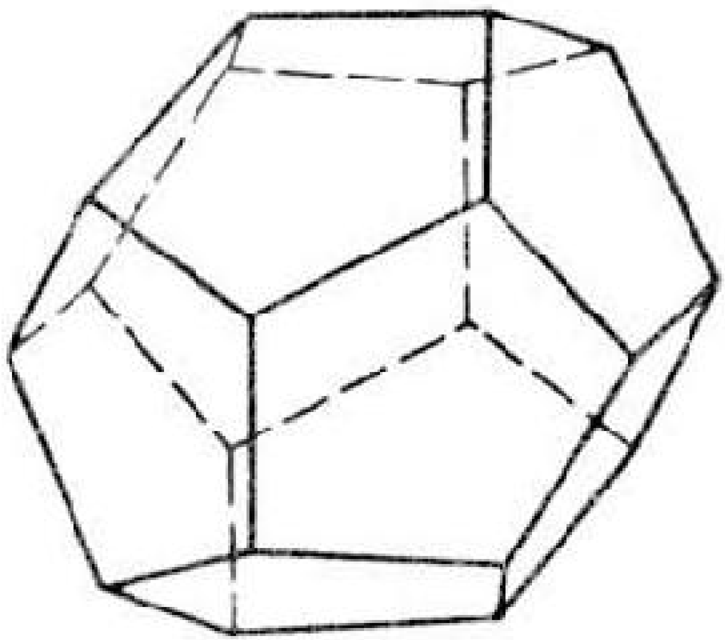
图 5　正十二面体

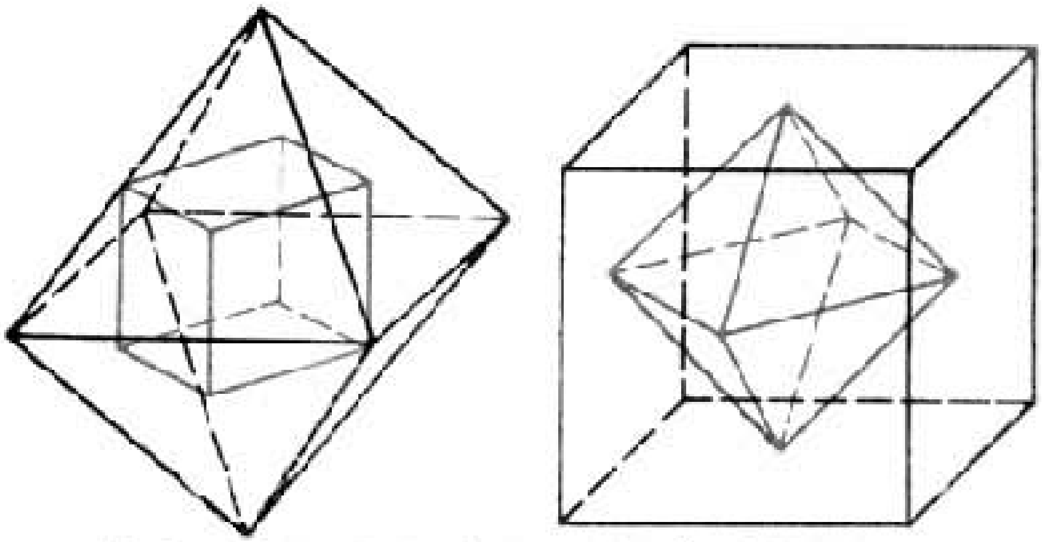

图 6　正六面体对正八面体的对偶图

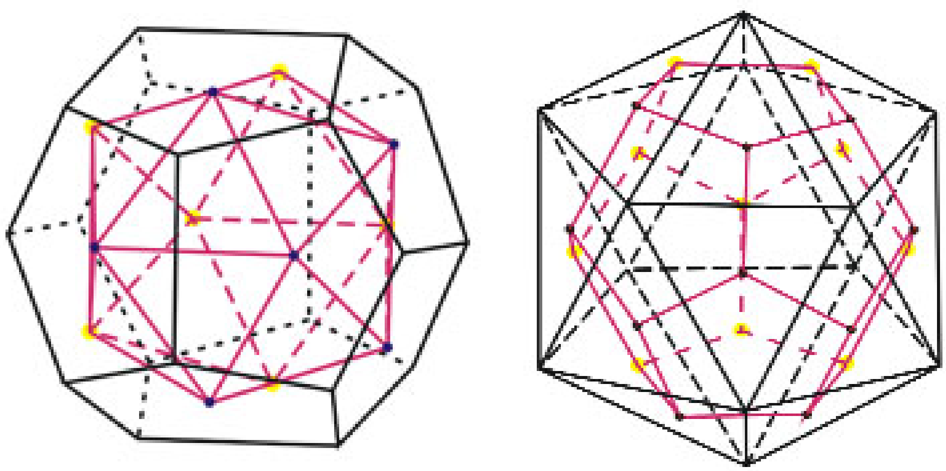

图 7　正十二面体对正二十面体的对偶图

命题2：正四面体群G_4是四次交错群A_4。

证明：正四面体$ABCD$如图1，原点O是它的外接球的球心, 群G_4的所有旋转变换可以分为两类：

(1)分别以$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{OC}$,$\overrightarrow{OD}$为旋转轴，旋转120度角的旋转变换σ_A，σ_B，σ_C，σ_D，于是可得如下9个旋转变换：

$$\sigma_A = (B, C, D), \sigma_B = (A, D, C), \sigma_C = (A, B, D), \sigma_D = (A, C, B)$$

$$\sigma_A^2=(B,D,C),\sigma_B^2=(A,C,D),\sigma_C^2=(A,D,B),\sigma_D^2=(A,B,C)$$
$$\sigma_A^3=\sigma_B^3=\sigma_C^3=\sigma_D^3=(1)$$
(2) 分别以棱的中点连线（有3对棱）$\overrightarrow{P'OP}$,$\overrightarrow{Q'OQ}$,$\overrightarrow{R'OR}$为旋转轴，旋转180度角的旋转变换$\sigma_P,\sigma_Q,\sigma_R$:

$$\sigma_P=(A,B)(C,D),\sigma_Q=(A,C)(B,D),\sigma_R=(A,D)(B,C)$$

故正四两体群G_4有12个旋转变换, 恰是A,B,C,D四元素构成的四次交错群A_4。

命题3：正八面体群G_8（或正六面体群G_6）同构于四次置换群S_4。

证明：正八面体$ABCDEF$如图2，原点O是它外接球的球心。群G_8的所有旋转变换可分成三类：

（1）分别以顶点连线$\overrightarrow{AOF}$,$\overrightarrow{BOD}$,$\overrightarrow{COE}$为旋转轴，旋转90度角的旋转变换σ_A，σ_B，σ_C，于是得如下10个旋转变换：

$$\sigma_A,\sigma_B,\sigma_C,$$
$$\sigma_A^2,\sigma_B^2,\sigma_C^2,$$
$$\sigma_A^3,\sigma_B^3,\sigma_C^3,$$
$$\sigma_A^4=\sigma_B^4=\sigma_C^4=(1)$$

其中

$$\sigma_A=\begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ A & C & D & E & B & F \end{pmatrix}$$

等等。

（2）分别以面的中心连线（有4个对面）$\overrightarrow{P'OP}$,$\overrightarrow{Q'OQ}$,$\overrightarrow{R'OR}$,$\overrightarrow{S'OS}$为旋转轴，旋转120度角的旋转变换$\sigma_P,\sigma_Q,\sigma_R,\sigma_S$,于是得到如下8个旋转变换：

$$\sigma_P,\sigma_Q,\sigma_R,\sigma_S$$

$$\sigma_P^2,\sigma_Q^2,\sigma_R^2,\sigma_S^2,$$

其中，

$$\sigma_P=\begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ B & C & A & E & F & D \end{pmatrix}$$

等等。

（3）分别以棱的中点连线（有6对棱）$\overrightarrow{X'OX}$,$\overrightarrow{Y'OY}$,$\overrightarrow{Z'OZ}$, $\overrightarrow{U'OU}$,$\overrightarrow{V'OV}$,$\overrightarrow{W'OW}$为旋转轴，旋转180度角的旋转变换$\sigma_X,\sigma_Y,\sigma_Z,\sigma_U,\sigma_V,\sigma_W$:

其中，

$$\sigma_X=\begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ E & F & B & A & D & C \end{pmatrix}$$

等等。

故正八面体群G_8由24个旋转变换构成，下面证明G_8 同构于S_4。

首先对正八面体的八个面标号

1:ABC; 2:ACD; 3:ADE; 4:AEB; 5:FBC; 6:FCD; 7:FDE; 8:FEB.

G_8是S_8的子群. 考虑正八面体的如下四个对面组成的集合S：

$A_1 = \{1, 7\}, A_2 = \{2, 8\}, A_3 = \{3, 5\}, A_4 = \{4, 6\}.$

根据旋转群的几何意义，知道G在S上有一个自然的群作用$*$：

$\sigma * A_1 = \{\sigma(1), \sigma(7)\} \in S, \forall \sigma \in G.$

显然此作用是可迁的,即轨道只有一个。由计数公式，对于每个$1 \leqslant i \leqslant 4$有

$$|Stab(A_i)| = \frac{|G|}{|G * A_i|} = \frac{24}{4} = 6.$$

此作用诱导出一个群同态

$$\varphi : G \to T(S) = S_4.$$

由于已经知道$|S_4| = |G| = 24$，为了证明ϕ是群同构映射，只需说明此作用忠实（即ϕ是单射），亦即

$$\bigcap_{x \in S} Stab(x) = \{e\}.$$

事实上，$Stab(A_1)$由以下六个置换组成：

$$(1),$$

$$\sigma_P = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ B & C & A & E & F & D \end{pmatrix} = (2, 4, 5)(3, 8, 6),$$

$$\sigma_P^2 = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ C & A & B & F & D & E \end{pmatrix} = (2, 5, 4)(3, 6, 8),$$

$$\sigma_Z = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ D & F & E & A & C & B \end{pmatrix} = (1, 7)(2, 3)(4, 6)(5, 8),$$

$$\sigma_U = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ B & C & A & E & F & D \end{pmatrix} = (1, 7)(2, 8)(3, 4)(5, 6),$$

$$\sigma_W = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ F & E & D & C & B & A \end{pmatrix} = (1, 7)(2, 6)(3, 5)(4, 8)$$

容易验证$\sigma_P \notin Stab(A_2), \sigma_P^2 \notin Stab(A_2)$。

$Stab(A_i)$ $\{(1)\}$中余下的四个置换每一个都是四个不相交对换的乘积。而S_8中使得$gA_i = A_i, \forall 1 \leqslant i \leqslant 4$ 都成立的这样的置换只有一个，即

$$(1, 7)(2, 8)(3, 5)(4, 6) \notin Stab(A_i).$$

这说明了

$$\bigcap_{A_i \in S} Stab(A_i) = \{(1)\}.$$

从而φ是单射，从而是双射。

推论： 正八面体的每个面的中心恰好形成正六面体的顶点, 而正六面体的每个面的中心恰好形成正八面体的顶点, 故正六面体与正八面体是对偶图形。

正八面体群S_4也是使正六面体对称的变换之集, 使正六面体对称的也只有S_4, 故S_4也是正六面体群。

引理1： 二十面体群是单群。

证明： 我们先来考虑二十面体群的类方程。设F是正二十面体R_{20}的任意一个面，用S表示R_{20}的面的集合(R_{20}的一个面可以用该面上的顶点集表示)。则其旋转群G_{20}对于S有一个自然的群作用。根据几何意义，这个作用还是可迁的。因此有

面数$= |S| = \frac{|G_n|}{|Stab(F)|}$，

命题4： 正十二面体群G_{12}同构于5次交错群A_5。

证明： 如图8，

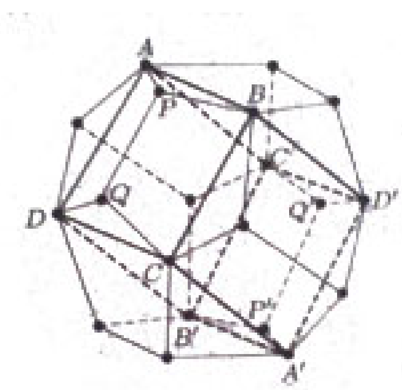

图8 正十二面体

正十二面体有12个面，每个面都是正五边形。设想画出这12个五边形的所有对角线，每个面上有5条，共60条，任取正十二面体的一条边PQ，有两个面以它为邻边，每个面上有一条对角线与该边平行，因此这两条对角线也互相平行。设这两条对角线为AD和BC，连接AB和CD，由于连线也是其他面中的对角线，长度相等，并与原来的两条对角线垂直，于是我们得到了一个由对角线组成的正方形$ABCD$，再考虑与PQ对极的两点P'和Q'连成的边，同样可以得到一个由对角线组成的正方形$A'B'C'D'$，并且这个正方形与先前得到的正方形$ABCD$平行。在这两个正方形的顶点之间再连4条边即AC', BD', CA', DB'，这样就得到一个边长都相

等的六面体，因为在构造此六面体时选的两边PQ和$P'Q'$的中点连线是该正十二面体的旋转角度为π的旋转变换的旋转轴，这推出在这两个正方形之间的四条连线都与这两个正方形垂直，因此得到的六面体是正立方体。容易看出这个正立方体的12条棱分属正十二面体的12个面。

进一步，从60条对角线的每一条出发，用上法都可得到一个正立方体，因此至少有5个这样的立方体（6个正方体有至多有60条互不相同的棱）。我们断言，每条对角线只能属于一个正立方体，因此恰有5个这样的立方体。为说明这点，只需注意同一立方体的任意两边或平行或垂直，而同一个面上的两条不同的对角线既不平行也不垂直即可。

下面考虑正十二面体的旋转群G_{12}，首先，易见G_{12}在顶点集合V上的作用是可迁的。取定一个顶点v，则$|Stab(v)| = 3$，故$G_{12} = |V| \times |Stab(v)| = 20 \times 3 = 60$。考虑$G_{12}$在上述五个正立方体上的作用，则$G_{12}$同态地映到$S_5$的子群，设K是其核，我们断言$|K| = 1$，为证明这点，我们要再次应用属于同一正六面体的棱或平行或垂直的事实，因为G_{12}中有3类旋转变换，其旋转轴分别过正十二面体的对极点连线、对面心点连线和对边中点连线。

第一种旋转把由连接极点的3条边互变，而这3条边既不平行，也不垂直，因此分属不同的正六面体，故这类旋转不属于K。

第二种旋转把与旋转轴相交的一个正五边形的5条边互变，这5条边既不平行，也不垂直，因此分属不同的正六面体，故这类旋转也不属于K。

第三种旋转会把正五边形面上的某条对角线变到与它既不平行也不垂直的另一对角线，因此这类旋转也不属于K。

至此我们已经证明了$K = \{1\}$，于是G_12同构于S_5的60阶子群，由于其指标是2，故必是正规的，由于S_5只有一个60阶的正规子群，即A_5，这样就得到了$G_{12} \cong A_5$。

推论： 正十二面体的每个面的中心恰好形成正二十面体的顶点, 而正二十面体的每个面的中心恰好形成正十二面体的顶点, 故正十二面体与正二十面体是对偶图形。正二十面体群A_5也是使正十二面体对称的变换之集, 使正十二面体对称的也只有A_5, 故A_5也是正二十面体群。

二、n维空间有限旋转群理论

正则多胞形即正多边形和正多面体的高维度推广，包含正多边形和正多面体。对于四维及四维以上空间的正则多胞形的结构情况，自1850年以来也获得了不少进展，使人们对n维空间正则多胞形有了一个基本的了解。下面将简单介绍n维空间有限旋转群$SO(n)$和n维空间正则多胞形。

1 N维空间有限旋转群的极点数定理

正则多胞形的符号表示方法为施莱夫利符号，形式为$p, q, r, \cdots$. 施莱夫利符号是递归描述的。正p边形表示为p，例如，3表示正三角形，4表示正方形。一个正多面体的面为p边形，每个点与q个面相邻，表示为p, q，例如，立方体表示为$4, 3$。一个四维正则多胞形由三维正多面体围成，这些正多面体称为胞腔，四维正则多胞形的三维胞腔为p, q，每个点与r个胞腔相邻，表示为p, q, r。重复上述过程，可以表

示任意n维正则多胞形，n维正则多胞形包含低维正则多胞形，这些低维正则多胞形称为胞腔。

首光设S^N是单位超球面, 其中心在原点, 同时设原点O是有限旋转群的所有元素的共同旋转心, 即G^N作用在S^N上变成S^N的变换群, (为避免混淆, 有时候我们将表示维数的N从右上角移到左上角), ^NG 中的一个非幺元素ρ 必有一条旋转轴, 而轴与单位超球面之间的交点是^NS上的两个极点, 这两点在ρ下保持不变.

设p是单位超球面上的一点, ^Nv_p是轨道阶数, 同时又设^Nn_p是p的稳定群的阶数,^Nn是有限旋转群^NG的阶数,根据:

定理1 设群^NG是集合^NS的变换群,^NT是集合^NS的子集, 记^NT的稳定群为$Stab(^NT)$, 记p的轨道为$Orb(p)$. 这样, 我们有

$$^Nv_p = [^NG : Stab(^NT)].$$

其次根据:

定理2 (L.Lagrange 定理) 若^NG是一个有限群, 而^NH是^NG的子群, 这样

$$|^NG| = [^NG :^N H]|^NH|,$$

我们得到

$$^Nn =^N v_p \cdot^N n_p.$$

设单位超球面^NS外接于一个正则多胞形，即这个正则多胞形的所有顶点均匀分布在单位超球面上。同时，我们记正则多胞形的顶点集合为$Orb(p_1)$；记正则多胞形所有棱的中点投影在单位超球面上的集合为$Orb(p_2)$；记正则多胞形的所有面的中心投影在单位超球面上集合为$Orb(p_3)$；等等。由定理1，我们可知轨道阶数为：

$$^Nv_{p_i} = [^NG : Stab(p_i)].$$

运用有限旋转群理论，可得到如下的：

定理3 (极点数定理) N维空间E^N中正则多胞形的有限旋转群的阶数为$^Nn = |^NG|$，其三维胞腔数为$\prod_{k=4}^{N} {}^kv_{p_k}$, 轨道阶数为$^Nv_{p_i}$,轨道中一点的稳定化子阶数为$^Nn_{p_i}$, 等等，以上各量之间存在以下关系：

$$2(^Nn - \prod_{k=4}^{N} {}^kv_{p_k}) = \prod_{i=1}^{N} {}^Nv_{p_i} \cdot^N n_{p_i} \left[1 - \frac{^2e_i}{p \cdot^{3-i} e_{3-i}\frac{2-i}{\{p,q\}}}\right]$$

其中，符号“$^{N-1}e_i$”表示E^N中正则多胞形的$N-1$维胞腔的第i条轨道的阶数。符号“$^{N-i}e_{N-i}\frac{N-i-1}{\{\cdots,v,w\}}$”表示$E^N$中正则多胞形的$N-i$维胞腔的第$N-i$条轨道的阶数。符号“$\frac{N-i-1}{}$”表示从字母$w$开始的字母数，而其方向为逆的。

在证明该定理之前，先做以下定义：

定义1
1) ${}^{1}e_{1\frac{0}{\{\cdots\}}}=2, {}^{0}e_{0\frac{-1}{\{\cdots\}}}=1;$
2) ${}^{1}e_{1}={}^{1}e_{2}=0;$
3) ${}^{2}e_{3}={}^{3}e_{4}={}^{4}e_{5}=\cdots=1.$

定义2 根据上面定义，我们再定义${}^{N}v_{p_v}\cdot{}^{N-1}e_i$是“全基数”(即轨道的每个点被许多点重合)，它取${}^{n-i}e_{N-i\frac{N-i-1}{\{\cdots,v,w\}}}$为$E^N$中正则多胞形的第$i$条轨道的一点的重合数，我们也可以用符号${}^{N}m_{p_i}$去表示它。

定理3的证明 因为E^N中的每一个三维正则多胞形(胞腔)有一个幺旋转，而组成E^N中正则多胞形“表面”的${}^{N}v_{p_i}$个$N-1$维胞腔将有$\prod\limits_{k=4}^{N}{}^{k}v_{p_k}$个三维胞腔，所以应有$\prod\limits_{k=4}^{N}{}^{k}v_{p_k}$个幺旋转。在${}^{N}G$中，我们除去$\prod\limits_{k=4}^{N}{}^{k}v_{p_k}$个幺旋转，那么剩下的元素(即${}^{N}G\setminus\prod\limits_{k=4}^{N}{}^{k}v_{p_k}\cdot(e)$，这里$e$是幺元) 都是非幺旋转，而$E^N$中每个非幺旋转有两个极点，故总共应有$2({}^{N}n-\prod\limits_{k=4}^{N}{}^{k}v_{p_k})$个极点。

另一方面，取点p_i为极点的非幺旋转的集合为$Stab(p_i)\setminus{}^{N}\alpha_{p_i}(e)$, 这里，${}^{N}\alpha_{p_i}$是$Stab(p_i)$中的幺元数，故取点$p_i$为极点的重复次数为$({}^{N}n_{p_i}-{}^{N}\alpha_{p_i})$，又因为$Orb(p_i)$中的点均为极点，这些点的重复次数均为$({}^{N}n_{p_i}-{}^{N}\alpha_{p_i})$，故

$$2({}^{N}n-\prod_{k=4}^{N}{}^{k}v_{p_k})=\sum_{i=1}^{N}{}^{N}v_{p_i}({}^{N}n_{p_i}-{}^{N}\alpha_{p_i}),$$

由幺元数公式可得

$$2({}^{N}n-\prod_{k=4}^{N}{}^{k}v_{p_k})=\prod_{i=1}^{N}{}^{N}v_{p_i}\cdot{}^{N}n_{p_i}\left[1-\frac{{}^{2}e_i}{p\cdot{}^{3-i}e_{3-i\frac{2-i}{\{p,q\}}}}\right]$$

2 部分公式的介绍
这一部分将介绍n维空间旋转群理论中部分公式，略去证明。

公式1 (轨道阶数公式)

$${}^{N}v_{p_i}=\frac{{}^{N}v_{p_N}\cdot{}^{N-i}e_i}{{}^{N-i}e_{N-i\frac{N-i-1}{\{\cdots,v,w\}}}}\quad(i=1,2,\ldots,N)$$

其中，${}^N v_{p_N}$是E^N中正则多胞形的最后一条轨道的阶数。

公式2

$$ {}^N n = {}^N v_{p_N} \cdot \prod_{j=2}^{N-1} {}^j e_j $$

其中，${}^j e_j$是E^N中正则多胞形的j维胞腔的第j条轨道的基数。

公式3

$$ {}^N n_{p_i} = \frac{\prod_{j=2}^{N-1} {}^j e_j \cdot {}^{N-i} e_{N-i \frac{N-i-1}{\{\cdots, v, w\}}}}{{}^{N-i} e_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, N) $$

证明 将公式1和公式2带入${}^N n = {}^N n_{p_i} \cdot {}^N v_{p_i}$即得。

公式4 （幺元数公式）当$i = 1, 2, 3,$

$$ {}^N \alpha_{p_i} = \frac{{}^N n_{p_i} \cdot {}^2 e_i}{p \cdot {}^{3-i} e_{3-i \frac{2-i}{\{p,q\}}}}; $$

当$i = 4, 5, \ldots, N,$

$$ {}^{\alpha}_{p_i} = {}^N n_{p_i}. $$

References

陈馨璇，三维欧氏空间中有限旋转群的分类与构造，武汉师范学院学报，(**1984**)。

武同锁，AbstractAlgebraNotes。

Michael Artin，代数，机械工业出版社，(**2009**)。

施开达，马利庄，n维空间有限旋转群理论和正则多胞形，舟山师专学报，(**1996**)。

施开达，马利庄，正则多胞形和N维空间有限旋转群理论的一些新结果，自然科学进展，(**1999**)。

施开达，关于四维空间120胞形和600胞形的图视和数值新结果，浙江海洋学院学报(**2000**)。