**正多面体的旋转群**

讨论这个话题之前，让我们先来看看有哪些正多面体。

**命题1：**正多面体只能有5种，即用正三角形做面的正四面体、正八面体，正二十面体，以及用正方形做面的正六面体，用正五边形做面的正十二面体。

**证明：**设顶点数为V，面数为F，棱数为E

　　设正多面体的每个面是正n边形，每个顶点有m条棱。棱数E应是面数F与n的积的一半（每两面共用一条棱），即

　　nF=2E -------------- ①

　　同时，E应是顶点数V与m的积的一半，即

　　mV=2E -------------- ②

　　由①、②，得

　　F=2E/n, V=2E/m,

　　代入欧拉公式V+F-E=2，有

　　2E/m+2E/n-E=2

　　整理后，得1/m+1/n=1/2+1/E.

　　由于E是正整数，所以1/E>0。因此

　　1/m+1/n>1/2 -------------- ③

　　说明m,n不能同时大于3，否则1/m+1/n<=1/2，即

　　③不成立。另一方面，由于m和n的意义（正多面体一个顶点处的棱数与多边形的边数）知，m≥3且n≥3。因此m和n至少有一个等于3

　 当m=3时，因为1/n>1/2-1/3=1/6,n又是正整数，所以n只能是3，4，5

　 同理n=3，m也只能是3，4，5

所以有以下几种情况：

n m 类型

　 3 3 正四面体

　 4 3 正六面体

　 3 4 正八面体

　 5 3 正十二面体

　 3 5 正二十面体

　 由于上述5种多面体确实可以用几何方法作出，而不可能有其他种类的正多面体

所以正多面体只有5种

**命题2：**正四面体群是四次交错群。

**证明：**正四面体ABCD如图1，原点O 是它的外接球的球心, 群的所有旋转变换可以分为两类：

(1)分别以向量**OA,**向量**OB**,向量**OC**,向量**OD**为旋转轴，旋转120度角的旋转变换sigmaA，sigmaB，sigmaC，sigmaD，于是可得如下9个旋转变换：

sigmaA = (B,C,D), sigmaB = (A,D,C), sigmaC = (A,B,D), sigmaD = (A,C,B)

(sigmaA)^2 = (B,D,C)，(sigmaB)^2 = (A,C,D)， (sigmaC)^2 = (A,D,B) (sigmaD)^2 = (A,B,C)

(sigmaA)^3=(sigmaB)^3=(sigmaC)^3=(sigmaD)^3=(1)

(2) 分别以棱的中点连线（有3对棱）向量**P撇OP**,向量**Q撇OQ**,向量**R撇OR**为旋转轴，旋转180度角的旋转变换sigmaP,sigmaQ,sigmaR:

sigmaP=(A,B)(C,D)，sigmaQ=(A,C)(B,D)，sigmaR=(A,D)(B,C)

故正四两体群 有12个旋转变换, 恰是A,B,C,D四元素构成的四次交错群。□

**命题3：**正八面体群（或正六面体群）同构于四次置换群。

**证明：**正八面体ABCDEF如图2，原点O是它外接球的秋心。群的所有旋转变换可分成三类：

（1）分别以顶点连线向量**AOF,**向量**BOD,**向量**COE**为旋转轴，旋转90度角的旋转变换sigmaA，sigmaB，sigmaC，于是得如下10个旋转变换：

sigmaA，sigmaB，sigmaC，

(sigmaA)^2,(sigmaB)^2,(sigmaC)^2,

(sigmaA)^3,(sigmaB)^3,(sigmaC)^3，

(sigmaA)^4=(sigmaB)^4=(sigmaC)^4=(1)

其中sigmaA= 等等。

（2）分别以面的中心连线（有4个对面）向量**P撇OP**,向量**Q撇OQ**,向量**R撇OR**,向量**S撇OS**为旋转轴，旋转120度角的旋转变换sigmaP,sigmaQ,sigmaR,sigmaS,于是得到如下8个旋转变换：

sigmaP,sigmaQ,sigmaR,sigmaS

(sigmaP)^2,(sigmaQ)^2,(sigmaR)^2, (sigmaS)^2,

其中，sigmaP= 等等。

（3）分别以棱的中点连线（有6对棱）向量**X撇OX**,向量**Y撇OY**,向量**Z撇OZ**, 向量**U撇OU**,向量**V撇OV**,向量**W撇OW**为旋转轴，旋转180度角的旋转变换sigmaX, sigmaY, sigmaZ, sigmaU, sigmaV, sigmaW:

其中，sigmaX= 等等。

故正八面体群由24个旋转变换构成，下面证明。

首先对于正八面体的八个面标号

1:ABC; 2:ACD; 3:ADE; 4:AEB;

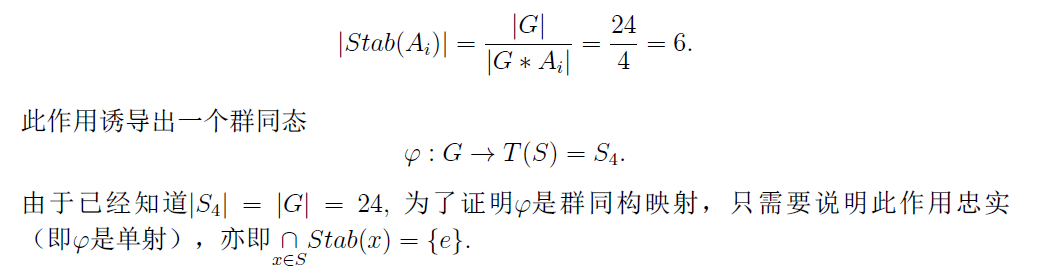
5:FBC, 6:FCD; 7:FDE; 8:FEB.

是的子群. 考虑正八面体的如下四个对面组成的集合S：

A1 = {1, 7},A2 = {2, 8},A3 = {3, 5},A4 = {4, 6}.

根据旋转群的几何意义，知道G在S上有一个自然的群作用∗：

σ ∗ A1 = {σ(1), σ(7)} ∈ S, ∀σ ∈ G.

显然此作用是可迁的,即轨道只有一个。由计数公式，对于每个1 ≤ i ≤ 4有

事实上，Stab(A1)由以下六个置换组成：

（1），

sigmaP = = (2,4,5) (3,8,6)

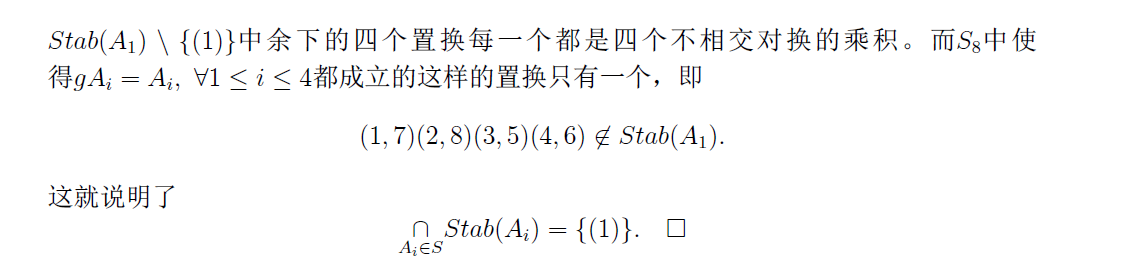
(sigmaP)^2= = (2,5,4) (3,6,8)

sigmaZ = = (1,7)(2,3)(4,6)(5,8)

sigmaU = = (1,7)(2,8)(3,4)(5,6)

sigmaW = = (1,7)(2,6)(3,5)(4,8)

容易验证sigmaP，(sigmaP)^2**不属于** Stab(A2).



从而**fai**是单射，从而其是双射。

**推论：**正八面体的每个面的中心恰好形成正六面体的顶点, 而正六面体的每个面的中心恰好形成正八面体的顶点, 故正六面体与正八面体是对偶图形。正八面体群也是使正六面体对称的变换之集, 使正六面体对称的也只有, 故也是正六面体群。