**正多面体的旋转群**

讨论这个话题之前，让我们先来看看有哪些正多面体。

**命题1：**正多面体只能有5种，即用正三角形做面的正四面体、正八面体，正二十面体，以及用正方形做面的正六面体，用正五边形做面的正十二面体。

**证明：**设顶点数为V，面数为F，棱数为E

　　设正多面体的每个面是正n边形，每个顶点有m条棱。棱数E应是面数F与n的积的一半（每两面共用一条棱），即

　　nF=2E -------------- ①

　　同时，E应是顶点数V与m的积的一半，即

　　mV=2E -------------- ②

　　由①、②，得

　　F=2E/n, V=2E/m,

　　代入欧拉公式V+F-E=2，有

　　2E/m+2E/n-E=2

　　整理后，得1/m+1/n=1/2+1/E.

　　由于E是正整数，所以1/E>0。因此

　　1/m+1/n>1/2 -------------- ③

　　说明m,n不能同时大于3，否则1/m+1/n<=1/2，即

　　③不成立。另一方面，由于m和n的意义（正多面体一个顶点处的棱数与多边形的边数）知，m≥3且n≥3。因此m和n至少有一个等于3

　 当m=3时，因为1/n>1/2-1/3=1/6,n又是正整数，所以n只能是3，4，5

　 同理n=3，m也只能是3，4，5

所以有以下几种情况：

n m 类型

　 3 3 正四面体

　 4 3 正六面体

　 3 4 正八面体

　 5 3 正十二面体

　 3 5 正二十面体

　 由于上述5种多面体确实可以用几何方法作出，而不可能有其他种类的正多面体

　　所以正多面体只有5种