旋转群及洛伦兹群的表示

（导　论）

M. 卡梅利　S. 马林　著

许　槑　译

栾德怀　校

科　学　出　版　社

1 9 7 9

内 容 简 介

近年来，群论已成为物理学中重要的数学工具。特别是，旋转群及洛伦兹群已广泛应用于量子力学及量子场论。本书着重讲述这两种群的表示。全书共分十一章：群论的基本概念；表示论的基本概念；三维纯旋转群；特殊酉群 SU_2；群 O_3 及群 SU_2 上的不变积分；群 O_3 及群 SU_2 的表示；不可约表示的矩阵元；无穷小转动的微分算子；洛伦兹群；无穷小的处理方法；洛伦兹群的旋量表示。一个附录：洛伦兹群的旋量表示。

本书可供高等院校数学系和物理系师生和研究生参考。

M. Carmeli, S. Malin

REPRESENTATIONS OF THE ROTATION AND LORENTZ GROUPS

An Introduction

Marcel Dekker, 1976

旋转群及洛伦兹群的表示

（导 论）

M. 卡梅利　S. 马林 著

许 霖 译

栾德怀 校

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1979年 7 月第 一 版　　开本：787×1092 1/32

1979年 7 月第一次印刷　　印张：2 3/8

印数：0001—18,100　　字数：48,000

统一书号：13031·1057

本社书号：1486·13—3

定价： 0.27 元

序　　言

近年来，群论已成为物理学中最有用的数学理论之一.特别是，旋转群及洛伦兹群已被广泛应用于量子力学及量子场论．虽然，已有很多好书叙述了这两种群的表示理论，不过这些书只适合于大学毕业以上水平和研究工作者使用.

本书的基础是作者之一卡梅利（M. Carmeli）的两次讲稿.一次是在 1972—1973 年对尼格夫的本格里翁大学数学及物理学毕业班学生做的一学期的讲课.同样的课程在 1973 年夏季又对俄亥俄州的固态研究实验室、空间研究实验室和赖特-帕特森空军基地的理论固态研究组讲了一次． 后来由马林（S. Malin）补写了附录，使读者能获得洛伦兹群的旋量表示这一重要内容的细节． 众所周知，这些表示已最广泛地应用于量子力学、量子场论及广义相对论.

本书可用作数学及其他自然科学的大学教材．对应用这一理论但又不想深入了解表示理论的大学毕业生和研究工作者，本书也可起辅助作用． 虽然，从数学观点来说，这本小册子的叙述是准确的，但它的处理仍是很基础的． 通常一个学期就可学完． 本书共有十一章和一个附录． 包括了旋转群及洛伦兹群的所有有限维表示，但没有涉及无限维表示，因为无限维表示现在刚开始用于基本粒子物理学理论的图象中.

第一章是群论的简单复习，包括一些基本概念，例如群、子群、正规子群、商群、同构及同态等．第二章探讨了有限维表示理论的基本概念． 第三章引进了旋转群，用大家熟悉的

欧拉角来描述纯旋转．第四章引进了群 SU_2，并指出了它与纯旋转群的关系．第五章叙述了在旋转群及群 SU_2 上不变积分的重要概念．第六、七两章广泛讨论了旋转群的表示，并推导了威格纳（Wigner）矩阵元素 D^l_{mn}．第八章结束了对旋转群的讨论并求出了角动量算子．

一般教科书上对旋转群的表示，是用欧拉角作参量来表示的，而在本书中则用另外一些角来定义旋转的，就是用指定方向的旋转角和在旋转方向上的两个球面角来定义的．

洛伦兹群的讨论从第九章开始，这一章讨论了正时洛伦兹变换，对洛伦兹群的有限维表示做了初步探讨．然后便叙述了旋量表示．最后的附录对洛伦兹群的旋量表示作了较为详细的讨论．

最后，我们没有为本书中所讨论的问题开列全部重要的原始文献．为了弥补这一缺陷，我们介绍下列七册书，供读者参考：

(1) B. L. van der Waerden, *Modern Algebra*, Fredric Ungar Publishing Co., New York, 1953.

(2) L. S. Pontrjagin, *Topological Groups*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1946.

(3) E. P Wigner, *Group Theory and its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra*, Academic Press, New York, 1959.

(4) M. A. Naimark, *Linear Representations of the Lorentz Group*, Pergamon Press, New York, 1964.

(5) I. M. Gelfand, M. L Graev, and N. Y Vilenkin, *Generalized Functions*, vol. 5: *Integral Geometry and Representations Theory*, Academic Press, New York, 1966.

(6) I. M. Gelfand, R. A. Minlos, and Z. Ya. Shapiro, *Representations of the Rotation and Lorentz Groups and their Application*, Pergamon Press, New York, 1963.

(7) W. Rühl, *The Lorentz Group and Harmonic Analysis*, W. A. Benjamin, Inc., New York, 1970.

M. 卡梅利

S. 马　林

目　　录

1. 群论的基本概念

对群论的叙述，许多教科书上都有，如 Pontrjagin[1]，van der Waerden[2] 及 Wigner[3] 的书. 本章只对群论的基本概念做扼要的叙述.

1.1 群及子群

一个集合G的诸元素，如果满足下列四个条件*，则该集合称为群：

(1) 在G中存在一种运算，使G中任意两个元素 a, b，均有G中的第三个元素 c 与之相对应. 这种运算叫做乘法，而元素 c 则称为 a 和 b 的积，记为 $c = ab$；

(2) 乘法的结合律成立，即，若 a，b 及 c 都是G的元素，则 $(ab)c = a(bc)$；

(3) G中包含一个右单位元素(或称右恒等元素，右么元素)，这就是说，存在一个元素 e，对于G的任何一个元素 a，都有 $ae = a$；以及

(4) 对于G的每一个元素 a，必有一个右逆元素 a^{-1}，使得 $aa^{-1} = e$.

若群G的元素的个数是有限的，则称G为有限群，而群G所含元素的个数则称为该群的阶. 有无穷多个元素的群称为无限群. 若G的任意两个元素 a 和 b 是可交换的，即 $ab = ba$，则该群称为阿贝耳群(或交换群). 在阿贝耳群中，乘法

* 原书称公理 (*axiom*)，我们一般称条件. ——译者注

记法 ab 用加法记法 $a+b$ 代替，这时，群的运算称为*加法*，单位元素称为*零*，用 0 表示，a 的逆元素称为*负 a*，用 $-a$ 表示.

由于群的诸元素之积服从结合律，我们可以将 $(ab)c=a(bc)$ 简单地写为 abc. 这种写法也适用于三个以上元素的积.容易证明：一个右单位元素同时也是一个左单位元素，即对G的任意元素 a，$ea=a$，a 的右逆元素 a^{-1} 也是它的左逆元素，即 $a^{-1}a=e$. 因此，a^{-1} 的逆元素便是 a. 由此可见，单位元素和逆元素都是唯一的.因此，我们便可以把代数学的记法用于群，如对于任意自然数 m，有 $a^{m+1}=a^m a$，$a^1=a$，以及 $a^{-m}=(a^{-1})^m$，$a^0=e$ 等.若 p 及 q 为二整数，则有 $a^p a^q=a^{p+q}$ 及 $(a^p)^q=a^{pq}$.

设H是群G的一些元素的集合，若G的运算法则也适用于集合H，则H也成群，我们称H为G的*子群*. 群G的子集合H作为G的一个子群的必要且充分的条件是：若H包含两个元素 a 及 b，它必需也包含元素 ab^{-1}.

1.2 正规子群及商群

设G为一个群，H为G的一个子群，a 及 b 为G的两个元素，若 ab^{-1} 是H的一个元素，则称 a 和 b 为*等价的*[4]，记为 $a\sim b$. 这时，可以将群G按H分解成等价元素的若干组，每一组称为关于G的H的*右陪集*（或右旁系）. 由此可见，若A是H的右陪集，a 是A的一个元素，则 $A=\mathrm{H}a$[5]. 其次，形式为 Hb 的每个子集合都是一个右陪集而子群H本身也是陪集之一. 我们也可以引进H的*左陪集*（或左旁系），记为形式 aH. 它们是从下列等价关系得来的：若 $a^{-1}b$ 属于 H，则 $a\sim b$.

设N是群G的一个子群，若对于N的每一个元素 n 和G

的每一个元素 a，元素 $a^{-1}na$ 属于N，则称N为G的**正规子群**或**不变子群**。由此可推知，子群N的右陪集和左陪集互相重合的必要且充分的条件是N为一个正规子群[6]。

若N是群G的一个正规子群，A和B是N的两个陪集，$A=Na$，$B=Nb$，则 AB 也是N的陪集。这样定义的陪集的乘法适合上节所述群的条件，由群G的一个正规子群N的一切陪集所作成的群称为G对于正规子群H的**商群**，记为G/N。

1.3 同构及同态

若群G到群 G′ 的一个映射 f 是一一对应的，且保持乘法运算，称 f 为一个**同构映射**。这时，G与G′称为是**同构的**。同构映射 f 的逆映射 f^{-1} 本身是一同构映射。一个群到它自身的一个同构映射称为**自同构映射**。一个群的所有自同构映射的集合形成一个群。

若群G映入另一群G′的映射 f 保持乘法运算，这映射称为一个**同态映射**。在同态映射下，G中所有映为G′的单位元素的元素的集合N称为同态的**核**。若核与G的单位元素重合，则同态为一同构映射。由此得到：N是G的一个正规子群，且G′同构于G/N。G′与G/N之间的同构被称为**自然同构映射**。由G的每一个元素 a 到 G/N 的含有 a 的元素 $f(a)=A$ 之间的对应，定义了一个群G到G/N上的映射 f，这个映射是一个同态映射，称为一个群到其商群上的**自然同态映射**。若 f 是群G到G′的一个同态映射，H是G的一（正规）子群，则 f(H) 是 G′ 的一（正规）子群。若 f 是群G到G′的一个同态映射，g 是 G′ 到 G″ 的一个同态映射，则映射 gf 是G到G″的一个同态映射。

最后，我们注意到，若 f 是群G到群 G′ 的一部分元素上

的一个同态映射，则 G′ 中所有那些是G中元素的象的元素之集合，形成G′的一个子群。其次，在同态 f 下，若 $f^{-1}(H')$ 是G中那些映为 $H'\subset G'$ 的元素的集合，且若 H′ 是群 G′ 的(正规)子群，则 $f^{-1}(H')$ 也是群G的(正规)子群.

注释及参考文献

[1] 本书序言中介绍的第(2)册书.
[2] 本书序言中介绍的第(1)册书.
[3] 本书序言中介绍的第(3)册书.
[4] 在一个集合M中，若其中的任意两个元素是等价的 $a\sim b$，或不等价的 a 不$\sim b$，则在该集合上建立起一个**等价关系**。等价关系必需同时满足: 1)反射律: $a\sim a$; 2)对称的: 若 $a\sim b$，则 $b\sim a$; 及3)传递的: 若 $a\sim b$ 及 $b\sim c$，则 $a\sim c$. M 中的一个等价关系将 M 分为不相交的若干组等价元素.
[5] 若 A 及 B 是群G的两个子集合，我们便用 AB 表示所有形状为 ab 的一切元素的子集合，这里 $a\in A$，$b\in B$. 子集合 A^{-1} 表示由一切元素 a^{-1} 所组成的子集合，这里 $a\in A$. 子集合 A^{m+1} 定义为 $A^{m+1}=A^mA$，这里 $A'=A$; 对于自然数 m，子集合 A^{-m} 定义为 $A^{-m}=(A^{-1})^m$，子集合 A^0 是一个仅含单位元素的集合.
[6] 每一个群至少含有两个正规子群，仅含单位元素的子群，和与群本身重合的子群.若一个群除去上述两个子群外，没有其他正规子群，则称为**单群**.

2. 表示论的基本概念

在本章中，我们复习一下有限维表示论的基本概念. 这一理论可详见下列各书: Wigner[1], Naimark[2], Gelfand, Graev 和 Vilenkin[3] 及其他[4][5].

2.1 线性算子

设 R 为一线性空间，x 是 R 中的一个向量. 若对于 R 中任意一个向量 x，R 中有一个相应的向量 $y=T(x)$，则函数 T 称为 R 中的一个算子. 若对于 R 中的任意两个向量 x，y 和任意复数 α，有 $T(x+y)=T(x)+T(y)$ 和 $T(\alpha x)=$

$\alpha T(x)$，则 T 被称为线性算子．在空间 R 中，两算子 A 和 B 的加法被定义为：对于 R 中一切向量 x，$(A+B)x=Ax+Bx$．同样，在空间 R 中，数 α 与算子 A 的数乘被定义为：$(\alpha A)x=\alpha(Ax)$，算子 A 与 B 的乘积被定义为：$(AB)x=A(Bx)$．其次，若 A 及 B 是 R 中的两个线性算子，则 $A+B$，αA 及 AB 也是 R 中的线性算子．

在有限维空间 R 中引进一个基 $e_1,\cdots,e_n$，则此空间中的线性算子可以用矩阵表示．若 A 为空间 R 中的一个线性算子，则 Ae_k 可以写成 $e_1,\cdots,e_n$ 的一个线性组合，即 $Ae_k=\sum_{j=1}^{n}A_{jk}e_j$，$k=1,\cdots,n$．$A_{jk}$ 是算子 A 对于基 $e_1,\cdots,e_n$ 的矩阵的矩阵元．可以证明算子 A 完全由它的矩阵 A_{ij} 来决定．而且，加法运算，数乘，以及算子与算子相乘均对应于这些算子对于一个固定基的矩阵的相应运算．

2.2 群的有限维表示

设G为一群，g 为G的任意一个元素，群G的每一元素 g 与一有限维空间 R 中一个线性算子 D_g 对应 $g\to D_g$ 若 (1) $D_{g_1}D_{g_2}=D_{g_1g_2}$ 及 (2) D_e 是 R 中的单位元素，而 e 是G的单位元素，则这个对应称做一个表示．空间 R 称为表示的空间，其维数称为表示的维数．

若在维数相同的 R 和 R' 两个空间中选取这样的基，使得算子 D_g 及 $D_{g'}$ 的矩阵恒等，则群G在此二空间 R 及 R' 的两个有限维表示 $g\to D_g$ 及 $g\to D'_g$ 称为是等价的．若对于空间 R 的子空间 S 的每一个向量 x，对于群G的所有元素 g，D_gx 也是 S 中的向量，则 S 称对于表示 $g\to D_g$ 是不变子空间．若对于表示 $g\to D_g$，除去对于零子空间和整个空间的平凡情形外，在空间 R 中没有不变子空间，则表示称为不可约

表示．若 D_g 是群G上的一个连续算子函数[6]，则群G的表示 $g\to D_g$ 称为是连续的．本书中我们只讨论连续表示．

2.3 酉表示

若对于线性空间中每两个向量 x 及 y，我们能够定义一个满足下列四个条件的函数，该函数叫做 x 及 y 的标积，记为 (x,y)，而该线性空间称为欧几里得空间(简称欧氏空间)，

(1) $(x,x)\geqslant 0$，$(x,x)=0$ 当且仅当 $x=0$；

(2) $(y,x)=\overline{(x,y)}$；

(3) $(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$；

(4) $(x_1+x_2,y)=(x_1,y)+(x_2,y)$.

能够证明：对于每一个有限维空间，都能定义一个标积．

在有限维欧氏空间 R 中的一个算子 D，若对于空间 R 中的所有 x，y 向量，它能保持标积不变，即 $(Dx,Dy)=(x,y)$，则该算子称为酉算子．若一个表示 $g\to D_g$ 的一切算子 D_g 都是酉算子，则该表示称为酉表示．

下面六章的内容是：求三维纯旋转群的不可约表示，该群记为 O_3．我们用的是韦耳方法，这是利用二阶特殊酉群，SU_2 群，到旋转群 O_3 的同态映射的方法．用两种不同的参量化来讨论这些表示：

(1) 在指定方向的旋转角和旋转方向的球面角；及

(2) 常用的欧拉角．

注释及参考文献

[1] 本书序言中介绍的第(3)册书．

[2] 本书序言中介绍的第(4)册书．

[3] 本书序言中介绍的第(5)册书．

[4] I. M. Gelfand 和 Z. Ya. Shapiro, *Usp. Mat. Nauk* **7**, 3 (1952); *Amer. Math. Soc. Transl. Ser.* 2., **2**, 207 (1956).

[5] 本书序言中介绍的第(6)册书．

[6] 若对于固定基的 D_g 的矩阵元，对G是连续函数，则此算子函数 D_g 被称

为在群G上是连续的．这一 D_g 的连续的定义与基的选取无关，因为对于另一基的矩阵元，是原来基的矩阵元的常系数的线性组合．

3. 三维纯旋转群

若变量 x_1，x_2 及 x_3 的一个线性变换 g，使形式 $x_1^2+x_2^2+x_3^2$ 保持不变，则称此变换为一个三维旋转． 所有这种线性变换 g 的集合构成一个连续群，该连续群与所有实正交三维矩阵[1]的集合是同构的，我们称之为三维旋转群．容易证明：任意一个正交矩阵的行列式等于+1，或−1．行列式为+1的变换描述纯旋转，行列式为−1的变换则描述旋转-反射．所有纯旋转的集合构成一个群，它是三维旋转群的子群，称为纯旋转群． 我们将讨论三维纯旋转群． 该群以 O_3^+[2] 表之．

3.1 欧拉角

设 g 为群 O_3 的一个元素，即 g 是一个三维正交矩阵，其行列式为+1． 众所周知，我们可以用一组三个参量来表示这样的元素．大家所熟悉的欧拉角便是这类参量的一个例子，欧拉角是由三个连续的旋转角来定义的．它们描述了从一个给定的笛卡儿坐标系经过一特定序列的三个连续旋转达到另一个笛卡儿坐标系的变换．

图1是这个旋转序列的示意图． 首先，使原来坐标系的 $\vec{x}$ 轴绕 z 轴顺时针方向转动角 ϕ_1[3]． 形成的新坐标系用 $\vec{\xi}$ 表之，故有

$$\vec{\xi}=g(\phi_1)\vec{x},$$

其中正交矩阵 $g(\phi_1)$ 为

$$g(\phi_1)=\begin{bmatrix}\cos\phi_1 & -\sin\phi_1 & 0\\ \sin\phi_1 & \cos\phi_1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}. \qquad (3.1)$$

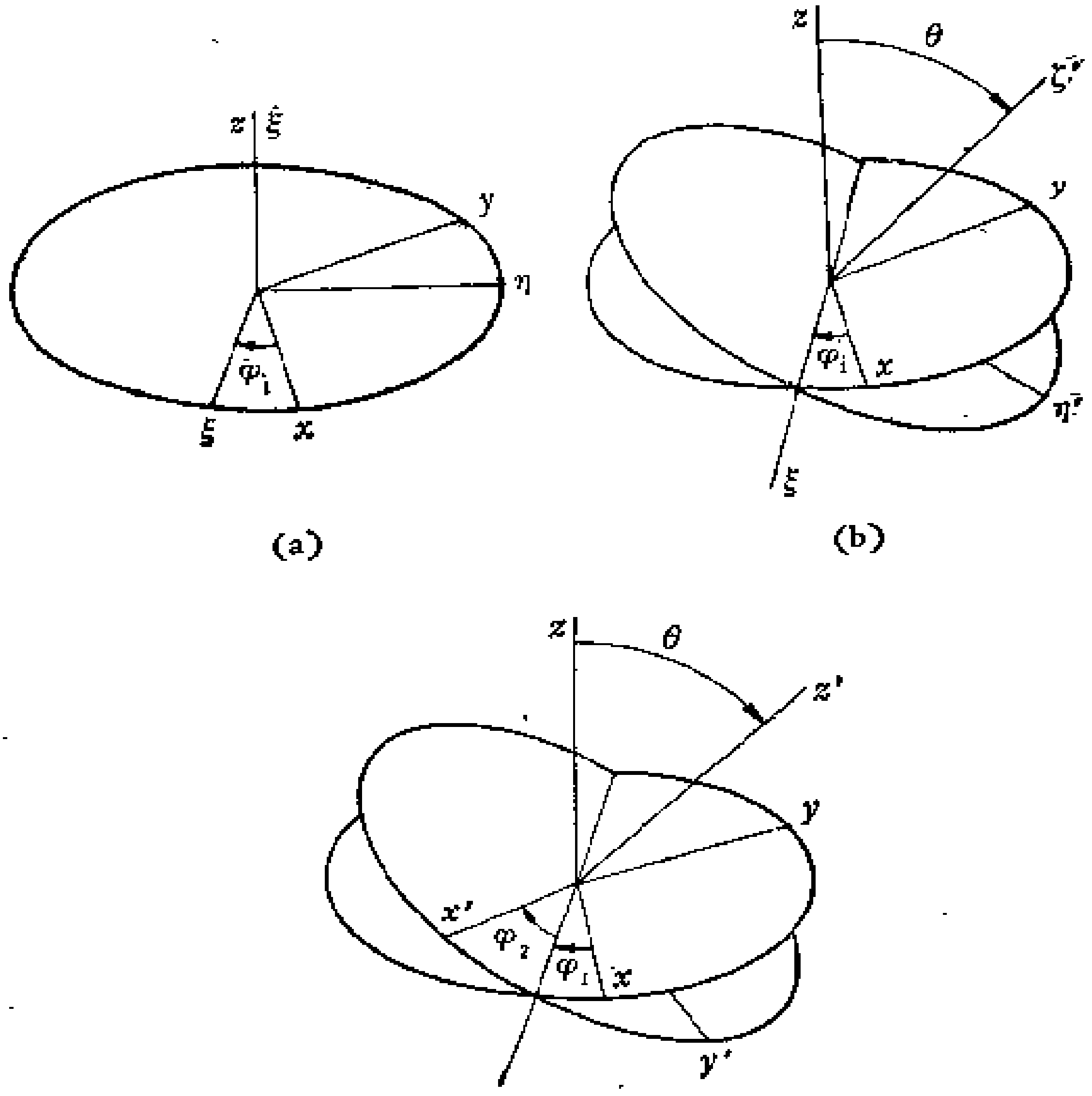

图 1　三个旋转定义了欧拉角

第二步,过渡轴 $\vec{\xi}$ 绕其 ξ 轴顺时针方向转动 θ 角,达到另一组过渡坐标系,用 $\vec{\xi}'$表之,从而有

$$\vec{\xi}' = g(\theta)\vec{\xi},$$

其中正交矩阵 $g(\theta)$ 为

$$g(\theta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

ξ' 轴叫做结点线. 最后,坐标系 $\vec{\xi}'$ 绕 ζ' 轴顺时针方向转动 ϕ_2

角，达到所期望的坐标系 $\vec{x}'$：

$$\vec{x}' = g(\phi_2)\vec{\xi}',$$

其中正交矩阵 $g(\phi_2)$ 为

$$g(\phi_2) = \begin{bmatrix} \cos\phi_2 & -\sin\phi_2 & 0 \\ \sin\phi_2 & \cos\phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

由此得，全变换

$$\vec{x}' = g\vec{x}$$

的矩阵 g 应是连续三次变换的矩阵之积，故从 (3.1)—(3.3) 得 $g = g(\phi_2)g(\theta)g(\phi_1)$：

$$g = \begin{bmatrix} \cos\phi_2\cos\phi_1 - \cos\theta\sin\phi_1\sin\phi_2 & -\cos\phi_2\sin\phi_1 - \cos\theta\cos\phi_1\sin\phi_2 & \sin\phi_2\sin\theta \\ \sin\phi_2\cos\phi_1 + \cos\theta\sin\phi_1\cos\phi_2 & -\sin\phi_2\sin\phi_1 + \cos\theta\cos\phi_1\cos\phi_2 & -\cos\phi_2\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi_1 & \sin\theta\cos\phi_1 & \cos\theta \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

角 ϕ_1，θ，ϕ_2 是三个独立参量，完全地决定了旋转 g，它们被称为欧拉角。从上述定义可见，三个角的区间分别为：$0 \leqslant \phi_1 \leqslant 2\pi$，$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ 及 $0 \leqslant \phi_2 \leqslant 2\pi$。

注释及参考文献

[1] 若 $g'g = 1$，则矩阵 g 被称为正交矩阵，这里 g' 是矩阵 g 的转置矩阵.

[2] 详情参见本书序言中介绍的第 (3) 册书.

[3] 我们采用下列记法：$\vec{x} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$，$\vec{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$，$\vec{\xi}' = (\xi', \eta', \zeta')$，及 $\vec{x}' = (x', y', z') = (x_1', x_2', x_3')$.

4. 特殊酉群 SU_2

旋转也可以由行列式为 $+1$ 的二阶酉矩阵来表示。所有

这种矩阵的集合组成一个群，一般用 SU_2 表之．群 O_3 与群 SU_2 之间关系的建立，如下所述[1]-[4]．

4.1 群 O_3 与群 SU_2 之间的同态

令 x_l 及 x'_k ($k, l = 1, 2, 3$) 为由下列变换

$$x'_k = g_{kl}x_l$$

联系起来的两个笛卡儿标架的坐标，其中 g_{kl} 是矩阵 $g \in O_3$ 的矩阵元．对于每一组坐标值 x_k，伴随一个由下式定义的 2×2 厄密矩阵 P

$$P = x_k\sigma^k,$$

其中 σ^k 是大家熟悉的泡利自旋矩阵，

$$\sigma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma^2 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \sigma^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

用矩阵 P 来表示，坐标应按下式变换：

$$P' = uPu^+,$$

其中 u 是群 SU_2 的元素，

$$P' = x'_l\sigma^l,$$

而 u^+ 则是矩阵 u 的厄密共轭矩阵．群 SU_2 的 u 与群 O_3 的 g 之间存在着下列关系：

$$g_{rs} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma^r u\sigma^s u^+), \quad (4.2)$$

$$u = \mp(1 + \sigma^r\sigma^s g_{rs})/2(1 + Trg)^{1/2}, \quad (4.3)$$

其中 Tr 表矩阵的迹．

从 (4.3) 式可见，对于群 O_3 的每一个旋转 g，对应着群 SU_2 的两个矩阵 $\mp u$，反之，从 (4.2) 式可见，对于群 SU_2 的每一个酉矩阵 u，对应有群 O_3 的某一个旋转 g．由此可见，群 O_3 与群 SU_2 同态（参见 § 1.3）．例如，用 (4.3) 式容易求

得对应于 (3.1)—(3.3) 式给出的旋转 $g(\phi_1)$, $g(\theta)$ 和 $g(\phi_2)$ 的酉矩阵。它们是:

$$u(\phi_1) = \mp\begin{bmatrix} e^{i\phi_1/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi_1/2} \end{bmatrix}, \tag{4.4}$$

$$u(\theta) = \mp\begin{bmatrix} \cos\dfrac{\theta}{2} & i\sin\dfrac{\theta}{2} \\ i\sin\dfrac{\theta}{2} & \cos\dfrac{\theta}{2} \end{bmatrix}, \tag{4.5}$$

及

$$u(\phi_2) = \mp\begin{bmatrix} e^{i\phi_2/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi_2/2} \end{bmatrix}. \tag{4.6}$$

由 (3.4) 式矩阵描述的一般旋转 g，则对应于酉矩阵 $u = u(\phi_2)u(\theta)u(\phi_1)$:

$$u = \mp\begin{bmatrix} \cos\dfrac{\theta}{2}\, e^{i(\phi_2+\phi_1)/2} & i\sin\dfrac{\theta}{2}\, e^{i(\phi_2-\phi_1)/2} \\ i\sin\dfrac{\theta}{2}\, e^{-i(\phi_2-\phi_1)/2} & \cos\dfrac{\theta}{2}\, e^{-i(\phi_2+\phi_1)/2} \end{bmatrix}. \tag{4.7}$$

注释及参考文献

[1] M. Carmeli, Representations of the Three-Dimensional Rotation Group in Terms of Direction and Angle of Rotation, *J. Math. Phys.* **9**, 1987 (1968).

[2] 本书序言中介绍的第 (3) 册书.

[3] 本书序言中介绍的第 (4) 册书.

[4] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Co. Inc., Reading, Mass., 1965.

5. 群 O_3 及群 SU_2 上的不变积分

若对于群G的每一个元素 g，有一个数 y 与它对应，则我们称函数 $y = f(g)$ 定义在群G上[1]-[4]. 若这个群取为旋转群

O_3 且用欧拉角做参量，则 $f(g)$（这里 $g\in O_3$），便简化为欧拉角 ϕ_1, θ, ϕ_2 的函数，即

$$f(g)=f(\phi_1,\theta,\phi_2).$$

函数 f 将满足下列关系：

$$\begin{aligned}&f(\phi_1+2\pi,\theta,\phi_2)=f(\phi_1,\theta,\phi_2),\\&f(\phi_1,\theta,\phi_2+2\pi)=f(\phi_1,\theta,\phi_2).\end{aligned}\tag{5.1}$$

5.1 群 O_3 上的不变积分

若对于任意一个 $g_0\in O_3$, $f(g)$ 满足

$$\int f(gg_0)dg=\int f(g_0g)dg=\int f(g)dg\tag{5.2}$$

及

$$\int f(g^{-1})dg=\int f(g)dg,\tag{5.3}$$

则积分 $\int f(g)dg$ 称为函数 $f(g)$ 在群 O_3 上的不变积分。式中 dg 称为一个测度．当用欧拉角作参量表示群 O_3 的元素 g 时，dg 可以用角 ϕ_1, θ, ϕ_2 来表示：

$$dg=(1/8\pi^2)\sin\theta d\phi_1d\theta d\phi_2.$$

容易验证，它满足关系

$$\int dg=1.\tag{5.4}$$

该积分限取遍变量的整个定义域，即 $0\leqslant\phi_1\leqslant2\pi$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, 及 $0\leqslant\phi_2\leqslant2\pi$ 内．

5.2 群 SU_2 上的不变积分

上述在旋转群 O_3 上定义的函数及不变积分等概念很容易推广到特殊酉群 SU_2．同样，若以欧拉角作参量，则在群 SU_2 上定义的函数 $f(u)$ 亦可看成是角 ϕ_1, θ, ϕ_2 的函数，即

$$f(u)=f(\phi_1, \theta, \phi_2).$$

它所满足的周期性条件类似于在群 O_3 上定义的函数所满足的条件 (5.1)，即:

$$\begin{aligned} &f(\phi_1+4\pi, \theta, \phi_2)=f(\phi_1, \theta, \phi_2), \\ &f(\phi_1, \theta, \phi_2+4\pi)=f(\phi_1, \theta, \phi_2), \\ &f(\phi_1+2\pi, \theta, \phi_2+2\pi)=f(\phi_1, \theta, \phi_2). \end{aligned} \tag{5.5}$$

对于任意一个 $u\in SU_2$，在群 SU_2 上的不变积分将满足

$$\int f(uu_0)du=\int f(u_0u)du=\int f(u)du \tag{5.6}$$

及

$$\int f(u^{-1})du=\int f(u)du. \tag{5.7}$$

测度 du 可用欧拉角表之:

$$du=(1/16\pi^2)\sin\theta d\phi_1 d\theta d\phi_2.$$

可以证明，它满足条件

$$\int du=1. \tag{5.8}$$

这里，积分的限是:

$$0\leqslant\phi_1\leqslant 4\pi,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ \text{及}\ 0\leqslant\phi_2\leqslant 2\pi.$$

注释及参考文献

[1] 本书序言中所介绍的第 (2) 册书.

[2] A. Weil, *Actualites Sci. Ind.*, No. 869 (1938); *L'integration dans les groups topologiques et ces applications*, Hermann E. Cte., Paris, 1940.

[3] 本书序言中所介绍的第 (4) 册书.

[4] 本书序言中所介绍的第 (3) 册书.

6. 群 O_3 及群 SU_2 的表示

我们已看到纯旋转群 O_3 与二阶幺模酉群 SU_2 同态，对

于 O_3 的每一个旋转 g，有 SU_2 的两个矩阵 $+u$ 及 $-u$ 与之对应，反之，对于 SU_2 的每一个元素 u，有 O_3 的某个旋转 g 与之对应。

6.1 韦耳方法

由此可见，对群 O_3 表示(参见第二章)的描述等价于对群 SU_2 表示的描述；若 D_u 等于 D_{-u}，则群 O_3 的表示 $g \to D_g$ 是单值的；若 D_u 不等于 D_{-u}，则群 O_3 的表示是双值的。用群 SU_2 来求群 O_3 的表示最初是由韦耳 (H. Weyl) 引进的，待到欧拉角被用作参量时，这一方法更被广泛采用了。韦耳方法的优点在于：同时给出双值表示和正常(单值)表示。对于自旋为半整数的粒子，在处理有关自旋性质的这类物理问题时，双值表示是重要的。

应当指出的是，在用韦耳方法时，我们能够得到一个普遍的不变结果，它是元素 $u \in SU_2$ 的函数，对于任一个用来描述旋转的参量化法均有效。为了寻找一组特殊参量来表示群 O_3，我们只要用这组参量来表示 u，如上述采用欧拉角时的情形那样。此外，将结果用群 SU_2 上的函数表示出来，我们就能够得到在参量变化时仍保持不变的某些关系式。例如，不可约表示的矩阵元间的正交关系可以用群 SU_2 的一个不变积分形式写出，从而得到对于任意参量化法均有效的诸关系。

6.2 无穷小生成元

描述绕某方向

$$\vec{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$$

转动 ψ 角的正交矩阵为[1]

$$g_{rs} = \delta_{rs}\cos\psi + n_r n_s(1 - \cos\psi) - \varepsilon_{rst} n^t \sin\psi, \quad (6.1)$$

其中 r, s 及 t 所取之值都是从 1 到 3。在 (6.1) 式中对极角

θ 及 ϕ 取适当值，则能分别得到绕 ox_1, ox_2 及 ox_3 轴的旋转 $g_1(\phi)$, $g_2(\phi)$, 及 $g_3(\phi)$[2]. 对应于绕 ox_r 轴旋转的无穷小矩阵 g_r 定义如下[3]:

$$g_r = \left.\frac{dg_r(\phi)}{d\phi}\right|_{\phi=0}, \tag{6.2}$$

它满足交换关系

$$[g_r, g_s] = \varepsilon_{rst} g_t, \tag{6.3}$$

这里, $[g_r, g_s] = g_r g_s - g_s g_r$.

令 $g \to D_g$ 表在一个 n 维欧氏空间 R 中群 O_3 的一个表示，为了方便起见，令[4]

$$A_r(\phi) = D_{g_r}(\phi), \tag{6.4}$$

则得该表示的基本无穷小算子为

$$A_r = \left.\frac{dA_r(\phi)}{d\phi}\right|_{\phi=0}. \tag{6.5}$$

群 O_3 的表示由其基本无穷小算子 A_r 唯一地确定. 群 O_3 的所有有限维表示的确定基于下列事实：对适用于无穷小矩阵 g_r 间的交换关系 (6.3), 也适用于算子 A_r:

$$[A_r, A_s] = \varepsilon_{rst} A_t. \tag{6.6}$$

算子 A_r 是斜厄密算子[5], $A_r^\dagger = -A_r$, 因为，不失普遍性，每一个 O_3 的有限维表示都能看做是酉表示.

6.3 典范基

定义下列诸新算子

$$L_\mp = iA_1 \pm A_2,$$
$$L_3 = iA_3, \tag{6.7}$$

则可求得这些无穷小生成元 L_+, L_- 及 L_3 的交换关系如下:

$$[L_\mp, L_3] = \mp L_\mp,$$
$$[L_+, L_-] = 2L_3, \tag{6.8}$$

$$L_{\pm}^{+} = L_{\mp}, \quad L_3^{+} = L_3.$$

决定表示的问题乃化为决定适合条件（6.8）的算子 $L_{\mp}$ 及 L_3 的问题.这一问题的答案是：群 O_3 的每一个有限维表示由一个非负的整数或半整数 j 唯一地确定，j 是表示的权.对应于这样的数 j 的表示的空间，其维数为 $2j+1$；相对于其典范基 $f_{-j}, f_{-j+1}, \cdots, f_j$，表示的算子 $L_{\mp}$ 及 L_3 由下式给出：

$$\begin{aligned} L_{\pm} f_m &= [(j \mp m)(j \pm m + 1)]^{1/2} f_{m \pm 1}, \\ L_3 f_m &= m f_m, \end{aligned} \tag{6.9}$$

其中 $m = -j, -j+1, \cdots, j$[6].

6.4 对应于旋转的酉矩阵

我们来求对应于(6.1)式旋转 g 的酉矩阵 u. u 和 g 的关系见（4.2）及（4.3）式．直接计算得：

$$u = \mp \begin{bmatrix} \cos\frac{\psi}{2} + i\sin\frac{\psi}{2}\cos\theta & i\sin\frac{\psi}{2}\sin\theta e^{i\phi} \\ i\sin\frac{\psi}{2}\sin\theta e^{-i\phi} & \cos\frac{\psi}{2} - i\sin\frac{\psi}{2}\cos\theta \end{bmatrix}. \tag{6.10}$$

这是对应于一个绕 $\vec{n}$ 方向转动 ψ 角的酉矩阵 $u \in SU_2$，而 $\vec{n}$ 方向是由球面角 θ 及 ϕ 所决定的．当采用欧拉角时，其相应的矩阵由（4.7）式给出．注意

$$u(-\psi, \theta, \phi) = u^{-1}(\psi, \theta, \phi).$$

给角 θ 及 ϕ 以适当值，则可从（6.10）式分别得到与绕坐标轴 ox_1，ox_2 及 ox_3 的旋转 $g_1(\psi)$，$g_2(\psi)$，及 $g_3(\psi)$（见注释[2]）所对应的酉矩阵 $u_1(\psi)$，$u_2(\psi)$，及 $u_3(\psi)$．它们分别是[7]：

$$u_1(\phi)=\mp\begin{bmatrix}\cos\frac{\phi}{2} & i\sin\frac{\phi}{2}\\ i\sin\frac{\phi}{2} & \cos\frac{\phi}{2}\end{bmatrix}, \tag{6.11a}$$

$$u_2(\phi)=\mp\begin{bmatrix}\cos\frac{\phi}{2} & -\sin\frac{\phi}{2}\\ \sin\frac{\phi}{2} & \cos\frac{\phi}{2}\end{bmatrix}, \tag{6.11b}$$

及

$$u_3(\phi)=\mp\begin{bmatrix}e^{i\phi/2} & 0\\ 0 & e^{-i\phi/2}\end{bmatrix}. \tag{6.11c}$$

我们在下一章中将应用这些矩阵来确定群 SU_2 的算子 $A_r(\phi)$.

注释及参考文献

[1] 这一段主要来自 M. Carmeli, *J. Math. Phys.* **9**, 1987 (1968). 也可参阅 H. E. Moses, *Ann. Phys.* (N. Y.) **37**,224 (1966); **42**, 343 (1967); *Nuovo Cimento* **40A**, 1120 (1965).

[2] 这些矩阵是

$$g_1(\phi)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi\\ 0 & \sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix},$$

$$g_2(\phi)=\begin{bmatrix}\cos\phi & 0 & \sin\phi\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi\end{bmatrix},$$

$$g_3(\phi)=\begin{bmatrix}\cos\phi & -\sin\phi & 0\\ \sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

[3] g_r 与 $g_r(\phi)$ 之关系为 $g_r(\phi)=\exp(\phi g_r)$, g_r 为

$$g_1=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad g_2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad g_3=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

[4] $A_r(\phi)$ 称为给定表示的**基本单参量群**，它定义一个满足条件 $A_r(\phi_1)\cdot A_r(\phi_2)=A_r(\phi_1+\phi_2)$ 的单参量算子群；它们是 ϕ 的可微分函数，可以展开为 $A_r(\phi)=\exp(\phi A_r)$，其中 A_r 是由(6.5)式所定义的.

[5] 在一有限维欧氏空间 R 中的一个算子 B，若对于 R 中的所有 x, y，有关系 $(Ax, y)=(x, By)$ 成立，则 B 称为在此空间内算子 A 的**伴随算子**．一个算子 A 的伴随算子通常写为 A^+．容易证明：对于任意一个线性算子 A，有一个且仅有一个伴随算子 A^+，而 A^+ 的伴随算子便是 A．若 $A^+=A$，则算子 A 被称做是**厄密的**．若当且仅当 $A^+A=1$ 时，算子 A 才被称为是**酉算子**．

[6] 由此亦可得，对于每一个 j，对应有 O_3 的一个不可约表示．在一个 $(2j+1)$ 维空间中，若相对于某一个基 $f_{-j}, f_{-j+1}, \cdots, f_j$，给出了 O_3 的表示的算子 $L_\mp$ 及 L_3，则根据 (6.9) 式，该表示是不可约的．

[7] 对应于绕 ox_r 轴的旋转的无穷小矩阵 u_r

$$u_r=[du_r(\psi)/d\psi]_{\psi=0}$$

与 (4.1) 式的泡利矩阵之间的关系为 $u_r=\pm(i/2)\sigma^r$．

7. 不可约表示的矩阵元

群 SU_2 的矩阵 u 可以看作是所有复数对 (ξ^1, ξ^2) 空间的线性变换：

$$\xi'^p=\sum_{q=1}^{2}u_{pq}\xi^q \quad (p=1,2). \tag{7.1}$$

若我们考虑下列诸复数对

$$(\xi_1^1, \xi_1^2), \cdots, (\xi_k^1, \xi_k^2)$$

并作成所有乘积 $\xi_1^{p_1}\cdots\xi_k^{p_k}$，其中 $p_1, \cdots, p_k$ 独立地取值 1，2，则能得到群 SU_2 的一个表示．在变换 (7.1) 下，此积按下式变换：

$$\xi_1'^{p_1}\cdots\xi_k'^{p_k}=\sum_{q_1,\cdots,q_k=1}^{2}u_{p_1q_1}\cdots u_{p_kq_k}\xi_1^{q_1}\cdots\xi_k^{q_k}. \tag{7.2}$$

积 $\xi_1^{p_1}\cdots\xi_k^{p_k}$ 可以看作是所有 2^k 个复数 $\xi^{p_1\cdots p_k}$ 的线性空间 R_k 中的一个向量．空间 R_k 的线性变换 $D_u^{(k)}$ 则由下式给出：

$$\xi'^{p_1\cdots p_k}=\sum_{q_1,\cdots,q_k=1}^{2}u_{p_1q_1}\cdots u_{p_kq_k}\xi^{q_1\cdots q_k}. \tag{7.3}$$

7.1 旋量表示

对应 $u \to D_u^{(k)}$ 是群 SU_2 的一个表示，一般不是不可约的，因为由所有对称向量 ξ 所组成的 R_k 的子空间 S_k 对一切算子 $D_u^{(k)}$ 是不变的。但在子空间 S_k 中，对应 $u \to D_u^{(k)}$ 是不可约的。此表示我们用 Z_k 表示。它被称做群 SU_2 的旋量表示，其权为 $k/2$。

若将子空间 S_k 等同于由两个复变量 z_1 与 z_2 的 k 次齐次多项式 $p(z_1, z_2)$ 所组成的 $(k+1)$ 维空间，并在 S_k 的 ξ 和 $p(z_1, z_2)$ 间建立起下列形式的一个一一对应

$$p(z_1, z_2) = \sum_{p_1,\cdots,p_k=1}^{2} \xi^{p_1\cdots p_k} z_{p_1}\cdots z_{p_k}. \tag{7.4}$$

则我们可以得到表示 z_k 的一个等价实现.
对于在多项式空间 S_k 中的这个新实现的算子 $D_u^{(k)}$，由下式给出:

$$D_u^{(k)} p(z_1, z_2) = p(z_1', z_2'), \tag{7.5a}$$

其中

$$z_q' = \sum_{p=1}^{2} u_{pq} z_p \quad (q = 1, 2). \tag{7.5b}$$

引进一个新变量 $z = z_1/z_2$，则多项式 $p(z_1, z_2)$ 可以写成形式 $z_2^k p(z)$，其中 $p(z)$ 是一个变量 z 的次数不超过 k 的一个多项式。从而表示 Z_k 的算子 $D_u^{(k)}$ 由下式给出:

$$D_u^{(k)} p(z) = (u_{12}z + u_{22})^k p\left(\frac{u_{11}z + u_{21}}{u_{12}z + u_{22}}\right). \tag{7.6}$$

特别是，当将上式中的 u 取成 (6.11) 式的矩阵 $u_r(\phi)$ 时，上式给出算子 $A_r(\phi) = D_{u_r}(\phi)$[1].

7.2 表示的矩阵元

由此得出：群 SU_2 的每一个不可约有限维表示是由某些

非负整数或半整数 $j=k/2$（即表示的权）唯一地确定的[2]。下列函数

$$f_m(z)=\frac{(-z)^{j-m}}{[(j-m)!(j+m)!]^{1/2}}, \tag{7.7}$$

其中 $m=j,-j+1,\cdots,j$，对于在 S_k 空间中的表示 Z_k，形成一个典范基。用 (7.6) 式，我们求得

$$D_u^{(k)}f_n(z)=\sum_{m=-j}^{j}D_{mn}^j(u)f_m(z), \tag{7.8}$$

其中 $D_{mn}^j(u)$ 是权为 j 的不可约表示的算子 D_u 对于典范基的矩阵元，它对应于一个任意旋转 g. 其显式为[3]

$$D_{mn}^j(u)=(-1)^{2j-m-n}\left[\frac{(j-m)!(j+m)!}{(j-n)!(j+n)!}\right]^{1/2}$$

$$\times\sum\binom{j-n}{a}\binom{j+n}{j-m-a}u_{11}^a u_{12}^{j-m-a}u_{21}^{j-n-a}u_{22}^{m+n+a}, \tag{7.9}$$

该式中，求和从 $a=$ 极大 $(0,-m,-n)$ 到极小 $(j-m,j-n)$，且

$$\binom{m}{n}=\frac{m!}{(m-n)!n!}.$$

在 (7.9) 式中，指数 m 及 n 取值 $-j,-j+1,\cdots,j$ 而 $j=0,1/2,1,3/2,2,\cdots$.

为了求出用变量 ψ, θ 及 ϕ 来表达的矩阵元 (7.9)，我们只要将 (7.9) 式中的 u_{pq} 代之以 (6.10) 式给出的上述诸变量的函数[4]. 从而得

$$D_{mn}^j(\psi,\theta,\phi)=(-1)^{2j-m-n}$$

$$\left[\frac{(j-m)!(j+m)!}{(j-n)!(j+n)!}\right]^{1/2}\left(i\sin\frac{\psi}{2}\sin\theta e^{-i\phi}\right)^{m-n}$$

$$\times\left(\cos\frac{\psi}{2}-i\sin\frac{\psi}{2}\cos\theta\right)^{m+n}S(j,m,n;x). \tag{7.10}$$

在该式中我们采用了记号[5]

$$S(j, m, n; x) = 2^{m-j}(j-n)!(j+n)!$$
$$\times \sum \frac{(x+1)^{a}(x-1)^{j-m-a}}{a!(j-n-a)!(j-m-a)!(a+m+n)!}, \quad (7.11)$$

其中 x 的定义如下:

$$x = 1 - 2\sin^2(\phi/2)\sin^2\theta.$$

7.3 $D^j_{mn}(u)$ 的性质

最后,我们讨论矩阵元 $D^j_{mn}(u)$ 的几个性质.

我们首先注意到 $D^j(u)$ 是酉矩阵. 对应 $u \to D^j(u)$ 是群 SU_2 的一个表示. 因此有

$$D^j_{mn}(u_1u_2) = \sum_{n'=-j}^{j} D^j_{mn'}(u_1)D^j_{n'n}(u_2).$$

其次,

$$D^j(u^{-1}) = [D^j(u)]^{-1} = [D^j(u)]^+,$$

或

$$D^j_{mn}(u) = \overline{D}^j_{mn}(u).$$

用 γ 来表酉矩阵

$$\gamma = \begin{bmatrix} e^{-i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\phi/2} \end{bmatrix},$$

其中 ϕ 是一个实数. 若我们用表示的公式 (7.6), 其中将 $p(z)$ 取为 (7.7) 式的基函数 $f_m(z)$, 则得

$$D_\gamma f_m(z) = (-1)^{j-m} e^{ij\phi} \frac{(e^{-i\phi}z)^{j-m}}{\sqrt{(j-m)!(j+m)!}}$$
$$= e^{im\phi} f_m(z).$$

故矩阵 $D^j(\gamma)$ 是对角的, $D^j_{nn}(\gamma) = e^{in\phi}$. 其次,容易求得

$$D^j_{mn}(\gamma u) = e^{im\phi} D^j_{mn}(u),$$
$$D^j_{mn}(u\gamma) = e^{in\phi} D^j_{mn}(u).$$

最后，我们给出矩阵 D^j 所适合的正交关系[6]：

$$\int D^{j_1}_{m_1n_1}(u)\overline{D}^{j_2}_{m_2n_2}(u)du=(2j_1+1)^{-1}\delta_{j_1j_2}\delta_{m_1m_2}\delta_{n_1n_2}. \quad (7.12)$$

注释及参考文献

[1] 为了决定算子 $A_r(\phi)$，我们只需要求对于小值 ϕ 的 $u_r(\phi)$. (6.11) 式的符号决定于条件 $\lim u_r(\phi)=1$，故必需用＋号.

[2] 反之，对于任意非负整数或半整数 j，存在一个权为 j 的群 SU_2 的不可约表示. 一个权为 j 的表示能够作为旋量表示 Z_k 而得到实现，这里 $k=2j$; 且群 SU_2 的每一个有限维不可约表示等价于 Z_k 的一个表示.

[3] 注意到 $D^j_{mn}(-u)=(-1)^{2j}D^j_{mn}(u)$. 故对于整数 j，表示是单值，对于半整数 j，表示是双值. 在我们的讨论中，(6.10) 式中的矩阵将只取＋号.

[4] 我们很易于求出用欧拉角表示 D^j 的式子.

[5] 注意到当 $s=j-\frac{1}{2}(|m+n|+|m-n|)$，$\alpha=|m-n|$，及 $\beta=|m+n|$ 时，函数 $S(j,m,n;x)$ 等于雅可比多项式 $p_s^{\alpha\beta}(x)$.

[6] 类似于(7.12)式的关系式，适用于任意紧群，可参见本书序言中所介绍的第(2)册书.

8. 无穷小转动的微分算子

现在我们能够来求对应于绕坐标轴作无穷小转动的微分算子，即，求算子 A_1，A_2，及 A_3，从而，求出算子 $L_\mp$ 及 L_3. 当采用欧拉角时，这些算子都是大家所熟知的，在许多书中都有叙述. 现在我们来求以 ψ，θ，及 ϕ 为变量的这些算子的表达式.

8.1 在函数空间中 O_3 的表示

设 $g\to D_g$ 为群 O_3 的权为 j 的一个不可约表示，而设 $D_{mn}=D^j_{mn}$ 为其矩阵元. 我们将这些矩阵元看做旋转 g 的函数，$D_{mn}=D_{mn}(g)$. 因为 $g\to D_g$ 是一个表示，故有

$$D_{gg'}=D_gD_{g'}.$$

用矩阵元表示，上述关系将写成

$$D_{mn}(gg')=\sum_{q=-j}^{j}D_{mq}(g)D_{qn}(g'), \tag{8.1}$$

其中 $D_{mn}(gg')$ 是算子 $D_{gg'}$ 的矩阵元. 定义一个变换 U, 使得

$$U_{g'}D_{mn}(g)=D_{mn}(gg'). \tag{8.2}$$

比较 (8.1) 及 (8.2) 式得

$$U_{g'}D_{mn}(g)=\sum_{q=-j}^{j}D_{qn}(g')D_{mq}(g). \tag{8.3}$$

其次，我们可以证明

$$U_{g'}U_{g''}=U_{g'g''}. \tag{8.4}$$

由此可见，变换 $U_{g'}$ 在矩阵 D_g 的第 m 行的 $2j+1$ 个函数所构成的空间中实现了群 O_3 的一个表示[与 (7.8) 式比较]，且 $U_{g'}$ 的矩阵元是 $D_{qn}(g')$[1].

为了求算子 A_r, 我们取 g' 为绕 ox_r 轴的转动 α 角的旋转，并将 (8.2) 式按 α 的幂展开. $D_{mn}(gg')$ 的展开式（我们用 $D_{mn}(\tilde{\varphi},\tilde{\theta},\tilde{\phi})$ 表之)为

$$D_{mn}(\tilde{\varphi},\tilde{\theta},\tilde{\phi})=D_{mn}(\varphi,\theta,\phi)+\alpha\left[\frac{\partial D_{mn}}{\partial\varphi}\frac{d\tilde{\varphi}}{d\alpha}+\frac{\partial D_{mn}}{\partial\theta}\frac{d\tilde{\theta}}{d\alpha}+\frac{\partial D_{mn}}{\partial\phi}\frac{d\tilde{\phi}}{d\alpha}\right]_{\alpha=0}+\cdots. \tag{8.5}$$

为了决定无穷小算子 A_r, 我们对于每一个旋转要确定函数

$$\left.\frac{d\tilde{\varphi}}{d\alpha}\right|_{\alpha=0},\quad \left.\frac{d\tilde{\theta}}{d\alpha}\right|_{\alpha=0},\ 及\ \left.\frac{d\tilde{\phi}}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}. \tag{8.6}$$

旋转 g 的矩阵是角 φ, θ, 及 ϕ 的一个函数，按 (6.1) 式，它有下列形式

$$\begin{bmatrix} \cos\psi + \sin^2\theta\cos^2\phi \times(1-\cos\psi) & \sin^2\theta\cos\phi\sin\phi \times(1-\cos\psi) - \cos\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\theta\cos\phi \times(1-\cos\psi) + \sin\theta\sin\phi\sin\psi \\ \sin^2\theta\sin\phi\cos\phi \times(1-\cos\psi) + \cos\theta\sin\psi & \cos\psi + \sin^2\theta\sin^2\phi \times(1-\cos\psi) & \sin\theta\cos\theta\sin\phi \times(1-\cos\psi) - \sin\theta\cos\phi\sin\psi \\ \sin\theta\cos\theta\cos\phi \times(1-\cos\psi) - \sin\theta\sin\phi\sin\psi & \sin\theta\cos\theta\sin\phi \times(1-\cos\psi) + \sin\theta\cos\phi\sin\psi & \cos\psi + \cos^2\theta(1-\cos\psi) \end{bmatrix}. \tag{8.7}$$

旋转 gg' 的矩阵由某些角 $\tilde{\psi}$, $\tilde{\theta}$ 及 $\tilde{\phi}$ 给出，这些角依赖于转角 α，且当 $\alpha=0$ 时，分别等于 ψ，θ，及 ϕ. 还要注意到矩阵 gg' 的 α 幂级数展开式为

$$gg' = g(\psi,\theta,\phi) + \alpha\left\{\frac{\partial g}{\partial\psi}\cdot\frac{d\tilde{\psi}}{d\alpha}\bigg|_{\alpha=0} + \frac{\partial g}{\partial\theta}\frac{d\tilde{\theta}}{d\alpha}\bigg|_{\alpha=0} + \frac{\partial g}{\partial\phi}\frac{d\tilde{\phi}}{d\alpha}\bigg|_{\alpha=0}\right\} + \cdots. \tag{8.8}$$

为了求无穷小算子 A_1，我们令 g' 恒等于绕 ox_1 轴的转动角 α 的旋转，得

$$g_1(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

故有

$$g_1(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \cdots. \tag{8.9}$$

由此得 g 与 g_1 之乘积：

$$gg_1 = g(\psi, \theta, \phi) + \alpha \begin{bmatrix} 0 & g_{13} & -g_{12} \\ 0 & g_{23} & -g_{22} \\ 0 & g_{33} & -g_{32} \end{bmatrix} + \cdots. \quad (8.10)$$

另一方面，当 $g_1 = g'$ 时，(8.8)式也给出 gg_1. 比较这两个 gg_1 的式子，我们得到一些等式，从这些等式，对于绕 ox_1 轴旋转的情形，能够定出(8.6)式给出的三个表达式. 我们得到[2]

$$2\sin\theta\cos\phi\sin\frac{\psi}{2}\left(-\sin\theta\sin\phi\left.\frac{d\tilde{\phi}}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}\right.$$
$$\left.+\cos\theta\cos\phi\left.\frac{d\tilde{\theta}}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}\right)$$
$$-\cos\frac{\psi}{2}(1-\sin^2\theta\cos^2\phi)\left.\frac{d\tilde{\psi}}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0, \quad (8.11a)$$

$$2\sin\theta\sin\phi\sin\frac{\psi}{2}\left(\sin\theta\cos\phi\left.\frac{d\tilde{\phi}}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} + \cos\theta\sin\phi\left.\frac{d\tilde{\theta}}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}\right)$$
$$-\cos\frac{\psi}{2}(1-\sin^2\theta\sin^2\phi)\left.\frac{d\tilde{\psi}}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}$$
$$=\sin\theta\left(\cos\theta\sin\phi\sin\frac{\psi}{2}-\cos\phi\cos\frac{\psi}{2}\right), \quad (8.11b)$$

$$2\cos\theta\sin\frac{\psi}{2}\left.\frac{d\tilde{\theta}}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} + \cos\frac{\psi}{2}\sin\theta\left.\frac{d\tilde{\psi}}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}$$
$$=\cos\theta\sin\phi\sin\frac{\psi}{2}+\cos\phi\cos\frac{\psi}{2}. \quad (8.11c)$$

8.2 角动量算子

很容易证明(8.11)式的解为[3]

$$\left.\frac{d\tilde{\phi}}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \cos\phi\sin\theta,$$

$$\left.\frac{d\bar{\theta}}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}=\frac{1}{2}\left(\sin\phi+\cos\frac{\psi}{2}\cos\theta\cos\phi\right),\tag{8.12}$$

$$\left.\frac{d\tilde{\phi}}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}=\frac{1}{2}\csc\theta\left(\cos\theta\cos\phi-\cot\frac{\psi}{2}\sin\phi\right).$$

将(8.12)诸式代入(8.5)式，则得对应于绕 ox_1 轴旋转的算子 A_1：

$$A_1=\cos\phi\sin\theta\frac{\partial}{\partial\psi}+\frac{1}{2}\left(\sin\phi+\cot\frac{\psi}{2}\cos\theta\cos\phi\right)\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$+\frac{1}{2}\csc\theta\left(\cos\theta\cos\phi-\cot\frac{\psi}{2}\sin\phi\right)\frac{\partial}{\partial\phi}.\tag{8.13a}$$

用类似的解法，可得算子 A_2 及 A_3：

$$A_2=\sin\phi\sin\theta\frac{\partial}{\partial\psi}-\frac{1}{2}\left(\cos\phi-\cot\frac{\psi}{2}\cos\theta\sin\phi\right)\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$+\frac{1}{2}\csc\theta\left(\cos\theta\sin\phi+\cot\frac{\psi}{2}\cos\phi\right)\frac{\partial}{\partial\phi},\tag{8.13b}$$

$$A_3=\cos\theta\frac{\partial}{\partial\psi}-\frac{1}{2}\cot\frac{\psi}{2}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\partial}{\partial\phi}.\tag{8.13c}$$

将(8.13)三式分别代入(6.7)的两个式子，则得算子 L_+，L_- 及 L_3：

$$L_\pm=ie^{\pm i\phi}\left\{\sin\theta\frac{\partial}{\partial\psi}+\frac{1}{2}\left(\mp i+\cot\frac{\psi}{2}\cos\theta\right)\frac{\partial}{\partial\theta}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\csc\theta\left(\cos\theta\pm i\cot\frac{\psi}{2}\right)\frac{\partial}{\partial\phi}\right\},\tag{8.14a}$$

$$L_3=i\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial\psi}-\frac{1}{2}\cot\frac{\psi}{2}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\partial}{\partial\phi}\right).\tag{8.14b}$$

上面导得的算子是用旋转角 ψ 及旋转方向的球面角 θ 与 ϕ 来表达的。我们也可以用欧拉角表示，就能得到在其他书籍中[4],[5] 得到的角动量算子的标准表达式。

下面两章中，将引进洛伦兹变换，以及与其有关的无穷小

矩阵和基本无穷小算子．还给出这些矩阵及算子所满足的交换关系．这是求洛伦兹群的表示的无穷小的处理方法．证明每一个表示由一数对来确定，这一数对完全地确定了该表示．

注释及参考文献

[1] 在函数 $D_{mq}(g)$ 空间中，这里 $q=-j,-j+1,\cdots,j$，表示 $g'\to U_{g'}$ 是不可约的，而 $D_{mq}(g)$ 组成这一空间内的一典范基．因此，该表示的算子 $L_{\mp}$ 及 L_3 满足关系式(6.9)，即

$$L_{\pm}D^j_{mn}(g)=[(j\pm n+1)(j\mp n)]^{1/2}D^j_{m,n\pm1}(g),$$
$$L_3D^j_{mn}(g)=nD^j_{mn}(g).$$

[2] 我们得到九个方程式；但仅其中的三个是独立的．令(8.8)式及(8.10)式矩阵的对角元相等就得到(8.11)式．

[3] M. Carmeli, Representations of the Three-Dimensional Rotation Group in Terms of Direction and Angle of Rotation, *J. Math. Phys.* **9**, 1987 (1968).

[4] 本书序言中介绍的第(3)册书．

[5] 本书序言中介绍的第(4)册书．

9. 洛伦兹群

变量 x_1，x_2，x_3 及 x_4[1]的一个线性变换 g，使得形式

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2$$

保持不变的，称为*洛伦兹变换*．所有这些线性的、齐次的变换 g 的集合，作成一个称为*洛伦兹群*的连续群．

令 x_μ 及 x'_ν，这里 μ，$\nu=1,2,3,4$，表两个由变换 $x'_\mu=g_{\mu\nu}x_\nu$ 联系起来的洛伦兹标架的坐标． 函数 $g_{\mu\nu}$ 是洛伦兹群的矩阵 g 的元，则在两标架中，长度的平方相等：

$$x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2-x_4'^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2.$$

由上式可得

$$\sum_{i=1}^{3}(g_{i\lambda}x_\lambda)^2-(g_{4\lambda}x_\lambda)^2=\sum_{i=1}^{3}x_i^2-x_4^2. \qquad (9.1)$$

师

(9.1) 式左右两边 $x_\mu x_\nu$ 的系数应相等，故得关系式

$$\sum_{i=1}^{3} g_{i\mu}g_{i\nu} - g_{4\mu}g_{4\nu} = \eta_{\mu\nu}, \tag{9.2}$$

其中 $\eta_{\mu\nu}$（以及下文的 $\eta^{\mu\nu}$）是由下列矩阵给出的平坦空间的度规

$$\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{9.3}$$

用矩阵记法，(9.2) 式可以写成

$$g^t \eta g = \eta, \tag{9.4}$$

其中 g^t 是 g 的转置矩阵. 从 (9.4) 式得

$$(\det g)^2 = 1,$$

由此可见，每一个洛伦兹变换 g 的行列式等于 $+1$，这种变换叫做正常变换，或等于 -1，这种变换叫做非正常变换. 这类似于前几章所讨论的旋转群的情况.

9.1 正时洛伦兹变换

在 (9.2) 式中，当取 $\mu = \nu = 4$ 时，我们得到

$$g_{14}^2 + g_{24}^2 + g_{34}^2 - g_{44}^2 = -1. \tag{9.5}$$

故得 $g_{44}^2 \geqslant 1$ 的结论，因此 $g_{44} \geqslant 1$ 或 $g_{44} \leqslant 1$. 矩阵元 $g_{44} \geqslant 1$ 的洛伦兹变换称为正时洛伦兹变换. 所有正时洛伦兹变换的集合作成洛伦兹群的一个子群[2]. 所有正常的、正时洛伦兹变换的集合也作成洛伦兹群的一个子群[3]—[5].

下文将只讨论一切正常的、正时洛伦兹变换组成的群，以 L 表之.

注释及参考文献

[1] 坐标 $x_4=ct$，其中 c 为光速，t 为时间.

[2] 当且仅当一个洛伦兹变换使每一个正类时向量变换为另一正类时向量时，该洛伦兹变换才满足条件 $g_{44}\geqslant 1$.（一个向量 V_μ 叫做类时向量，若 $V_\mu V^\mu=V_\mu\eta^{\mu\nu}V_\nu=V^2<0$. 一个类时向量 V_μ 叫做正的或负的，视 $V_4>0$ 或 $V_4<0$ 而定.）

[3] 详见 R. F. Streater 及 A. S. Wightman, *PCT, Spin and Statistics and All That*, W. A. Benjamin, New York, 1964.

[4] 本书序言中介绍的第(7)册书.

[5] F. R. Halpern, *Special Relativity and Quantum Mechanics*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1968.

10. 无穷小的处理方法

10.1 无穷小洛伦兹矩阵

绕 ox_1, ox_2, ox_3 轴的旋转 $a_1(\psi)$, $a_2(\psi)$, $a_3(\psi)$ 及沿这些轴的洛伦兹变换（速度变换*）$b_1(\psi)$, $b_2(\psi)$, $b_3(\psi)$, 均能以显式写出[1]. 如同在旋转群的情形一样，群 L 的无穷小矩阵 a_r 及 b_r 定义为[2]

$$a_r=\left.\frac{da_r(\psi)}{d\psi}\right|_{\psi=0},\quad b_r=\left.\frac{db_r(\psi)}{d\psi}\right|_{\psi=0},\qquad(10.1)$$

易知它们满足交换关系:

$$\begin{aligned}[][a_i, a_j]&=\varepsilon_{ijk}a_k,\\ [b_i, b_j]&=-\varepsilon_{ijk}a_k,\\ [a_i, b_j]&=\varepsilon_{ijk}b_k.\end{aligned}\qquad(10.2)$$

这里 ε_{ijk} 是常用的勒维-契维塔符号，定义为 $\varepsilon_{123}=1$.

10.2 无穷小算子

我们用 $g\to D_g$ 来表群 L 在一无限维空间 B 内的一个任

* 原文为 boost，现译作速度变换. ——译者注

意线性表示，为了方便起见，令[3]

$$A_r(\phi)=D_{a_r(\phi)},\quad B_r(\phi)=D_{b_r(\phi)}. \tag{10.3}$$

若表示是有限维的，则单参量群的基本无穷小算子 $A_r(\phi)$ 及 $B_r(\phi)$ 定义为[4]

$$A_r=\left.\frac{dA_r(\phi)}{d\phi}\right|_{\phi=0},\quad B_r=\left.\frac{dB_r(\phi)}{d\phi}\right|_{\phi=0}. \tag{10.4}$$

若表示 $g\to D_g$ 是无限维的，则算子函数 $A_r(\phi)$ 及 $B_r(\phi)$ 可能是不能微分的，但仍可存在一个向量 x，对于它，$A_r(\phi)x$ 及 $B_r(\phi)x$ 是可微分的向量函数[5]。

群L的表示 $g\to D_g$ 可由其无穷小算子 A_i 及 B_i，$i=1,2,3$ 完全确定。对群L不可约表示的决定基于下列事实：一个表示的基本无穷小算子所满足的交换关系与无穷小矩阵 a_r 及 b_r 所满足的交换关系是一样的，即：

$$\begin{aligned}&[A_i,A_j]=\varepsilon_{ijk}A_k,\\&[B_i,B_j]=-\varepsilon_{ijk}A_k,\\&[A_i,B_j]=\varepsilon_{ijk}B_k.\end{aligned} \tag{10.5}$$

定义新的无穷小算子如下：

$$\begin{aligned}&L_{\mp}=iA_1\pm A_2,\quad L_3=iA_3,\\&F_{\mp}=iB_1\pm B_2,\quad F_3=iB_3.\end{aligned} \tag{10.6}$$

可以证明它们满足下列交换关系式：

$$\begin{aligned}&[L_{\mp},L_3]=\pm L_{\mp},\quad [L_+,L_-]=2L_3,\\&[F_{\mp},F_3]=\mp L_{\mp},\quad [F_+,F_-]=-2L_3,\\&[L_{\pm},F_{\pm}]=0,\qquad [L_3,F_3]=0,\\&[L_{\pm},F_3]=\mp F_{\pm},\ [F_{\pm},L_3]=\mp F_{\pm},\\&[L_{\pm},F_{\mp}]=\pm 2F_3.\end{aligned} \tag{10.7}$$

因此，确定一个表示的问题现在归结为决定适合条件(10.7)的 $L_{\pm}$，L_3，$F_{\pm}$，F_3。

因为三维纯旋转群 O_3 是正常的，正时洛伦兹群L的一

个子群，显见群L的每一表示也是群 O_3 的一个表示．显然，若L的一个给定表示是不可约的，当考虑其为群 O_3 的表示时不必需是不可约的．事实上，任意一个群L的无限维的表示，当视为是群 O_3 的表示时，是高度可约的；它等价于无限个不可约表示的直和．因此，群L的任意不可约表示的表示空间 R 是子空间 M^j 的闭直和，这里 M^j 是一个 $(2j+1)$ 维空间，在此空间中群 O_3 的一个权为 j 的不可约表示被实现。

遵循标准的约定，我们选取算子 L_3 的 $2j+1$ 个归一化的本征向量作为子空间 M^j 的典范基．用 f^j_m 来表这些基向量，这里 $m=-j,-j+1,\cdots,j$，上标 j 表明 f^j_m 所属的子空间[6]，下标是算子 L_3 的本征值．借助于典范基 f^j_m，对交换关系(10.7)做详细探讨，得出下列诸结论：

(1) 群L的每一不可约表示可由一数对 (j_0, c) 来表征，这里 j_0 是整数或半整数，c 是一复数．

(2) 群L的任意给定不可约无限维表示的空间 $R(j_0,c)$，可由整数或半整数 j_0 来表征，使得

$$R(j_0, c)=M^{j_0}\oplus M^{j_0+1}\oplus\cdots.$$

因此，整个空间 $R(j_0, c)$ 被一组基向量 f^j_m 所张成，这里 $j=j_0, j_0+1, j_0+2,\cdots$，及 $m=-j,-j+1,\cdots,j$．若给定的不可约表示是有限维的，则诸子空间 M 的直和，在若干有限项之后便终止了．

(3) 对于某个自然数 n，当且仅当

$$c^2=(j_0+n)^2$$

时，给定表示才是有限维的．

(4) 对应于给定数对 (j_0, c) 的不可约表示，当在表示空间中适当地选取基 f^j_m 时，由下面的公式给出[7]：

$$L_\pm f^j_m=[(j\pm m+1)(j\mp m)]^{\frac{1}{2}}f^j_{m\pm1},$$

$$L_3 f^j_m = m f^j_m,$$
$$F_\pm f^j_m = \pm[(j\mp m)(j\mp m-1)]^{\frac{1}{2}} C_j f^{j-1}_{m\pm1}$$
$$-[(j\mp m)(j\pm m+1)]^{\frac{1}{2}} A_j f^j_{m\pm1}$$
$$\pm[(j\pm m+1)(j\pm m+2)]^{\frac{1}{2}} C_{j+1} f^{j+1}_{m\pm1}, \quad (10.8)$$
$$F_3 f^j_m = [(j-m)(j+m)]^{\frac{1}{2}} C_j f^{j-1}_m - m A_j f^j_m$$
$$-[(j+m+1)(j-m+1)]^{\frac{1}{2}} C_{j+1} f^{j+1}_m.$$
这里我们用了记号 A_j 及 C_j，它们的定义是
$$A_j = icj_0/j(j+1),$$
及
$$C_j = i(j^2-j_0^2)^{\frac{1}{2}}(j^2-c^2)^{\frac{1}{2}}/j(4j^2-1)^{\frac{1}{2}}.$$
（5）对于每一数对 (j_0, c)，这里 j_0 是整数或半整数，c 是复数，对应着群L的一表示 $g\to D_g$，其无穷小算子由(10.8)式给出.

10.3 酉条件

若群L的表示 $g\to D_g$ 是酉表示[8],[9]，则(10.8)式满足某些条件. 下面综述这些条件.

设 A 为群L的一酉表示 $g\to D_g$ 的一无穷小算子，则 $A(t)=D_{a(t)}$ 是一酉算子，因此其伴随算子应满足[10]：
$$[A(t)]^+ = A(-t).$$
于是，我们有
$$(A(t)f, g) = (f, A(-t)g).$$
将该式两端对 t 进行微分，当 $t=0$ 时我们得到
$$(Af, g) = -(f, Ag). \qquad (10.9)$$
利用这一关系，很易求得
$$(L_+f, g) = (f, L_-g),$$
$$(L_3f, g) = (f, L_3g), \qquad (10.10)$$
$$(F_+f, g) = (f, F_-g),$$

$$(F_3 f, g) = (f, F_3 g).$$

将(10.10)系统地用于(10.8)，则得下列结论：

若群L的不可约表示 $g \to D_g$ 是酉表示，则表征它的一数对 (j_0, c) 或者适合(1) c 为纯虚数，j_0 为一任意非负整数或半整数；或者适合(2) c 在 $0 < |c| \leqslant 1$ 区间是一实数及 $j_0 = 0$。

对应于第(1)种情形的表示称为*表示的主列*，对应于第(2)种情形的表示称为*表示的辅列*。

注释及参考文献

[1] 这些矩阵为

$$a_1(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$a_2(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$a_3(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

及

$$b_1(\phi) = \begin{bmatrix} \cosh\phi & 0 & 0 & \sinh\phi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh\phi & 0 & 0 & \cosh\phi \end{bmatrix},$$

$$b_2(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh\phi & 0 & \sinh\phi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sinh\phi & 0 & \cosh\phi \end{bmatrix},$$

$$b_3(\phi)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\cosh\phi&\sinh\phi\\0&0&\sinh\phi&\cosh\phi\end{bmatrix}.$$

[2] $a_r(\phi)$ 与 a_r 及 $b_r(\phi)$ 与 b_r 之间的关系为

$$a_r(\phi)=\exp(\phi a_r),\quad b_r(\phi)=\exp(\phi b_r),$$

其矩阵为:

$$a_1=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$a_2=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$a_3=\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

及

$$b_1=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$b_2=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix},$$

$$b_3=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}.$$

[3] $A_r(\phi)$ 及 $B_r(\phi)$ 是 ϕ 的连续函数,称为对于给定表示的基本单参量算子群. 它们满足关系式 $A_r(\phi_1)A_r(\phi_2)=A_r(\phi_1+\phi_2)$, $B_r(\phi_1)B_r(\phi_2)=B_r(\phi_1+\phi_2)$. $A_r(0)=1$, $B_r(0)=1$. 若表示是有限维的, 则 $A_r(\phi)$ 及 $B_r(\phi)$ 是 ϕ 的可微分函数. 若表示是无限维的,则这些算子有可能是不能微分的.

[4] $A_r(\phi)$ 及 $B_r(\phi)$ 将能作为 A_r 及 B_r 的函数展开,如 $A_r(\phi)=\exp(\phi A_r)$, $B_r(\phi)=\exp(\phi B_r)$.

[5] 一般,令 $A(t)$ 是巴拿赫空间R中的一连续单参量算子群,用 $X(A)$ 表满足下列条件的所有向量 $x\in R$ 的集合,该条件是:当 $t\to 0$ 时,在R的模方的意义上存在有 $(A(t)x-x)/t$ 的极限. 显然,该集合 $X(A)$ 包含向量 $x=0$. 现在,对于所有 $x\in X(A)$, 用在极限 $t\to 0$ 时 $Ax=\lim\{[A(t)x-x]/t\}$ 来定义算子 A. 算子A的定义域, $X(A)$, 是R的子空间,且 A 是线性的,即,对于 x_1, $x_2\in X(A)$, $A(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)=\lambda_1Ax_1+\lambda_2Ax_2$. 这种算子$A$称为单参量群 $A(t)$ 的无穷小算子. 若 $A(t)=D_a(t)$ 是对应于群L的单参量子群 $a(t)$ 的表示 $g\to D_g$ 的算子群,则相应的算子A称为表示 $g\to D_g$ 的**无穷小算子**. 详情可参阅 M. Carmeli 及 S. Malin, Finite-and Infinite-Dimensional Representations of the Lorentz Group, *Fortschritte der Physik* **21**, 397 (1973); 及本书序言中介绍的第(4)册书.

[6] f_m^l 的上标唯一地确定了子空间,因为 O_3 的每一不可约表示在群L的任意给定的不可约表示中最多被包含一次.

[7] 对于酉表示的情况和在某些假定下得到的 (10.8) 式是盖尔方德(I. M. Gelfand)首先求出的(参见本书序言中介绍的第(4)册书的第117页); 后来又被 Harish-Chandra, *Proc. Roy. Soc.* A**189**, 372 (1947) 及 *Phys. Rev.* **71**, 793 (1947) 及 I. M. Gelfand 及 A. M. Iaglom, *Zh. Eksp. Theor. Fiz.* **18**, 703 (1948) 重新推导得.

[8] 对于非酉表示的物理意义,参见 A. O. Barut 及 S. Malin, *Revs. Mod. Phys.* **40**, 632 (1968); *Nuovo Cimento* **58** A, 835 (1968).

[9] 若R是一希耳伯特空间, D_g 是所有 $g\in G$ 的酉算子,则在空间R中群G的表示 $g\to D_g$ 称为酉表示. 这意味着:对于所有 $g\in G$ 及所有 $x,y\in R$, $(D_gx,D_gy)=(x,y)$, 这里 (x,y) 表在R中的标积.

[10] 若对于所有 x, $y\in R$ 有 $(Ax,y)=(x,By)$, 则算子B称为算子A的伴随算子.

11. 洛伦兹群的旋量表示

11.1 群 SL(2, c) 及洛伦兹群

下面,我们将利用正常的、正时洛伦兹群L诸元素能够用群 SL(2, c) 的诸元素来描述这一事实,群 SL(2, c) 是行列式等于1的 2 × 2 复数矩阵群. 这两个群之间的关系类似于群 O_3 和群 SU_2 之间的关系.

令 x_α 及 x'_β, 这里 $\alpha,\beta=1,2,3,4$, 描述两个洛伦兹标架的坐标,则两者之间的坐标变换关系为

$$x'_\alpha = g_{\alpha\beta}x_\beta, \tag{11.1}$$

其中 $g_{\alpha\beta}\in$ L. 对每一坐标系 x，有一个由下式定义的 2×2 厄密矩阵 Q 与之对应，

$$Q = x_\beta\sigma^\beta, \tag{11.2}$$

其中 σ^k, $k=1,2,3$，为泡利自旋矩阵，

$$\sigma^1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad \sigma^2=\begin{bmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{bmatrix},\quad \sigma^3=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}, \tag{11.3}$$

而 σ^4 为 2×2 单位矩阵. 用 Q 来表达，坐标变换 (11.1) 可以写成

$$Q' = \mathrm{a}Q\mathrm{a}^+, \tag{11.4}$$

其中 a 是 SL$(2, c)$ 的一个元素，

$$Q' = x'_\beta\sigma^\beta,$$

而 a^+ 为 a 的厄密共轭. 可以求出群 SL$(2, c)$ 的元素 a 与群 L 的元素 g 之间的关系为[1]

$$g_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma^\alpha \mathrm{a}\sigma^\beta \mathrm{a}^+). \tag{11.5}$$

由此可见，群 L 同态于群 SL$(2, c)$，对于 L 的每一个元素 g 对应有 SL$(2, c)$ 的两个矩阵 $\mp$a, 反之，对应于每一个 a $\in$ SL$(2, c)$，有某个元素 $g\in$ L. 故描述群 L 的表示，等价于描述群 SL$(2, c)$ 的表示;一个对 L 的表示 $g\to D_g$, 是单值或双值的，要看 D_{a} 等于或不等于 $D_{-\mathrm{a}}$ 而定.

11.2 群 SL(2, c) 的旋量表示

我们来建造一个包含群 SL$(2, c)$ 的所有不可约的有限维表示的旋量表示. 详细推导见附录.

用 P_{mn} 来表变量 z 及其复共轭 $\bar z$ 的一切多项式 $p(z,\bar z)$ 的集合，z 的次数不超过 m, $\bar z$ 的次数不超过 n, m 及 n 是

确定表示的给定的非负整数．空间 P_{mn} 为线性向量空间，其加法运算和数乘运算被定义为与通常的多项式运算同．

群 SL(2, c) 的一个元素可表为

$$g=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \tag{11.6}$$

其中 a, b, c, 及 d 是适合于关系式

$$ad-bc=1$$

的四个复数．定义在空间 P_{mn} 中的算子 D_g 为

$$D_g p(z, \bar{z})=(bz+d)^m(\bar{b}\bar{z}+\bar{d})^n p\left(\frac{az+c}{bz+d}, \frac{\bar{a}\bar{z}+\bar{c}}{\bar{b}\bar{z}+\bar{d}}\right). \tag{11.7}$$

不难证明对应 $g\to D_g$ 是群 SL(2, c) 的一个线性表示．这表示称为群 SL(2, c) 的旋量表示，其维数为 $(m+1)(n+1)$.

为了将此表示和大家熟悉的二分量旋量联系起来，我们用另一种方式来叙述它．

我们来考察下列数系

$$\phi_{A_1\cdots A_m\dot{X}_1\cdots\dot{X}_n}$$

它们对于脚标 $A_1,\cdots,A_m$ 及 $\dot{X}_1,\cdots,\dot{X}_n$ 都是对称的，并取值 0 和 1．所有这样数系的集合构成一个线性空间，以 S_{mn} 表之，其维数也是 $(m+1)(n+1)$.

在 P_{mn} 空间与 S_{mn} 空间之间很容易建立起一个一一对应关系．对于每一 $\phi_{A_1\cdots A_m\dot{X}_1\cdots\dot{X}_n}\in S_{mn}$ 数系，对应有下列多项式

$$p(z, \bar{z})=\sum_{\substack{A_1,\cdots,A_m \\ \dot{X}_1,\cdots,\dot{X}_n}}\phi_{A_1\cdots A_m\dot{X}_1\cdots\dot{X}_n} z^{A_1+\cdots+A_m}\bar{z}^{\dot{X}_1+\cdots+\dot{X}_n}, \tag{11.8}$$

其中 z 的次数不超过 m, $\bar{z}$ 的次数不超过 n, 故 $p(z,\bar{z})\in P_{mn}$.

另一方面，在 P_{mn} 空间中的每一个多项式

$$p(z, \bar{z}) = \sum_{r, s} p_{rs} z^r \bar{z}^s \qquad (11.9)$$

能够写成 (11.8) 的形式，只要在诸 ϕ 与诸 p 之间有下列关系：

$$\phi_{A_1 \cdots A_m \dot{X}_1 \cdots \dot{X}_n} = \frac{1}{m!n!} p_{rs},$$

这里 $A_1 + \cdots + A_m = r$, $\dot{X}_1 + \cdots + \dot{X}_n = s$.

若将多项式 (11.8) 用于 (11.7) 式，则可得第二种旋量表示．我们有

$$\begin{aligned} D_g p(z, \bar{z}) = {} & (a_{10} z + a_{00})^m (\bar{a}_{10} \bar{z} + \bar{a}_{00})^n \\ & \times \sum_{\substack{A_1 \cdots A_m \\ \dot{X}_1 \cdots \dot{X}_n}} \phi_{A_1 \cdots A_m \dot{X}_1 \cdots \dot{X}_n} \left(\frac{a_{11} z + a_{01}}{a_{10} z + a_{00}} \right)^{A_1 + \cdots + A_m} \\ & \times \left(\frac{\bar{a}_{11} \bar{z} + \bar{a}_{01}}{\bar{a}_{10} \bar{z} + \bar{a}_{00}} \right)^{\dot{X}_1 + \cdots + \dot{X}_n} \\ = {} & \sum \phi_{A_1 \cdots A_m \dot{X}_1 \cdots \dot{X}_n} (a_{1A_1} z + a_{0A_1}) \cdots (a_{1A_m} z + a_{0A_m}) \\ & \times (\bar{a}_{1\dot{X}_1} \bar{z} + \bar{a}_{0\dot{X}_1}) \cdots (\bar{a}_{1\dot{X}_n} \bar{z} + \bar{a}_{0\dot{X}_n}). \end{aligned} \qquad (11.10)$$

故得

$$D_g p(z, \bar{z}) = \sum_{\substack{A_1, \cdots, A_m \\ \dot{X}_1, \cdots, \dot{X}_n}} \phi'_{A_1 \cdots A_m \dot{X}_1 \cdots \dot{X}_n} z^{A_1 + \cdots + A_m} \bar{z}^{\dot{X}_1 + \cdots + \dot{X}_n} \qquad (11.11)$$

这里，我们用了记法

$$\phi'_{A_1 \cdots A_m \dot{X}_1 \cdots \dot{X}_n} = \sum_{\substack{B_1, \cdots, B_m \\ \dot{Y}_1, \cdots, \dot{Y}_n}} a_{A_1 B_1} \cdots a_{A_m B_m} \bar{a}_{\dot{X}_1 \dot{Y}_1} \cdots \bar{a}_{\dot{X}_n \dot{Y}_n} \phi_{B_1 \cdots B_m \dot{Y}_1 \cdots \dot{Y}_n}$$

$$(11.12)$$

且 $a_{11} = a$, $a_{10} = b$, $a_{01} = c$, 及 $a_{00} = d$.

量

$$\phi_{A_1 \cdots A_m X_1 \cdots X_n}$$

称为旋量，其m个无点脚标和n个带点脚标都是对称的，而(11.12)式则是其在矩阵 $a\in SL(2, c)$ 下的变换律[2],[3].

11.3 旋量表示的无穷小算子

现在来求前节中讨论的旋量表示的无穷小算子 L_+, L_-, L_3 及F_+, F_-, F_3.

对应于群L之单参量子群 $a_k(t)$ 及 $b_k(t)$ 的 SL(2, c) 之单参量子群，用(11.5)式极易求得[4]. 用群 SL(2, c) 的无穷小矩阵 $\hat{a}_r$ 及 $\hat{b}_r$ 表示，它们可写为

$$\hat{a}_k(t) = \exp(t\hat{a}_k),\ \hat{b}_k(t) = \exp(t\hat{b}_k), \qquad (11.13)$$

这里 $\hat{a}_k = i\sigma^k/2$, $\hat{b}_k = \sigma^k/2$, 而 σ^k 则是 (11.3) 式的泡利自旋矩阵. 将诸矩阵 $\hat{a}_k(t)$ 及 $\hat{b}_k(t)$ 代人(11.7), 对所得方程式两边对变量 t 求微分，则得到算子 A_k 及 B_k 的表达式，从而得到诸L及F算子为:

$$\begin{aligned}
L_+ &= -\frac{\partial}{\partial z} - \bar{z}^2\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + n\bar{z},\\
L_- &= z^2\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - mz,\\
L_3 &= -z\frac{\partial}{\partial z} + \bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{2}(m-n), \qquad (11.14)\\
F_+ &= i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \bar{z}^2\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + n\bar{z}\right),\\
F_- &= i\left(-z^2\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + mz\right),\\
F_3 &= i\left(z\frac{\partial}{\partial z} + \bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{2}(m+n)\right)^{[5]}.
\end{aligned}$$

注释及参考文献

[1] 与 M. Carmeli, *J. Math. phys.* 9, 1987 (1968) 一文中对于旋转群的

类似公式(2.10)及(2.11)式相比较．用求下式的办法容易证明(11.5)式:

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma^\alpha a\sigma^\beta a^+)x_\beta=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma^\alpha a\sigma^\beta x_\beta a^+)=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma^\alpha aQa^+)$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma^\alpha Q')=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma^\alpha\sigma^\beta x'_\beta)=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma^\alpha\sigma^\beta)x'_\beta$$

$$=\delta^{\alpha\beta}x'_\beta=x'_\alpha=g_{\alpha\beta}x_\beta.$$

[2] 旋量是 E. Cartan 首先发现的，见 *Bull. Soc. Math. France* **41**, 53 (1913); *Leçons sur la théorie des spineurs*, Hermann, Paris, 1938; 英译本收在 *The theory of spinors* 一书中, The M. I. T. Press, Cambridge, Massachusetts, 1966.

[3] 旋量在广义相对论中的应用，可参见 F. A. E. Pirani, *Lectures on General Relativity*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.

[4] 群 SL(2, c) 的这些矩阵由下列矩阵给出

$$\hat{a}_1(t)=\begin{bmatrix}\cos\frac{t}{2} & i\sin\frac{t}{2}\\ i\sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2}\end{bmatrix},$$

$$\hat{a}_2(t)=\begin{bmatrix}\cos\frac{t}{2} & -\sin\frac{t}{2}\\ \sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2}\end{bmatrix},$$

$$\hat{a}_3(t)=\begin{bmatrix}e^{it/2} & 0\\ 0 & e^{-it/2}\end{bmatrix},$$

及

$$\hat{b}_1(t)=\begin{bmatrix}\cosh\frac{t}{2} & \sinh\frac{t}{2}\\ \sinh\frac{t}{2} & \cosh\frac{t}{2}\end{bmatrix},$$

$$\hat{b}_2(t)=\begin{bmatrix}\cosh\frac{t}{2} & i\sinh\frac{t}{2}\\ -i\sinh\frac{t}{2} & \cosh\frac{t}{2}\end{bmatrix},$$

$$\hat{b}_3(t)=\begin{bmatrix}e^{t/2} & 0\\ 0 & e^{-t/2}\end{bmatrix}.$$

[5] 自旋为 $\frac{1}{2}$ 的粒子的狄喇克方程应用了四行矩阵，因而波函数确实是**四分量旋量**，其形式为

$$\phi=\begin{bmatrix}\phi^1\\ \phi^2\\ \phi^3\\ \phi^4\end{bmatrix}.$$

[见 P. A. M. Dirac, *Quantum Mechanics*, Oxford, 1930]. 我们可以证明,狄喇克四分量旋量能够用两个二分量旋量建造起来,设此二分量为本章所述形式,ϕ_A 和 χ_A,若将上述 ψ 写为

$$\psi = \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \bar{\chi}^0 \\ \bar{\chi}^1 \end{bmatrix},$$

其中 χ^A 中的上标是用勒维-契维塔符号升上去的,即 $\chi^A = \varepsilon^{AB}\chi_B$,故 $\chi^0 = \chi_1$,$\chi^1 = -\chi_0$,这样便能做到从二分量旋量建造狄喇克旋量.

附录　洛伦兹群的旋量表示

A1. 群 SL(2, c) 及洛伦兹群

考察所有 2 × 2 矩阵的集合

$$a=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \tag{A.1}$$

其中 a, b, c, d 是复数，且满足

$$\det a = ad - bc = 1. \tag{A.2}$$

这个矩阵的集合成为一个群，称为二阶特殊线性群，记为 SL(2, c).

群 SL(2, c) 与洛伦兹群 L 有着密切联系。其关系推导如下[1],[2]:

设对每一个四矢量

$$x=(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

伴随一个厄密矩阵

$$Q=\begin{bmatrix} x_4+x_3 & x_1+ix_2 \\ x_1-ix_2 & x_4-x_3 \end{bmatrix}. \tag{A.3}$$

这在所有四向量及所有 2 × 2 厄密矩阵间定义了一个一对一的线性对应.（A.3）式亦可写作

$$Q=x_a\sigma^a, \tag{A.4}$$

其中 σ^k, $k=1, 2, 3$ 为泡利矩阵

$$\sigma^1=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^2=\begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^3=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{A.5}$$

而 σ^4 则是 2×2 单位矩阵.

对应于任意给定元素 $\mathrm{a}\in SL(2,c)$，考察在厄密矩阵 Q 空间内的下列变换：

$$Q' = \mathrm{a}Q\mathrm{a}^+, \tag{A.6}$$

其中 a^+ 是 a 的厄密共轭，且

$$Q' = x'_\alpha\sigma^\alpha. \tag{A.7}$$

(A.4)，(A.6)，及 (A.7) 三式在四矢量 $x=(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 空间中定义一个线性变换

$$\boxed{x'_\alpha = g_{\alpha\beta}x_\beta,} \tag{A.8}$$

或用矩阵表述

$$x' = gx, \tag{A.9}$$

其中矩阵元 $g_{\alpha\beta}$ 可用 a 的矩阵元表之如下：

$$\begin{aligned} x'_\alpha &= \delta_{\alpha\beta}x'_\beta \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma^\alpha\sigma^\beta)x'_\beta \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma^\alpha\sigma^\beta x'_\beta) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma^\alpha Q') \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma^\alpha \mathrm{a}Q\mathrm{a}^+) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma^\alpha \mathrm{a}\sigma^\beta x_\beta \mathrm{a}^+) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma^\alpha \mathrm{a}\sigma^\beta \mathrm{a}^+)x_\beta. \end{aligned} \tag{A.10}$$

故得

$$\boxed{g_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma^\alpha \mathrm{a}\sigma^\beta \mathrm{a}^+)} \tag{A.11}$$

因此，对应于任意一个矩阵 $\mathrm{a}\in SL(2,c)$，在一般空-时内存

在一个定义线性变换的 4×4 矩阵 g，其矩阵元由 (A.11) 式给出. 现在，我们来证明矩阵 g 属于正常的、正时洛伦兹群 L.

(1) 从 (A.3) 式，我们有

$$\det Q = x_4^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2, \tag{A.12}$$

由于 (A.2)，故从 (A.6) 式得

$$\det Q' = \det Q, \tag{A.13}$$

由此可见，变换 (A.11) 使二次齐式

$$x_4^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

保持不变，故矩阵 g 是完全洛伦兹群的一元素.

(2) 因为 g 属于完全洛伦兹群，故它满足

$$\det g = \pm 1, \tag{A.14}$$

对于特例

$$\mathrm{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

g 是恒等变换，这时 $\det g = 1$. 因为 $\det g$ 是四个变量 a, b, c, d 的连续函数，而此四个变量的变化域是单连通的 (它们可以取满足 (A.2) 式的所有复数值)，从 $\det g = 1$ 不连续地跳到 $\det g = -1$ 的情形是被排除在外的，故对满足于 (A.2) 式要求的 a, b, c, d 的一切值，$\det g = +1$; 这就是说，g 属于正常的洛伦兹群.

(3) 从 (A.11) 式得

$$g_{44} = \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2) > 0, \tag{A.15}$$

故 g 是正常的，也是正时的洛伦兹变换.

下面我们来证明已建立的对应关系保持群的乘法运算. 令 $\pm\mathrm{a} \in SL(2, c)$ 对应于给定元素 $g \in \mathrm{L}$，而 $\pm\mathrm{a}' \in SL(2, c)$ 对应于另一元素 $g' \in \mathrm{L}$，求证 $\pm\mathrm{a}'' = \pm\mathrm{a}'\mathrm{a} \in SL(2, c)$

将对应于 $g''=g'g\in L$.

从(A.9)得

$$x''=g'(gx)=(g'g)x=g''x, \tag{A.16}$$

从(A.6)得

$$\begin{aligned}Q''&=a'(aQa^+)a'^+\\&=(a'a)Q(a^+a'^+)\\&=(a'a)Q(a'a)^+\\&=a''Qa''^+.\end{aligned} \tag{A.17}$$

比较(A.16),(A.17)与(A.6),(A.8),显见 a″ 与 g'' 的关系和 a 与 g 的关系是一样的,这就是说

$$g''_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}Tr(\sigma^\alpha a''\sigma^\beta a''^+). \tag{A.18}$$

证毕.

将(A.1)及(A.5)代入(A.11),则可将求出矩阵 g 的显式如下:

$$g=\begin{bmatrix}\mathrm{Re}(a\bar{d}+b\bar{c}) & \mathrm{Im}(\bar{a}d+b\bar{c}) & \mathrm{Re}(a\bar{c}-b\bar{d}) & \mathrm{Re}(a\bar{c}+b\bar{d})\\ \mathrm{Im}(a\bar{d}+b\bar{c}) & \mathrm{Re}(\bar{a}d-b\bar{c}) & \mathrm{Im}(a\bar{c}-b\bar{d}) & \mathrm{Im}(a\bar{c}+b\bar{d})\\ \mathrm{Re}(a\bar{b}-c\bar{d}) & \mathrm{Im}(a\bar{b}+c\bar{d}) & \frac{1}{2}(a\bar{a}-b\bar{b}-c\bar{c}+d\bar{d}) & \frac{1}{2}(a\bar{a}+b\bar{b}-c\bar{c}-d\bar{d})\\ \mathrm{Re}(a\bar{b}+c\bar{d}) & \mathrm{Im}(\bar{a}b-c\bar{d}) & \frac{1}{2}(a\bar{a}-b\bar{b}+c\bar{c}-d\bar{d}) & \frac{1}{2}(a\bar{a}+b\bar{b}+c\bar{c}+d\bar{d})\end{bmatrix}. \tag{A.19}$$

给定一任意矩阵 $a\in SL(2,c)$,对应的矩阵 $g\in L$ 便唯一地由显式(A.19)给出.

给定一任意矩阵 $g\in L$,我们将证明存在有两个矩阵 $\pm a\in SL(2,c)$ 都能满足(A.11)[或(A.19)]式.

先考察一个特例，这时矩阵 g 对应于正 x 方向的洛伦兹变换(速度变换). 故得

$$g = b_1(t) = \begin{bmatrix} \cosh t & 0 & 0 & \sinh t \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh t & 0 & 0 & \cosh t \end{bmatrix}. \tag{A.20}$$

使 (A.20) 与 (A.19) 相等，并解 a, b, c, d, 则得

$$\hat{b}_1(t) = \pm \begin{bmatrix} \cosh \dfrac{t}{2} & \sinh \dfrac{t}{2} \\ \sinh \dfrac{t}{2} & \cosh \dfrac{t}{2} \end{bmatrix}. \tag{A.21a}$$

但，任意一个元素 $g \in L$ 总可以表为

$$g = v b_1(t) v', \tag{A.22}$$

其中 v, v' 是群 O_3 的元素. 在第四章中，我们曾建立起旋转群 O_3 的所有元素与群 SU_2 的所有元素间的一与二对应关系，而群 SU_2 是群 $SL(2, c)$ 的一个子群. 从 (A.6) 式得：群 SU_2 的矩阵 u, u' 与对应的群 O_3 的矩阵 v, v' 之间的关系和群 $SL(2, c)$ 的元素与由 (A.11) 式定义的群 L 诸元素之间的对应关系完全一样. 事实上，(A.6) 式是 (A.11) 式的特例. 由于 (A.22) 式，所给矩阵 $g \in L$ 对应于

$$(\pm u)(\pm \hat{b}_1(t))(\pm u') = \pm(u\hat{b}_1(t)u') \in SL(2, c).$$

所以，我们已证明了下列定理：

定理：在群 $SL(2, c)$ 的所有元素与正常的、正时洛伦兹群 L 的所有元素之间存在一个二对一映射，使得对 L 的每一个元素只有符号相反的 $SL(2, c)$ 的两个元素与之对应. 映射保持群的乘法运算，因而构成群 $SL(2, c)$ 到群 L 上的一同态.

对应于 x 方向的洛伦兹变换的矩阵 $\hat{b}_1(t)$ 由 (A.21a) 式给出. 对应于在 y 及 z 方向的洛伦兹变换的矩阵 $\hat{b}_2(t)$, $\hat{b}_3(t)$

也不难求得，它们分别为

$$\hat{b}_2(t)=\begin{bmatrix}\cosh\frac{t}{2} & i\sinh\frac{t}{2}\\ -i\sinh\frac{t}{2} & \cosh\frac{t}{2}\end{bmatrix},\tag{A.21b}$$

$$\hat{b}_3(t)=\begin{bmatrix}e^{t/2} & 0\\ 0 & e^{-t/2}\end{bmatrix},\tag{A.21c}$$

而对应于绕 x，y，及 z 轴旋转的矩阵 $\hat{a}_1(t)$，$\hat{a}_2(t)$ 及 $\hat{a}_3(t)$ 则分别为

$$\hat{a}_1(t)=\begin{bmatrix}\cos\frac{t}{2} & i\sin\frac{t}{2}\\ i\sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2}\end{bmatrix},\tag{A.23a}$$

$$\hat{a}_2(t)=\begin{bmatrix}\cos\frac{t}{2} & -\sin\frac{t}{2}\\ \sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2}\end{bmatrix},\tag{A.23b}$$

$$\hat{a}_3(t)=\begin{bmatrix}e^{it/2} & 0\\ 0 & e^{-it/2}\end{bmatrix}.\tag{A.23c}$$

(A.21) 及 (A.23) 诸式可简写如下：

$$\begin{aligned}\hat{a}_k(t)&=\exp\left(\frac{i\sigma^k}{2}t\right),\\ \hat{b}_k(t)&=\exp\left(\frac{\sigma^k}{2}t\right),\end{aligned}\tag{A.24}$$

其中 σ^k 是泡利自旋矩阵 (A.5)。

注释及参考文献

[1] M. Carmeli 及 S. Malin, Finite-and Infinite-Dimensional Representations of the Lorentz Group, *Fortschritte der Physik* **21**, 397 (1973).

[2] 本书序言中介绍的第 (4) 册书.

A2. 群 SL(2, c) 的旋量表示

考察由所有复数对 (ϕ_1, ϕ_0) 组成的空间. 群 SL(2, c) 是此二维复数空间中的线性变换群;群 SL(2, c) 的一个元素

$$g=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

按下列公式

$$\phi_1' = a\phi_1 + b\phi_0,$$

$$\phi_0' = c\phi_1 + d\phi_0, \tag{A.25a}$$

将数对 (ϕ_1, ϕ_0) 变换为 (ϕ_1', ϕ_0'); 或缩写成

$$\phi_A' = a_{AB}\phi_B;\ A, B = 1, 0, \tag{A.25b}$$

这里,我们采用了下列记号: $a_{11}=a$, $a_{10}=b$, $a_{01}=c$, $a_{00}=d$, 并采用习惯的求和记号: 重复出现的同一大写字母表示对 1, 0 进行求和.

例如,(A.25) 式意味着

$$\phi_A' = \sum_{B=0}^{1} a_{AB}\phi_B. \tag{A.26}$$

我们称这些量 (ϕ_1, ϕ_0) 为基本二分量旋量.

从 (A.25) 式得基本二分量旋量的复共轭按下式变换:

$$\bar\phi_1' = \bar a\bar\phi_1 + \bar b\bar\phi_0,$$

$$\bar\phi_0' = \bar c\bar\phi_1 + \bar d\bar\phi_0, \tag{A.27}$$

引进记号

$$\bar\phi_1 = \phi_{\dot 1},\ \bar\phi_0 = \phi_{\dot 0}, \tag{A.28}$$

则得变换律为

$$\phi_{\dot A}' = \bar a_{\dot A\dot B}\phi_{\dot B}. \tag{A.29}$$

按 (A.29) 式变换的量 $(\phi_{\dot 1}, \phi_{\dot 0})$ 称为带点的基本二分量旋量.

考察既对脚标 $A_1, \cdots, A_m$ 对称,也对脚标 $\dot X_1, \cdots, \dot X_n$

对称的所有复数系

$$\phi_{A_1\cdots A_m\dot{X}_1\cdots\dot{X}_n}$$

所组成的空间 S_{mn}，所有脚标都取值 0 和 1。 该空间是 $(m+1)(n+1)$ 维的. 在此空间中，变换律为

$$\phi'_{A_1\cdots A_m\dot{X}_1\cdots\dot{X}_n} = a_{A_1B_1}\cdots a_{A_mB_m}\bar{a}_{\dot{X}_1\dot{Y}_1}\cdots\bar{a}_{\dot{X}_n\dot{Y}_n}\phi_{B_1\cdots B_m\dot{Y}_1\cdots\dot{Y}_n}. \tag{A.30}$$

该空间是 m 个(无点)基本二分量旋量空间与 n 个带点基本二分量旋量空间的直积. 量

$$\phi_{A_1\cdots A_m\dot{X}_1\cdots\dot{X}_n}$$

称为二分量旋量[1].

由诸系数

$$a_{A_1B_1}\cdots a_{A_mB_m}\bar{a}_{\dot{X}_1\dot{Y}_1}\cdots\bar{a}_{\dot{X}_n\dot{Y}_n}$$

给出的线性变换是群 SL(2, c) 的一个 $(m+1)(n+1)$ 维表示. 这是旋量表示的矩阵形式. 该表示用

$$D^{(\frac{m}{2},\frac{n}{2})}$$

表之.

例：表示 $D^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$ 是所有复数组

$$(\phi_{1\dot{1}},\ \phi_{1\dot{0}},\ \phi_{0\dot{1}},\ \phi_{0\dot{0}})$$

的线性变换. 按 (A.30) 式，该线性变换为

$$\phi'_{A\dot{X}} = a_{AB}\bar{a}_{\dot{X}\dot{Y}}\phi_{B\dot{Y}}, \tag{A.31}$$

而对于群 SL(2, c) 的一个元素

$$g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

的表示矩阵为

$$D^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(g) = \begin{bmatrix} a\bar{a} & a\bar{b} & b\bar{a} & b\bar{b} \\ a\bar{c} & a\bar{d} & b\bar{c} & b\bar{d} \\ c\bar{a} & c\bar{b} & d\bar{a} & d\bar{b} \\ c\bar{c} & c\bar{d} & d\bar{c} & d\bar{d} \end{bmatrix}. \tag{A.32}$$

下面引入另一种旋量表示形式：我们用 P_{mn} 来表变量 z 及其复共轭 $\bar{z}$ 的所有多项式 $p(z, \bar{z})$ 的集合，z 的次数不超过 m，$\bar{z}$ 的次数不超过 n，而 m 和 n 为固定的非负整数．空间 P_{mn} 是一个线性向量空间，在此空间中加法和数乘运算是按对多项式的一般运算方法来定义的．

对应于群 SL(2, c) 的一个元素

$$g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

我们定义在 P_{mn} 空间中的算子 D_g 如下：

$$D_g p(z, \bar{z}) = (bz + d)^m(\bar{b}\bar{z} + \bar{d})^n p\left[\frac{az + c}{bz + d}, \frac{\bar{a}\bar{z} + \bar{c}}{\bar{b}\bar{z} + \bar{d}}\right]. \tag{A.33}$$

容易证明对应 $g \to D_g$ 是群 SL(2, c) 的线性表示． 这是 $(m + 1)(n + 1)$ 维旋量表示的第二种形式．

两种旋量表示间的关系推导如下：容易建立起 P_{mn} 及 S_{mn} 空间的一一线性映射．对每一数系 $\phi_{A_1\cdots A_m\dot{X}_1\cdots\dot{X}_n} \in S_{mn}$，对应有一个多项式

$$p(z, \bar{z}) = \phi_{A_1\cdots A_m\dot{X}_1\cdots\dot{X}_n} z^{A_1+\cdots+A_m}\bar{z}^{\dot{X}_1+\cdots+\dot{X}_n}, \tag{A.34}$$

(这里对 $A_1, \cdots, A_m, \dot{X}_1, \cdots, \dot{X}_n$ 用了求和的习惯记法!)．$A_1 + \cdots + A_m = m$ 及 $\dot{X}_1 + \cdots + \dot{X}_n = n$，故得 $p(z, \bar{z}) \in P_{mn}$．反之，在空间 P_{mn} 内的每一多项式

$$p(z, \bar{z}) = \sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{n} p_{rs} z^r \bar{z}^s \tag{A.35}$$

能被写成 (A.34) 形式，其前题是我们能用下列关系式将诸 ϕ 及诸 P 联系起来：

$$\phi_{A_1\cdots A_m\dot{X}_1\cdots\dot{X}_n} = \frac{1}{m!\,n!} p_{rs}, \tag{A.36}$$

这里 $A_1 + \cdots + A_m = r$ 及 $\dot{X}_1 + \cdots + \dot{X}_n = s$．

现在可将 (A.33) 式展开得:

$$
\begin{aligned}
D_g p(z,\bar{z}) &= (a_{10}z + a_{00})^m (\bar{a}_{10}\bar{z} + \bar{a}_{00})^n \phi_{A_1\cdots A_m \dot{X}_1\cdots\dot{X}_n} \\
&\quad \times \left(\frac{a_{11}z + a_{01}}{a_{10}z + a_{00}}\right)^{A_1+\cdots+A_m} \left(\frac{\bar{a}_{11}\bar{z} + \bar{a}_{01}}{\bar{a}_{10}\bar{z} + \bar{a}_{00}}\right)^{\dot{X}_1+\cdots+\dot{X}_n} \\
&= \phi_{A_1\cdots A_m \dot{X}_1\cdots\dot{X}_n}(a_{1A_1}z + a_{0A_1})\cdots(a_{1A_m}z + a_{0A_m}) \\
&\quad \times (\bar{a}_{1\dot{X}_1}\bar{z} + \bar{a}_{0\dot{X}_1})\cdots(\bar{a}_{1\dot{X}_n}\bar{z} + \bar{a}_{0\dot{X}_n}) \\
&= \phi'_{A_1\cdots A_m \dot{X}_1\cdots\dot{X}_n} z^{A_1+\cdots+A_m} \bar{z}^{\dot{X}_1+\cdots+\dot{X}_n},
\end{aligned}
\tag{A.37}
$$

其中的诸 ϕ 由 (A.30) 式给出. 如前所做, 我们令 $a_{11}=a$, $a_{10}=b$, $a_{01}=c$, $a_{00}=d$, 而 a, b, c, d 是 g 的矩阵元:

$$
g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},
$$

g 为群 SL(2, c) 的一个元素.

例: 对应于 $m=n=1$ 的旋量表示, 在下列多项式组成的空间实现

$$
p(z,\bar{z}) = p_{00} + p_{10}z + p_{01}\bar{z} + p_{11}z\bar{z}, \tag{A.38}
$$

这时对应于群 SL(2, c) 的一个元素

$$
g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}
$$

的算子 D_g 由下式给出:

$$
\begin{aligned}
D_g p(z,\bar{z}) &= (bz+d)(\bar{b}\bar{z}+\bar{d})\left[p_{00} + p_{10}\frac{az+c}{bz+d}\right. \\
&\quad \left. + p_{01}\frac{\bar{a}\bar{z}+\bar{c}}{\bar{b}\bar{z}+\bar{d}} + p_{11}\left(\frac{az+c}{bz+d}\times\frac{\bar{a}\bar{z}+\bar{c}}{\bar{b}\bar{z}+\bar{d}}\right)\right] \\
&= (bz+d)(\bar{b}\bar{z}+\bar{d})p_{00} + (az+c) \\
&\quad \times (\bar{b}\bar{z}+\bar{d})p_{10} \\
&\quad + (bz+d)(\bar{a}\bar{z}+\bar{c})p_{01} + (az+c) \\
&\quad \times (\bar{a}\bar{z}+\bar{c})p_{11} \\
&= p'_{00} + p'_{10}z + p'_{01}\bar{z} + p'_{11}z\bar{z},
\end{aligned}
\tag{A.39}
$$

其中

$$
\begin{bmatrix} p'_{11} \\ p'_{10} \\ p'_{01} \\ p'_{00} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\bar{a} & a\bar{b} & b\bar{a} & b\bar{b} \\ a\bar{c} & a\bar{d} & b\bar{c} & b\bar{d} \\ c\bar{a} & c\bar{b} & d\bar{a} & d\bar{b} \\ c\bar{c} & c\bar{d} & d\bar{c} & d\bar{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{10} \\ p_{01} \\ p_{00} \end{bmatrix}. \tag{A.40}
$$

现在，再建立旋量表示的第三种形式. 为此，

从 (A.35) 式出发，用 $p(z)$ 表 $p(z, \bar{z})$，并令

$$
\alpha(g) = g_{12}^{m} g_{22}^{n}, \tag{A.41}
$$

其中

$$
g = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \tag{A.42}
$$

是群 SL$(2, c)$ 的一元素. (A.33) 式可重新写成形式

$$
D_g p(z) = \alpha(zg) p[z(g)], \tag{A.43}
$$

其中 z 表一个复变量，同时也表示由下式定义的矩阵

$$
z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{bmatrix}, \tag{A.44}
$$

矩阵 $z' = z(g)$ 相当于一个变换，在此变换中变量 z 变为新变量

$$
z' = g'_{21}/g'_{22}, \tag{A.45}
$$

而矩阵 $g' \in \mathrm{SL}(2, c)$ 由下式给出：

$$
g' = zg = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{11}z + g_{21} & g_{12}z + g_{22} \end{bmatrix}, \tag{A.46}
$$

故新变量 z'，按 (A.45) 及 (A.46) 式，为：

$$
z' = \frac{g_{11}z + g_{21}}{g_{12}z + g_{22}}. \tag{A.47}
$$

用群 SU_2 的矩阵元素表示 (A.43) 式，便可得到旋量表示的第三种形式. 令

$$
u = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \tag{A.48}
$$

表 SU_2 的一个元素. 令 $\tilde{P}_{mn}$ 表所有多项式 $q(u)$ 组成的空间,该多项式为 u_{21}, u_{22} 的 m 次及 $\bar{u}_{21}$, $\bar{u}_{22}$ 的 n 次齐次式,并且满足下列条件:

$$q(\gamma u) = e^{i(m-n)\psi/2} q(u), \tag{A.49}$$

其中,矩阵 $\gamma \in SU_2$, 由下式给出:

$$\gamma = \begin{bmatrix} e^{-i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\psi/2} \end{bmatrix}. \tag{A.49a}$$

下面我们来建立 $\tilde{P}_{mn}$ 空间与多项式 $p(z)$ 空间 P_{mn} 的一个映射.

定义: 具有下列形式的所有矩阵 k 的集合

$$k = \begin{bmatrix} \lambda^{-1} & \mu \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \tag{A.50}$$

其中 λ, μ 为复数且 $\lambda \neq 0$, 组成 $SL(2, c)$ 的一个子群. 该子群用 K 表之.

定义: 具有下列形式的所有矩阵 z 的集合

$$z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{bmatrix}, \tag{A.51}$$

其中 z 为一复数, 组成 $SL(2, c)$ 的一个子群. 该子群用 Z 表之. (同样的记法用于矩阵 $z \in Z$ 及复数 z. 其涵义从上下文便可明白,不会混淆不清.)

引理: 任意一个满足 $g_{22} \neq 0$ 的元素 $g \in SL(2, c)$ 能被唯一地分解为形式

$$g = kz, \quad k \in K, \quad z \in Z. \tag{A.52}$$

证明: 给定一矩阵 $g \in SL(2, c)$, 即

$$g = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}, \tag{A.53}$$

$$g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = 1, \tag{A.54}$$

(A.52) 式应读为:

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^{-1} & \mu \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{bmatrix}. \tag{A.55}$$

因有 (A.54) 关系,直接计算得到 (A.55) 式有唯一的解:

$$\lambda = g_{22}, \quad \mu = g_{12}, \tag{A.56}$$

$$z = g_{21}/g_{22}. \tag{A.57}$$

证毕.

现在我们来考察群 SL(2, c) 关于 K 群的所有右陪集 (参见第一章) 的集合. 从上述引理可见, 在所有这些右陪集与所有复数 z 之间存在一个一一对应关系: 从 (A.57) 式可知, 所有群 SL(2, c) 中比值 $g_{21}/g_{22} = z$ 相同的元素属于同一右陪集,用 $\tilde{z}$ 表此右陪集.

现在我们来证明群 SL(2, c) 关于群 K 的每一个右陪集 $\tilde{z}$ 含有 SL(2, c) 的子群 SU_2 的元素.

引理: 任意一个元素 $g \in$ SL(2, c), 能被分解为形式

$$g = ku, \quad k \in K, \quad u \in SU_2. \tag{A.58}$$

证明: 元素 $u \in SU_2$ 的一般形式如下:

$$u = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix}, \tag{A.59}$$

其中复数 α, β 满足下列条件

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \tag{A.60}$$

(A.58) 式可以写为:

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^{-1} & \mu \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix}. \tag{A.61}$$

因为有 (A.60) 式关系,对 (A.61) 式解 $\lambda, \mu, \alpha, \beta$, 得

$$|\lambda|^2 = |g_{21}|^2 + |g_{22}|^2, \tag{A.62}$$

$$\alpha = \bar{g}_{22}/\bar{\lambda}, \tag{A.63}$$

$$\beta = -\bar{g}_{21}/\bar{\lambda}, \tag{A.64}$$

$$\mu=\begin{cases}(g_{12}-\beta/\lambda)/\bar{\alpha}, & \text{当 } \alpha \neq 0 \text{ 时},\\ -g_{11}/\bar{\beta}, & \text{当 } \alpha=0 \text{ 时}.\end{cases} \tag{A.65}$$

证毕.

由此可得，对任意一个元素 $g\in SL(2,c)$，都可进行 (A.58)式形式的分解，而且，分解不是唯一的，因为 (A.62)—(A.65) 式还不能决定 λ 的相位. 事实上，若 γ 是下列形式的任意矩阵

$$\gamma=\begin{bmatrix}e^{-i\omega} & 0\\ 0 & e^{i\omega}\end{bmatrix}, \quad \omega \text{ 为实数}, \tag{A.66}$$

则 $\gamma\in SU_2$，且若 $k\in K$，则 $k\gamma\in K$. 故

$$g=ku=(k\gamma)(\gamma^{-1}u)=k'u', \tag{A.67}$$

其中 k，$k'\in K$ 和 u，$u'\in SU_2$，而 γ 则是 (A.66) 形式的任意元素.

从 (A.52)，(A.58) 及 (A.67) 式可得到：群 $SL(2,c)$ 关于群K的每一个右陪集 $\tilde{z}$ 包含一个属于群 SU_2 的单参量的元素集合. 因为从 (A.57) 式可得：属于给定陪集 $\tilde{z}$ 的所有 SU_2 的矩阵满足下式，

$$-\bar{\beta}/\bar{\alpha}=u_{21}/u_{22}=z. \tag{A.68}$$

我们现在可以来建立旋量表示的第三种形式了[2].

令多项式 $q(u)$ 定义为

$$q(u)=\pi^{\frac{1}{2}}\alpha(u)p(z), \tag{A.69}$$

这里，按 (A.41) 式有：

$$\alpha(u)=u_{22}^{m}\bar{u}_{22}^{n}, \tag{A.70}$$

且矩阵 u 及矩阵

$$z=\begin{bmatrix}1 & 0\\ z & 1\end{bmatrix}$$

属于同一个右陪集 $\tilde{z}$. 因为 $z=u_{21}/u_{22}$ [(A.68) 式]，故得

$$q(u)=\pi^{\frac{1}{2}}\sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{n}p_{rs}u_{21}^{r}u_{22}^{m-r}\bar{u}_{21}^{s}\bar{u}_{22}^{n-s}. \tag{A.71}$$

多项式 $q(u)$ 适合下列条件

$$q(\gamma u)=e^{i(m-n)\psi/2}q(u),$$

因为，从 (A.49a) 式得 $(\gamma u)_{21}=e^{i\psi/2}u_{21}$，$(\gamma u)_{22}=e^{i\psi/2}u_{22}$；故多项式 $q(u)$ 属于空间 $\tilde{P}_{mn}$。从而得，(A.69) 式定义了多项式 $p(z)$ 的空间 P_{mn} 与多项式 $q(u)$ 的空间 $\tilde{P}_{mn}$ 之间的一个映射.

从 (A.43) 及 (A.69) 二式得，在空间 $\tilde{P}_{mn}$ 内旋量表示的算子由下式给出:

$$D_g q(u)=\frac{\alpha(ug)}{\alpha(u(g))}q(u(g)), \tag{A.72}$$

其中 $u(g)$ 是群 SU_2 右陪集 $zg=\tilde{z}'$ 中的一个矩阵，而

$$z'=\frac{g_{11}z+g_{21}}{g_{12}z+g_{22}}. \tag{A.73}$$

用矩阵 $u\in SU_2$ 及 $g\in SL(2,c)$ 表达矩阵 $u(g)$ 的显式可如下获得[3],[4]:

用 u' 来表 $u(g)$，则 u' 可写为

$$u'=\begin{bmatrix}u'_{11} & u'_{12}\\ u'_{21} & u'_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha' & \beta'\\ -\bar{\beta}' & \bar{\alpha}'\end{bmatrix}, \tag{A.74}$$

以及条件

$$|\alpha'|^2+|\beta'|^2=1. \tag{A.75}$$

按照 (A.58) 式，ug 可以写为形式 $ug=k u\tilde{g}=ku'$，其中 k 是 (A.50) 形式的矩阵. 若用 g' 表 ug，则得 $g'=ku'$，或展开得

$$\begin{bmatrix}g'_{11} & g'_{12}\\ g'_{21} & g'_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda^{-1} & \mu\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha' & \beta'\\ -\bar{\beta}' & \bar{\alpha}'\end{bmatrix}. \tag{A.76}$$

从而得

$$g'_{21}=-\lambda\bar{\beta}',\quad g'_{22}=\lambda\bar{\alpha}', \tag{A.77}$$

故得

$$\alpha' = \bar{g}'_{22}/\bar{\lambda}, \ \beta' = -\bar{g}'_{21}/\bar{\lambda}. \tag{A.78}$$

进而，利用(A.75)式，得

$$|\lambda|^2 = |g'_{21}|^2 + |g'_{22}|^2. \tag{A.79}$$

但 $g' = ug$，我们将 u 表为

$$u = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix}, \tag{A.80}$$

将 g 表为

$$g = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}, \tag{A.81}$$

则得

$$\begin{bmatrix} g'_{11} & g'_{12} \\ g'_{21} & g'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha g_{11} + \beta g_{21} & \alpha g_{12} + \beta g_{22} \\ -\bar{\beta} g_{11} + \bar{\alpha} g_{21} & -\bar{\beta} g_{12} + \bar{\alpha} g_{22} \end{bmatrix}. \tag{A.82}$$

若将 λ 写为 $\lambda = |\lambda|\exp(i\Lambda)$，其中 Λ 是某一实数(相位)，则得(A.78)及(A.79)式的最后形式：

$$\begin{aligned} \alpha' &= (-\beta\bar{g}_{12} + \alpha\bar{g}_{22})|\lambda|^{-1}e^{i\Lambda}, \\ \beta' &= (\beta\bar{g}_{11} - \alpha\bar{g}_{21})|\lambda|^{-1}e^{i\Lambda}, \end{aligned} \tag{A.83}$$

及

$$|\lambda|^2 = |\beta\bar{g}_{11} - \alpha\bar{g}_{21}|^2 + |-\beta\bar{g}_{12} + \alpha\bar{g}_{22}|^2. \tag{A.84}$$

故除一个任意的相位因子之外，$u(g)$ 由 u 和 g 决定。显见(A.72)式的右端与任意相位因子无关，因为在计算比值 $q(u(g))/\alpha(u(g))$ 时，相位因子消去了。因此，在 $\tilde{P}_{mn}$ 空间，(A.72)式很好地定义了这一旋量表示。

例：

(1) 设 g 为一酉矩阵 u_0，其行列式之值为 1：

$$u_0 = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ -\bar{\beta}_0 & \bar{\alpha}_0 \end{bmatrix}; \ |\alpha_0|^2 + |\beta_0|^2 = 1. \tag{A.85}$$

则从(A.83)，(A.84)得

$$\alpha' = (-\beta\bar{\beta}_0 + \alpha\alpha_0)e^{i\Lambda},$$

$$\beta' = (\beta\bar{\alpha}_0 + \alpha\beta_0)e^{i\Lambda}, \tag{A.86}$$
$$|\lambda| = 1,$$

从而得

$$\frac{\alpha(uu_0)}{\alpha(u(u_0))} = e^{is\Lambda}, \tag{A.87}$$

其中 $s = \frac{1}{2}(m - n)$.

(2) 设 $g \in SL(2, c)$ 有下列形式

$$g = \begin{bmatrix} \varepsilon_{22}^{-1} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} \end{bmatrix}, \tag{A.88}$$

其中 ε_{22} 是不为 0 的实数,则得

$$\alpha' = \alpha\varepsilon_{22}|\lambda|^{-1}e^{i\Lambda},$$
$$\beta' = \beta\varepsilon_{22}^{-1}|\lambda|^{-1}e^{i\Lambda}, \tag{A.89}$$
$$|\lambda|^2 = |\beta|^2\varepsilon_{22}^{-2} + |\alpha|^2\varepsilon_{22}^2, \tag{A.90}$$

及

$$\frac{\alpha(u\varepsilon)}{\alpha(u(\varepsilon))} = |\lambda|^{i\rho-2}e^{2is\Lambda}, \tag{A.91}$$

这里 $s = \frac{1}{2}(m - n)$, $i\rho - 2 = m + n$.

注释及参考文献

[1] E. Cartan, *Leçon sur la théorie des spineurs*, Herman, Paris, 1938; 英译本为 *The Theory of Spinors*, M. I. T. Press, Cambridge, Massachusetts, 1966.

[2] 本书序言中介绍的第(4)册书.

[3] M. Carmeli 及 S. Malin, Infinite-Dimensional Representations of the Lorentz Group: Complementary Series of Representations, *J. Math. Phys.* **12**, 225 (1971).

[4] M. Carmeli 及 S. Malin, Finite-and Infinite-Dimensional Representations of the Lorentz Group, *Fortschritte der Physik* **21**, 397 (1973).

A3. 旋量表示的无穷小算子

在这一节里，我们求旋量表示的无穷小算子 L_+, L_-, L_3 及 F_+, F_-, F_3。

在第一章中，我们引进了群 L 的单参量子群 $a_k(t)$ 及 $b_k(t)$。子群 $a_1(t)$, $a_2(t)$, $a_3(t)$ 是分别绕 x, y, z 轴的旋转群，参量 t 是转动角；子群 $b_1(t)$, $b_2(t)$, $b_3(t)$ 是分别沿 x, y, z 轴的洛伦兹变换群，参量 t 由下式定义：

$$t=\cosh^{-1}\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right],$$

这里 v 是相对速率。

群 SL(2, c) 相应的子群为 $\hat{a}_k(t)$ 及 $\hat{b}_k(t)$，分别由 (A.21) 式及 (A.23) 式给出。将 $\hat{a}_k(t)$ 及 $\hat{b}_k(t)$ 以 t 的一级数形式展开到 t 的一次项，则得

$$\hat{a}_1(t)\simeq\begin{bmatrix}1 & i\frac{t}{2}\\ i\frac{t}{2} & 1\end{bmatrix},$$

$$\hat{a}_2(t)\simeq\begin{bmatrix}1 & -\frac{t}{2}\\ \frac{t}{2} & 1\end{bmatrix},\tag{A.92a}$$

$$\hat{a}_3(t)\simeq\begin{bmatrix}1+i\frac{t}{2} & 0\\ 0 & 1-i\frac{t}{2}\end{bmatrix},$$

及

$$\hat{b}_1(t) \simeq \begin{bmatrix} 1 & \frac{t}{2} \\ \frac{t}{2} & 1 \end{bmatrix},$$

$$\hat{b}_2(t) \simeq \begin{bmatrix} 1 & i\frac{t}{2} \\ -i\frac{t}{2} & 1 \end{bmatrix}, \tag{A.92b}$$

$$\hat{b}_3(t) \simeq \begin{bmatrix} 1+\frac{t}{2} & 0 \\ 0 & 1-\frac{t}{2} \end{bmatrix}.$$

从 (A.33) 式得单参量子群 $\hat{a}_k(t)$ 及 $\hat{b}_k(t)$ 取到 t 的一次项的旋量表示为

$$\hat{A}_1(t)p(z,\bar{z}) \simeq \left(1+\frac{im}{2}tz\right)\left(1-\frac{int}{2}\bar{z}\right)$$

$$\times p\left[\frac{z+i\frac{t}{2}}{1+i\frac{t}{2}z}, \frac{\bar{z}-i\frac{t}{2}}{1-i\frac{t}{2}\bar{z}}\right],$$

$$\hat{A}_2(t)p(z,\bar{z}) \simeq \left(1-\frac{m}{2}tz\right)\left(1-\frac{n}{2}t\bar{z}\right)$$

$$\times p\left[\frac{z+\frac{t}{2}}{1-\frac{t}{2}z}, \frac{\bar{z}+\frac{t}{2}}{1-\frac{t}{2}\bar{z}}\right], \tag{A.93a}$$

$$\hat{A}_3(t)p(z,\bar{z}) \simeq \left(1-\frac{im}{2}t\right)\left(1+\frac{int}{2}\right)$$

$$\times p(z+itz, \bar{z}-it\bar{z}),$$

及

$$\hat{B}_1(t)p(z,\bar{z}) \simeq \left(1+\frac{im}{2}tz\right)\left(1+\frac{in}{2}t\bar{z}\right)$$

$$\times p\left[\frac{z+\frac{t}{2}}{1+\frac{t}{2}z}, \frac{\bar{z}+\frac{t}{2}}{1+\frac{t}{2}\bar{z}}\right],$$

$$\hat{B}_2(t)p(z,\bar{z}) \simeq \left(1+\frac{im}{2}tz\right)\left(1-\frac{in}{2}t\bar{z}\right)$$

$$\times p\left[\frac{z-i\frac{t}{2}}{1+i\frac{t}{2}z}, \frac{\bar{z}+i\frac{t}{2}}{1-i\frac{t}{2}\bar{z}}\right], \quad \text{(A.93b)}$$

$$\hat{B}_3(t)p(z,\bar{z}) \simeq \left(1-\frac{mt}{2}\right)\left(1-\frac{nt}{2}\right)p(z+tz, \bar{z}+t\bar{z}).$$

将 (A.93) 式对 t 微分，并取 $t\to 0$ 时的极限，则可得无穷小算子 $\hat{A}_1$，$\hat{A}_2$，$\hat{A}_3$ 及 $\hat{B}_1$，$\hat{B}_2$，$\hat{B}_3$。然后取适当的线性组合，则得到算子 $L_\pm$，L_3 及 $F_\pm$，F_3：

$$L_+p(z,\bar{z}) = (i\hat{A}_1-\hat{A}_2)p(z,\bar{z})$$

$$=\left(-\frac{\partial}{\partial z}-\bar{z}^2\frac{\partial}{\partial\bar{z}}+n\bar{z}\right)p(z,\bar{z}),$$

$$L_-p(z,\bar{z}) = (i\hat{A}_1+\hat{A}_2)p(z,\bar{z})$$

$$=\left(z^2\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial\bar{z}}-mz\right)p(z,\bar{z}), \quad \text{(A.94a)}$$

$$L_3p(z,\bar{z}) = i\hat{A}_3p(z,\bar{z})$$

$$=\left(-z\frac{\partial}{\partial z}+\bar{z}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}+\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}n\right)p(z,\bar{z}),$$

及

$$F_+p(z,\bar{z}) = (i\hat{B}_1 - \hat{B}_2)p(z,\bar{z})$$
$$= \left(i\frac{\partial}{\partial z} - i\bar{z}^2\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + in\bar{z}\right)p(z,\bar{z}),$$
$$F_-p(z,\bar{z}) = (i\hat{B}_1 + \hat{B}_2)p(z,\bar{z})$$
$$= \left(-iz^2\frac{\partial}{\partial z} + i\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + imz\right)p(z,\bar{z}), \quad \text{(A.94b)}$$
$$F_3p(z,\bar{z}) = i\hat{B}_3p(z,\bar{z})$$
$$= \left(iz\frac{\partial}{\partial z} + i\bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{i}{2}m + \frac{i}{2}n\right)p(z,\bar{z}).$$

现在，我们来叙述一些旋量表示的重要性质：

(1) 所有旋量表示都是不可约的。

设 $p(z,\bar{z})\in P_{mn}$ 是一单项式

$$p(z,\bar{z}) = z^r\bar{z}^s,\quad 0\leqslant r\leqslant m,\quad 0\leqslant s\leqslant n, \quad \text{(A.95)}$$

则从 (A.94) 式得

$$(-L_+ - iF_+)(z^r\bar{z}^s) = \frac{\partial}{\partial z}(z^r\bar{z}^s) = rz^{r-1}\bar{z}^s,$$
$$(L_- - iF_-)(z^r\bar{z}^s) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(z^r\bar{z}^s) = sz^r\bar{z}^{s-1},$$
$$(L_- + iF_-)(z^r\bar{z}^s) = \left(z^2\frac{\partial}{\partial z} - mz\right)(z^r\bar{z}^s)$$
$$= (r-m)z^{r+1}\bar{z}^s, \quad \text{(A.96)}$$
$$(-L_+ + iF_+)(z^r\bar{z}^s) = \left(\bar{z}^2\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - n\bar{z}\right)(z^r\bar{z}^s)$$
$$= (s-n)z^r\bar{z}^{s+1}.$$

反复应用算子 $\mp L_\pm - iF_\pm$ 及 $\pm L_\mp + iF_\mp$，从 (A.96) 式可以得到，和单项式 $z^r\bar{z}^s$ 一起，包含所有单项式 $z^a\bar{z}^b$，$0\leqslant a\leqslant m$，$0\leqslant b\leqslant n$。P_{mn} 不含有任意不变子空间，故旋量表示是不可约的。

(2) 群 SL(2, c) 的所有有限维的不可约表示都等价于旋量表示。

群 SL(2, c) 有两个卡塞米尔算子[1]:

$$C_1=F^2-L^2=\frac{1}{2}(F_+F_-+F_-F_++F_3^2-L_+L_--L_-L_+-L_3^2),$$

$$C_2=\vec{L}\cdot\vec{F}+\vec{F}\cdot\vec{L}=L_+F_-+L_-F_++F_+L_-+F_-L_++2L_3F_3. \tag{A.97}$$

将 (A.94) 代入 (A.97) 则得到旋量表示的卡塞米尔算子之值:

$$C_1p(z,\bar{z})=-\frac{1}{2}(m^2+n^2+2m+2n)p(z,\bar{z}),$$

$$C_2p(z,\bar{z})=-\frac{i}{2}(m+n+2)(m-n)p(z,\bar{z}). \tag{A.98}$$

另方面,将各无穷小算子的代数形式代入 (A.97) 式得

$$C_1f_m^j=(1-j_0^2-c^2)f_m^j,$$
$$C_2f_m^j=-2ij_0cf_m^j, \tag{A.99}$$

所有有限维表示用实数对 (j_0, c) 来表征,这里 j_0 为整数或半整数, $c^2=(j_0+n)^2$, n 为任意自然数.

比较 (A.98) 式及 (A.99) 式的右端,得

$$-\frac{1}{2}(m^2+n^2+2m+2n)=1-j_0^2-c^2,$$

$$-\frac{i}{2}(m+n+2)(m-n)=-2ij_0c. \tag{A.100}$$

对应于 $2j_0$ 为整数以及 $c^2=(j_0+n)^2$(n 为自然数) 的任意数对 (j_0, c), (A.100) 式有 m, n 为自然数的解. 故群 SL(2, c) 的所有有限维不可约表示在多项式的空间 P_{mn} 内能够实现,它们都等价于旋量表示.

(3) 所有旋量表示都是非酉的. 群 SL(2, c) 没有有限

维西表示。

这一陈述从第十章导得的西条件即可推得。

注释及参考文献

[1] 卡塞米尔算子是这样一种算子，它们与群的所有无穷小算子都是可交换的。对卡塞米尔算子的详细叙述可参见 M. Hamermesh, *Group Theory*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Massachusetts, 1962.

符　号　表

符号	涵义（中文）	涵义（英文）
$a_1(\phi), a_2(\phi), a_3(\phi)$	旋转	Rotations
a_1, a_2, a_3	旋转的无穷小矩阵	Infinitesimal matrices of rotations
a^+	厄密共轭	Hermitian conjugate
a	群 SL(2,c)的元素	Element of the group SL(2,c)
A_k, B_k	基本无穷小算子	Basic infinitesimal operators
$b_1(\phi), b_2(\phi), b_3(\phi)$	洛伦兹变换	Lorentz transformations
b_1, b_2, b_3	洛伦兹变换的无穷小矩阵	Infinitesimal matrices of Lorentz transformations
det	行列式	Determinant
D_g, D_u	表示算子	Representation operators
dg	关于群 O_3 的测度	Measure with respect to the group O_3
du	关于群 SU_2 的测度	Measure with respect to the group SU_2
$D^l_{mn}(u)$	群 SU_2 的不可约表示的矩阵元	Matrix elements of irreducible representations of the group SU_2
$D^{(m,n)}$	旋量表示的矩阵形式	Matrix form of spinor representation
$e_1,\cdots,e_n$	空间 R 的基	Basis in space R
e	群的单位元素	Unit element of group
ε_{rjl}	斜对称的勒维-契维塔张量	Skew-symmetric Levi-Civita tensor
$f_{-j},\cdots,f_j$	典范基	Canonical basis
$F_\pm, F_3$	洛伦兹(速度变换)算子	Lorentz (boost) operators
ϕ_1, θ, ϕ_2	欧拉角	Euler angles
$\Phi_{A_1\cdots A_m\dot{X}_1\cdots\dot{X}_n}$	二分量旋量	Two-component spinor
G	群	Group
G/N	商群	Factor group
g_k	无穷小矩阵	Infinitesimal matrices

g^t	g的转置	Transposed of g
γ	特殊酉矩阵	Special unitary matrix
H	子群	Subgroup
$L_{\mp}$, L_3	角动量算子	Angular momentum operators
A	相位	Phase
M'	子空间	Subspace
N	正规子群（不变子群）	Normal subgroup (Invariant subgroup)
$\vec{n}$	单位向量	Unit vector
O_3	三维纯旋转群	Three-dimensional pure rotation group
P, Q	厄密矩阵	Hermitian matrix
P_{mn}	多项式的空间	Space of polynomials
$p(z_1, z_2)$, $p(z)$	多项式	Polynomial
R	线性空间	Linear space
S_k	R_k 的子空间	Subspace of R_k
SU_2	行列式为 1 的2×2酉矩阵的群	Group of 2×2 unitary matrices with determinant unity
σ^1, σ^2, σ^3	泡利自旋矩阵	Pauli spin matrices
$T(x)$	算子函数	Operator function
Tr	迹	Trace of matrix
U_g	O_3 的表示	Representation of O_3
u	群 SU_2 的元素	Element of the group SU_2
v	O_3 的元素	Element of O_3
(x, y)	标积	Scalar product
x_1, x_2, x_3	空间坐标	Spatial coordinates
x_4	时间坐标	Time coordinate
$\vec{x}$	分量为 (x_1, x_2, x_3) 的向量径	Radius vector with components (x_1, x_2, x_3)
Z_k	旋量表示	Spinor representation
$\tilde{z}$	右陪集	Right coset
ψ, θ, ϕ	等价于欧拉角的三个角	Three angles equivalent to the Euler angles
ξ^h	复数	Complex numbers
η	闵可夫斯基度规	Minkowski metric
$\sim$	等价关系	Equivalence relationship
[ ]	换位子	Commutator